Entropy-stable discontinuous Galerkin finite element methods with streamline diffusion and shock-capturing for hyperbolic systems of conservation laws

DISS. ETH NO. 22279

ENTROPY-STABLE DISCONTINUOUS GALERKIN FINITE ELEMENT METHODS WITH STREAMLINE DIFFUSION AND SHOCK-CAPTURING FOR HYPERBOLIC SYSTEMS OF CONSERVATION LAWS

A thesis submitted to attain the degree of

DOCTOR OF SCIENCES of ETH ZURICH

(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by

ANDREAS EDUARD HILTEBRAND

MSc ETH CSE, ETH Zurich

born on 17.03.1987

citizen of Bachenbülach ZH, Switzerland

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. Siddhartha Mishra, ETH Zurich, examiner
Prof. Dr. Rémi Abgrall, University of Zurich, co-examiner
Prof. Dr. Charalambos Makridakis, University of Sussex, co-examiner

2014

Abstract

We propose and analyse a space-time discontinuous Galerkin (DG) finite element method for hyperbolic conservation laws. Entropy stability is obtained by discretising the entropy variables and using entropy-stable numerical fluxes. As solutions of hyperbolic conservation laws can develop discontinuities (shocks) in finite time, we include a streamline diffusion and a shock-capturing term to suppress spurious oscillations in the vicinity of shocks. We show that the approximate solutions converge to an entropy measure-valued solution for systems of conservation laws.

Algorithmically, the discretisation leads to a big nonlinear system of algebraic equations in each time step. A Newton-Krylov method is applied to solve it. However, for efficiency reasons, a preconditioner must be used. We design and apply block Jacobi and block Gauss-Seidel type preconditioners and investigate their performance both analytically (in a simplified setting) and experimentally.

The space-time formulation allows an easy local adaptation of the mesh in space and time. We consider residual-based adaptivity as well as goal-oriented adaptivity using duality estimates.

Due to the implicitness of the scheme, there is no CFL condition that must be satisfied. Therefore, the scheme can also be used in problems with multiple time scales, such as flows near the incompressible limit.

The high resolution and robustness properties of the method are demonstrated in several experiments. We consider, among others, the linear advection equation, Burgers' equation, the wave equation, and the Euler equations in one or two spatial dimensions. These examples show that also problems with complicated boundaries can be solved, thanks to the finite element formulation.

Zusammenfassung

Wir entwickeln und analysieren eine unstetige Galerkin-Finite-Element-Methode in Raumzeit für hyperbolische Erhaltungsgleichungen. Entropie-Stabilität erlangen wir durch das Diskretisieren der Entropievariablen und das Verwenden Entropie-stabiler numerischer Flüsse. Da Lösungen hyperbolischer Differentialgleichungen in endlicher Zeit Unstetigkeiten (Stösse) entwickeln können, binden wir einen Stromliniendiffusions- und einen Stossauflösungsterm mit ein, um störende Oszillationen bei Stössen zu unterdrücken. Wir zeigen, dass die approximativen Lösungen für Systeme hyperbolischer Differentialgleichungen gegen eine masswertige Entropielösung konvergieren.

Aus algorithmischer Sicht führt die Diskretisierung in jedem Zeitschritt auf ein grosses nichtlineares System algebraischer Gleichungen. Um es zu lösen, benutzen wir eine Newton-Krylov-Methode. Aus Effizienzgründen muss jedoch ein Vorkonditionierer angewandt werden. Wir entwerfen und verwenden Vorkonditionierer vom Block-Jacobi- und Block-Gauss-Seidel-Typ und untersuchen ihre Effizienz sowohl analytisch (unter vereinfachten Bedingungen) als auch experimentell.

Die Raumzeit-Formulierung erlaubt eine einfache lokale Adaptition des Gitters in Raum und Zeit. Wir betrachten Adaptivität basierend auf dem Residuum sowie Ziel-orientierte Adaptivität unter Verwendung von Dualitätsabschätzungen.

Dank der Implizität des Verfahrens muss keine CFL-Bedingung erfüllt werden. Daher kann die Methode auch für Multi-Zeitskalen-Probleme gebraucht werden, wie z. B. für Strömungen nahe dem inkompressiblen Grenzfall.

Die hohe Auflösung und Robustheit des Verfahrens werden in diversen Experimenten demonstriert. Wir betrachten unter anderem die lineare Advektionsgleichung, die Burgersgleichung, die Wellengleichung und die Eulergleichung in einer oder zwei räumlichen Dimensionen. Zusätzlich zeigen diese Beispiele auch, dass Probleme mit komplizierten Rändern dank der Finite-Element-Formulierung gelöst werden können.