ETH zürich

ETH Library

# Ueber Biegeschwingungen stabförmiger Bauelemente mit Abstrahlungsdämpfung

**Doctoral Thesis**

**Author(s):**
Kellenberger, Walter

**Publication date:**
1953

**Permanent link:**
https://doi.org/https://doi.org/10.3929/ethz-a-000088988

**Rights / license:**
In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

This page was generated automatically upon download from the ETH Zurich Research Collection.
For more information, please consult the Terms of use.

Prom. Nr. 2232

# Über Biegeschwingungen stabförmiger Bauelemente mit Abstrahlungsdämpfung

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG

DER WÜRDE EINES DOKTORS DER
TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

**Walter Kellenberger**
von Walzenhausen (Appenzell A.-Rh.)

Referent: Herr Prof. Dr. F. Gassmann
Korreferent: Herr Prof. Dr. P. Lardy

Zürich 1953
L. Speich, Reproduktionsanstalt, Brandschenkestr. 47/49

Leer - Vide - Empty

**Meiner Frau gewidmet**

Leer - Vide - Empty

INHALT


| | Seite |
|---|---|
| ZUSAMMENFASSUNG | 7 |
| WICHTIGSTE BEZEICHNUNGEN | 9 |
| EINLEITUNG | 13 |
| A. ALLGEMEINE THEORIE GEDAEMPFTER BIEGESCHWINGUNGEN VON STAEBEN | 17 |
| a. Voraussetzungen | 17 |
| b. Der Halter | 18 |
| c. Die Bewegungsdifferentialgleichung des Schwingers | 23 |
| d. Lösung der Differentialgleichung für den stationären Fall | 27 |
| e. Randbedingungen | 28 |
| f. Spezielle Randbedingungen für dynamisch-symmetrische Halter-Praktische Beispiele von Einspannungen nach Tab. I | 29 |
| B. SPEZIELLE THEORIE SCHWACH GEDAEMPFTER BIEGESCHWINGUNGEN | 33 |
| a. Voraussetzungen | 33 |
| b. Bewegungsdifferentialgleichung | 34 |
| c. Die erzwungene, stationäre Schwingung | 34 |
| 1. Zusammenhang der Schnittkräfte mit der Ausbiegung | 34 |
| 2. Randbedingungen | 35 |
| 3. Frequenzgleichung-Spezialfälle | 36 |
| 4. Schwingungsform-Spezialfälle | 37 |
| 5. Schnittkräfte-Spezialfälle | 39 |
| 6. Numerisches Verhalten | 41 |
| C. DIE DAEMPFUNG | 43 |
| a. Allgemeines | 43 |
| b. Die innere Dämpfung | 44 |
| 1. Ursache und Wirkung | 44 |
| 2. Erläuterungen zu Tab. III | 47 |
| 3. Die Bedeutung der Koeffizienten $\Lambda$ und $\Lambda$ | 47 |
| 4. Die Grössenordnung der Relaxations- resp. Retardationszeit | 48 |
| 5. Die Bedeutung des VOIGT'schen Ansatzes für Bauwerk-Schwingungen | 49 |
| c. Die äussere Dämpfung, - Der Luftwiderstand | 51 |
| d. Die Abstrahlungsdämpfung | 54 |
| 1. Der Halter und seine dynamischen Einspanngrössen | 54 |
| 2. Beispiele von DEG aus Theorie und Praxis | 56 |
| 21. Einspannung am Schnittufer eines $\infty$ -langen Stabes | 56 |
| 22. Einspannung im homogenen, isotropen Raum | 56 |
| 23. Reine translatorische Einspannung | 58 |

24. Reine rotatorische Einspannung 60
25. Grenzwert der DEG 63
26. Zusammenstellung einiger DEG 64

3. Empirische Ermittlung der DEG (Messung) 65
4. Ermittlung der DEG aus Messungen am Modell 66
5. Der Halter als Kombination dreier mechanisch-dynamischer Elemente 69

D. TRANSVERSALE GRUNDSCHWINGUNG DES EINSEITIG ELASTISCH EINGESPANNTEN STABES 75

a. Beispiel, feste und variable Werte 75
b. Diagramme 78
c. Diskussion der Diagramme-Zusammenfassung 90
d. Nachweis schwacher Dämpfung 93

NACHWORT 93

LITERATURVERZEICHNIS 95

LEBENSLAUF 97

TABELLEN

| | | |
|---|---|---|
| Dynamisch-symmetrische Halter | I,II | 31 |
| Lineare, quasi-elastische Körper | III | 50 |
| Beispiele dynamischer Einspanngrössen | IV | 61,62 |
| Grenzwerte dynamischer Einspanngrössen für $\omega \to 0$ | V | 63 |
| Zusammenstellung dynamischer Einspanngrössen | VI | 64 |
| Modellmasstäbe | VII | 67 |
| Mechanisch-dynamische Elemente | VIII | 70 |
| Mechanisch-elektrische Analogie | IX | 72 |
| Parameter-Intervalle | X | 77 |

DIAGRAMME

No. 1 - 20 78 - 89

## ZUSAMMENFASSUNG

Der Schwingungszustand stabförmiger Bauwerke mit innerer-, äusserer- und Abstrahlungsdämpfung wird untersucht und an einem numerischen Beispiel die Auswirkungen der verschiedenen Dämpfungsarten im Resonanzfalle quantitativ aufgezeigt. Die charakteristischen Eigenschaften verschiedener Formen der innern Dämpfung werden an einem einfachen Spannungszustande erklärt. Zwei charakteristische Einspannungsarten der Literatur erweisen sich als Spezialfälle der vorausgesetzten allgemeinen elastischen Einspannung. Das rasche Absinken der Eigenfrequenz infolge elastischer Einspannung wird analytisch und graphisch dargestellt.
Es sind berechnete und gemessene dynamische Einspanngrössen, wie sie zur Erfassung der Abstrahlungsdämpfung verwendet werden, diskutiert und zusammengestellt. Sodann wird gezeigt, wie diese Grössen an Ort und Stelle, als auch an einem Modell, ermittelt werden können.

Leer - Vide - Empty

## WICHTIGSTE BEZEICHNUNGEN

| Bezeichnung | Dimension*) | Bedeutung | Art | Begriff |
|---|---|---|---|---|
| $l$ | $L$ | | Geometrische Grössen | Stablänge |
| $d$ | $L$ | | | Stabbreite |
| $r$ | $L$ | | | Halbe Fundationsbreite |
| $F, F_o$ | $L^2$ | | | Stab-, Einspannquerschnitt |
| $J$ | $L^4$ | | | Trägheitsmoment des Stabes bezüglich Axe senkrecht zur Belastungsebene |
| $x$ | $-L$ | | | Stabaxenrichtung und Abszisse |
| $y$ | - | | | Richtung senkrecht zur Stabaxe |
| $M, M_o$ | $KL^{-2}$ | $E(1-\nu)/(1+\nu)(1-2\nu)$ | Materialkonstanten | Raumdruckmodul, - des Halters |
| $E, E_o$ | $KL^{-2}$ | | | Elastizitätsmodul des Stabes, - des Halters |
| $G, G_o$ | $KL^{-2}$ | $E/2(1+\nu)$ | | Schubmodul des Stabes, - des Halters |
| $\nu, \nu_o$ | 1 | $0<\nu<1/2$ | | Poisson'sche Querdehnungszahl des Stabes, - des Halters |
| $B, B_o$ | $KL^2$ | $EJ$ | | Biegesteifigkeit des Stabes, - des Halters |
| $1/n$ | 1 | $E_o/E$ | | Einspannungsgrad |
| $k_{11}\ k_{12}$ / $k_{21}\ k_{22}$ | 1 | | | Einspannungskonstanten |
| $C$ | $KL^{-3}$ | | | Bettungsziffer |
| $a$ | $LT^{-1}$ | $\sqrt{M/\varrho}$ | | Geschwindigkeit der longitudinalen Wellen im unbegrenzten elast. Medium |
| $b$ | $LT^{-1}$ | $\sqrt{G/\varrho}$ | | Geschwindigkeit der transversalen Wellen im unbegrenzten elast. Medium |
| $\varrho$ | $KT^2L^{-4}$ | | | Dichte |
| $c$ | $KL^{-1}$ | | | Federkonstante |
| $e$ | $KL^{-1}T$ | $cc_o$ | | Dämpfungselement-Konstante |
| $m$ | $KL^{-1}T^2$ | | | Starre Masse |
| $\Theta$ | $T$ | | Dämpfungskonstanten | Relaxationszeit |
| $\Lambda$ | $T$ | | | Retardationszeit (Parameter der innern oder Werkstoff-Dämpfung) |
| $\eta$ | $KL^{-2}T$ | $\Lambda G$ | | VOIGT'scher Koeffizient |
| $\gamma$ | $T^{-1}$ | | | Koeffizient der äussern Dämpfung |
| $\delta$ | 1 | | | Koeffizient der Abstrahlungsdämpfung |
| $c_w$ | 1 | | | Koeffizient des stationären Luftwiderstandes |

*) $L$ : Länge  $K$ : Kraft  $T$ : Zeit  (Technisches Massystem)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\omega$ | $T^{-1}$ | | Schwingungsgrössen | Kreisfrequenz |
| $f$ | $1$ | $lk$ | | Frequenzparameter |
| $k$ | $L^{-1}$ | $\sqrt[4]{\varrho F \omega^2 / B}$ | | Abkürzung S. 33 |
| $\beta$ | $1$ | $xf/l$ | | Abkürzung S. 38 |
| $\delta_0$ | $1$ | $2\Lambda\omega(1+\nu)/3$ | | Retardationsparameter |
| $\delta_\gamma$ | $1$ | $2\gamma/\omega$ | | Parameter der äussern Dämpfung |
| $\delta_{11}\ \delta_{12}$ / $\delta_{21}\ \delta_{22}$ | $1$ | $\delta_{11} = \delta$ | | Abstrahlungsparameter |
| $\varphi$ | $1$ | | | Phasenwinkel zwischen Kraft und Verschiebung |
| $H$ | $KLT^{-1}$ | | | mittlere Abstrahlungsenergie |
| $\Gamma$ od. $L$ | $KL^{-1}$ / $K^{-1}L$ | $1/L$ / $1/\Gamma$ | Dynam. Einspanngrössen DEG | Dynamische Einspanngrösse für 1 Freiheitsgrad (Longitudinal-Schwingungen) |
| $\Gamma_{11}$, $\Gamma_{12}, \Gamma_{21}$, $\Gamma_{22}$ od. $L_{11}$, $L_{12}, L_{21}$, $L_{22}$ | $KL^{-1}$, $K$, $KL$, $K^{-1}L$, $K^{-1}$, $K^{-1}L^{-1}$ | Beziehung $\Gamma$-L siehe (3) | | Dynamische Einspanngrössen für 2 Freiheitsgrade (Biegeschwingungen) |
| $Q_0$ | $K$ | | Kräfte & Spannungen | Stör- oder Erregerkraft |
| $Q, \mathbf{Q}$ | $K$ | | | Querkraft, maximale Amplitude der Resonanzquerkraft |
| $M, \mathbf{M}$ | $KL$ | | | Biegemoment, maximale Amplitude des Resonanzbiegemomentes |
| $T$ | $K$ | | | "Enddruck" (Kraft in Richtung der Stabaxe) |
| $K, y$ | $K$ | | | Einzelkräfte |
| $\mathfrak{K}$ | $K$ | | | Kraftvektor |
| $\mathfrak{M}$ | $KL$ | | | Momentenvektor |
| $W$ | $K$ | | | Luftwiderstand |
| $\sigma$ | $KL^{-2}$ | | | Normalspannung |
| $\tau$ | $KL^{-2}$ | | | Schubspannung |
| $u, \mathbf{U}$ | $L$ | | Verformungen | Verschiebung senkrecht zur Stabaxe, Maximale Amplitude der Resonanz |
| $w, x$ | $L$ | | | vertikale, elastische Einsenkung |
| $\alpha, \vartheta$ | $1$ | | | Winkeldrehungen |
| $\Pi', \Pi$ | $KL^{-2}$ | symmetrisch | | Spannungstensor, -Deviator |
| $p$ | $KL^{-2}$ | | | Mittlere Normalspannung |
| $\Phi', \Phi$ | $1$ | symmetrisch | | Verzerrungstensor, -Deviator |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\theta$ | 1 | | | Mittlere lineare Dehnung |
| $\epsilon$ | 1 | | | Einheitstensor |
| $\varepsilon$ | 1 | $\frac{\Delta dx}{dx}$ | | Verzerrung |
| $A_{11}, A_{12}, A_{21}$ | 1 | | | Koeffizienten, S. 27 |
| $D$ | 1 | | | Determinante des Gleichungssystems S. 35 |
| $\mathcal{R}D_\delta$ | 1 | $\mathcal{R}D(\Lambda=0)$ | | Anteil der Abstrahlung an $\mathcal{R}D(\delta,\Lambda)$ |
| $\mathcal{R}D_\Lambda$ | 1 | $\mathcal{R}D(\delta=0)$ | | Anteil der innern Dämpfung an $\mathcal{R}D(\delta,\Lambda)$ |
| $V_D$ | 1 | $U/U_{stat}$ | | Vergrösserungsfaktoren für maximale Verschiebung, Biegemoment und Querkraft in der Grundresonanz |
| $V_M$ | 1 | $M/M_{stat}$ | | |
| $V_Q$ | 1 | $Q/Q_{stat}$ | | |
| $\mu$ | 1 | $3P_\phi/(1-2\nu)P_1$ | Abkürzungen | Abkürzung S. 33 |
| $\varkappa$ | $L^{-1}T^{-1/2}$ | $\sqrt[4]{F_0 \varrho_0 / B_0}$ | | " Tab. IV |
| $\vartheta$ | $L^{-1}$ | $\sqrt[4]{\frac{(1-2\nu)\varrho F P_1 P_2}{3B \quad P_\phi}}$ | | " S. 27 |
| $h$ | $L^{-1}$ | $\omega/a$ | | " S. 59 |
| $k$ | $L^{-1}$ | $\omega/b$ | | |
| $X$ | 1 | $r(i\omega)/a$ | | " Tab. IV |
| $Y$ | 1 | $r(i\omega)/b$ | | |
| $R_1 \ldots R_5$ | 1 | | | " S. 35 |
| $J_1 \ldots J_5$ | 1 | | | " S. 36 |
| $U_1 \ldots U_6$ | 1 | | | " S. 39 |
| $\Psi$ | 1 | | | " S. 38 |
| $\bar{z}$ | | | Mathematische Zeichen | Konjugiert komplexe Zahl zu $z$ |
| $\mathcal{R}z$ | | | | Realteil von $z$ |
| $\mathcal{J}z$ | | | | Imaginärteil von $z$ |
| $z$ | | $z(t)$ | | Beliebige Funktion der Zeit $t$ |
| $\tilde{z}$ | | $z e^{i\omega t}$ | | Harmonische Funktion der Zeit $t$ |
| $\dot{z}$ | | $dz/dt$ | | Ableitung von $z$ nach der Zeit $t$ |
| $e$ | | 2.718... | | Basis der natürlichen Logarithmen |
| $i$ | | $\sqrt{-1}$ | | Imaginäre Einheit |
| $\Phi_j(\bar{z})$ | | | | Linearer Operator |
| $P_j(\bar{z})$ | | | | Zum Operator $\Phi_j(\bar{z})$ gehörendes Polynom |

Leer - Vide - Empty

# EINLEITUNG

Im Hinblick darauf, dass Bauwerkschwingungen erstaunlich wenig gedämpft sind, kann für viele Betrachtungen die Dämpfung vernachlässigt werden. Im Falle erzwungener Schwingungen entstehen mit dieser Vernachlässigung theoretische Beanspruchungen in der Resonanz, die über alle Grenzen wachsen. Erst durch Berücksichtigung der Dämpfung sind endliche Grössen zu erwarten, wie sie in Wirklichkeit auftreten.
Da es sich in der Resonanz um maximale Beanspruchungen handelt, die für den Konstrukteur allein massgebend sind, wenn dieser kritische Zustand nicht durch anderweitige Massnahmen umgangen wird, ist es selbstverständlich, dass der Dämpfung schon früh volle Beachtung geschenkt wurde. Einen Beitrag zur Abklärung der immer noch offenen Fragen: „Welcher Art und Grösse sind die Dämpfungen, und wie lassen sie sich theoretisch erfassen?", soll die vorliegende Arbeit bilden.

Bei Schwingungen stabförmiger Bauwerke, wie schlanken Hochbauten, Glockentürmen, Hochkaminen, Masten, Säulen, Pylonen von Hängebrücken, eingespannten Balken und Rahmenstäben, handelt es sich um feste Körper, die irgendwo eingespannt, d.h. mit einem ebenfalls elastischen Körper in Verbindung stehen. Es sei im folgenden der schwingende, stabförmige Körper Schwinger, und der den Schwinger festhaltende Körper Halter genannt.
Die Ursache der Dämpfung kann damit schematisch in drei Arten eingeteilt werden: in die innere Dämpfung, verursacht durch die Verwandlung elastischer Energie in Wärme im Innern des Schwingers, in die äussere Dämpfung, welche durch Bewegungswiderstände, die an der freien Oberfläche des Schwingers auftreten, verursacht wird und endlich in die sog. Abstrahlungsdämpfung, die dadurch entsteht, dass der Schwinger den Halter deformiert und durch die so verursachte Abstrahlung elastischer Wellen in den Halter an Schwingungsenergie verliert.

Erstaunlicherweise findet man in der ganzen deutschsprachigen Literatur keine einzige Arbeit, die sich irgendwie mit dieser dritten Dämpfungsart befasst. Auch der neueste Bericht über den in den U.S.A. durchgeführten Forschungskongress der "International Union for Theoretical and Applied

Mechanics" (2), betreffend die Forschung im Gebiete der Schwingungsdämpfung vom 31. März 1950, erwähnt keine solchen in der angelsächsischen Literatur. Einzig die Vermutung, dass diese Art Dämpfung speziell für Bauwerke von nicht zu unterschätzender Bedeutung sein kann, wird von verschiedenen Autoren geteilt. So schreibt J.P.DEN HARTOG in (5).

"...however no reliable amplitude measurements could be made because of the uncertainty of the energy dissipation in the foundation."

Die japanische Arbeit von K.SEZAWA und K.KANAI (19) ist m.W. die einzige, in der versucht wurde, die Abstrahlungsdämpfung quantitativ zu erfassen. Sie kann wie auf S.58 gezeigt wird, als Spezialfall der hier behandelten betrachtet werden. Die bekannten japanischen Autoren schreiben über den Gegenstand der Abstrahlungsdämpfung in (19) wie folgt:

" The dissipation of energy of vibrations into the ground seems to play an important part of the prevention of vibrations of a building. "

Ob und in welchem Masse sich die Vermutung einer wesentlichen Wirkung der Abstrahlung auf die Beanspruchung bestätigt, war eigentlicher Anstoss zu dieser Arbeit.
Einen bedeutenden Beitrag zum Thema Abstrahlung liefert die Publikation von Prof. Dr. F.GASSMANN: "Ueber Dämpfung durch Abstrahlung elastischer Wellen und über gedämpfte Schwingungen von Stäben" (7), die während meiner Beschäftigung am Institut für Geophysik der ETH entstand und grundlegend wurde für die weitern Arbeiten an der Dissertation.

Für die theoretische Erfassung der Abstrahlung wird vorausgesetzt, dass sich die Trennfläche zwischen Schwinger und Halter (der sog. Einspannquerschnitt) wohl beweglich, jedoch undeformierbar verhält, eine Annahme, die als Hypothese von BERNOULLI (Ebenbleiben der Querschnitte) in der Statik und Dynamik für Querschnitte stabförmiger Körper allgemein getroffen wird.
Damit ist es nach (7) möglich, die Abstrahlungsdämpfung in zwei Stufen zu behandeln, wobei zuerst der Halter mit der Einspannfläche für sich und nachher die Bewegung des Schwingers betrachtet wird. Die Abstrahlungsdämpfung erscheint dann nur noch in den Randbedingungen.

Praktisch bedeutet dies, dass die Abstrahlungseigenschaften des Halters (Baugrund) bereits vor der Erstellung des Schwingers (Bauwerk) durch geeignete Messungen empirisch ermittelt werden können. Cd3,S.65.

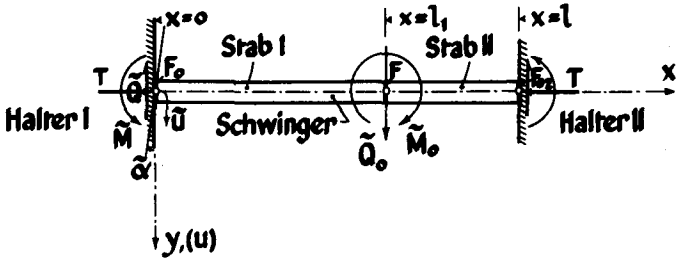
Im Abschnitt A wird zuerst eine allgemeine Theorie gedämpfter Biegeschwingungen von Stäben gegeben, die sich im wesentlichen auf (7) stützt. Im Abschnitt B wird spezialisiert auf schwache Dämpfung und im Abschnitt D werden die erzwungenen Biegeschwingungen des einseitig elastisch eingespannten Stabes, speziell in der Grundresonanz theoretisch und numerisch behandelt, wobei der Einspannungsgrad und die verschiedenen Dämpfungsarten durch Parameter erfasst und ihre Auswirkung auf die Beanspruchung in der Resonanz analytisch und graphisch dargestellt sind. Im Abschnitt C werden die Dämpfungsarten untereinander verglichen und speziell den sog. dynamischen Einspanngrössen, die zur Erfassung der Abstrahlung verwendet werden, ein grösserer Platz eingeräumt.

Leer - Vide - Empty

# A. Allgemeine Theorie gedämpfter Biegeschwingungen von Stäben

Es wird der Schwingungszustand eines elastischen Stabes (Schwinger), der in einem gleichfalls elastischen Körper (Halter) an beiden Enden eingespannt ist, untersucht. Die innere und äussere Dämpfung, sowie die Abstrahlungsdämpfung an den Einspannstellen wird berücksichtigt. Fig. 1.

Fig. 1




## a. VORAUSSETZUNGEN

1. Der Schwinger sei homogen und isotrop, symmetrisch zur Belastungsebene, zylinderförmig und habe konstantes Trägheitsmoment $J$ bezüglich der Schweraxe senkrecht zur Belastungsebene.
Das HOOKE'sche Gesetz wird nicht vorausgesetzt. An seine Stelle tritt die Voraussetzung 3, d.h. eine zeitabhängige Spannungs-Dehnungsfunktion. Es gilt jedoch die Hypothese für schlanke Stäbe von BERNOULLI-NAVIER, d.h. die Längsfasern des Stabes beeinflussen sich gegenseitig nicht, und die Querschnitte bleiben bei der Deformation eben. Letzteres gilt speziell auch für Einspannquerschnitte $F_0$ und $F_{0l}$.
2. Die Halter sind mit Rücksicht auf die numerische Behandlung des Problems mechanisch symmetrisch zur Belastungsebene vorausgesetzt, im übrigen brauchen sie weder homogen noch isotrop zu sein. Sie sollen lediglich durch harmonisch pulsierende Kräfte an den Einspannstellen in einen stationären Schwingungszustand mit gleicher Frequenz versetzt werden. Sie seien charakterisiert durch dynamische Einspanngrössen, welche zugleich die Erfassung der Abstrahlungsdämpfung ermöglichen. Spezielle

Einspannarten, wie starre, rotatorische und translatorische bewirken charakteristische Werte dieser Grössen.

3. Für die Erfassung der innern Dämpfung gilt einer der in (8) aufgeführten Ansätze quasi-elastischer Körper von JEFFREYS (12), MAXWELL (16) oder VOIGT (21).

4. Für die äussere Dämpfung wird ein der Geschwindigkeit proportionaler (linearer) Ansatz gewählt.

5. Für die erzwungenen Schwingungen sei ein stationärer Zustand vorausgesetzt. Die transversale Störkraft $\tilde{Q}_o$ *), sowie ein äusseres Biegemoment $\tilde{M}_o$ , beide mit der Frequenz $\frac{\omega}{2\pi}$ und in der gleichen Belastungsebene wirkend, greifen an der Stelle $x = l_1$ an. Zudem sei angenommen, dass ebenfalls in der Belastungsebene vom Halter her harmonische Verschiebungen $\tilde{u}_o$ und Winkeldrehungen $\tilde{\alpha}_o$ der gleichen Frequenz auf den Schwinger einwirken (Erschütterungen, Erdbebenwellen). Störungen mit allgemeinerem zeitlichen Verlauf können nach FOURIER zusammengesetzt werden, und die Berücksichtigung mehrer Störkräfte an verschiedenen Stellen kann durch Superposition geschehen. Der Schwinger steht unter der Wirkung eines zeitlich konstanten "Enddruckes" $T$ , dessen Wirkungslinie in die Axe des unverformten Stabes fällt.

## b. DER HALTER

Durch die vorausgesetzte Symmetrie von Schwinger, Halter und Belastung werden die 6 Freiheitsgrade der Bewegung der starren Einspannfläche $F_o$ auf die Hälfte reduziert. Sieht man von der, für Biegeschwingungen zu vernachlässigenden Verschiebung in Richtung der Balkenaxe ab, so verbleiben noch 2 Bewegungsmöglichkeiten für $F_o$ : eine Verschiebung quer zur Stabaxe und eine Drehung um eine Axe senkrecht zur Belastungsebene. Unter der Annahme eines linearen Zusammenhanges der Kräfte und Verformungen gelten mit Rücksicht auf die Voraussetzung 2 folgende Beziehungen zwischen der im Schwerpunkt $O$ von $F_o$ angreifenden Reaktionsdyname (Querkraft $\tilde{Q}$ und Biegemoment $\tilde{M}$ ) und den entsprechenden Verformungen (Translation $\tilde{u}$ in Richtung von $\tilde{Q}$ und Winkeldrehung $\tilde{\alpha}$ im Drehsinn von $\tilde{M}$ )

*) Das Zeichen $\sim$ über einer Grösse betont eine harmonische Zeitabhängigkeit, z.B. $\tilde{u} = u e^{i\omega t}$, $u$ unabhängig von $t$ .

(1) $$\tilde{Q} = \Gamma_{11}\,\tilde{u} + \Gamma_{12}\,\tilde{\alpha} \qquad \text{bezw.} \qquad \tilde{u} = L_{11}\,\tilde{Q} + L_{12}\,\tilde{M}$$
$$\tilde{M} = \Gamma_{21}\,\tilde{u} + \Gamma_{22}\,\tilde{\alpha} \qquad\qquad \tilde{\alpha} = L_{21}\,\tilde{Q} + L_{22}\,\tilde{M}$$

Die linearen Koeffizienten $\Gamma$ resp. $L$ sind i. allg. komplexe Konstante und seien im folgenden dynamische Einspanngrössen (kurz DEG) genannt. Die Gleichungen (1) stellen ihre Definitionen für die Einspannung eines transversal schwingenden Stabes dar. Die DEG hängen ausser von Form und Grösse des Einspannquerschnitts auch von den elastischen Eigenschaften des Halters, sowie von der Schwingungsfrequenz $\frac{\omega}{2\pi}$ ab.

Die den Gleichungen (1) entsprechenden Matrizen, die Kräfte- und Verformungsmatrix

(2) $$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{bezw.} \qquad \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

sind zueinander reziprok und der Zusammenhang der Koeffizienten durch folgende bekannten Gleichungen gegeben, wobei $\Gamma$ & $L$ in (3) vertauscht werden können

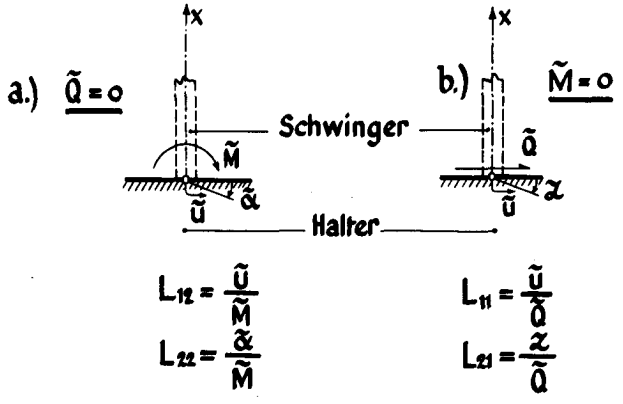
(3) $$L_{11} = \frac{\Gamma_{22}}{D_r} \qquad L_{12} = -\frac{\Gamma_{12}}{D_r} \qquad\qquad D_r = \Gamma_{11}\Gamma_{22} - \Gamma_{12}\Gamma_{21}$$
$$L_{21} = -\frac{\Gamma_{21}}{D_r} \qquad L_{22} = \frac{\Gamma_{11}}{D_r}$$

Es ist also möglich, die $L$ aus den $\Gamma$, und umgekehrt, zu berechnen. Die theoretische Behandlung von Schwingungen schlanker Stäbe kann sowohl über die $\Gamma$ als auch über die $L$ erfolgen. Welche dieser Grössen den Vorzug verdienen, ist eine Frage der Praxis; theoretisch sind sie gleichwertig.

Um sich von den DEG, z.B. den Grössen $L$ eine Vorstellung zu schaffen, denke man sich entsprechend der Definition (1) einzeln die Querkraft $\tilde{Q}(\tilde{M}=0)$,
(4) bezw. das Drehmoment $\tilde{M}(\tilde{Q}=0)$, auf den vom Schwinger gelösten Halter

im Schwerpunkt des Einspannquerschnittes wirkend und stelle sich die Quotienten dieser Kräfte mit den so erzwungenen Verschiebungen vor. Fig. 2

Fig. 2




(5) Für $\omega = 0$ werden die $L$ zu den in der Statik gebräuchlichen MAXWELL'-schen Einflusszahlen und die $\Gamma$ zu deren Dualen (3).

Ist der Halter ideal - elastisch, homogen und isotrop im Sinne der klassischen Elastizitätstheorie, so wird vermutlich $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$, bezw.
(6) $L_{12} = L_{21}$, d.h. es gilt aller Wahrscheinlichkeit nach ein zum MAXWELL'-schen Vertauschungssatz analoges Gesetz in der Dynamik. Die Vermutung wird gestützt durch das Bsp. 1b der Tab. IV.

Dynamisch - symmetrisch heisst der Halter, wenn zur Beschrei-
(7) bung der Einspannung (1) keine DEG mit gemischten Indizes erforderlich sind. Es wird dann aus (1)

(8)
$$\left.\begin{array}{ll} \Gamma_{11} = \frac{\tilde{Q}}{\tilde{u}} & L_{11} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{Q}} \\ \Gamma_{22} = \frac{\tilde{M}}{\tilde{\varkappa}} & L_{22} = \frac{\tilde{\varkappa}}{\tilde{M}} \end{array}\right\} \longrightarrow \quad \Gamma_{11} L_{11} = 1 \; ; \; \Gamma_{22} L_{22} = 1$$

Hier sei bemerkt, dass im Falle longitudinaler Stabschwingungen bei gleichen Voraussetzungen an Stelle der 4 DEG in (1) nur eine einzige DEG
(9) auftritt, die den Zusammenhang zwischen der am Einspannquerschnitt wirkenden Kraft $\tilde{K}$ in Richtung der Stabaxe und der gleich orientierten Verschiebung $\tilde{w}$ ausdrückt (7).

$$\Gamma = \frac{\tilde{K}}{\tilde{W}} \text{ bezw. } L = \frac{\tilde{W}}{\tilde{K}} \longrightarrow \Gamma L = 1$$

Die Form (1) kann als allgemeine Einspannung betrachtet werden, da sie drei wichtige Spezialfälle umfasst, die in der Literatur anzutreffen sind, nämlich

1. Rotatorische Einspannung. Die Translation an der Einspannstelle wird durch den Halter selbst oder irgend einen Mechanismus verhindert. Das Stabende verliert einen Freiheitsgrad. $\tilde{u} \to 0$ . Zur Charakterisierung genügt eine einzige DEG $\Gamma_{22}$ bezw. $L_{22}$ , die den Zusammenhang zwischen $\tilde{M}$ und $\tilde{\alpha}$ darstellt, da $\tilde{Q}$ keine Wirkung auf $\tilde{\alpha}$ haben soll. Die Matrizen (2) erhalten die Form

(10) $$\begin{pmatrix} \infty & \text{unbestimmt} \\ \text{unbestimmt} & \Gamma_{22} = \frac{1}{L_{22}} \end{pmatrix} \text{ bezw. } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_{22} = \frac{1}{\Gamma_{22}} \end{pmatrix}$$

2. Translatorische Einspannung. Die Rotation wird verhindert $\tilde{\alpha} \to 0$. $\Gamma_{11}$ bezw. $L_{11}$ genügt zur Darstellung des Zusammenhanges zwischen $\tilde{Q}$ und $\tilde{u}$ , da $\tilde{M}$ keine Wirkung auf $\tilde{u}$ haben soll.

Die speziellen Matrizen sind:

(11) $$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} = \frac{1}{L_{11}} & \text{unbestimmt} \\ \text{unbestimmt} & \infty \end{pmatrix} \text{ bezw. } \begin{pmatrix} L_{11} = \frac{1}{\Gamma_{11}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Starre Einspannung. Beide Freiheitsgrade verschwinden

$$\tilde{\alpha} \to 0 \,, \; \tilde{u} \to 0$$

Aus den Matrizen (2) werden die speziellen Formen:

(12) $$\begin{pmatrix} \infty & \text{unbestimmt} \\ \text{unbestimmt} & \infty \end{pmatrix} \text{ bezw. } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

In allen drei Fällen nehmen die Determinanten der Matrizen unbestimmte Formen oder den Wert Null an und der Zusammenhang (3) gilt nicht mehr a priori.

Bedeutet $\Re z$ den Realteil und $\Im z$ den Imaginärteil einer komplexen Grösse $z = \Re z + i \Im z$ und wird mit einem $c$ über einem Zeichen die konjugiert komplexe Zahl $\overset{c}{z} = \Re z - i \Im z$ bezeichnet, so wird die totale Energie

$$H = \frac{\omega}{2\pi}\left[\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Re \tilde{Q} \Re \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\, dt + \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Re \tilde{M} \Re \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial t}\, dt\right]$$

die im Mittel in der Zeiteinheit durch die Dyname $(\tilde{Q}, \tilde{M})$ in den Halter abgestrahlt wird, mit $L_{jk}$ und den Kräften ausgedrückt

(13¹) $$H = \frac{\omega}{2}\left[\Im L_{11} \overset{c}{Q} Q + \Im L_{12} \overset{c}{Q} M + \Im L_{21} \overset{c}{M} Q + \Im L_{22} \overset{c}{M} M\right]$$

oder nach (7) durch $\Gamma_{jk}$ und die Verschiebungen dargestellt

(13²) $$H = \frac{\omega}{2}\left[\Im \Gamma_{11} \overset{c}{u} u + \Im \Gamma_{12} \overset{c}{u} \alpha + \Im \Gamma_{21} \overset{c}{\alpha} u + \Im \Gamma_{22} \overset{c}{\alpha} \alpha\right]$$

Mit $L_{12} = L_{21}$, bezw. $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ wird, da $\overset{c}{Q} M$ und $\overset{c}{M} Q$, bezw. $\overset{c}{u} \alpha$ und $\overset{c}{\alpha} u$, konjugiert komplex sind

(14¹) $$H = \frac{\omega}{2}\left[|Q|^2 \Im L_{11} + \Re \overset{c}{Q} M \Im L_{12} + \Re \overset{c}{M} Q \Im L_{21} + |M|^2 \Im L_{22}\right]$$

(14²) $$H = \frac{\omega}{2}\left[|u|^2 \Im \Gamma_{11} + \Re \overset{c}{u} \alpha \Im \Gamma_{12} + \Re \overset{c}{\alpha} u \Im \Gamma_{21} + |\alpha|^2 \Im \Gamma_{22}\right]$$

(15) Man erkennt, dass von den DEG nur die Imaginärteile für die abgestrahlte Energie massgebend sind.

Für den dynamisch-symmetrischen Halter wird noch einfacher

(16¹) $$H = \frac{\omega}{2}\left[|Q|^2 \Im L_{11} + |M|^2 \Im L_{22}\right].$$

(16²) $$H = \frac{\omega}{2}\left[|u|^2 \Im \Gamma_{11} + |\alpha|^2 \Im \Gamma_{22}\right]$$

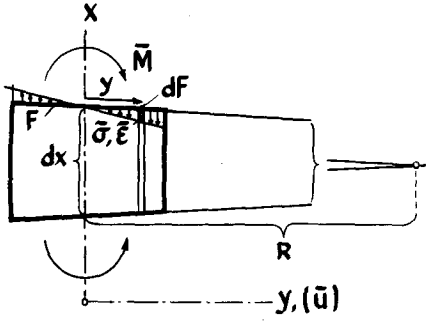
Die mittlere Leistung setzt sich im Falle dynamischer Symmetrie additiv zusammen aus den Einzelleistungen der translatorischen und rotatorischen Bewegung.

## c. DIE BEWEGUNGSDIFFERENTIALGLEICHUNG DES SCHWINGERS

Ein erster Schritt zur Herleitung der Differentialgleichung besteht in der Ermittlung der Beziehung zwischen Biegemoment $\bar{M}$ *) und Auslenkung $\bar{u}$ eines Stabquerschnittes.

Man betrachte ein Stabelement von der Länge $dx$ . Fig. 3.

Fig. 3




Die Verzerrung einer Faser im Abstande $y$ von der Stabaxe beträgt, da die Fasern sich gegenseitig nicht beeinflussen sollen

(17) $$\varepsilon = -\frac{\Delta dx}{dx}$$

Unter Annahme ebenbleibender Querschnitte folgt aus Fig. 3

(18) $$\frac{\Delta dx}{y} = \frac{dx}{R}$$

Wird für die Krümmung der elastischen Linie wie üblich $\frac{1}{R} \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ gesetzt, so ergeben (17) und (18) sofort

(19) $$\varepsilon = -\frac{\Delta dx}{dx} = -y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Die Beziehung zwischen der Verzerrung $\varepsilon$ und der Normalspannung $\sigma$ der Faser liefert die im Abschnitt Cb für den eindimensionalen Normalspannungszustand abgeleitete Gleichung (70)

(20) $$\Phi_1(\sigma) = \frac{3E}{1-2\nu}\Phi_\phi(\varepsilon)$$

*) Ein Querstrich – über einer Grösse betont eine beliebige Zeitabhängigkeit.

Die linearen Operatoren $\Phi_j$ haben folgende Bedeutung

$$\Phi_1 = \Phi_\phi + \frac{2E}{1-2\nu}\,\Phi_\pi$$

| Körper mit (ohne) inn. Dämpfung nach | $\Phi_\pi$ | $\Phi_\phi$ |
|---|---|---|
| JEFFREYS | $\frac{1}{\Lambda} + \frac{\partial}{\partial t}$ | $2G\frac{\partial}{\partial t} + 2\Lambda G\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ |
| (21) MAXWELL | $\frac{1}{\Lambda} + \frac{\partial}{\partial t}$ | $2G\frac{\partial}{\partial t}$ |
| VOIGT | $1$ | $2G + 2\Lambda G\frac{\partial}{\partial t}$ |
| (HOOKE) | $1$ | $2G$ |

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ = Schubmodul $\Lambda$ = Relaxationszeit

$\nu$ = Querdehnungszahl $\Lambda$ = Retardationszeit

} siehe Cb3

(19) in (20) eingesetzt, ergibt

$$\Phi_1(\sigma) = -\frac{3E}{1-2\nu}\, y\, \Phi_\phi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $y$ und integriert über die Querschnittsfläche $F$, so entsteht mit den Definitionen für Biegemoment und Trägheitsmoment

$$M = -\iint_F \sigma y\, dF \quad ; \quad J = \iint_F y^2 dF$$

die gesuchte Beziehung zwischen Biegemoment und Auslenkung eines Querschnittes senkrecht zur Stabaxe für innerlich gedämpfte Schwinger

(22) $$\underline{\Phi_1(\bar{M}) = \frac{3B}{1-2\nu}\,\Phi_\phi\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right)}$$

Sie ersetzt die bekannte Beziehung $\bar{M} = B \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$ , $B = EJ$ (Biegesteifigkeit), die nur für ideal-elastische, sog. HOOKE'sche Körper gilt.

Die d'Alembert'schen-Gleichgewichtsbedingungen am Stabelement der Länge $dx$ liefern 2 weitere Gleichungen:

1.) Komponentenbedingung quer zur Stabaxe.

(23) $$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} dx - 2\gamma \varrho F dx \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \varrho F dx \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 0$$

Die einzelnen Ausdrücke stellen den Zuwachs der Querkraft $\bar{Q}$ , die äussere Dämpfungskraft ( $\gamma$ = Koeffizient der äusseren Dämpfung) und die Trägheitskraft dar. $\varrho$ ist die Dichte und $F$ der Querschnitt des Stabes.

Wird mit

(24) $$\Phi_\gamma = 2\gamma \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

ein weiterer Operator bezeichnet, so schreibt sich obige Gleichung

(25) $$\underline{\Phi_\gamma (\bar{u}) = \frac{1}{\varrho F} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x}}$$

2.) Biegemomentenbedingung am Element.

(26) $$\frac{\partial \bar{M}}{\partial x} dx + \bar{Q} dx - \varrho J dx \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t^2 \partial x} + T dx \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$$

Die einzelnen Ausdrücke stellen den Zuwachs des Biegemomentes $\bar{M}$ , den Anteil der Querkraft am Moment, das Moment infolge rotatorischer Trägheit und das Moment infolge des "Enddruckes" $T$ dar.

Das Momentengleichgewicht liefert somit

(27) $$\underline{\frac{\partial \bar{M}}{\partial x} + \bar{Q} - \varrho J \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t^2 \partial x} + T \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0}$$

Aus den Gleichungen (25) und (27) lässt sich durch Ableiten der Gleichung (27) nach $x$ und einsetzen in (25) vorerst die Querkraft $\bar{Q}$ eliminieren. Es entsteht

$$\Phi_\gamma (\bar{u}) = \frac{J}{F} \frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{1}{\varrho F} \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial x^2} - \frac{T}{\varrho F} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$$

Durch Anwendung des Operators $\Phi_1$ auf diese Gleichung und zweimaliges Ableiten der Gleichung (22) nach $x$, kann aus diesen 2 verbliebenen Gleichungen das Biegemoment $\bar{M}$ eliminiert werden. Das Resultat ist die gesuchte Bewegungs-Differentialgleichung

$$\boxed{\Phi_1\Phi_\gamma(\bar{u}) + \frac{3B}{(1-2\nu)qF}\Phi_\phi\left(\frac{\partial^4\bar{u}}{\partial x^4}\right) - \frac{J}{F}\Phi_1\left(\frac{\partial^4\bar{u}}{\partial t^2\partial x^2}\right) + \frac{T}{qF}\Phi_1\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}\right) = 0} \tag{28}$$

Im Falle des JEFFREYS'schen Körpers ergibt (28) eine homogene, lineare, partielle Differentialgleichung 6. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

$$\begin{cases} \frac{4}{3}(1+\nu)\frac{\gamma}{\Lambda}\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \left[2\gamma + \frac{2}{3}(1+\nu)\frac{1}{\Lambda}\right]\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2} + \left[1 + \frac{2}{3}(1-2\nu)\gamma\Lambda\right]\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial t^3} + \frac{1}{3}(1-2\nu)\Lambda\frac{\partial^4\bar{u}}{\partial t^4} + \\ + \frac{B}{qF}\frac{\partial^5\bar{u}}{\partial t\partial x^4} + \Lambda\frac{B}{qF}\frac{\partial^6\bar{u}}{\partial t^2\partial x^4} - \frac{2}{3}(1+\nu)\frac{J}{F}\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial^4\bar{u}}{\partial t^2\partial x^2} - \frac{J}{F}\frac{\partial^5\bar{u}}{\partial t^3\partial x^2} - \frac{1}{3}(1-2\nu)\frac{J}{F}\Lambda\frac{\partial^6\bar{u}}{\partial t^4\partial x^2} + \\ + \frac{2}{3}(1-\nu)\frac{T}{qF}\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2} + \frac{T}{qF}\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial t\partial x^2} + \frac{1}{3}(1-2\nu)\frac{T}{qF}\Lambda\frac{\partial^4\bar{u}}{\partial t^2\partial x^2} = 0 \end{cases} \tag{29}$$

Im Spezialfalle des ideal-elastischen Körpers von HOOKE ($\frac{1}{\Lambda} = \Lambda = 0$), ohne äussere Dämpfung ( $\gamma = 0$ ), mit vernachlässigter rotatorischer Trägheit (7.8. und 9. Glied streichen) und verschwindendem "Enddruck" ( $T = 0$ ), reduziert sich diese Gleichung erwartungsgemäss auf die bekannte Differentialgleichung für Biegeschwingungen von Stäben. (20,S.332).

$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2} + \frac{B}{qF}\frac{\partial^4\bar{u}}{\partial x^4} = 0 \tag{30}$$

Der Zusammenhang der Schnittkräfte (Querkraft $\bar{Q}$ und Biegemoment $\bar{M}$ ) mit der Auslenkung $\bar{u}$ ist durch folgende Operatorengleichungen gegeben

$$\begin{aligned} \Phi_1(\bar{Q}) &= -\frac{3B}{1-2\nu}\Phi_\phi\left(\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial x^3}\right) + qJ\Phi_1\left(\frac{\partial^3\bar{u}}{\partial t^2\partial x}\right) - T\Phi_1\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right) \\ \Phi_1(\bar{M}) &= +\frac{3B}{1-2\nu}\Phi_\phi\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}\right) \end{aligned} \tag{31}$$

Die erste Gleichung wird erhalten durch Anwendung des Operators $\Phi_1$ auf (27), einmalige Ableitung der Gleichung (22) nach $x$ und Elimination des Biegemomentes $\bar{M}$ aus beiden Gleichungen. Die zweite Gleichung wurde in (22) vorausgesetzt.

d. LOESUNG DER DIFFERENTIALGLEICHUNG FUER DEN STATIONAEREN FALL.

Wird vom Enddruck, dessen Auswirkung einer späteren Untersuchung vorbehalten sein soll, abgesehen, und bleibt die rotatorische Trägheit infolge ihrer vernachlässigbaren Wirkung auf schlanke Stäbe unberücksichtigt*),
(32) so ergibt der Produktansatz $\bar{u} = \tilde{u} = u(x)e^{i\omega t}$ welcher bereits der zeitlich periodischen Veränderlichkeit der Randbedingungen Rechnung trägt, in (28) eingesetzt, für die komplexe Normalfunktion $u(x)$ die homogene, totale Differentialgleichung 4. Ordnung.

(33) $$\frac{d^4u}{dx^4} - s^4 u = 0$$

mit

(34) $$s^4 = -\frac{(1-2\nu)\,\varrho F}{3B}\frac{P_1 P_\gamma}{P_\phi}$$

$P_1, P_\gamma$ u. $P_\phi$ sind die zu $\Phi_1, \Phi_\gamma$ und $\Phi_\phi$ gehörigen Polynome nach folgender Definition:

Aus $\Phi_j(\bar{z}) = a_{j0}\bar{z} + a_{j1}\frac{\partial \bar{z}}{\partial t} + a_{j2}\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial t^2} + \ldots$ wird mit $\bar{z} = \tilde{z} = z e^{i\omega t}$

(35) $$\Phi_j(\tilde{z}) = \tilde{z}\, P_j \qquad \text{wobei}$$

$$P_j = a_{j0} + a_{j1}(i\omega) + a_{j2}(i\omega)^2 + \ldots \quad \text{zu setzen ist.}$$

Es sind nun, je nachdem $x < l_1$ oder $x > l_1$ ist, 2 Lösungszweige für $u(x)$ einzuführen, die der Gleichung (33) genügen. Die allgemeinen Lösungen heissen

(36¹) $$u_1(x) = A_{11}e^{sx} + A_{12}e^{-sx} + A_{13}e^{isx} + A_{14}e^{-isx}$$

(36²) $$u_2(x) = A_{21}e^{sx} + A_{22}e^{-sx} + A_{23}e^{isx} + A_{24}e^{-isx}$$

Die Koeffizienten $A_{jk}$ werden durch die Randbedingungen bestimmt. Die Lösung (32), (36¹), (36²) stellt somit das allgemeine Integral der Gleichung (28) für stationäre, erzwungene Schwingungen dar.

Für die Behandlung freier Schwingungen, die jedoch nicht weiter Gegen-

*) Vergl. diesbezüglich (20,S.337 & 341)

stand dieser Arbeit bilden, kann der Ansatz (32) ebenfalls verwendet werden. Es ist dann allerdings $\omega$ als anfänglich unbekannte komplexe (von $x$ und $t$ unabhängige) Konstante aufzufassen, und die DEG in den Randbedingungen müssen als explizite Funktionen von $\omega$ angeschrieben werden. *)

## e. RANDBEDINGUNGEN

Es stehen je 2 Randbedingungen an den Einspannstellen, sowie 4 Uebergangsbedingungen im Schnitte $x = l_1$ zur Verfügung, sodass die 8 Koeffizienten $A_{11} \ldots A_{24}$ durch 8 lineare Gleichungen bestimmt sind.

Für $\underline{x=0}$ und $\underline{x=l}$ gelten grundsätzlich die gleichen Randbedingungen. Es sind lediglich die zu den Schnitten $x=0$ resp. $x=l$ gehörigen DEG, sowie für $u$ das entsprechende $u_1$ resp. $u_2$ einzusetzen. Je nachdem, ob $\Gamma$ - oder $L$ -Werte vorliegen, gilt ($37^1$) oder ($37^2$).

$$(37^1)\quad \begin{cases} \Gamma_{11} u + \Gamma_{12} \dfrac{du}{dx} + \dfrac{3BP_\phi}{(1-2\nu)P_1} \dfrac{d^3u}{dx^3} = \Gamma_{11} u_0 + \Gamma_{12} \alpha_0 \\ \Gamma_{21} u + \Gamma_{22} \dfrac{du}{dx} - \dfrac{3BP_\phi}{(1-2\nu)P_1} \dfrac{d^2u}{dx^2} = \Gamma_{21} u_0 + \Gamma_{22} \alpha_0 \end{cases}$$

$$(37^2)\quad \begin{cases} u + \dfrac{3BP_\phi}{(1-2\nu)P_1} \dfrac{d^3u}{dx^3} L_{11} - \dfrac{3BP_\phi}{(1-2\nu)P_1} \dfrac{d^2u}{dx^2} L_{12} = u_0 \\ \dfrac{du}{dx} + \dfrac{3BP_\phi}{(1-2\nu)P_1} \dfrac{d^3u}{dx^3} L_{21} - \dfrac{3BP_\phi}{(1-2\nu)P_1} \dfrac{d^2u}{dx^2} L_{22} = \alpha_0 \end{cases}$$

Für $\underline{x=l_1}$ gilt

(38)

1. $u_1 = u_2$ — gleiche Ausbiegung
2. $\dfrac{du_1}{dx} = \dfrac{du_2}{dx}$ — Stetigkeit der Tangenten
3. $\dfrac{d^2u_1}{dx^2} - \dfrac{d^2u_2}{dx^2} = +M_0 \dfrac{(1-2\nu)P_1}{3B\ P_\phi}$ — Unterschied des Biegemomentes zu beiden Seiten des Schnittes
4. $\dfrac{d^3u_1}{dx^3} - \dfrac{d^3u_2}{dx^3} = -Q_0 \dfrac{(1-2\nu)P_1}{3B\ P_\phi}$ — Unterschied der Querkraft zu beiden Seiten des Schnittes

*) Der Ansatz (32) ist im Falle freier Schwingungen als partikuläres Integral aufzufassen. Die zugehörigen Kreisfrequenzen der Gesamtheit aller partikulären Integrale bestimmen sich als Eigenwerte des homogenen Gleichungssystems, das durch die Randbedingungen bestimmt wird. Die allgemeine Lösung setzt sich aus der Linearkombination all dieser speziellen Lösungen zusammen, wobei die neu verfügbar werdenden Konstanten den gegebenen Anfangsbedingungen anzupassen sind.

## f. SPEZIELLE RANDBEDINGUNGEN FUER DYNAMISCH-SYMMETRISCHE HALTER

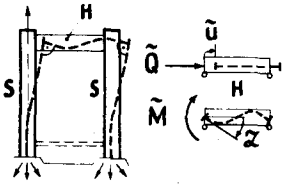
Die einzige Bedingung für dynamische Symmetrie ist nach (7), dass alle DEG mit ungleichen Indizes in (1) wegfallen. Dies trifft zu, wenn die Querkraft keine Rotation und das Drehmoment keine Translation des Einspannungsquerschnittes bewirken. Die zur Beschreibung der Einspannung im Halter erforderlichen DEG reduzieren sich dann im allgemeinen Falle 1 (Tab.I) auf zwei, in den Spezialfällen 2-5 auf nur eine einzige. Die Randbedingungen ($37^1$) resp. ($37^2$) vereinfachen sich wesentlich, da nur noch maximal zwei DEG statt deren vier auftreten. Diese dynamisch-symmetrische Einspannung kann u.U. als brauchbarer Ersatz für die theoretische Behandlung komplizierterer Einspannungen dienen. Vergl. die Bsp. 3,4 & 5 S. 30. Die noch stärker spezialisierten Fälle der Tab. II stellen keine elastische Einspannung im Sinne (1) mehr dar, da zu ihrer Beschreibung keine DEG erforderlich sind. Die hiefür geltenden Randbedingungen sind allgemein bekannt. Für die zur Charakterisierung dieser "üblichen" Einspannungen notwendigen Beziehungen zwischen Biegemoment und Querkraft einerseits und der Auslenkung andrerseits sei auf (31) verwiesen.

Praktische Beispiele von dynamisch-symmetrischen Einspannungen nach Tab. I

H: Halter S: Schwinger

zu Typ. No.

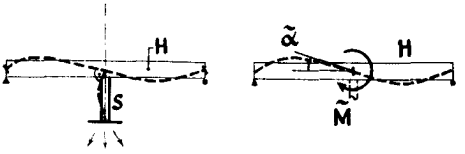
1: Pylon einer Hängebrücke.




$$L_{11} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{Q}}$$

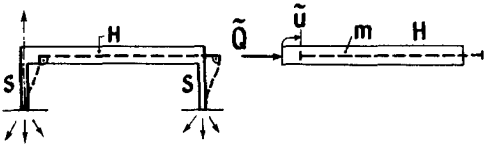
$$L_{22} = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{M}}$$

2: Brückenpfeiler mit Hauptträger starr verbunden.



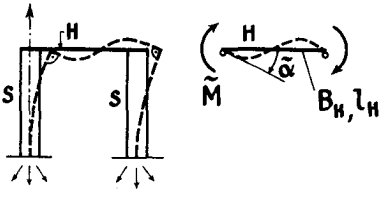

$$L_{22} = \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{M}}$$

3: Rahmenträger mit verschieblichen Knoten und starrem Riegel.

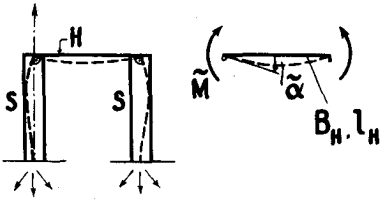



$$\Gamma_{11} = \frac{\tilde{Q}}{\tilde{u}} = -m\omega^2$$

4: Turbinenfundament (Masse des Querträgers vernachlässigt)

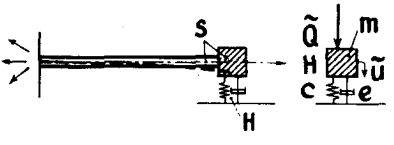



$$\Gamma_{22} = \frac{\tilde{M}}{\tilde{\alpha}} = \frac{6B_H}{l_H}$$




$$\Gamma_{22} = \frac{\tilde{M}}{\tilde{\alpha}} = \frac{B_H}{l_H}$$

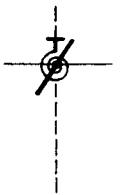
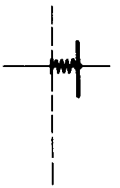
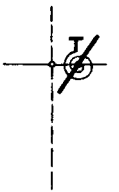
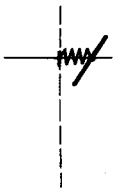
5: Träger mit Endmasse, durch Reibungsfeder gestützt.



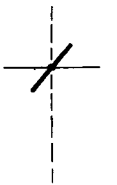
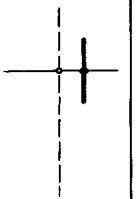
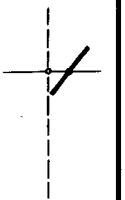

$$\Gamma_{11} = \frac{\tilde{Q}}{\tilde{u}} = c + ei\omega - m\omega^2$$

# Dynamisch-symmetrische Halter

**Tab. I**

| | Allg. Fall | Spezialfälle I | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Typus No. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Einspann-Bedingung | — | $u = 0$ | $\alpha = 0$ | $Q = 0$ | $M = 0$ |
| Symbol<br>translat. / rotat. } Widerstand | |  |  |  |  |
| Bezeichng. | elastisch | rotatorisch | translatorisch | | |
| erforderliche DEG | $L_{11} = \frac{1}{\Gamma_{11}}$ ; $L_{22} = \frac{1}{\Gamma_{22}}$ | $L_{22} = \frac{1}{\Gamma_{22}}$ | $L_{11} = \frac{1}{\Gamma_{11}}$ | $\Gamma_{22} = \frac{1}{L_{22}}$ | $\Gamma_{11} = \frac{1}{L_{11}}$ |

**Tab. II**

| Spezialfälle II (Kombinationen aus I) | | | |
|---|---|---|---|
| 2-3 | 2-5 | 3-4 | 4-5 |
| $u = 0$<br>$\alpha = 0$ | $u = 0$<br>$M = 0$ | $\alpha = 0$<br>$Q = 0$ | $Q = 0$<br>$M = 0$ |
| |  |  |  |
| starr | frei drehbar | frei verschieblich | frei |

Leer - Vide - Empty

# B. Spezielle Theorie schwach gedämpfter Biegeschwingungen

Um die wesentlichen Auswirkungen der Dämpfung im allgemeinen, und die der Abstrahlungsdämpfung im speziellen aufzuzeigen, genügt es, die allgemeine Theorie (Abschnitt A) auf einen einseitig elastisch eingespannten Stab anzuwenden. Die zusätzliche Voraussetzung schwacher Dämpfung bildet keine Einschränkung, da sie nach Dd, S. 93 weitgehend erfüllt ist.

Erzwungene Schwingungen sollen durch eine harmonische Störkraft, senkrecht zur Stabaxe am freien Ende, verursacht werden.

## a. VORAUSSETZUNGEN

Zu den Voraussetzungen im Abschnitt A treten neu hinzu:

1. Eine Störung im Halter I ( $x=0$ ) wird nicht berücksichtigt, d.h. $\tilde{u}_0=0$, $\tilde{\alpha}_0=0$ . Stab II und Halter II sind bedeutungslos. Für die erzwungenen Schwingungen wird von einem Biegemoment $\tilde{M}_0$ in $x=l_1$ abgesehen und lediglich eine Querkraft $\tilde{Q}_0$ berücksichtigt. Es ist $l_1=l$ zu setzen. Die rotatorische Trägheit wird aus bereits erwähnten Gründen vernachlässigt und ein "Enddruck" $T$ wirke nicht.

2. Zur Erfassung der innern Dämpfung wird der Ansatz von VOIGT (Tab. auf S.24 ) gewählt. Begründung siehe unter Cb 5, S.49.

3. Alle folgenden Grössen $\delta_j$ sind reell und hinreichend klein gegen 1 , sodass Glieder 2.- und höherer Ordnung vernachlässigt werden dürfen. (Nachweis siehe unter Dd, S.93.)

4. Abkürzungen

$$f = lk \qquad k^4 = \frac{\varrho F}{B}\omega^2$$

$$\delta_0 = \frac{2}{3}\Lambda\omega(1+\nu) \qquad \delta_\gamma = \frac{2\gamma}{\omega} \qquad \mu = \frac{3}{(1-2\nu)}\frac{P_\phi}{P_1}$$

5. Mit den Voraussetzungen 3 und 4 wird nach (21) und (35)

$$\mu = (1 + i\,\delta_o) \qquad\qquad P_\gamma = -\omega^2(1 - i\,\delta_\gamma)$$

und nach (34)

$$s^4 = +k^4\left[1 - i(\delta_o + \delta_\gamma)\right]$$

6. Die DEG sind unter Verwertung der Erkenntnis (15) (nur Imaginärteile massgebend für die Abstrahlung) und mit der Voraussetzung schwacher Strahlungsdämpfung (Imaginärteile klein gegen Realteile) in der Form

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{o11}(1 + i\,\delta_{11}) \qquad\qquad \Gamma_{12} = \Gamma_{o12}(1 + i\,\delta_{12})$$
$$\Gamma_{21} = \Gamma_{o21}(1 + i\,\delta_{21}) \qquad\qquad \Gamma_{22} = \Gamma_{o22}(1 + i\,\delta_{22})$$

angesetzt, wobei $\Gamma_{o11} \ldots \Gamma_{o22}$ ; $\delta_{11} \ldots \delta_{22}$ reelle Konstanten sind.

## b. BEWEGUNGSDIFFERENTIALGLEICHUNG

Die Differentialgleichung (28) lautet für einen Schwinger mit innerer Dämpfung nach VOIGT, Berücksichtigung einer äusseren Dämpfung und den getroffenen Voraussetzungen

$$(39) \qquad [2\gamma]\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \left[1 + \tfrac{2}{3}(1 - 2\nu)\gamma\Lambda\right]\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \left[\tfrac{1}{3}(1 - 2\nu)\Lambda\right]\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t^3} + \frac{B}{qF}\frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial x^4} + \Lambda\frac{B}{qF}\frac{\partial^5 \bar{u}}{\partial t\,\partial x^4} = 0$$

## c. DIE ERZWUNGENE, STATIONAERE SCHWINGUNG

### 1. Zusammenhang der Schnittkräfte mit der Ausbiegung

Mit dem stationären Ansatz (32) und den genannten Voraussetzungen wird aus (31)

$$(40) \qquad Q(x) = -\mu B\frac{d^3 u}{dx^3} \qquad\qquad M(x) = +\mu B\frac{d^2 u}{dx^2}$$

## 2. Randbedingungen

Die Randbedingungen lauten für einen einseitig-elastisch eingespannten Stab, an dessem freien Ende eine harmonische Störkraft $\tilde{Q}_o = Q_o e^{i\omega t}$ senkrecht zur Stabaxe wirkt

für $\underline{x=0}$ nach (37')

(41)
$$\Gamma_{11} u + \Gamma_{12} \frac{du}{dx} + \mu B \frac{d^3u}{dx^3} = 0$$
$$\Gamma_{21} u + \Gamma_{22} \frac{du}{dx} - \mu B \frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

und für $\underline{x=l}$ unter Beachtung von (40)

(42)
$$Q_o = -\mu B \frac{d^3u}{dx^3} \qquad 0 = \frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{(Biegemoment = 0)}$$

Die 8 Randbedingungen des allgemeinsten Falles reduzieren sich auf deren 4. Die allgemeine Lösung (36') für Stab I in (41) und (42) eingesetzt, ergibt folgendes System zur Bestimmung der 4 komplexen Integrationskonstanten $A_{11} \ldots A_{14}$

(43)

| $A_{11}$ | $A_{12}$ | $A_{13}$ | $A_{14}$ | Absolutes Glied |
|---|---|---|---|---|
| $1+\mathfrak{z}\frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{11}}+\mathfrak{z}^3\frac{\mu B}{\Gamma_{11}}$ | $1-\mathfrak{z}\frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{11}}-\mathfrak{z}^3\frac{\mu B}{\Gamma_{11}}$ | $1+i\mathfrak{z}\frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{11}}-i\mathfrak{z}^3\frac{\mu B}{\Gamma_{11}}$ | $1-i\mathfrak{z}\frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{11}}+i\mathfrak{z}^3\frac{\mu B}{\Gamma_{11}}$ | $0$ |
| $1+\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_{22}}-\mathfrak{z}\frac{\mu B}{\Gamma_{22}}$ | $-1+\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_{22}}-\mathfrak{z}\frac{\mu B}{\Gamma_{22}}$ | $+i+\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_{22}}+\mathfrak{z}\frac{\mu B}{\Gamma_{22}}$ | $-i+\frac{1}{\mathfrak{z}}\frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_{22}}+\mathfrak{z}\frac{\mu B}{\Gamma_{22}}$ | $0$ |
| $e^{\mathfrak{z}l}$ | $e^{-\mathfrak{z}l}$ | $-e^{i\mathfrak{z}l}$ | $-e^{-i\mathfrak{z}l}$ | $0$ |
| $e^{\mathfrak{z}l}$ | $-e^{-\mathfrak{z}l}$ | $-ie^{i\mathfrak{z}l}$ | $ie^{-i\mathfrak{z}l}$ | $-\frac{Q_o}{\mu B \mathfrak{z}^3}$ |

Die komplexe Determinante der Matrix dieses in-homogenen Gleichungs-
(44) systems sei $D = \Re D + i\,\mathfrak{J} D$
Nach zahlreichen Umformungen wird

(45)
$$\frac{1}{8}\Re D = R_1 + R_2 \operatorname{Ch} f \cos f + R_3 \operatorname{Sh} f \sin f + R_4 (\operatorname{Ch} f \sin f + \operatorname{Sh} f \cos f) + R_5 (\operatorname{Ch} f \sin f - \operatorname{Sh} f \cos f)$$

$$R_1 = \frac{\Gamma_{012}\Gamma_{021}}{\Gamma_{011}\Gamma_{022}}\left[(\delta_{12}+\delta_{21})-(\delta_{11}+\delta_{22})\right] - \frac{k^4B^2}{\Gamma_{011}\Gamma_{022}}\left[(\delta_0-\delta_\gamma)-(\delta_{11}+\delta_{22})\right]$$

$$R_2 = \frac{\Gamma_{012}\Gamma_{021}}{\Gamma_{011}\Gamma_{022}}\left[(\delta_{12}+\delta_{21})-(\delta_{11}+\delta_{22})\right] + \frac{k^4B^2}{\Gamma_{011}\Gamma_{022}}\left[(\delta_0-\delta_\gamma)-(\delta_{11}+\delta_{22})\right] - \frac{1k^4B}{2\Gamma_{011}}(\delta_0+\delta_\gamma)$$

$$R_3 = -\frac{1k^2B}{2\Gamma_{022}}(\delta_0+\delta_\gamma) - \frac{k^2B\Gamma_{021}}{\Gamma_{011}\Gamma_{022}}\left[\tfrac{1}{2}(\delta_0-\delta_\gamma)-(\delta_{11}+\delta_{22}-\delta_{21})\right] - \frac{k^2B\Gamma_{012}}{\Gamma_{011}\Gamma_{022}}\left[\tfrac{1}{2}(\delta_0-\delta_\gamma)-(\delta_{11}+\delta_{22}-\delta_{12})\right]$$

$$R_4 = +\frac{k^3B}{\Gamma_{011}}\left[\tfrac{1}{4}(\delta_0-3\delta_\gamma)-\delta_{11}\right] + \frac{1k^3B}{4\Gamma_{011}\Gamma_{022}}(\Gamma_{012}+\Gamma_{021})(\delta_0+\delta_\gamma)$$

$$R_5 = +k\left\{\frac{B}{\Gamma_{022}}\left[\tfrac{1}{4}(3\delta_0-\delta_\gamma)-\delta_{22}\right] - \frac{1}{4}(\delta_0+\delta_\gamma)\left(1-\frac{\Gamma_{012}\Gamma_{021}}{\Gamma_{011}\Gamma_{022}}-\frac{k^4B^2}{\Gamma_{011}\Gamma_{022}}\right)\right\}$$

(46)
$$\frac{1}{8}\mathfrak{J}D = J_1 + J_2\,\mathrm{Ch}f\cos f + J_3\,\mathrm{Sh}f\sin f + J_4(\mathrm{Ch}f\sin f + \mathrm{Sh}f\cos f) + J_5(\mathrm{Ch}f\sin f - \mathrm{Sh}f\cos f)$$

$$J_1 = 1 - \frac{\Gamma_{012}\Gamma_{021}}{\Gamma_{011}\Gamma_{022}} + \frac{k^4B^2}{\Gamma_{011}\Gamma_{022}} \qquad J_3 = +\frac{k^2B}{\Gamma_{011}\Gamma_{022}}(\Gamma_{012}+\Gamma_{021})$$

$$J_2 = 1 - \frac{\Gamma_{012}\Gamma_{021}}{\Gamma_{011}\Gamma_{022}} - \frac{k^4B^2}{\Gamma_{011}\Gamma_{022}} \qquad J_4 = -\frac{k^3B}{\Gamma_{011}} \qquad J_5 = -\frac{kB}{\Gamma_{022}}$$

## 3. Frequenzgleichung

Die Resonanzfrequenzen sind dadurch definiert, dass mit ihnen die Amplitude der Schwingungen maximale Werte annimmt. Dies ist nach (53) mit hinreichender Annäherung der Fall, wenn der absolute Betrag von $D$ (und damit auch das Quadrat) ein Minimum wird. Die Bedingungsgleichung heisst

(47)
$$|D|^2 = \mathfrak{R}^2D + \mathfrak{J}^2D = \text{Minimum}$$

Da $\mathfrak{R}D$ nur Summanden mit $\delta$ -Faktoren enthält, darf $\mathfrak{R}^2D$ gegen $\mathfrak{J}^2D$ zufolge der Voraussetzung 3 vernachlässigt werden. Die Bedingung (47) vereinfacht sich damit auf $\mathfrak{J}^2D$ = Minimum.

Der Umstand, dass $\mathfrak{J}D$ als Funktion von $f$ (Frequenzparameter), positive Nullstellen besitzt, vereinfacht die Minimumsbedingung, sodass sie erfüllt wird durch die gesuchte Frequenzgleichung

(48)
$$\boxed{\mathfrak{J}D(f) = 0}$$

Gleichung (48) ist streng genommen die Gleichung für die Resonanzfrequenzen des ungedämpften Systems und folglich auch die Frequenzgleichung für die ungedämpften Eigenschwingungen. *) Dass durch die Vernachlässigung kleiner Grössen 2.-Ordnung aus der Bedingung für die Resonanzfrequenzen (47), Gleichung (48) hervorgeht, bedeutet nichts anderes als die bekannte Erscheinung, dass die Resonanzfrequenzen des schwach gedämpften Systems mit denjenigen des ungedämpften Systems praktisch hinreichend genau übereinstimmen.

Spezialfälle der Frequenzgleichung:
Mit (10), (11) und (12) wird aus (48) für

31) rotatorische Einspannung

(49) $$1 + \mathrm{Ch}\,f \cos f + \frac{kB}{\Gamma_{022}}\left(\mathrm{Sh}\,f \cos f - \mathrm{Ch}\,f \sin f\right) = 0$$

32) translatorische Einspannung

(50) $$1 + \mathrm{Ch}\,f \cos f - \frac{k^3 B}{\Gamma_{011}}\left(\mathrm{Sh}\,f \cos f + \mathrm{Ch}\,f \sin f\right) = 0$$

33) starre Einspannung

(51) $$1 + \mathrm{Ch}\,f \cos f = 0$$

Dies ist die bekannte Frequenzgleichung für Transversalschwingungen des starr eingespannt-freien Stabes (20, S. 344).

## 4. Schwingungsform

Die Schwingungsform ist durch die komplexe Normalfunktion (36') der stationären Lösung (32) gegeben. Mit der (Nenner-) Determinante $D$ des Gleichungssystems zur Bestimmung der Integrationskonstanten kann die Normalfunktion in folgender Form geschrieben werden

*) Mathematisch sind bekanntlich die Eigenfrequenzen Eigenwerte des homogenen Gleichungssystems und gehen aus der Verträglichkeitsbedingung $D = 0$ des homogenen Gleichungssystems hervor, die wegen fehlender Dämpfung ($\Re D \to 0$) zur Gleichung (48) führt.

(52) $$u(x) = \frac{Z_u(x)}{D}$$

wobei

$$Z_u(x) = A_{11}De^{\delta x} + A_{12}De^{-\delta x} + A_{13}De^{i\delta x} + A_{14}De^{-i\delta x} \quad *)$$

Die Produkte $A_{jk}D$ sind die Zählerdeterminanten des Gleichungssystems (43).

Die Amplitude der Ausbiegung berechnet sich als absoluter Betrag von $u(x)$ aus

(53) $$|u(x)| = \sqrt{\frac{\mathcal{R}^2 Z_u(x) + \mathcal{J}^2 Z_u(x)}{\mathcal{R}^2 D + \mathcal{J}^2 D}}$$

wobei $\mathcal{R}Z_u(x)$ und $\mathcal{R}D$ nur Glieder mit $\delta$ -Faktoren enthalten.

Unter Beachtung der Voraussetzung 3 gilt in hinreichend grosser Entfernung einer Minimalstelle von $|D|$, d.h. ausserhalb der Resonanz

(54) $$|u(x)| = \left|\frac{\mathcal{J}Z_u(x)}{\mathcal{J}D}\right|$$

Mit zunehmender Resonanznähe strebt $\mathcal{J}D$ gegen Null und $\mathcal{R}D$ darf gegen $\mathcal{J}D$ nicht weiter vernachlässigt werden. Im Falle der Resonanz gilt dann wegen (48) mit praktisch hinreichender Genauigkeit

(55) $$|u(x)|_{res} = \boxed{\left|\frac{\mathcal{J}Z_u(x)}{\mathcal{R}D}\right| = U}$$

Die Rechnung ergibt, wenn statt $x$ als neues Argument

(56) $$\beta = x\frac{f}{l}$$

gesetzt wird

(57) $$\mathcal{J}Z_u = +Q_o\frac{4}{k^3B}\Psi$$

*) Es erwies sich für die Berechnung als zweckmässiger, die Summenausdrücke $Z_u$, $Z_Q$ und $Z_M$ direkt zu bestimmen, als wie üblich, die einzelnen Integrationskonstanten, die hier umständliche Ausdrücke annehmen, separat zu ermitteln.

$$\Psi = U_1(\mathfrak{Sh}\beta\sin f + \mathfrak{Sh} f\sin\beta) + U_2(\mathfrak{Ch}\beta\cos f + \mathfrak{Ch} f\cos\beta)$$

$$+U_3\begin{bmatrix} +\mathfrak{Sh}(f-\beta) & -\sin(f-\beta) \\ +\mathfrak{Ch}\beta\sin f + \mathfrak{Ch} f\sin\beta & -\mathfrak{Sh}\beta\cos f - \mathfrak{Sh} f\cos\beta \end{bmatrix}$$

$$+U_4\begin{bmatrix} +\mathfrak{Sh}(f-\beta) & -\sin(f-\beta) \\ -\mathfrak{Ch}\beta\sin f - \mathfrak{Ch} f\sin\beta & +\mathfrak{Sh}\beta\cos f + \mathfrak{Sh} f\cos\beta \end{bmatrix}$$

$$+U_5\begin{bmatrix} +\mathfrak{Sh}(f-\beta) & +\sin(f-\beta) \\ +\mathfrak{Ch}\beta\sin f + \mathfrak{Ch} f\sin\beta & +\mathfrak{Sh}\beta\cos f + \mathfrak{Sh} f\cos\beta \end{bmatrix}$$

$$+U_6\begin{bmatrix} +\mathfrak{Sh}(f-\beta) & +\sin(f-\beta) \\ -\mathfrak{Ch}\beta\sin f - \mathfrak{Ch} f\sin\beta & -\mathfrak{Sh}\beta\cos f - \mathfrak{Sh} f\cos\beta \end{bmatrix}$$

$$U_1 = 2k\frac{B}{\Gamma_{022}} \qquad U_3 = +1 - \frac{\Gamma_{012}\Gamma_{021}}{\Gamma_{011}\Gamma_{022}} \qquad U_5 = -\frac{k^2 B\,\Gamma_{012}}{\Gamma_{011}\Gamma_{022}}$$

$$U_2 = 2k^3\frac{B}{\Gamma_{011}} \qquad U_4 = +\frac{k^4 B^2}{\Gamma_{011}\Gamma_{022}} \qquad U_6 = +\frac{k^2 B\,\Gamma_{021}}{\Gamma_{011}\Gamma_{022}}$$

<u>Spezialfälle</u>

41) $x = 0$ (Einspannquerschnitt)

(58) $$\mathfrak{J}Z_u = +Q_0\frac{8}{k^3 B}\left[\tfrac{1}{2}U_2(\mathfrak{Ch} f + \cos f) + (U_5 + U_4)\,\mathfrak{Sh} f + (U_5 - U_4)\sin f\right]$$

42) $x = l$ (freies Stabende, mit Störkraft)

(59) $$\mathfrak{J}Z_u = +Q_0\frac{8}{k^3 B}\left[U_1\,\mathfrak{Sh} f\sin f + U_2\,\mathfrak{Ch} f\cos f + (U_5 - U_4 + U_3 - U_6)\,\mathfrak{Ch} f\sin f + (U_5 + U_4 - U_3 - U_6)\,\mathfrak{Sh} f\cos f\right]$$

## 5. Schnittkräfte (Biegemomenten- und Querkraftslinie)

Nach (31), (32) und (52) berechnet sich das Biegemoment $\tilde{M}$, resp. die Querkraft $\tilde{Q}$ im Schnitte $x$ zu

(60) $$\tilde{M} = M(x)\,e^{i\omega t} \qquad M(x) = +\mu B\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{Z_M(x)}{D}$$

$$\tilde{Q} = Q(x)\,e^{i\omega t} \qquad Q(x) = -\mu B\frac{d^3u}{dx^2} = \frac{Z_Q(x)}{D}$$

wobei

$$Z_M(x) = +\mu B s^2 \left(A_{11} D e^{sx} + A_{12} D e^{-sx} - A_{13} D e^{isx} - A_{14} D e^{-isx}\right)$$

$$Z_Q(x) = -\mu B s^3 \left(A_{11} D e^{sx} - A_{12} D e^{-sx} - i A_{13} D e^{isx} + i A_{14} D e^{-isx}\right)$$

Die Normalfunktionen $M(x)$ und $Q(x)$ sind von der gleichen Form wie $u(x)$ in (52). Für die Amplituden des Biegemomentes $\tilde{M}$ und der Querkraft $\tilde{Q}$ gilt sinngemäss (53) und (54) und für den Resonanzfall wird entsprechend (55)

(61) $$|M(x)|_{res} = \boxed{\left|\frac{\mathfrak{J} Z_M(x)}{\mathfrak{R} D}\right| = M} \qquad |Q(x)|_{res} = \boxed{\left|\frac{\mathfrak{J} Z_Q(x)}{\mathfrak{R} D}\right| = Q}$$

mit

$$\mathfrak{J} Z_M = +Q_0 \frac{4}{k} \frac{d^2\Psi}{d\beta^2} \qquad \mathfrak{J} Z_Q = -Q_0\, 4 \frac{d^3\Psi}{d\beta^3}$$

und der Bedeutung von $\Psi$ in (57) und $\beta$ in (56).

<u>Spezialfälle</u>

51) $x = 0$ (Einspannquerschnitt)

(62) $$\mathfrak{J} Z_M = +Q_0 \frac{8}{k}\left[\tfrac{1}{2} U_2 (\cos f - \mathfrak{Ch} f) + (U_3 + U_6) \mathfrak{Sh} f + (U_3 - U_6) \sin f\right]$$
$$\mathfrak{J} Z_Q = -Q_0\, 8\left[\tfrac{1}{2} U_1 (\mathfrak{Sh} f - \sin f) + (U_3 + U_5) \mathfrak{Ch} f + (U_3 - U_5) \cos f\right]$$

52) $x = l$ (freies Stabende mit Störkraft)

(63) $$\mathfrak{J} Z_M = 0$$
$$\mathfrak{J} Z_Q = +Q_0 \mathfrak{J} D$$

Die zweite Gleichung (61) versagt für $x = l$, die Vernachlässigung von $\mathfrak{R}^2 Z_Q(x)$ gegen $\mathfrak{J}^2 Z_Q(x)$ in der Berechnung von $Q$ ist hier nicht mehr zulässig, da mit wachsender Resonanznähe $\mathfrak{J} Z_Q(x) \to 0$ und mit $\mathfrak{R} Z_Q$ vergleichbar wird.

## 6. Numerische Verhalten

Eine allgemeine Aussage über Eigenfrequenzen, Form der Biege- Momenten- und Querkraftskurven ist schwierig, da verschiedene Form-, Dämpfungs- und Einspannparameter in die Betrachtung einbezogen werden müssen. Aus der praktischen Erkenntnis heraus, das höhere Resonanzen technischer Baustoffe zufolge ihrer stärkeren Dämpfung für die Beanspruchung des Materials von sekundärer Bedeutung sind, wurde die numerische Auswertung auf den Fall der Grundschwingung beschränkt und ist im Abschnitt D behandelt.

Leer - Vide - Empty

# C. Die Dämpfung

## a. ALLGEMEINES

Die eminente Bedeutung der Dämpfung für Bauwerkschwingungen kommt erst in der Resonanz voll zur Geltung, wo schon geringste Dämpfungskräfte genügen, um das unbeschränkte Anwachsen der Beanspruchung zu verhindern.
(Bei der mathematischen Behandlung von Schwingungsaufgaben wirkt sich die Einbeziehung von Dämpfungsgliedern dadurch aus, dass die Resonanzen als singuläre Stellen verschwinden und der exakten Berechnung zugänglich werden.)
Die Ursachen der Dämpfungskräfte können, wie schon in der Einleitung erwähnt, verschiedenster Natur sein. Innere Dämpfungen rühren von den nicht ideal-elastischen Eigenschaften des Schwingers her. Das HOOKE'-sche Gesetz muss durch einen erweiterten Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung, in den problemgemäss auch die Zeit einbezogen werden muss, ersetzt werden. Die äussere Dämpfung ist durch das den Schwinger umgebende Medium oder Milieu bedingt und äussert sich in der Form von Bewegungswiderständen an der freien Oberfläche des Schwingers. Die Abstrahlungsdämpfung ist eine Folge der elastischen Einspannung des schlanken Stabes, indem durch die erzwungene Bewegung an der Einspannstelle, Schwingungsenergie in Form von elastischen Wellen in den Halter abgestrahlt wird. Es erhebt sich die Frage, in welchem Masse diese Dämpfungsformen an der Gesamtdämpfung der Schwingung beteiligt sind und ob nicht die eine oder andere an Bedeutung überwiegt. Diese Frage beantworten, heisst vorerst die entsprechenden Dämpfungskoeffizienten ermitteln, was in diesem Abschnitt versucht wird, um im folgenden Abschnitt (D) deren quantitative Auswirkung auf den stationären Schwingungszustand der Resonanz aufzeigen zu können.

## b. DIE INNERE DAEMPFUNG

### 1. Ursache und Wirkung

Die innere Dämpfung hat ihre Ursache im molekularen Aufbau der Körper, welche mechanischen Kräften unterworfen werden. Sie ist deshalb eine spezifische Eigenart des Materials. Um das Wesen der innern Dämpfung näher zu erforschen, müssten Beobachtungen der molekular-kinetischen Vorgänge bei der Deformation des Körpers angestellt werden. Für die theoretische Erfassung innerer Dämpfungskräfte ist die Kenntnis der Ursache nicht unbedingt nötig, es genügt vielmehr deren Wirkung zu kennen, die etwa makroskopisch durch den Zusammenhang zwischen Kraft und Verformung oder Spannung und Verzerrung zum Ausdruck kommt.

Die Rücksicht, mathematisch einigermassen zugängliche Ansätze zu erhalten, die immerhin dem makro-molekularen Verhalten des Körpers gebührend Rechnung tragen, bedingt, dass durch die folgenden Ansätze nur eine qualitative Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit erwartet werden darf.

Im dreidimensionalen Spannungszustand kann der (symmetrische) Spannungstensor $\mathbb{T}'$ zerlegt werden in einen Spannungsdeviator $\mathbb{T}$ (mittlere Normalspannung Null) und einen Tensor $\epsilon p$, der einen hydrostatischen Spannungszustand ausdrückt, wobei $\epsilon$ der Einheitstensor, $p$ die mittlere Normalspannung bedeutet.

(64) $$\mathbb{T}' = \mathbb{T} + \epsilon p$$

Analog lässt sich der resultierende Verzerrungstensor $\phi'$ zerlegen in einen Verzerrungsdeviator $\phi$ (mittlere lineare Dehnung Null) und einen Tensor $\epsilon\theta$ (gleichmässige Dilatation mit mittlerer linearer Dehnung $\theta$ )

(65) $$\phi' = \phi + \epsilon\theta$$

Der einfachste Zusammenhang zwischen Spannung und Verzerrung ist die, für kleine Formänderungen zulässige, lineare Beziehung. Dass bei der mathematischen Formulierung dieses Zusammenhanges die Zeit einer speziellen Berücksichtigung bedarf, muss besonders hervorgehoben werden. Sie spielt bei der Behandlung quasi-elastischer Körper unter dynami-

scher Beanspruchung eine wesentliche Rolle.

Der lineare Zusammenhang zwischen den Komponenten des Spannungs- und Verzerrungstensors und deren zeitlichen Ableitungen kann nach (7,8) durch Operatorengleichungen zwischen dem Spannungs- und Verzerrungsdeviator einerseits, sowie mittlerer Normalspannung und gleichmässiger Dilatation andererseits wie folgt dargestellt werden. *)

(66)
$$\Phi_p(p) = \Phi_\theta(\theta)$$
$$\Phi_\pi(\Pi) = \Phi_\phi(\phi)$$

Die Bedeutung der linearen Operatoren für die hier zur Disskussion stehenden quasi-elastischen Körper geht einerseits aus (21) hervor, anderseits ist nach (7):

(67)
$$\Phi_p = 1 \; ; \; \Phi_\theta = \frac{E}{1-2\nu}$$

Die Körper unterscheiden sich also lediglich durch die zweite Beziehung in (66), d.h. im kompressionslosen Anteil des Spannungs-Verzerrungszustandes.

So lässt sich beispielsweise das HOOKE'sche Gesetz für homogenisotrope Medien in die beiden Gleichungen (66)

(68)
$$p = \frac{E}{1-2\nu}\theta$$
$$\Pi = \frac{E}{1+\nu}\phi \quad (=2G\phi)$$

zusammenfassen.

Im besondern Falle eines einaxigen Normalspannungszustandes lauten die genannten Grössen in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit den Hauptaxen 1, 2 und 3

(69)
$$\Pi' = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Pi = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_1 \end{bmatrix}; \quad p = \frac{1}{3}\sigma_1$$

*) Diese Ansätze besitzen ausserdem allgemeine Gültigkeit, wenn die eingeklammerten Grössen und deren zeitliche Ableitungen hinreichend klein sind, um Glieder höherer Ordnung gegen die ersten Potenzen vernachlässigen zu dürfen. (Man denke sich etwa die Funktionen beider Seiten in Potenzreihen nach den erw. Grössen entwickelt.)

$$\Phi' = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}; \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varepsilon_1-\theta & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2-\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3-\theta \end{bmatrix}; \quad \theta = \frac{1}{3}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3).$$

$\sigma_1$ ist die Hauptnormalspannung, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ und $\varepsilon_3$ sind die Verzerrungen in den mit Indices bezeichneten Axenrichtungen.

Damit wird aus (66) und (67), wenn einfachheitshalber $\sigma_1 = \sigma$ und $\varepsilon_1 = \varepsilon$ gesetzt wird,

$$\frac{1}{3}\sigma = \frac{E}{1-2\nu}\theta$$

$$\mathfrak{L}_\pi\left(\frac{2}{3}\sigma\right) = \mathfrak{L}_\phi(\varepsilon-\theta)$$

Durch Anwendung des Operators $\frac{1-2\nu}{E}\mathfrak{L}_\phi$ auf die erste Gleichung und Addition beider Gleichungen wird $\theta$ eliminiert, und mit der Bedeutung des Operators $\mathfrak{L}_1$ in (21) entsteht die Beziehung

(70) $$\underline{\mathfrak{L}_1(\sigma) = \frac{3E}{1-2\nu}\mathfrak{L}_\phi(\varepsilon)}$$

Für den VOIGT'schen Körper (21) wird aus (70)

(71) $$\sigma + \frac{1}{3}(1-2\nu)\Lambda\frac{\partial\sigma}{\partial t} = E\varepsilon + E\Lambda\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}$$

und führt mit $\Lambda = 0$ auf die bekannte, zeitunabhängige Beziehung für den HOOKE'schen ideal-elastischen Körper

$$\sigma = E\varepsilon$$

Der einfachste Spannungszustand, welcher die zweite Beziehung in (66) berührt, ist der eindimensionale Schub. Es ist somit möglich, anhand eines sehr übersichtlichen Spannungszustandes, die charakteristischen Merkmale der in (21) genannten Körper eindeutig aufzuzeigen. Die Beziehung zwischen der Schubspannung $\tau$ und der entsprechenden Winkeländerung $\vartheta$ lautet dann

(72) $$\mathfrak{L}_\pi(\tau) = \mathfrak{L}_\phi(\vartheta/2)$$

In Tab. III ist dieser Zusammenhang für den quasi-elastischen Körper von JEFFREYS und seiner Spezialfälle tabellarisch zusammengefasst.

## 2. Erläuterungen zu Tab. III (Seite 50).

Die Differentialgleichungen zeigen formal den gleichen Aufbau, wie diejenigen für die mechanisch-dynamischen Ersatzsysteme in Cd5,S.69 vergl. (104). Es ist deshalb möglich, für den Zusammenhang der Schubspannung $\tau$ mit dem Drehwinkel $\vartheta$ ein dynamisch äquivalentes System aus Federn und Dämpfungselementen anzugeben, das der Vorstellung zugänglicher ist.

Wird der Quotient $\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\vartheta}}$ mit $G_{id}$ bezeichnet, so kann diese Grösse als ideeller Schubmodul betrachtet werden, der für Typ. No. 1-3 komplex, für Typ. No. 4 reell und für Typ. No. 5 rein imaginär wird.

Die Phasendifferenz $\varphi$ zwischen $\tilde{\tau}$ und $\tilde{\vartheta}$ kann als Charakteristikum des Körpers betrachtet werden. Sie ist stark frequenzabhängig.

Die letzten Kolonnen der Zusammenstellung zeigen deutlich den Einfluss der Belastungszeit. Das gleiche Material kann, je nachdem es kurzfristig oder langfristig beansprucht wird, ideal-elastisch bis flüssig wirken.

## 3. Die Bedeutung der Koeffizienten $\Delta$ und $\Lambda$

Im eindimensionalen Schubspannungszustand erhalten die für quasi-elastischen Körper charakteristischen Grössen $\Delta$ und $\Lambda$ eine einfache und anschauliche, physikalische Bedeutung. Beachtet man die in Tab. III zusammengestellten Beziehungen, so lassen die aufgeführten quasi-elastischen Körper folgende Eigenschaften erkennen:

Der MAXWELL'sche Körper ist von elastisch-plastischer Natur und zeigt das diesem Körper arteigene Fliessen. Setzt man nämlich $\tau = \tau_o =$ konstant, mit den Randbedingungen $t=0$ ; $\vartheta=0$ , so wird

(73) $$\vartheta = \frac{\tau_o}{G}\left(1+\frac{t}{\Delta}\right)$$

Die Verformung wächst dauernd unter Einwirkung einer konstanten Kraft.

Die Bedeutung der sog. Relaxationszeit $\Delta$ wird klar, wenn $t=\Delta$ gesetzt wird. Es ist offenbar diejenige Zeit, die es braucht, um unter Einwirkung einer gleichbleibenden Last die rein elastische Verformung $\tau_o/G$ zu verdoppeln.

Der VOIGT'sche Körper (21) zeigt eine sog. Retardation, ein Hinten-

nachhinken der Verformung. Die rein-elastische Verformung $\tau_0/G$ wird theoretisch erst nach unendlich langer Zeit erreicht. Setzt man plötzlich $\tau = 0$ mit der Randbedingung $t = 0$ ; $\vartheta = \vartheta_0$ = konstant, so wird

(74) $$\vartheta = \vartheta_0 e^{-t/\Lambda}$$

und für $t = \Lambda$ folgt

(75) $$\vartheta = \vartheta_0 \, 1/e$$

Die Retardationszeit $\Lambda$ ist somit diejenige Zeit, die es braucht, um bei Entlastung die Verformung auf $1/e$ ihres Wertes absinken zu lassen.
Der JEFFREYS'sche Körper (12) als Kombination von Typ No. 2 & 3 zeigt Relaxation und Retardation in sich vereinigt.

## 4. Die Grössenordnung der Relaxations- resp. Retardationszeit

a. Zur Ermittlung des VOIGT'schen Koeffizienten $G\Lambda$, bezw. der Retardationszeit $\Lambda$ sind von zahlreichen Forschern Versuche angestellt worden. Es wurden hauptsächlich Metalle in den verschiedensten Frequenzbereichen gemessen, wobei sowohl Schub- als auch Biegeversuche durchgeführt wurden (21, 25, 11, 13, 9, 10)

Die ermittelte Retardationszeit $\Lambda$ für Metalle liegt darnach in den Grenzen

(76) $$\Lambda = 10^{-1} \div 10^{-4} \text{ sek} \qquad \text{(Flusstahl: } \Lambda = 2 \cdot 10^{-3} \text{ sek)}$$

Messungen im Institut für Geophysik der ETH ergaben für Sandstein-, Kalk- und Granitprismen die Grössenordnung von

(77) $$\Lambda = 10^{-3} \div 10^{-5} \text{ sek}$$

b. Ueber die Bestimmung der MAXWELL'schen Koeffizienten $1/\Delta$, bezw. der Relaxationszeit $\Delta$ liegen leider keine umfangreichen Untersuchungen vor. Die wenigen Messungen sind zudem an stark plastischen Materialien ausgeführt worden.

Für elastische Körper sind bedeutend grössere Werte zu erwarten.

Zur Orientierung zwei Zahlen aus (9):

(78)

Schusterpech bei $15^{\circ}$ C: $\Lambda = 10^{2}\,\mathrm{sek}$

Blei bei $20^{\circ}$ C: $\Lambda = 10^{7}\,\mathrm{sek}$

## 5. Die Bedeutung des VOIGT'schen Ansatzes für Bauwerk-Schwingungen

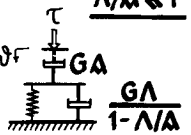
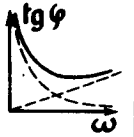
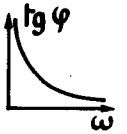
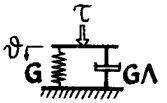
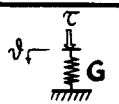
Es drängt sich nun die Frage auf, mit welchen quasi-elastischen Körpern der Tab. III die innere Dämpfung stabförmiger Bauwerke am besten erfasst wird, kurz, welcher dieser Ansätze am besten zutrifft. Um das dynamisch-elastische Verhalten eines quasi-elastischen Körpers zu beschreiben, genügt die blosse Kenntnis der Relaxations- und Retardationszeit offenbar nicht, denn es ist auch die Beanspruchungszeit, im Falle harmonischer Schwingungen etwa die Kreisfrequenz $\omega$ von wesentlicher Bedeutung. Massgebend sind nach Tab. III die Produkte $\Lambda\omega$ resp. $\Lambda\omega$. Mit den Voraussetzungen $\omega > 1\,\mathrm{sek}^{-1}$, $\Lambda > 10^{7}\,\mathrm{sek}$, $\Lambda > 10^{-5}\,\mathrm{sek}$, die im Falle von Bauwerkschwingungen genügend genau erfüllt sind, wird man den Ausdruck $1/\Lambda\omega$ gegenüber $\Lambda\omega$ praktisch vernachlässigen dürfen, da der Fehler kleiner als 1% ist. Dies bedeutet, dass der MAXWELL'sche Einfluss verschwindet, der MAXWELL'sche Körper wirkt für eine solche kurzfristige Beanspruchung ideal-elastisch. Das dynamisch-elastische Verhalten wird mit dem VOIGT'schen Ansatz allein erfasst.

Eine Bestätigung dieses Umstandes zeigten Versuche an Sandsteinstäben im Inst. f. Geophysik der ETH. Die elektrodynamisch zu Längsschwingungen angeregten und mathematisch als JEFFREYS'sche Körper erfassten Proben, zeigten weder in der Grundschwingung noch in den zwei folgenden Obertönen nachweisbare Relaxation. Die Retardation hingegen wies eine befriedigende Konstanz auf.

Es sei hier nochmals darauf hingewiesen, dass die linearen Beziehungen (66) das makroskopische Verhalten quasi-elastischer Körper i.a. befriedigend zu beschreiben vermögen. Immerhin dürfte die Abklärung gewisser Probleme über innere Dämpfung eine schärfere mathematische Formulierund erfordern, was jedoch mit linearen Ansätzen kaum erreicht wird. (23, 24).

Tab. III

# Lineare, quasi elastische Körper

| Typ No. | Körper nach | Differentialgleichung linearer Schubspannungs-Zustand | Mechanisches Analogon Feder & Dämpfungselement | $\tau = \tilde{\tau} = \tau_0 e^{i\omega t} \longrightarrow \vartheta = \tilde{\vartheta}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $G_{id} = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\vartheta}}$ (Γ) | φ: Phasendifferenz zw. Kraft & Verformg. | | | |
| | | | | | $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathfrak{J} G_{id}}{\mathfrak{R} G_{id}}$ | $\operatorname{tg}\varphi = \mathrm{Fkt}\,\omega$ | $\omega \ll 1/\Lambda$ | $\omega \gg 1/\Lambda$ |
| | | | | | | | $\operatorname{tg}\varphi$ | $\operatorname{tg}\varphi$ |
| 1 | JEFFREYS [12] mit Relaxation & Retardation | $\dot{\tau} + \frac{1}{\Lambda}\tau - G\dot{\vartheta} - G\Lambda\ddot{\vartheta} = 0$ | $\Lambda/\Lambda \ll 1$   | $G\frac{1+i\Lambda\omega}{1-i/\Lambda\omega}$ | $\frac{\Lambda\omega + 1/\Lambda\omega}{1-\Lambda/\Lambda}$ |   | ∞ | ∞ |
| 2 | MAXWELL [16] mit Relaxation | $\dot{\tau} + \frac{1}{\Lambda}\tau - G\dot{\vartheta} = 0$ | | $G\frac{1}{1-i/\Lambda\omega}$ | $\frac{1}{\Lambda\omega}$ |   | ∞ | 0 |
| 3 | VOIGT [21] mit Retardation | $\tau - G\vartheta - G\Lambda\dot{\vartheta} = 0$ |   | $G(1+i\Lambda\omega)$ | $\Lambda\omega$ | | 0 | ∞ |
| (4) | HOOKE ideal-elastisch | $\tau - G\vartheta = 0$ |   | G | 0 | | 0 | 0 |
| (5) | NEWTON zähe Flüssigkeit | $\tau - G\Lambda\dot{\vartheta} = 0$ $[G\Lambda = \eta]$ | | $iG\Lambda\omega$ | ∞ | | ∞ | ∞ |

## c. DIE AUSSERE DAEMPFUNG

Im Hinblick auf konkrete Fälle von Schwingungen schlanker Bauwerke wird es sich bei der äusseren Dämpfung ausschliesslich um den Luftwiderstand handeln.

### Der Luftwiderstand

Gegenstand dieses Abschnittes bildet die Frage, inwieweit sich der Luftwiderstand an der Gesamtdämpfung des schwingenden Körpers beteiligt.

Der Einfluss der Dämpfung durch das umgebende Medium ist durch den Koeffizienten $\gamma$ in der Differentialgleichung (28) gegeben. Vergl. (23). Die Auswirkung dieses Koeffizienten auf die Frequenzgleichung (47) und die in der Resonanz interessierenden Grössen (55) und (61) wird durch den Ausdruck

(79) $$\delta_\gamma = \frac{2\gamma}{\omega}$$

in $\mathcal{RD}$, siehe (45), erfasst. Es bleibt somit nur $\mathcal{RD}$ in Bezug auf $\delta_\gamma$ zu untersuchen. In $\mathcal{RD}$ treten $\delta_0$ und $\delta_\gamma$ einzig in der Kombination

(80) $$\delta_0 + m\delta_\gamma \qquad m = -\tfrac{1}{3}, \pm 1, -3$$

auf, wobei

(81) $$\delta_0 = \tfrac{2}{3}(1+\nu)\Lambda\omega$$

den Einfluss der innern Dämpfung ausdrückt Ba4,S.33. Die Gegenüberstellung von $\delta_0$ und $\delta_\gamma$ lässt somit auch den Einfluss der äussern Dämpfung erkennen. Es soll im folgenden die Grössenordnung dieser Werte abgeschätzt werden.

Der Schwingungsdifferentialgleichung (28) liegt eine der Geschwindigkeit proportionale Dämpfungskraft zugrunde (lineare Theorie). Eine nicht lineare Abhängigkeit kann etwa dadurch berücksichtigt werden, dass der Energieverlust (pro volle Periode geleistete Arbeit) demjenigen für den linearen Ansatz gleichgesetzt wird. Der Koeffizient $\gamma$ wird dann allerdings frequenz- und amplitudenabhängig. Wird in diesem Sinne das lineare und das quadratische Widerstandsgesetz für ein Stabelement der Länge $dx$, das

in einer zur $x$ -Axe senkrecht stehenden Richtung $y$ schwingt, in der Form

$$W_1 = \Psi_1 \frac{dy}{dt} \qquad W_2 = \Psi_2 \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \tag{82}$$

angeschrieben und bezeichnet $u$ die Amplitude, $\omega$ die Kreisfrequenz der Schwingung, so ergibt sich aus dem Vergleich der mittleren Leistungen

$$\Psi_1 = \frac{8}{3\pi} \cdot \omega u \cdot \Psi_2 \tag{83}$$

Die Bewegung eines Schwingerelementes im Luftraum ist instationär. Leider sind die Widerstandsgesetze instationärer Strömungen wenig untersucht und bekannt. Besser erschlossen sind stationäre Strömungen. Man wird nun die Koeffizienten stationärer Strömungen sinngemäss auf instationäre übertragen, indem man an Stelle der stationären Geschwindigkeit die Momentangeschwindigkeit einsetzt. Die zwei Arten der stationären Strömungen, die laminare und turbulente, unterscheiden sich durch zwei verschiedene Widerstandsgesetze. Der laminare Widerstand ist proportional zur Geschwindigkeit, der turbulente proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit. Welche Strömung herrscht, wird durch die REYNOLDS'-sche Zahl bestimmt, die von Fall zu Fall und nur empirisch ermittelt werden kann.

Die äussere Widerstandskraft des Stabelementes der Länge $dx$ , welche der Differentialgleichung (28) zu Grunde liegt, lautet nach (23)

$$W = 2\varrho \, dx \, F \gamma \cdot \frac{dy}{dt} \tag{84}$$

Setzt man (84) den Werten (82) gleich unter Beachtung von (79) resp. (79) und (83), so folgt

$$\delta_\gamma = \frac{\Psi_1}{\omega \varrho \, dx F} \quad \text{bezw.} \quad \delta_\gamma = \frac{8 \; u \; \Psi_2}{3\pi \varrho \, dx F}$$

Die Grössen $\Psi_1$ und $\Psi_2$ sind den Widerstandsgesetzen (82) zu entnehmen.

Die Strömung im Frequenzbereich technischer Schwingungen ist zufolge der grossen REYNOLDS-Zahlen i.a. turbulent.

Für den Fall eines senkrecht zur $x$ -Axe bewegten Stabelementes der Stirnbreite $d$ und der Höhe $dx$ wird nach dem bekannten Widerstandsge-

setz (82 ) der Aerodynamik, wenn an Stelle der stationären Geschwindigkeit die Momentangeschwindigkeit $\frac{dy}{dt}$ gesetzt wird

$$\psi_2 = c_w \, d \cdot dx \, \frac{\varrho_L}{2}$$

$\varrho_L$ ist die Luftdichte. Der dimensionslose Koeffizient $c_w$ hängt ab von der Querschnittsform, der Schlankheit des Stabes, sowie von der Rauhigkeit der Oberfläche und schwankt mit der REYNOLDS-Zahl in den Grenzen

$$0.3 \leqq c_w \leqq 2.0$$

für runde, polygonale bis quadratische Querschnittsformen. Es ergibt sich somit folgende Gegenüberstellung

(85) $$\boxed{\delta_0 = \frac{2}{3}(1+\nu)\Lambda\omega \qquad \delta_\gamma = \frac{4}{3\pi}\frac{c_w d}{F}\frac{\varrho_L}{\varrho} u}$$

Für den numerischen Vergleich, wobei einzig der Resonanzfall interessiert, sollen die festen Werte (110) des Beispiels in D herangezogen werden. Es sei ferner vorausgesetzt:

(86) $$\frac{\varrho_L}{\varrho} = 4.55 \cdot 10^{-4} \qquad n = 10 \qquad \delta = 10^{-1} \qquad u = u_m \approx \frac{1}{3} u_{max}$$
$$d = 6\,m \qquad \begin{cases} k_{11} = 1 \\ k_{22} = 1 \\ k_{12} = k_{21} = 0 \end{cases} \qquad \Lambda = 10^{-3}\,sek \qquad l = 40\,m$$
$$c_w = 1 \qquad\qquad\qquad\qquad Q_0 = 1000\,kg$$

Das schlanke Bauwerk ist demnach elastisch eingespannt und normal gedämpft. Zur Bestimmung der mittleren Amplitude $u_m$ wirke am Turmende eine horizontale Erregungskraft von einer Tonne. Kreisfrequenz und Amplitude sind den Diagrammen 2 und 9 zu entnehmen.
$(f = 1.609 \rightarrow \omega = 5.14\,sek^{-1},\ V_D = 526 \rightarrow u = 8.91 \cdot 10^{-2}\,m)$ Mit diesen Werten wird für den Fall der Resonanz

(87) $$\boxed{\delta_0 = 4.6 \cdot 10^{-3} \qquad \delta_\gamma = 6.9 \cdot 10^{-6}}$$

Damit sind die gesuchten Werte ermittelt, $\delta_\gamma$ beträgt im vorliegenden Fall nur $1^1/2‰$ von $\delta_0$ . Der Einfluss des Luftwiderstandes auf $\mathfrak{R}D$ und damit auf die Resonanzgrössen (55), (61) tritt offensichtlich gegenüber dem Einfluss der innern Dämpfung stark zurück.

Allgemein darf wohl angenommen werden, dass der Luftwiderstand gegenüber der Werkstoffdämpfung kaum in Erscheinung tritt und in der Regel vernachlässigt werden darf.

## d. DIE ABSTRAHLUNGSDAEMPFUNG

### 1. Der Halter und seine dynamischen Einspanngrössen

11) Die elastische Einspannung des Schwingers im Halter kann man sich grundsätzlich auf zwei Arten verwirklicht denken, nämlich 1. als ideal-elastische Einspannung oder 2. als elastische Einspannung mit Energieverlust durch Abstrahlung.
Im ersten Fall hat man sich eine Einspannung in einem Halter vorzustellen, wie ihn etwa ein endlich abgegrenzter, dem HOOKE'schen Gesetze gehorchender Körper darstellt. (Ideale Feder). Dabei ist keine Energiestrahlung möglich und deshalb auch keine Dämpfung vorhanden.
Im zweiten Fall kann es sich um Befestigungen des Einspannquerschnittes an hypothetischen, unendlich ausgedehnten ideal-elastischen Körpern oder an endlichen und unendlichen quasi-elastischen Körpern handeln. (So können z.B. vom Ende eines einseitig, unendlich langen, ideal-elastischen Stabes Körper-Wellen längs der Stabaxe abstrahlen, die nirgends reflektiert werden und somit Energie wegleiten. Analog werden Wellen die in einem ideal-elastischen Halb- oder Vollraum erzeugt werden, ins Unendliche abgestrahlt.)
Diese zweite Art der Einspannung trägt den tatsächlischen Verhältnissen besser Rechnung und steht im folgenden als Ursache der Abstrahlungsdämpfung zur Diskussion. Sie schliesst zudem die "reversible" elastische Einspannung als Spezialfall ein.

12) Die theoretische Erfassung der Abstrahlungsdämpfung kann mit den DEG geschehen. Diese bedeuten im Sinne von (4) allgemein das Verhältnis der am Einspannquerschnitt wirkenden Kräfte zu den durch sie erzeugten Verformungen bezw. umgekehrt. Es ist einzig vorausgesetzt, dass der Zusammenhang linear bleibt, die DEG also wohl frequenz-, nicht aber amplitudenabhängig sind. Es sei hier nochmals darauf hingewiesen, dass nach (15) von den DEG nur die Imaginärteile für die Abstrahlung massgebend sind. Bei Transversalschwingungen von zur Belastungsebene symmetrischen

Stäben und Haltern treten 4 DEG auf, indem zur Bildung der Linearkombination der Kräfte $\tilde{Q}$ und $\tilde{M}$ mit den Verformungen $\tilde{u}$ und $\tilde{\alpha}$, bezw. umgekehrt, 2 mal 2 Koeffizienten erforderlich sind (1). (Im Falle longitudinaler Schwingungen genügt eine einzige DEG, da nur eine einzige Kraft $\tilde{K}$ mit der ihr entsprechenden Verschiebung $\tilde{w}$ auftritt.)

13) Für $\omega = 0$ lässt sich ein Vergleich mit der in der Bodenmechanik gebräuchlichen Bettungsziffer $C$ des Baugrundes ziehen. Wenn $u$ die Einsenkung der starren Fundamentfläche (die hier als Einspannquerschnitt $F_o$ anzusehen ist) infolge der Kraft $Q = qF_o$ bedeutet, (dynamische Symmetrie nach (7) vorausgesetzt) so ist nach Definition (8) und Fig. 4a

$$\Gamma_{11} = \frac{Q}{u} = F_o \frac{q}{u} = F_o \frac{\sigma_m}{u}$$

Mit $\sigma_m/u = C$ ist die form- und bodenabhängige Bettungsziffer definiert, sodass sich folgender Zusammenhang ergibt

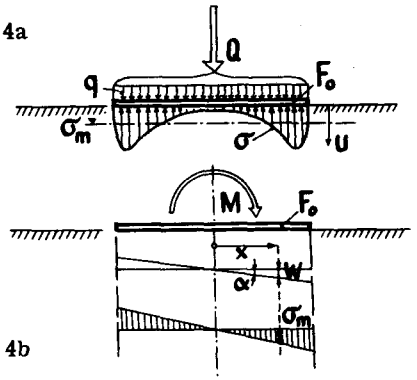
(88) $$\underline{\Gamma_{11} = F_o C}$$

Analog gilt für $\Gamma_{22}$, wenn unter $J_{F_o}$ das Trägheitsmoment der starren Fundamentfläche, bezogen auf eine Axe senkrecht zur Belastungsebene durch den Schwerpunkt $O$ von $F_o$, verstanden wird, Fig. 4b,

(89) $$\Gamma_{22} = \frac{M}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int^{F_o} \sigma_m x \, dF_o = C\int^{F_o} x^2 dF_o = C J_{F_o}$$

$$\underline{\Gamma_{22} = J_{F_o} C}$$

Fig. 4a




$$\sigma_m = \frac{1}{F_o}\int^{F_o} \sigma \, dF_o = q$$

$$\sigma_m = Cw = C\alpha x$$

Fig. 4b

## 2. Beispiele von DEG aus Theorie und Praxis

21) Einspannung an der Endfläche eines einseitig $\infty$-langen Stabes.

Den Beispielen 1a & 1b der Tab. IV liegen die bekannten Bewegungsdifferentialgleichungen für den longitudinal, bezw. transversal schwingenden, ideal-elastischen und prismatischen Stab zu Grunde,

$$\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} - \frac{E_o}{\varrho_o}\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{bezw.} \quad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} + \frac{B_o}{\varrho_o F_o}\frac{\partial^4 \bar{u}}{\partial x^4} = 0 \quad \text{, vergl. (30)}$$

$\bar{w}$ ist die Längs- und $\bar{u}$ die Querverschiebung eines Stabquerschnittes senkrecht zur Stabaxe $x$ . $E_o$, $\varrho_o$, $B_o$ & $F_o$ sind Elastizitätsmodul, Dichte, Biegesteifigkeit und Querschnittsfläche des Stabes.
Der einseitig-unendlichen Länge des Stabes wird durch die Randbedingungen, denen sich die Lösungen anzupassen haben, Rechnung getragen.

22) Einspannung im homogenen, isotropen Raum.

Die Grössen $a$ und $b$ in den Beispielen 2a & 2b, Tab. IV haben eine unmittelbare physikalische Bedeutung. $a$ ist die Longitudinal-, $b$ die Transversalgeschwindigkeit elastischer Raumwellen. In all jenen Fällen von Bauwerkschwingungen, die praktische Bedeutung haben, werden die für die Näherungen massgebenden Werte

$$|X| = \frac{r}{a}\omega \qquad\qquad |Y| = \frac{r}{b}\omega$$

stets kleiner als 0.1 sein, sodass die Näherungen sehr genau sind. Vergleicht man die Beispiele 2a und 2b, Tab. IV und beachtet, dass nur der Imaginärteil für die Abstrahlungsdämpfung massgebend ist, so erkennt man, dass die rotatorische Einspannung praktisch ungedämpft ist, Bsp. 2a , Tab. IV. Im Gegensatz dazu steht die translatorische Einspannung, Bsp. 2b , 3 , 4 , Tab. IV . Für diesen Fall verhalten sich Voll- und Halbraum sowie der gewachsene Boden in erster Näherung wie eine gedämpfte Feder. Der Grund für dieses Verhalten mag darin liegen, dass im Falle der rotatorischen Einspannung, die Formänderung nur aus einer Gestaltänderung des Trägers besteht, während bei der translatorischen Einspannung gleichzeitig noch eine Volumenänderung des Kontinuums erfolgt.

In Beispiel 2 , Tab. IV ist die Wirkung einer starren Vollkugel im homogenen, isotropen Vollraum, in deren Mittelpunkt eine zeitlich harmonische Kraft $\tilde{\mathfrak{K}}$ und ein Moment $\tilde{\mathfrak{M}}$ angreifen, untersucht worden. Die Differentialgleichung für den Verschiebungsvektor $\check{\mathfrak{u}}$ eines Raumteilchens beträgt

(90) $$\ddot{\check{\mathfrak{u}}} - a^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \check{\mathfrak{u}} + b^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \check{\mathfrak{u}} = 0 \quad *)$$

wenn $a$ und $b$ die Geschwindigkeit der Longitudinal- und Transversalwellen bedeuten. Die Lösung erfordert die Erfüllung der Randbedingungen speziell an der Oberfläche der Kugel. Für die Herleitung sei auf (7) verwiesen. Es wird dabei vorausgesetzt, dass der Radius der Kugel gegenüber der Wellenlänge klein ist. Schneidet man das System durch einen Meridianschnitt in 2 symmetrische Hälften, so entsteht das Problem der starren Halbkugel an der Oberfläche eines Halbraumes. Lösungen der Gleichung (90), welche die durch den Schnitt entstandenen neuen Randbedingungen befriedigen, bestehen m.W. noch nicht.

A. WOLF hat in einer Arbeit über angewandte Seismik (26) das Problem der starren Kreisplatte auf dem homogenen, isotropen Halbraum untersucht. Gestützt auf die grundlegenden Untersuchungen von LAMB (14) ergab sich trotz grosszügiger Annahmen, wie Vernachlässigung horizontaler Schubspannungen zwischen Platte und Boden, Vernachlässigung von Oberflächenwellen, Annahme einer willkürlichen, immerhin der theoretischen Verteilung angeglichenen Spannungsverteilung unter der Platte, die interessante Lösung des Beispiels 3 Tab. IV .

Das gleiche Problem wurde von verschiedenen Autoren unter andern eingehend von REISSNER (18) und DIEKMANN (6), ebenfalls auf den Ansätzen von LAMB aufbauend, behandelt.

DIEKMANN schreibt über die DEG $L$ , die er Fundamentfunktion nennt,

*) Die Gleichung entsteht aus der bekannten, vektoriellen, elastostatischen Verschiebungsgleichung für ideal-elastische, homogene und isotrope Stoffe

$$G\left(\Delta \check{\mathfrak{u}} + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \check{\mathfrak{u}}\right) + \check{\mathfrak{K}} = 0$$

Es ist darin die spezifische Volumkraft $\check{\mathfrak{K}}$ durch die spezifische Trägheitskraft $-\varrho \ddot{\check{\mathfrak{u}}}$ zu ersetzen, die Identität $\Delta \check{\mathfrak{u}} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \check{\mathfrak{u}} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \check{\mathfrak{u}}$ zu beachten und für $\frac{1}{\varrho} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} G = \frac{M}{\varrho} = a^2$ , für $\frac{1}{\varrho} G = b^2$ zu setzen.

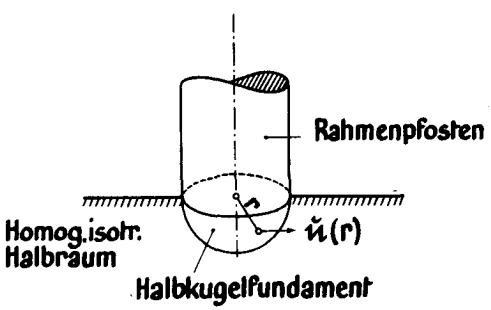
folgendes: "Die einwandfreie theoretische Behandlung der Aufgabenstellung wird besprochen und es wird gezeigt, dass eine exakte Lösung nicht zu erwarten ist."
Die deutsche Gesellschaft für Bodenmechanik, (DEGEBO) hat in (4) versucht, das Problem auf empirische Art zu lösen, wobei die Interpretation der gemessenen Werte mit der Theorie des elastisch und gedämpft schwingenden Massenpunktes generell befriedigte, Bsp. 4 Tab. IV . Interessant ist dabei das Verhältnis der Dämpfungs- zur Federkonstanten, (in (4) mit $\lambda/\pi\alpha^2$ bezeichnet) das durchwegs kleiner als $0.2 \cdot 10^{-3}$ sek ist.

Wie die Kontinuumstheorie zeigt, Bsp. 2 , Tab. IV ; (18), ist es theoretisch nicht möglich, den Voll- oder Halbraum in der Wirkung durch ein aus einer gedämpften Feder bestehendes System zu ersetzen, jedoch zeigen die Resultate deutlich, dass dieser Ersatz als Näherung für praktische Fälle vollauf befriedigt, insbesondere im Hinblick darauf, dass es sich hier nur um eine verbesserte Randbedingung für das Problem der Bauwerkschwingungen handelt.

23) Reine translatorische Einspannung

In (19) behandeln K.SEZAWA und K.KANAI Transversalschwingungen von Stockwerkrahmen (Hochbauten bis zu 8 Stockwerken) im Hinblick auf Erdbebensicherheit. Es wurde hier m.W. erstmals der Versuch unternommen, die Dämpfung durch Abstrahlung elastischer Wellen quantitativ zu bestimmen. Die Einspannung des Rahmenpfostens wird mit Rücksicht auf mathematische Schwierigkeiten in der Weise vorausgesetzt, dass die Kontaktfläche eines starren, halbkugelförmigen Fundamentes mit dem Boden unverschieblich verbunden ist und zufolge ihrer Bewegung elastische Wellen ausstrahlt. Der Boden wird als elastischer, homogen-isotroper Halbraum aufgefasst und die Einspannung als rein translatorisch vorausgesetzt. Fig. 5.

Fig. 5



Es lässt sich tatsächlich zeigen, dass der Verschiebungsvektor $\check{u}(r)$ eines Punktes der Fundamenthalbkugel mit Radius $r$ konstant (sich somit die Halbkugel als starrer Körper translatorisch bewegt) und parallel der horizontalen Oberfläche des Halbraumes ist (translatorische Einspannung), folgende Grösse hat

(91) $$|\check{u}| = \tilde{u}(r) = -\frac{i\alpha}{h^3} F(r) e^{i\omega t}$$

$\alpha$: willkürliche von $r$ unabhängige Konstante (Dimension: Länge)

$$F(r) = \frac{e^{-ihr}}{r}\left[\frac{(h^2k^2r^2 - h^2 - 2k^2) - i(h^2kr + 2hk^2r)}{(3 - k^2r^2) + 3ikr}\right] \qquad h = \frac{\omega}{a} \qquad k = \frac{\omega}{b}$$

und auch die Bewegungsdifferentialgleichung (90) des elastisch, isotropen Körpers befriedigt. Die Randbedingungen an der Oberfläche des Halbraums werden jedoch n i c h t erfüllt. Vergleicht man nämlich die Horizontalverschiebung (91) mit jener, die dem Beispiel 2b . Tab. IV für die Translation einer starren Vollkugel im Vollraum zugrunde liegt

(92) $$|\check{u}| = \tilde{u}(r) = K F(r) e^{i\omega t}$$

$K$: willkürliche von $r$ unabhängige Konstante (Dimension: 4. Potenz der Länge)

so erkennt man, dass die beiden Lösungen identisch sind für

(93) $$K/\alpha = -i/h^3$$

Es ist damit gezeigt, dass die Einspannung in den erwähnten japanischen Arbeiten derjenigen einer starren Vollkugel im Vollraum entspricht. Sie ist zudem rein translatorisch, obschon die im Mittelpunkt eines Rahmenpfostens angreifende Reaktionsdyname nicht nur eine elastische Translation, sondern auch eine Rotation des starren Halbkugelfundamentes bewirkt. Das Problem der Einspannung einer Halbkugel an der Oberfläche eines Halbraums ist damit nicht gelöst.

In Anlehnung an die nach (11) definierte translatorische Einspannung, liegt den japanischen Arbeiten demnach eine Randbedingung $\tilde{Q} = \Gamma\tilde{u}$ zugrunde, wobei $\Gamma$ dem halben Wert von $\Gamma_{11}$ in Beispiel 2b , Tab. IV entspricht. (Der Faktor 1/2 rührt von der Integration der Spannung über die Halbstatt Vollkugel her.)

24) Reine rotatorische Einspannung

Das andere Extrem, die rein rotatorische Einspannung eines prismatischen Stabes, liegt einer Arbeit über Transversalschwingungen von Kirchtürmen zugrunde (15). Es wird die elastische Einspannung im Baugrund durch Einführen der Bettungsziffer $C$ und des Trägheitsmomentes $J_{F_0}$ der Fundation wie folgt definiert

$$\alpha = \frac{1}{C J_{F_0}} M$$

$\alpha$ bedeutet den Drehwinkel, $M$ das entsprechende Drehmoment an der Einspannstelle. Ein Vergleich mit der nach (10) definierten, rotatorischen Einspannung ergibt für die DEG den Wert

(94) $$\Gamma_{11} = \frac{\tilde{M}}{\mathcal{Z}} = \frac{M}{\alpha} = C J_{F_0}$$

Die Einspannung ist also verlustlos elastisch und rein rotatorisch. Das Ersatzsystem nach Cd5,S.69 besteht aus einer ungedämpften Feder mit der Konstanten $C J_{F_0}$ .

25) Grenzwerte der DEG für $\omega \to 0$ (Einspanngrössen der Statik)

Werden die DEG in Anlehnung an die Beispiele 2 , 3 , und 4 , Tab. IV in der genäherten Form geschrieben

(95) $$\Gamma = c\left[1 + c_0(i\omega)\right]$$

so wird für $\omega = 0$, $\Gamma = c$ zu einer statischen Einspanngrösse. Der Wert $c$ kann durch rein statische Ueberlegung gefunden werden. Mit Rücksicht auf die Bedeutung der Form- und Bodenabhängigkeit sind in Tab. V einige Beispiele von Einspanngrössen aus der Kontinuumsmechanik angeführt.

26) Zusammenstellung einiger DEG

Tabelle VI , eine Zusammenstellung der Beispiele 8 , 2 , 3 und 4, lässt den funktionellen Unterschied der einzelnen DEG erkennen. Sie lassen sich tatsächlich, wie im Abschnitt B vorausgesetzt, in der für die weitere theoretische Behandlung zweckmässigen Form (Ba6) darstellen. Beachtenswert ist die einheitliche Grössenordnung der $k_{jk}$ -Werte, was in Anbetracht

# Tab. IV — Beispiele dynamischer Einspanngrössen

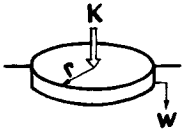
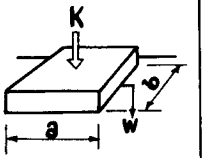
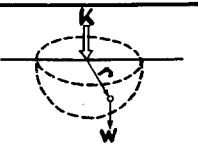
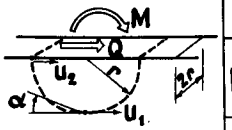
| BSP.NO | HALTER | SYSTEM | ERSATZ-SYST. | DYNAMISCHE EINSPANNGRÖSSE Γ |
|---|---|---|---|---|
| 1a | Einseitig ∞ langer Stab [7] | dynam. $\tilde{K}$ symmetr.<br>$F_0$, $E_0\varrho_0$, $\tilde{w}$ | e | $\Gamma = \frac{\tilde{K}}{\tilde{w}} = \underbrace{F_0\sqrt{E_0\varrho_0}}_{e}(i\omega)$ |
| 1b | | $\tilde{M}$, $\tilde{Q}$, $F_0$, $\tilde{u}$, $\tilde{\alpha}$, $E_0 J_0 \varrho_0$ | — | $\Gamma_{11} = \frac{\tilde{Q}}{\tilde{u}} = E_0 J_0 \varkappa^3(-1+i)\sqrt{\omega^3}$ |
| | | | e | $\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \frac{\tilde{Q}}{\tilde{\alpha}} = \frac{\tilde{M}}{\tilde{u}} = -\underbrace{E_0 J_0 \varkappa^2}_{e}(i\omega)$ $\quad \varkappa = \sqrt[4]{\frac{F_0\varrho_0}{E_0 J_0}}$ |
| | | | — | $\Gamma_{22} = \frac{\tilde{M}}{\tilde{\alpha}} = E_0 J_0 \varkappa(1+i)\sqrt{\omega}$ |
| 2a | Starre Kugel im homogenen isotropen Vollraum [7] | $E_0, \nu_0, \varrho_0$<br>$\tilde{u}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{Q}$, $\tilde{M}$, $F_0$ | cq, c | $\Gamma_{22} = \frac{\tilde{M}}{\tilde{\alpha}} = 8\pi G_0 r^3\left[\frac{\frac{1}{3}Y^3+\frac{2}{3}Y^2-1}{Y^2-1}\right]$ $\quad Y = \frac{r}{b}(i\omega)$, $b = \sqrt{\frac{G_0}{\varrho_0}}$, $G_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}$<br>für $0<\lvert Y\rvert \leq 1$ gilt mit max. 2.6% Fehler<br>$\Gamma_{22} = \overbrace{8\pi G_0 r^3}^{c}\left[1+\overbrace{\frac{1}{6}\frac{r^2\varrho_0}{G_0}}^{q}(i\omega)^2\right]$ |
| 2b | | dynam. symmetr.<br>$\phi_0 = 9(1+2\phi^2)$<br>$\phi_1 = 9(1+2\phi^3)$<br>$\phi_2 = 2-13\phi^2+2\phi^4$<br>$\phi_3 = -3\phi^2(1+2\phi)$<br>$\phi_4 = \phi^3(4-\phi)$<br>$\phi_5 = \phi^3(2+\phi)$ | c, $c_0$ | $\Gamma_{11} = \frac{\tilde{Q}}{\tilde{u}} = \frac{4\pi}{3} M_0 r\left[\frac{\phi_5 X^5+\phi_4 X^4+\phi_3 X^3+\phi_2 X^2+\phi X+\phi_0}{\phi^4 X^4+\phi^2(1-4\phi)X^2+(1+2\phi^2)^2}\right]$ $\quad X = \frac{r}{a}(i\omega)$, $a = \sqrt{\frac{M_0}{\varrho_0}}$, $M_0 = E_0\frac{(1-\nu_0)}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)}$, $\phi = \frac{a}{b} = \sqrt{2+\frac{2\nu_0}{1-2\nu_0}}$<br>für $0<\lvert X\rvert \leq 1$ & $\nu_0 \leq 1/3$ gilt mit max. 2.3% Fehler<br>$\Gamma_{11} = \underbrace{\frac{4\pi}{3}M_0 r\frac{9}{(1+2\phi^2)}}_{c}\left[1+\underbrace{\frac{1+2\phi^3}{1+2\phi^2}r\sqrt{\frac{\varrho_0}{M_0}}}_{c_0}(i\omega)\right]$<br>$\Gamma_{11}\Big\rvert_{\nu_0=1/3} = \underbrace{2\pi E_0 r}_{c}\left[1+\underbrace{1.54 r\sqrt{\frac{\varrho_0}{E_0}}}_{c_0}(i\omega)\right]$ |
| 3 | Kreisrunde, starre Scheibe auf Halbraum [26] | dynam. symmetr.<br>$\tilde{K}$, $F_0$, $r$, $\nu_0 = \frac{1}{4}$, $\tilde{w}$, $\sigma$<br>$\int_{F_0}\sigma\, dF_0 = K$ | $c_q\frac{r^2}{a^2}$, c, $c_p\frac{r}{a}$<br>c, $c_0$ | $\Gamma = \frac{\tilde{K}}{\tilde{w}} = \underbrace{\frac{16}{9}\cdot\frac{6}{5}E_0 r}_{c}\left[1+\underbrace{1.3667}_{p}X+\underbrace{0.4613}_{q}X^2\right]$ $\quad X = \frac{r}{a'}(i\omega)$, $a' = \sqrt{\frac{6}{5}\frac{E_0}{\varrho_0}}$<br>für $0<\lvert X\rvert \leq 1/10$ gilt mit max. 0.4% Fehler<br>$\Gamma = \underbrace{\frac{32}{15}E_0 r}_{c}\left[1+\underbrace{1.25 r\sqrt{\frac{\varrho_0}{E_0}}}_{c_0}(i\omega)\right]$ |
| 4 | Schwingungsmaschine auf gewachsenem Boden [4] | dynam. symmetr.<br>$F_0$, $\tilde{K}$, $\tilde{w}$<br>$\tilde{K}$, $F_0$, $F_0$, $\tilde{w}$ | $cc_1$, $cc_0$, c<br>c, $cc_0$ | $\Gamma = \frac{\tilde{K}}{\tilde{w}} = c\left[1+c_0(i\omega)+c_1(i\omega)^2\right]$ $\quad c_0 = \frac{\lambda}{\pi\alpha^2} = \frac{1}{800}\div\frac{1}{500}$<br>45 Versuche auf sandigem u. lehmigem Boden im Frequenzbereich von 10 bis 35 Hz, bei einer oszillierenden Kraft von 100 bis 1000 Kg u. einem Eigengewicht der Schwingungsmaschine von 1350 bis 1530 Kg.<br>Für eine Einzellast über die Kontaktfläche der Schwingungsmaschine übertragen folgt wegen $cc_1 = 0$ $(c_1 = 0)$<br>$\Gamma = \frac{\tilde{K}}{\tilde{w}} = c\left[1+c_0(i\omega)\right]$ |

Leer - Vide - Empty

Tab. V

# Grenzwerte dynamischer Einspanngrössen (DEG) $\omega \to 0$

$\Gamma = f_1(E_0 r) \cdot f_2(\nu_0)$

| Bsp No | | $F_0$ | SYSTEM | DEG | $f_1(E_0 r)$ | $f_2(\nu_0)$ | $f_2(\frac{1}{3})$ | $f_2(\frac{1}{4})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (5a) 5 (5b) | Kreisplatte auf Halbraum | starr |  | $\Gamma = \frac{K}{w}$ | $E_0 \pi r$ | $\frac{2}{\pi(1-\nu_0^2)}$ | 0.72 | 0.68 |
| | | schlaff | | $\Gamma = \frac{K}{\frac{1}{F_0}\int w\,dF_0}$ | | $\frac{1}{0.96\sqrt{\pi}(1-\nu_0^2)}$ | 0.66 | 0.63 |
| (6a) 6 (6b) | Rechteckplatte auf Halbraum | schlaff, $F_0 = \pi r^2$, $\frac{a}{b} = 1$ |  | $\Gamma = \frac{K}{\frac{1}{F_0}\int w\,dF_0}$ | $E_0 \pi r$ | $\frac{1}{0.95\sqrt{\pi}(1-\nu_0^2)}$ | 0.67 | 0.63 |
| | | $\frac{a}{b} = 2$ | | | | $\frac{1}{0.92\sqrt{\pi}(1-\nu_0^2)}$ | 0.69 | 0.65 |
| 7 | Einzellast auf Halbraum | Halbkugel-Oberfläche |  | $\Gamma = \frac{K}{\frac{1}{F_0}\int w\,dF_0}$ | $E_0 \pi r$ | $\frac{6}{(1+\nu_0)(7-6\nu_0)}$ | 0.90 | 0.87 |
| 8 | Dynamo auf Halbscheibe (Ebener Formänderungszustd.) | Halbkreiszylinder |  $u = u_2 - u_1$ | $\Gamma_{11} = \frac{Q}{u}\Big\|_{\alpha=0}$ | $E_0 \pi r$ | $\frac{2(2+\nu_0)}{(1+\nu_0)(2+\nu_0-2\nu_0^2)}$ | 1.66 | 1.69 |
| | | | | $\Gamma_{12} = \frac{Q}{\alpha}\Big\|_{u=0} = \Gamma_{21} = \frac{M}{u}\Big\|_{\alpha=0}$ | $E_0 \pi r^2$ | $\frac{2\nu_0}{(1+\nu_0)(2+\nu_0-2\nu_0^2)}$ | 0.24 | 0.19 |
| | | | | $\Gamma_{22} = \frac{M}{\alpha}\Big\|_{u=0}$ | $E_0 \pi r^3$ | $\frac{1}{(1+\nu_0)(2+\nu_0-2\nu_0^2)}$ | 0.36 | 0.38 |

# Zusammenstellung dynamischer Einspanngrössen (DEG)

Tab. VI

$\Gamma_{11} = \Gamma_{011}(1 + i\delta_{11})$ $\quad \Gamma_{22} = \Gamma_{022}(1 + i\delta_{22})$ $\quad \Gamma_{12} = \Gamma_{012}(1 + \delta_{12}) = (\Gamma_{21})$

$\Gamma_{011} = k_{11} E_0 \pi r$ $\quad \Gamma_{022} = k_{22} E_0 \pi r^3$ $\quad \Gamma_{012} = k_{12} E_0 \pi r^2$

| Bsp No | SYSTEM | $k_{11}$ | $\delta_{11}$ | $k_{22}$ | $\delta_{22}$ | $k_{12}$ | $\delta_{12}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | Halbkreisscheibe auf Halbebene ($\nu_0 = 1/3$) | 1.66 | — | 0.36 | — | 0.24 | — |
| 2 | Starre Vollkugel im Vollraum ($\nu_0 = 1/3$) (halber Wert) | 1.0 | $1.54 r \sqrt{\frac{\varrho_0}{E_0}} \omega$ / $< \approx 10^{-2}$ | 1.5 | 0 | dyn. symmetr. | |
| 3 | Kreisplatte auf Halbraum ($\nu_0 = 1/4$) [19] | 0.68 | $1.25 r \sqrt{\frac{\varrho_0}{E_0}} \omega$ / $< \approx 10^{-2}$ | — | — | dyn. symmetr. | |
| 4 | 45 Versuche der DEGEBO [23] | — | $\frac{1}{800} \div \frac{1}{500}$ / $\approx 1.5 \cdot 10^{-3}$ | — | — | dyn. symmetr. | |

— nicht bekannt

der verschiedenartigsten Voraussetzungen, die den Beispielen zugrunde liegen, nicht a priori zu erwarten war. Es erscheint somit die Wahl eines Mittelwertes von $k_{11} = 1$ und $k_{22} = 1$ im Abschnitt D, (113) zutreffend.
Die Beispiele 2 , 3 und 4 zeigen, dass die mit $\delta_{jk}$ bezeichneten Grössen offensichtlich klein sind gegen 1 . Die Annahme einer schwachen Abstrahlungsdämpfung (Ba6) wird damit bestätigt.

Generell lässt die Untersuchung den Schluss zu, dass für die Abstrahlungseigenschaften die geometrische Form der Einspannfläche $F_o$ nicht von Bedeutung ist. Massgebend ist die Grösse der Fläche $F_o$ , auf der abgestrahlt wird.

## 3. Empirische Ermittlung der DEG (Messung)

Von den DEG $\Gamma$ und $L$ eignen sich die Grössen $L$ am besten zur Messung. (Die $\Gamma$ lassen sich hernach mit der Beziehung (3) berechnen). Man hat im Sinne von (4) einzeln eine bekannte Querkraft $\tilde{Q}$ und ein bekanntes Drehmoment $\tilde{M}$ auf die starre Einspannfläche $F_o$ in deren Mittelpunkt $O$ wirken zu lassen und die Quotienten dieser Kräfte mit den erzwungenen Verformungen nach Fig. 2 zu bilden. Letztere können mit einem Schwingungsmesser oder Seismographen gemessen werden.
Die Erzeugung von zeitlich harmonischen Kräften und Momenten kann durch eine Schwingungsmaschine, wie sie z.B. die DEGEBO (4) gebraucht, erfolgen. Es ist dafür zu sorgen, dass die Maschine starr mit der Fundamentfläche $F_o$ verbunden wird. Zur Bestimmung von z.B. $L_{11}$ (für die übrigen $L_{jk}$ gilt sinngemäss das gleiche) wird von der komplexen Amplitude

(96) $$\tilde{u} = u e^{i\omega t} = u_o e^{i\varphi} e^{i\omega t}$$

der Absolutwert $u_o$ , sowie der Phasenwinkel $\varphi$ (zeitliche Differenz von Kraft und Verschiebungsmaximum multipliziert mit der Kreisfrequenz) gemessen.
Nach (4) wird dann

(97) $$L_{11} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{Q}} = \frac{u e^{i\omega t}}{Q e^{i\omega t}} = \frac{u_o e^{i\varphi} e^{i\omega t}}{Q_o 1 e^{i\omega t}} = \frac{u_o}{Q_o}(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

wobei $Q_o$ als reelle Amplitude der aufgebrachten Kraft a priori bekannt ist.

Weil durch das Eigengewicht der Schwingungsmaschine eine zusätzliche, gleichbleibende Masse auf die Einspannfläche $F_o$ aufgebracht wird, sind die gemessenen $L_{jk}$ zu korrigieren. Beachtet man dass nach Cd5, Tab. VIII S.70 einer translatorisch bewegten, starren Masse $m$ eine DEG $L_m = 1/m(i\omega)^2$ entspricht, und diese parallel geschaltet ist, so lässt sich nach Tab. VIII das effektive $L = L_e$ aus dem gemessenen $L = L_g$ berechnen.

Es gilt

$$\frac{1}{L_e} = \frac{1}{L_g} - \frac{1}{L_m}$$

und somit

$$\underline{L_e = \frac{1}{1/L_g + m\omega^2}} \tag{98}$$

Im Falle der rotatorisch bewegten Masse (Bestimmung von $L_{12}$ und $L_{21}$) hat $m$ die Bedeutung des polaren Massenträgheitsmomentes der Maschine bezüglich der Drehaxe.

## 4. Ermittlung der DEG aus Messungen am Modell

Um die DEG aus einem Modellversuch zu ermitteln, muss die Bedingung der dynamischen Aehnlichkeit erfüllt sein. Beide Vorgänge müssen in allen Teilen, sowohl geometrisch, wie zeitlich, wie bezüglich den Kräften ähnlich sein, d.h. in einem gegebenen Verhältnis (Masstab) zueinander stehen und Anfangs- wie Randbedingungen müssen identisch sein. Die Differentialgleichungen der Bewegung des Modells und der Wirklichkeit lassen sich dann in vollkommene Uebereinstimmung bringen. Entsprechend den drei Grunddimensionen des technischen Massystems (das hier vorausgesetzt sein soll): Länge $L$, Zeit $T$ und Kraft $K$, gibt es drei Grundmasstäbe $\lambda$, $\tau$ und $\varkappa$, welche die Bildung abgeleiteter Masstäbe gestatten, Tab. VII. Die Beziehungen der Masstäbe untereinander sind durch die einzelnen Modellgesetze festgelegt. Welches Modellgesetz zutrifft, wird durch die Art der beteiligten Kräfte bestimmt.

Tab. VII

| Wirklichkeit grosse -, Modell kleine Buchstaben | | |
|---|---|---|
| GRUND MASSTÄBE | Geometrie<br>Zeit<br>Kraft | $\frac{L}{l} = \lambda$<br>$\frac{T}{t} = \tau$<br>$\frac{K}{k} = \varkappa$ |
| ABGELEITETE MASSTÄBE | Dichte<br>{Elastizitäts-bezw. Raumdruckmodul | $\frac{\rho}{\varrho} = \frac{\tau^2 \varkappa}{\lambda^4} = p$<br>$\frac{E}{e} = \frac{M}{m} = \frac{\varkappa}{\lambda^2} = q$ |

Obschon die DEG an keine Voraussetzungen über die im Halter wirkenden Kräfte gebunden sind, muss hier der Eindeutigkeit wegen eine Voraussetzung über die beteiligten Kraftarten getroffen werden. Die naheliegendste und i.allg. leidlich zutreffende Annahme ist die, dass der Halter einen homogenen, isotropen Körper bilde, in dem nur Trägheits- und elastische Kräfte HOOKE'scher Art wirken. Für diese beiden Kraftarten gilt das Modellgesetz von CAUCHY, vergl. (22)

(99) $$\boxed{\tau = \lambda \sqrt{\frac{p}{q}}}$$

Nach (22) ist allgemein der Uebertragungsmasstab für 2 entsprechende Grössen in der gleichen Weise aus den Grundmasstäben $\lambda$ , $\tau$ & $\varkappa$ zu bilden, wie die zugehörige Masseinheit aus den Grundeinheiten $L$ , $T$ & $K$ .

Diese Regel auf das Verhältnis der Kreisfrequenzen angewendet, liefert unmittelbar wegen $[\Omega] = \frac{1}{T}$ *)

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{1}{\tau}$$

*) Dimension der eingeklammerten Grösse

wobei $\tau$ der Gleichung (99) zu genügen hat. Es wird daher

(100) $$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{q}{p}}$$

Die Masstäbe der DEG selbst ergeben sich gleichfalls aus der obigen Regel. So wird, um ein Beispiel zu nennen, wegen $[\Gamma_{11}] = \frac{K}{L}$ *)

$$\frac{\Gamma_{11}}{\gamma_{11}} = \frac{\varkappa}{\lambda}$$

Wird $\varkappa$ noch durch $q = \frac{\varkappa}{\lambda^2}$ (Tab. VII) eliminiert, so ergibt sich die gesuchte Beziehung

(101) $$\Gamma_{11} = q\lambda \cdot \gamma_{11}$$

Sie sagt aus, wie bei gegebenem Längen-, Dichte- und Raumdruckmodul-Masstab das gesuchte $\Gamma_{11}$ aus dem am Modell gemessenen $\gamma_{11}$ ermittelt werden kann, wenn für die erzwungene Schwingung der Frequenzmasstab (100) eingehalten wird.

Von den drei Spezialfällen

| | | | | Frequenzmasstab: |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $P = Q$ | $(q=1)$ | $\Gamma_{11} = \lambda\gamma_{11}$ | $\frac{\Omega}{\omega} = \frac{1}{\lambda\sqrt{p}}$ |
| (102) 2. | $M = m$ | $(p=1)$ | $\Gamma_{11} = \lambda\gamma_{11}$ | $\frac{\Omega}{\omega} = \frac{\sqrt{q}}{\lambda}$ |
| 3. | $\begin{cases} P = Q \\ M = m \end{cases}$ | $\begin{pmatrix} p=1 \\ q=1 \end{pmatrix}$ | $\Gamma_{11} = \lambda\gamma_{11}$ | $\frac{\Omega}{\omega} = \frac{1}{\lambda}$ |

ist der dritte interessant. Ist der Halter des Modells und der Wirklichkeit identisch, so muss, um dynamische Aehnlichkeit zu erreichen, die erregende Kreisfrequenz am Modell entsprechend dem geometrischen Masstab abgeändert werden.

Allgemein werden die Matrizen für die elastische Einspannung im homogenen, isotropen Halbraum wie folgt aus den Modellmatrizen gebildet

(103) $$\begin{bmatrix} \Gamma_{11} = q\lambda \cdot \gamma_{11} & \Gamma_{12} = q\lambda^2 \cdot \gamma_{12} \\ \Gamma_{21} = q\lambda^2 \cdot \gamma_{11} & \Gamma_{22} = q\lambda^3 \cdot \gamma_{22} \end{bmatrix} \text{ bezw. } \begin{bmatrix} L_{11} = \frac{1}{q\lambda} \cdot l_{11} & L_{12} = \frac{1}{q\lambda^2} \cdot l_{12} \\ L = \frac{1}{q\lambda^2} \cdot l_{21} & L_{22} = \frac{1}{q\lambda^3} \cdot l_{22} \end{bmatrix}$$

*) Dimension der eingeklammerten Grösse

Die einzige Voraussetzung ist die, dass bei der Messung die Bedingung (100) eingehalten wird.

## 5. Der Halter als Kombination dreier mechanisch-dynamischer Elemente

51) Wie unter A, S. 17 erwähnt, ist der Halter charakterisiert durch die DEG. Diese gehen durch die Randbedingungen in das Schwingungsproblem ein und bringen so die Wirkung des Halters auf den Schwinger zum Ausdruck.

Die Frage, ob der Halter durch ein physikalisch anschaulicheres, mechanisch aber äquivalentes Ersatzsystem darstellbar ist, kann also eindeutig anhand der DEG beantwortet werden. Die notwendige und hinreichende Bedingung für den Ersatz ist daher, abgesehen von deren Existenz, die Uebereinstimmung in den DEG.

Als einfachste Elemente für lineare Ersatzsysteme sind zu verstehen: ideale Feder, starre Masse und (der Geschwindigkeit proportionales) Dämpfungselement. Aus diesen drei Grundtypen ist es möglich, kompliziertere Gebilde zusammenzubauen, wobei die "Schaltung" hintereinander oder parallel erfolgen kann. Der Mechanismus solcher zusammengesetzter Systeme wird im folgenden beschrieben.

Ist $\bar{y}$ die auf ein System wirkende Kraft und $\bar{x}$ die resultierende Verschiebung für eine Führung in $x$ -Richtung, so lassen sich alle möglichen Kombinationen der drei Grundtypen durch die lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten erfassen.

$$a_n \bar{x}^{(n)} + a_{n-1} \bar{x}^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{\bar{x}} + a_0 \bar{x} = b_m \bar{y}^{(m)} + b_{m-1}^{n} \bar{y}^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{\bar{y}} + b_0 \bar{y} \tag{104}$$

Setzt man speziell $\bar{y} = \tilde{y}$ so ergibt sich mit der Lösung $\bar{x} = \tilde{x}$ die gesuchte dynamische Einspanngrösse $\Gamma$ *) zu

$$\Gamma = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} = \frac{y}{x} = \frac{a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \ldots + a_1 (i\omega) + a_0}{b_m (i\omega)^m + b_{m-1} (i\omega)^{m-1} + \ldots + b_1 (i\omega) + b_0} \tag{105}$$

*) Die nachstehenden Formeln können mit Hilfe der Beziehung $L\Gamma = 1$ auf die DEG $L$ übertragen werden.

Man kann nun zeigen, dass es möglich ist, die DEG des zusammengesetzten Systems aus den DEG der Grundtypen direkt, also ohne Umweg über die Differentialgleichung (104) zu berechnen. Da sich alle möglichen Kombinationen durch nur zwei Schaltarten (Kopplungen) erreichen lassen, genügt es, diese zwei Fälle zu untersuchen. Der Formalismus ist aus Tab. VIII ersichtlich.

**Tab. VIII**

| Element | STARRE MASSE | DÄMPFUNG | FEDER | ↓ Formel No |
|---|---|---|---|---|
| Symbol | | | | |
| Reaktions-Kraft | $-m\ddot{\bar{x}}$ | $-e\dot{\bar{x}}$ | $-c\bar{x}$ | |
| Bezeichnung | m | e | c | |
| DEG $\Gamma$ | $m(i\omega)^2$ | $e(i\omega)$ | c | 1 |
| Schaltung von n-Elementen | PARALLEL | $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ | | 2 |
| | IN SERIE | $\frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2}$ | | 3 |

Erläuterungen zu Tab. VIII:

Formel 1 . Die drei DEG $\Gamma$ folgen unmittelbar aus dem Prinzip von D'ALEMBERT, formuliert für die am Element angreifenden Kräfte.

Formel 2 . (Fig. 6) Gesucht ist das Element "$\Gamma$" aus der Parallelschaltung der Einzelelemente "$\Gamma_1$" und "$\Gamma_2$".

Es ist

1. $\Gamma_1 = \frac{\tilde{y}_1}{\tilde{x}_1}$ ; $\Gamma_2 = \frac{\tilde{y}_2}{\tilde{x}_2}$ ; $\Gamma = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$ Definition
2. $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}$ Parallelschaltung
3. $\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ dynamisches Gleichgewicht

Wird 3. durch $\tilde{x}$ dividiert, so folgt mit Rücksicht auf 1. und

2. sofort

$$\boxed{\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2}$$

Formel 3 . (Fig. 7) Gesucht ist das Element "$\Gamma$" aus der Hintereinanderschaltung der Einzelelemente "$\Gamma_1$" und "$\Gamma_2$".

Es ist

1. $\Gamma_1 = \frac{\tilde{y}_1}{\tilde{x}_1}$ ; $\Gamma_2 = \frac{\tilde{y}_2}{\tilde{x}_2}$ ; $\Gamma = \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$ Definition

2. $\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2$ Serieschaltung

3. $\tilde{y} = \tilde{y}_1$ ; $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2$ dynamisches Gleichgewicht

Wird 1. in 2. eingesetzt, so folgt mit 3. unmittelbar

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{\Gamma_1} + \frac{1}{\Gamma_2}}$$

Fig. 6

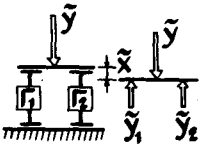
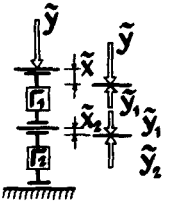


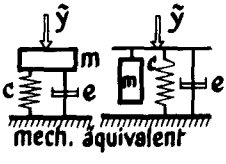

Fig. 7




52) Beispiele von Kombinationen

1. Parallelschaltung aller drei Elemente

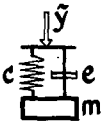
(106)




$$\Gamma = m(i\omega)^2 + e(i\omega) + c$$

2. Hintereinanderschaltung einer Masse mit einem Doppel-Element, bestehend aus parallel geschalteter Feder und Dämpfung

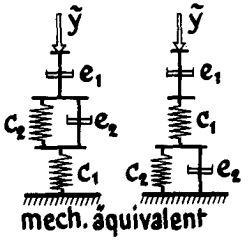
(107)




$$\left(\frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{m(i\omega)^2} + \frac{1}{e(i\omega)+c}\right) \qquad \Gamma = \frac{em(i\omega)^3 + cm(i\omega)^2}{m(i\omega)^2 + e(i\omega) + c}$$

3. Fundamentalsystem von ALFREY (1) (ohne Masse)

(108)




$$\Gamma = \frac{c_1 e_1 e_2 (i\omega)^2 + c_1 c_2 e_1 (i\omega)}{e_1 e_2 (i\omega)^2 + (c_1 e_1 + c_2 e_1 + c_1 e_2)(i\omega) + c_1 c_2}$$

53) Es sei noch auf die vollständige Analogie mit einem elektro-dynamischen Schwingungskreis hingewiesen. Die drei elementaren Zweipole, nämlich rein OHM'scher Widerstand $R$, Kapazität $C$ und Induktivität $J$ übernehmen die Funktion der mechanisch-dynamischen Elemente. Einander entsprechende Grössen sind in Tab. IX zusammengestellt.

Tab. IX

| MECHANISCH | | ELEKTRISCH | |
|---|---|---|---|
| Masse | m | J | Induktivität |
| Dämpfung | e | R | Widerstand |
| Feder | c | 1/C | (reziproke) Kapazität |
| Kraft | y | V | Spannung |
| Verschiebung | x | E | Ladung |
| Geschwindigkeit | $\dot{x}$ | I | Stromstärke |

54) Die Abklärung der Frage, ob es in jedem Falle möglich ist, durch geeignete Kombination der drei Elemente ein Ersatzsystem zu finden, das eine vorgeschriebene DEG *) aufweist, ist nur vom rein theoretischen Standpunkt aus interessant. Eine diesbezügliche Untersuchung ergab, dass die Ersatzsysteme rasch komplizierter werden, dementsprechend an Anschaulichkeit verlieren und damit ihren Zweck verfehlen.

*) Die von $\omega$ abhängige, komplexe DEG würde mit Rücksicht auf Gleichung (105) am zweckmässigsten in Form einer Potenzreihe von $(i\omega)$ vorgegeben.

Ein Vergleich der in Tab. IV aufgeführten, berechneten und gemessenen $\Gamma$ -Werte zeigt, dass sich die Halter der Beispiele 2b ,3 und 4 für praktische Verhältnisse mit hinreichender Genauigkeit durch das einfachste System, das noch eine Abstrahlung erfasst, darstellen lassen, nämlich durch eine ideale Feder und ein Dämpfungselement in paralleler Schaltung. Die Feder vertritt dabei die verlustlos elastische Einspannung, und das Dämpfungsglied berücksichtigt nach (15) die abstrahlende Energie.

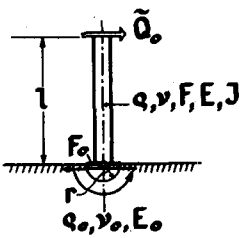
Es gilt also

(109)
$$\Gamma \approx c + e(i\omega) = c\left[1 + \frac{e}{c}(i\omega)\right] \qquad \underline{e = cc_0}$$
$$= c\left[1 + c_0(i\omega)\right]$$

Leer - Vide - Empty

# D. Transversale Grundschwingungen des einseitig elastisch eingespannten Stabes

Fig. 8




## a. BEISPIEL, FESTE UND VARIABLE WERTE

Im vorstehenden Abschnitt C wurde die mutmassliche Grössenordnung der Dämpfungskoeffizienten $\Lambda$ , $\delta_\gamma$ und $\delta_{jk}$ der innern, äussern und Abstrahlungsdämpfung ermittelt. Damit ist man in der Lage, die quantitative Auswirkung der Dämpfungsformen an einem einseitig elastisch eingespannten, stabförmigen Bauwerk nach der Theorie schwach gedämpfter Biegeschwingungen (Abschnitt B) zu berechnen (Fig. 8). Es sei als Beispiel ein Turm aus Natursteinmauerwerk mit folgenden festen Daten gewählt

$$\begin{aligned} \varrho &= 275 \ \mathrm{kg\,sek^2 m^{-4}} & J &= 70 \ \mathrm{m^4} \\ E &= 6 \cdot 10^8 \ \mathrm{kg\,m^{-2}} & F &= 15 \ \mathrm{m^2} \\ \nu &= 1/3 & r &= 3 \ \mathrm{m} \end{aligned} \tag{110}$$

Die Bezeichnungen sind die gleichen wie im Abschnitt B. In Fig. 8 bedeutet $r$ den Radius eines starren, halbkugelförmigen Fundamentes mit kreisförmiger Einspannfläche $F_o$ . Wie in Cd25) gezeigt wurde, hat die Form der Einspannfläche und damit des Fundamentes keinen wesentlichen Einfluss auf die Abstrahlungseigenschaften. Es kann sich ebensogut um ein starres Fundament beliebiger Form mit gleich grosser Einspannfläche handeln.

Alle übrigen Grössen betreffend die Einspannung und Dämpfung sind zur Beurteilung ihres Einflusses als Parameter aufgefasst und in ihren numerisch wahrscheinlichsten Werten variiert worden. Als Parameter der

innern Dämpfung nach VOIGT, ist nach Cb, S.44 die Retardationszeit $\Lambda$ anzusehen. *) Die äussere Dämpfung, d.h. der Luftwiderstand ist gemäss der Untersuchung Cc, S.51 unbedeutend, von einer Berücksichtigung wurde deshalb abgesehen. Die Abstrahlungsdämpfung wird nach (15) durch die Imaginärteile der DEG $\Gamma_{jk}$ erfasst. Gestützt auf die Untersuchung Cd2, S.56 (Zusammenstellung Tabelle VI ) kann für die Einspannung die Kräftematrix Ba6, S.34 in folgender Form angesetzt werden.

(111)
$$\Gamma_{11} = \Gamma_{o11}(1+i\delta_{11}) = k_{11}\, r\, E_o \pi (1+i\delta) \qquad \Gamma_{12} = \Gamma_{o12} = k_{12}\, r^2 E_o \pi$$
$$\Gamma_{21} = \Gamma_{12} \qquad \Gamma_{22} = \Gamma_{o22} = k_{22}\, r^3 E_o \pi$$

Als Abstrahlungsparameter ist somit einzig $\delta_{11} = \delta$ zu verstehen, da $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{22} = 0$ zu setzen sind.
Wird $1/n = E_o/E$ (Verhältnis der Elastizitätsmoduli von Halter und Schwinger) eingeführt und als Einspannungsgrad bezeichnet, so nehmen die reellen Konstanten $\Gamma_{ojk}$ , welche die elastisch "reversible" Einspannung charakterisieren, folgende Formen an

(112)
$$\Gamma_{o11} = \frac{k_{11}}{n} r\, E\pi \qquad \Gamma_{o12} = \frac{k_{12}}{n} r^2 E\pi$$
$$\Gamma_{o21} = \Gamma_{o12} \qquad \Gamma_{o22} = \frac{k_{22}}{n} r^3 E\pi$$

Dabei sind den Tabellen V und VI als Mittelwerte für die Einspannungskonstanten

(113)
$$k_{11} = 1 \quad \text{und} \quad k_{22} = 1$$

zu entnehmen, während über $k_{12}$ ein einziger Wert vorliegt. Die Frequenzgleichung (48) zeigt aber, dass physikalisch brauchbare Lösungen nur möglich sind für

(114)
$$|k_{12}| < 1$$

*) Das Produkt $GA$ hat die Bedeutung von $\alpha/2$ in (8), $k$ in (17) und $\eta'$ in (9) und wird als eigentlicher VOIGT'scher Koeffizient bezeichnet, ist aber keine physikalisch anschauliche Grösse.

sodass dieser Wert zweckmässiger als Parameter aufgefasst und in den theoretisch möglichen Grenzen variiert wird. Für $n > 0$ sind nach (10), (11) und (12) die 3 speziellen Einspannungen folgendermassen charakterisiert:

| | 1. rotat. Einspannung | 2. translat. Einspannung | 3. starre Einspannung |
|---|---|---|---|
| (115) | $k_{11} = \infty$ | $k_{11} = 1$ | $k_{11} = \infty$ |
| | $k_{22} = 1$ | $k_{22} = \infty$ | $k_{22} = \infty$ |

Mit $n \to 0$ geht auch die rotatorische und translatorische Einspannung in die starre Einspannung über.

Eine Uebersicht über die in die Betrachtung einbezogenen Grössen der Parameter gibt Tab. X

**Tab. X**

| Bezeichnung | Parameter | Intervall |
|---|---|---|
| $\Lambda$ | Retardationszeit (innere Dämpfung nach VOIGT) | $10^{-1} \div 10^{-4}$ sek |
| $\delta$ | Abstrahlungsparameter | $10^{-1} \div 10^{-4}$ |
| $n$ | reziproker Einspannungsgrad | $0 \div 10^{2}$ |
| $k_{11}$, $k_{12} = k_{21}$, $k_{22}$ | Einspannungskonstanten | $1 \div \infty$, $0 \div 1$, $1 \div \infty$ |
| $l$ | Länge des Schwingers (Schlankheit) | $20 \div 40$ m |

Die Berechnung der Eigenfrequenz, bezw. des Frequenzparameters $f$ wird im Hinblick auf die bevorzugte Bedeutung der Grundschwingungen auf diesen wichtigsten Sonderfall beschränkt. (Diagr. 1, 2, 3 )

Was die Ausbiegung, als auch die Beanspruchung betrifft, so interessieren vor allem die Maximalwerte in der Resonanz. Es kann dabei unterschieden werden zwischen analytischem Maximum (Ableitung Null gesetzt) und Randmaximum (grösster Absolutwert im betrachteten Intervall). In der Grundresonanz treten keine analytischen Maxima auf. Die Untersuchung beschränkt sich somit auf Randwerte.

Die maximale Amplitude der Auslenkung $\tilde{U}$ berechnet sich aus (55) für $x = l$, während die Maximalwerte für die Amplituden des Biegemomentes $\tilde{M}$ und der Querkraft $\tilde{Q}$ aus (61) für die Einspannstelle $x = 0$ hervorgehen.

Werden die statischen Grössen

(116) $$U_{stat.} = \frac{Q_o l^3}{3B} \qquad M_{stat} = Q_o l \qquad Q_{stat} = Q_o$$

zum Vergleich herangezogen, so ergeben sich mit den Vergrösserungsfaktoren $V_D$, $V_M$ und $V_Q$, die Formeln

(117) $$\boxed{U = V_D U_{stat}} \qquad \boxed{M = V_M M_{stat}} \qquad \boxed{Q = V_Q Q_{stat}}$$

Die Vergrösserungsfaktoren sind in den Diagrammen 6÷20 dargestellt.

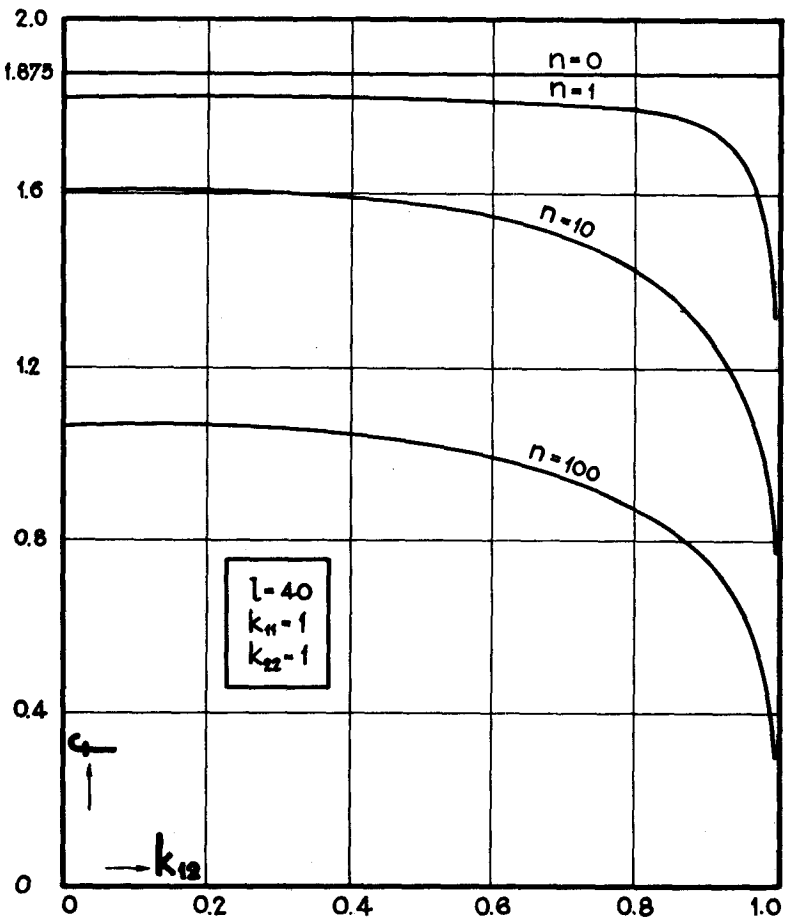
Der Einfluss der innern- oder Werkstoffdämpfung $(\Lambda)$, sowie der Abstrahlungsdämpfung $(\delta)$ auf Auslenkung $U$ und Schnittgrössen $M$, $Q$ lässt sich eindeutig am Nennerausdruck der Gleichungen (55) und (61) ersehen. In diesen Gleichungen sind nämlich die Zähler frei von $\Lambda$ und $\delta$. In der Form

(118) $$\mathcal{R}D(\Lambda,\delta) = \mathcal{R}D_\delta + \mathcal{R}D_\Lambda \qquad \begin{cases} \mathcal{R}D_\delta = \mathcal{R}D(\Lambda = 0) \\ \mathcal{R}D_\Lambda = \mathcal{R}D(\delta = 0) \end{cases}$$

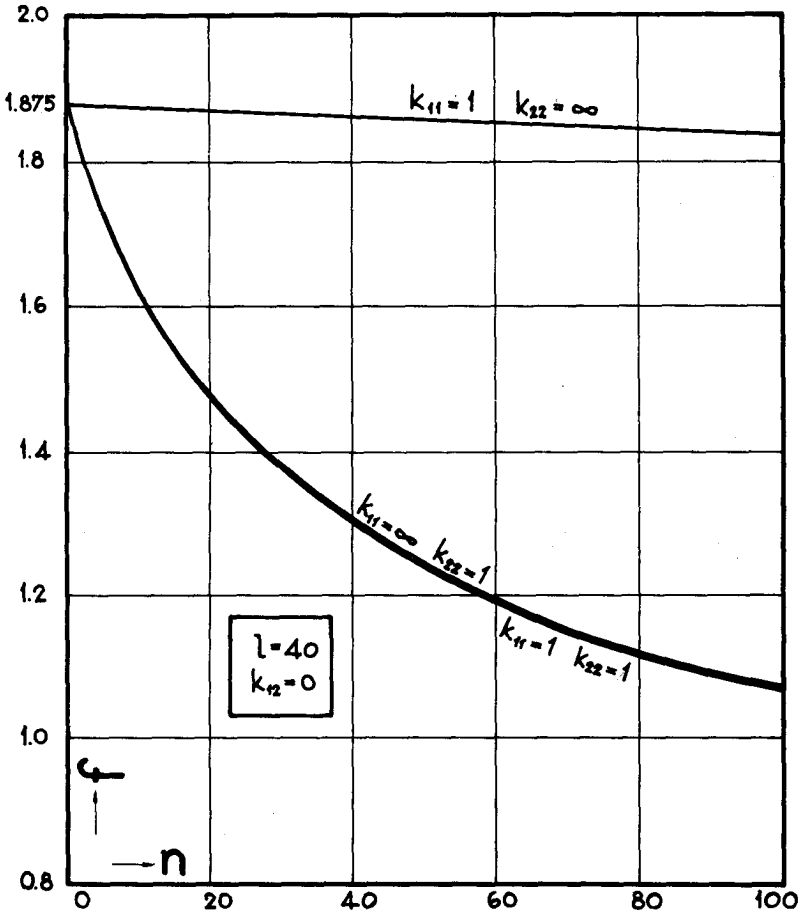
bedeutet $\mathcal{R}D_\Lambda$ den Anteil der Werkstoffdämpfung, $\mathcal{R}D_\delta$ den der Abstrahlungsdämpfung am Gesamtnenner $\mathcal{R}D$. Die beiden Anteile sind in den Diagrammen 4 und 5 in Funktion des Einspanngrades $1/n$ dargestellt.

b. DIAGRAMME

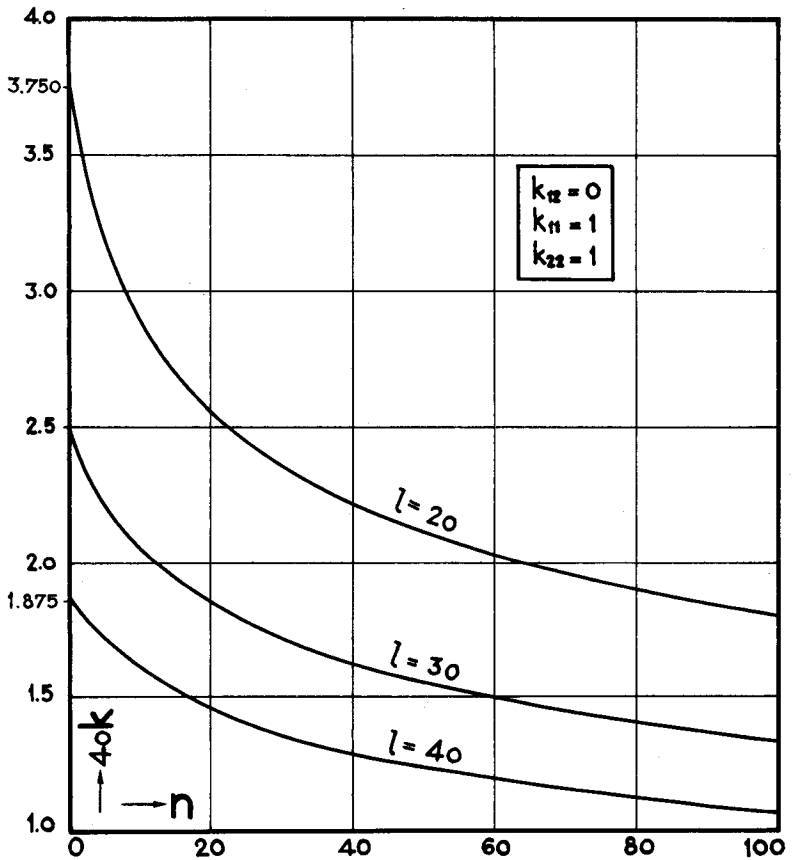
1


2.0
1.875
1.6
1.2
0.8
0.4
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
n=0
n=1
n=10
n=100
l=40
k11=1
k22=1
c1
k12

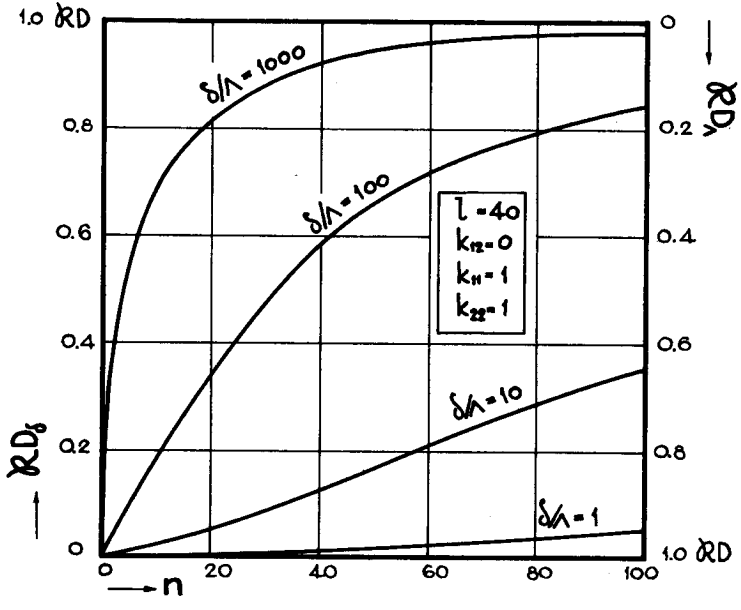
2


2.0
1.875
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0
20
40
60
80
100
$k_{11}=1$ $k_{22}=\infty$
$k_{11}=\infty$ $k_{22}=1$
$k_{11}=1$ $k_{22}=1$
$l=40$
$k_{12}=0$
$\varphi$
$n$

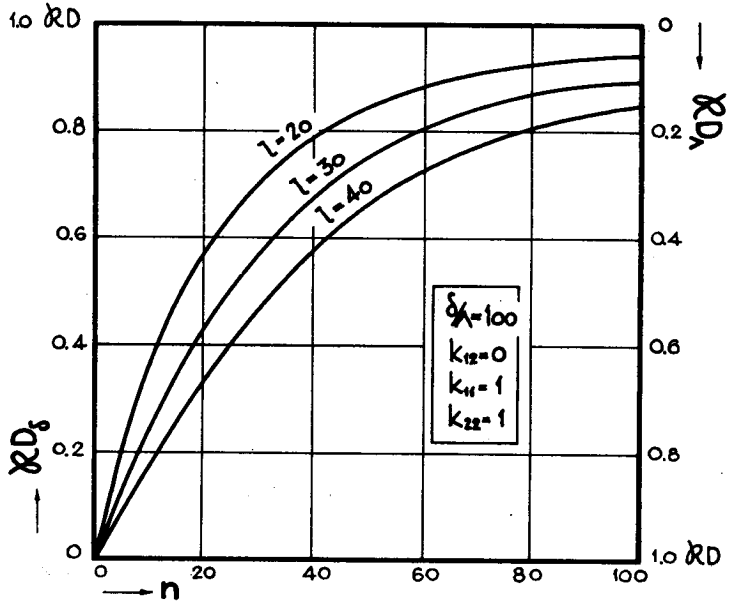
3

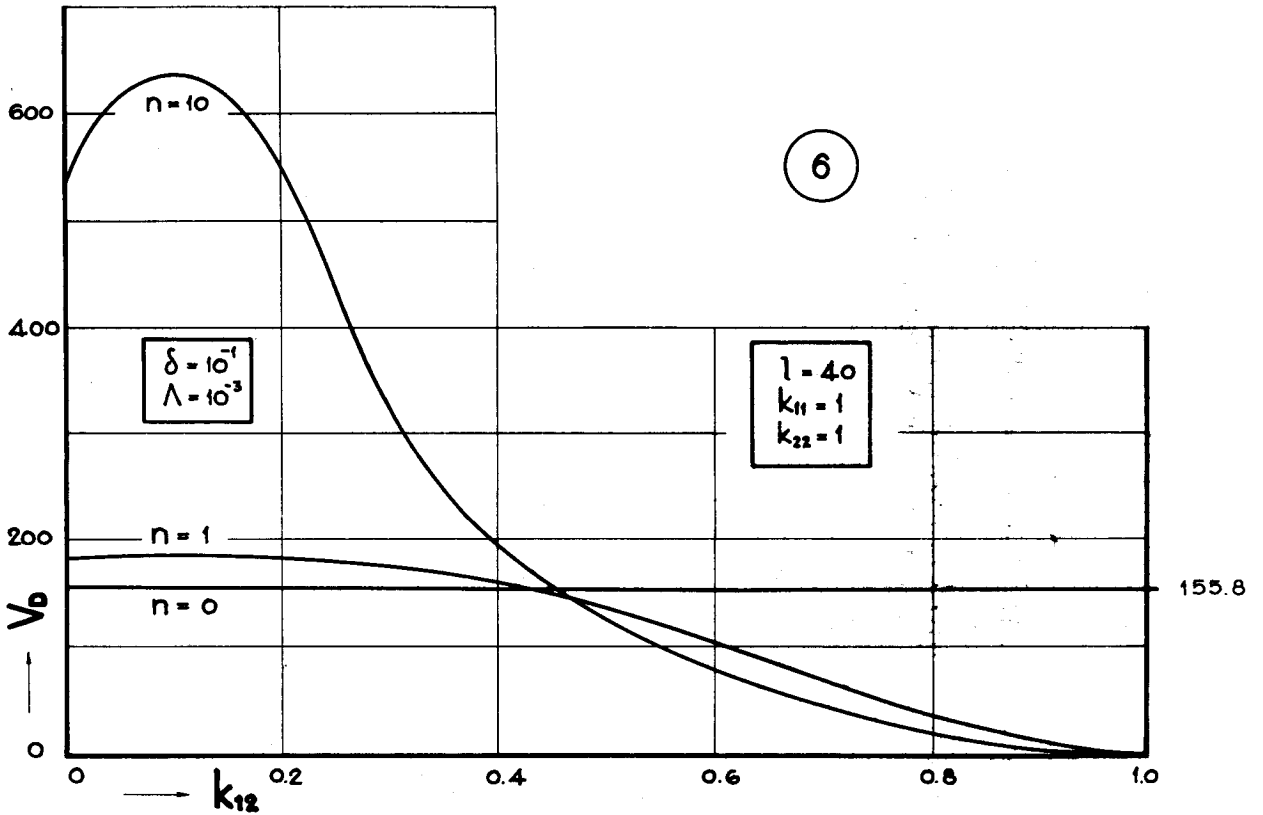

4.0
3.750
3.5
3.0
2.5
2.0
1.875
1.5
1.0
0
20
40
60
80
100
$k_{12} = 0$
$k_{11} = 1$
$k_{22} = 1$
$l = 20$
$l = 30$
$l = 40$
$\rightarrow 40k$
$\rightarrow n$

4

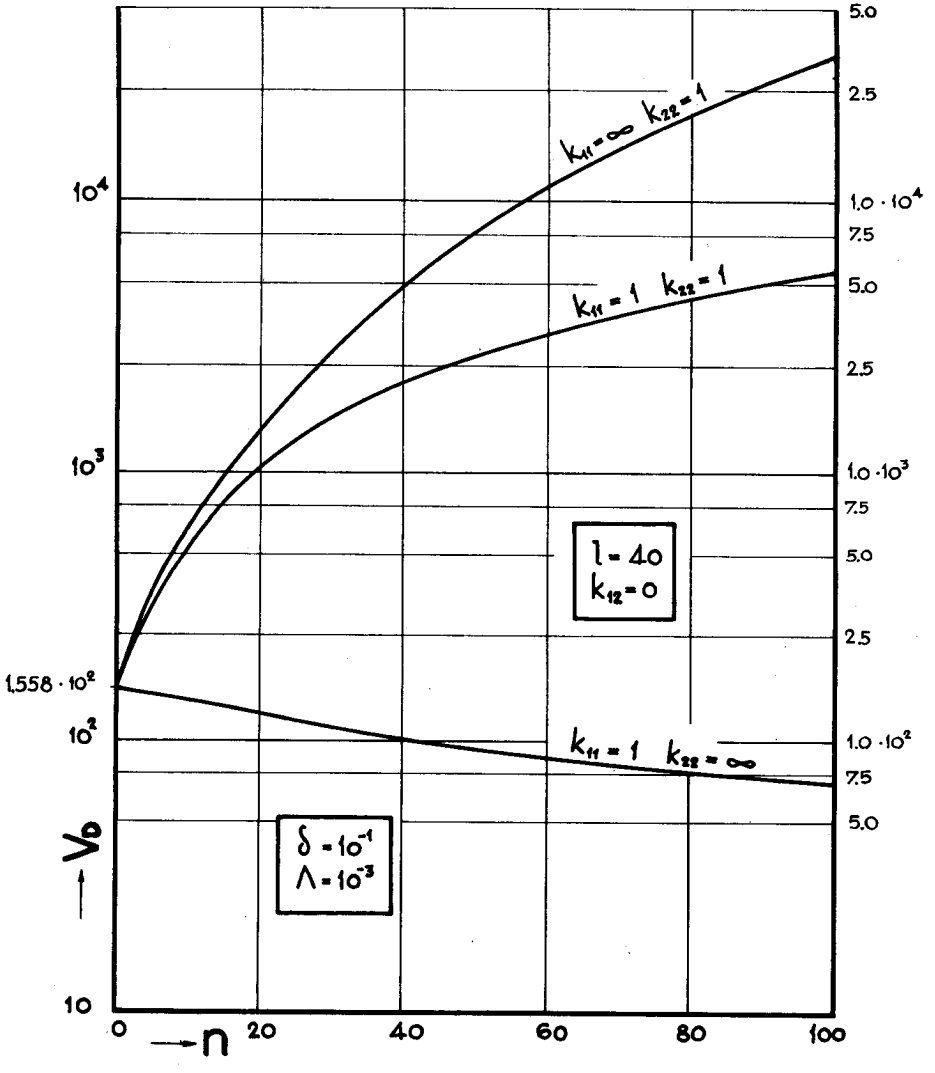

1.0 ℵD
0.8
0.6
0.4
0.2
0
ℵDδ
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0 ℵD
ℵDΛ
δ/Λ = 1000
δ/Λ = 100
δ/Λ = 10
δ/Λ = 1
l = 40
k12 = 0
k11 = 1
k22 = 1
0
20
40
60
80
100
n

5

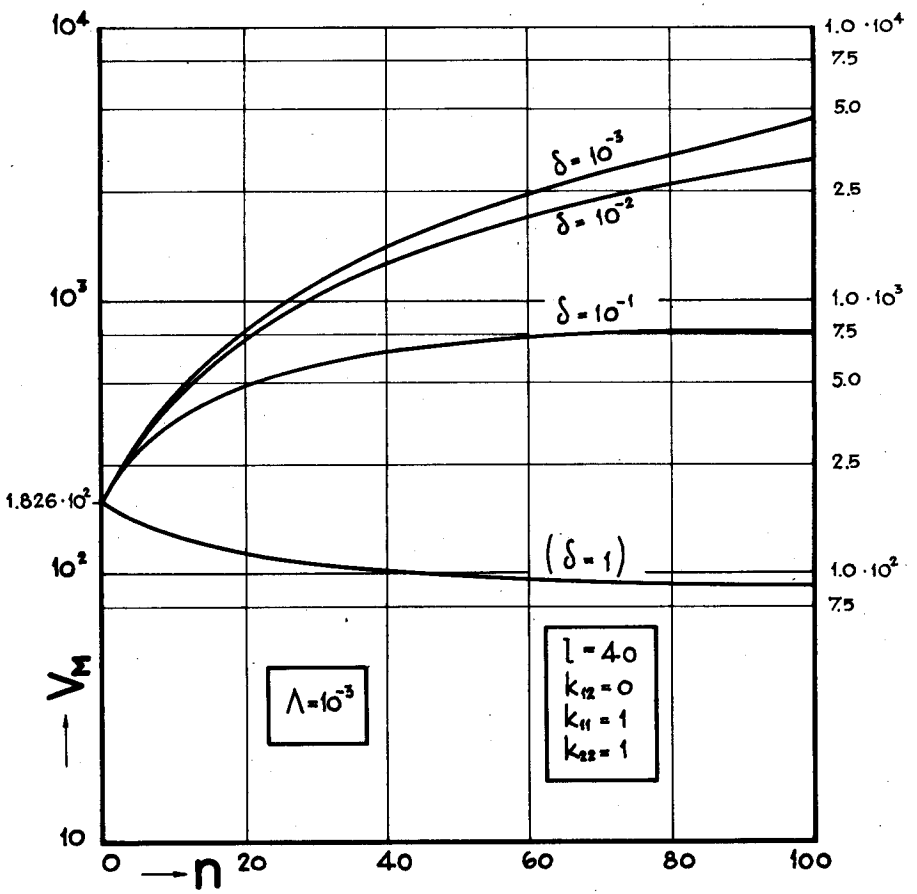

1.0 ℵD
0.8
0.6
0.4
0.2
0
ℵDδ
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0 ℵD
ℵDΛ
l = 20
l = 30
l = 40
δ/Λ = 100
k12 = 0
k11 = 1
k22 = 1
0
20
40
60
80
100
n


6
n = 10
n = 1
n = 0
δ = 10⁻¹
Λ = 10⁻³
l = 4.0
k11 = 1
k22 = 1
600
400
200
0
155.8
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
V0
k12

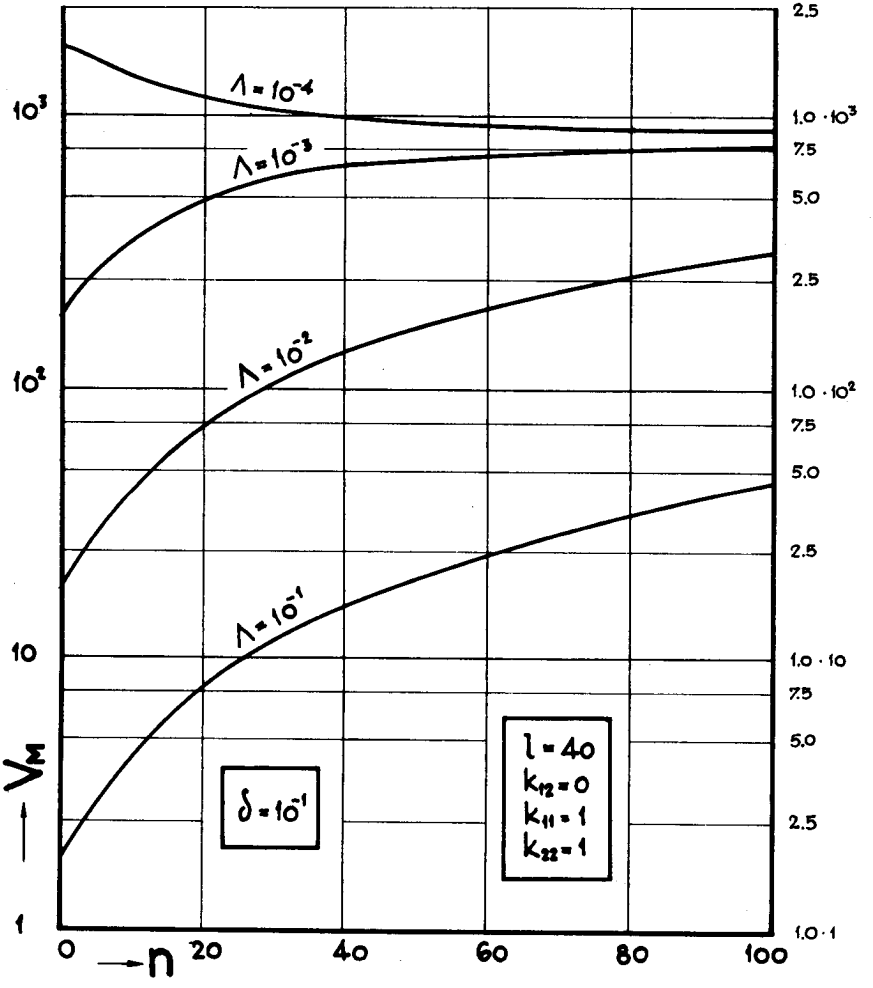
9


5.0
2.5
$k_{11}=\infty$ $k_{22}=1$
$10^4$
$1.0 \cdot 10^4$
7.5
5.0
$k_{11}=1$ $k_{22}=1$
2.5
$10^3$
$1.0 \cdot 10^3$
7.5
$l=40$
$k_{12}=0$
5.0
2.5
$1.558 \cdot 10^2$
$10^2$
$1.0 \cdot 10^2$
$k_{11}=1$ $k_{22}=\infty$
7.5
5.0
$\delta=10^{-1}$
$\Lambda=10^{-3}$
$V_b$
10
0
20
40
60
80
100
n

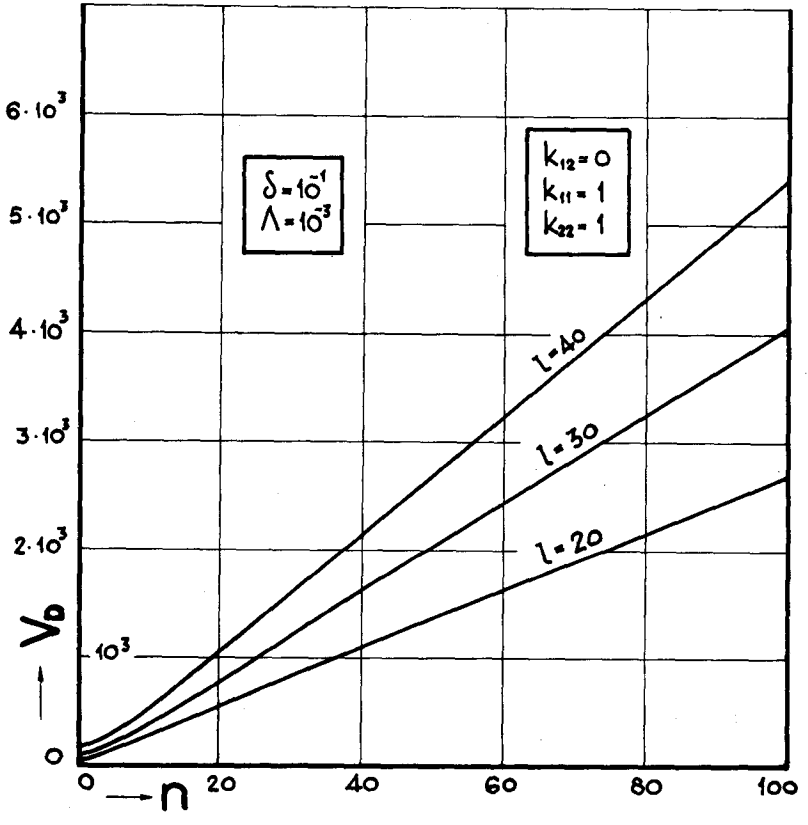
13


$10^4$
$10^3$
$1.826 \cdot 10^2$
$10^2$
10
$V_M$
0
n
20
40
60
80
100
$1.0 \cdot 10^4$
7.5
5.0
2.5
$1.0 \cdot 10^3$
7.5
5.0
2.5
$1.0 \cdot 10^2$
7.5
$\delta = 10^{-3}$
$\delta = 10^{-2}$
$\delta = 10^{-1}$
$(\delta = 1)$
$\Lambda = 10^{-3}$
$l = 40$
$k_{12} = 0$
$k_{11} = 1$
$k_{22} = 1$

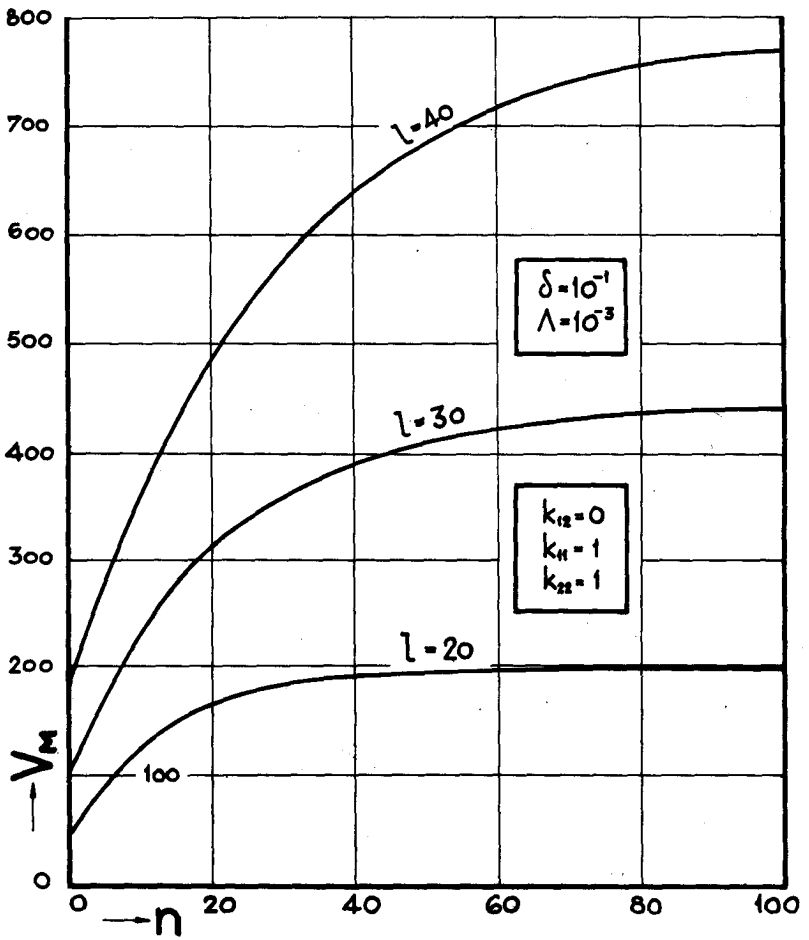
16


$\Lambda = 10^{-4}$
$\Lambda = 10^{-3}$
$\Lambda = 10^{-2}$
$\Lambda = 10^{-1}$
$10^3$
$10^2$
10
1
$V_M$
0
20
40
60
80
100
n
2.5
$1.0 \cdot 10^3$
7.5
5.0
2.5
$1.0 \cdot 10^2$
7.5
5.0
2.5
$1.0 \cdot 10$
7.5
5.0
2.5
$1.0 \cdot 1$
$\delta = 10^{-1}$
$l = 40$
$k_{12} = 0$
$k_{11} = 1$
$k_{22} = 1$

18


$\delta = 10^{-1}$
$\Lambda = 10^{-3}$
$k_{12} = 0$
$k_{11} = 1$
$k_{22} = 1$
$l = 40$
$l = 30$
$l = 20$
$6 \cdot 10^3$
$5 \cdot 10^3$
$4 \cdot 10^3$
$3 \cdot 10^3$
$2 \cdot 10^3$
$10^3$
0
$V_B$
0
20
40
60
80
100
n

19


800
700
600
500
400
300
200
100
0
$V_M$
0
20
40
60
80
100
n
l=40
l=30
l=20
$\delta=10^{-1}$
$\Lambda=10^{-3}$
$k_{12}=0$
$k_{11}=1$
$k_{22}=1$

| Diagr. No | Wertetabelle | | | n = 0 | n = 1 | n = 10 | n = 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | $\delta = 10^{-1}$, $\Lambda = 10^{-3}$, $l = 40$, $k_{11} = 1$, $k_{22} = 1$ | $V_M$ | $k_{12} = 0.0$ | $1.83 \cdot 10^2$ | $2.01 \cdot 10^2$ | $3.60 \cdot 10^2$ | $7.69 \cdot 10^2$ |
| | | | 0.2 | $1.82 \cdot$ " | $2.01 \cdot$ " | $3.73 \cdot$ " | $10.58 \cdot$ " |
| | | | 0.5 | $1.82 \cdot$ " | $1.50 \cdot$ " | $0.79 \cdot$ " | $0.50 \cdot$ " |
| | | | 0.9 | $1.71 \cdot$ " | $0.10 \cdot$ " | $0.03 \cdot$ " | $0.03 \cdot$ " |
| 8 | | $V_Q$ | $k_{12} = 0.0$ | $2.51 \cdot 10^2$ | $2.79 \cdot 10^2$ | $5.17 \cdot 10^2$ | $11.48 \cdot 10^2$ |
| | | | 0.2 | $2.51 \cdot$ " | $2.79 \cdot$ " | $5.34 \cdot$ " | $15.69 \cdot$ " |
| | | | 0.5 | $2.50 \cdot$ " | $2.08 \cdot$ " | $1.13 \cdot$ " | $0.73 \cdot$ " |
| | | | 0.9 | $2.36 \cdot$ " | $0.14 \cdot$ " | $0.05 \cdot$ " | $0.04 \cdot$ " |
| 10 | $\delta = 10^{-1}$, $\Lambda = 10^{-3}$, $l = 40$, $k_{12} = 0$ | $V_M$ | $k_{11} = \infty$, $k_{22} = 1$ | $1.83 \cdot 10^2$ | $2.04 \cdot 10^2$ | $4.34 \cdot 10^2$ | $4.86 \cdot 10^3$ |
| | | | 1, 1 | $1.83 \cdot$ " | $2.01 \cdot$ " | $3.60 \cdot$ " | $7.69 \cdot 10^2$ |
| | | | 1, $\infty$ | $1.83 \cdot$ " | $1.80 \cdot$ " | $1.61 \cdot$ " | $7.73 \cdot 10^1$ |
| 11 | | $V_Q$ | $k_{11} = \infty$, $k_{22} = 1$ | $2.51 \cdot 10^2$ | $2.82 \cdot 10^2$ | $6.23 \cdot 10^2$ | $7.24 \cdot 10^3$ |
| | | | 1, 1 | $2.51 \cdot$ " | $2.79 \cdot$ " | $5.17 \cdot$ " | $1.15 \cdot$ " |
| | | | 1, $\infty$ | $2.51 \cdot$ " | $2.48 \cdot$ " | $2.23 \cdot$ " | $1.11 \cdot 10^2$ |
| 12 | $\Lambda = 10^{-3}$, $l = 40$, $k_{12} = 0$, $k_{11} = 1$, $k_{22} = 1$ | $V_D$ | $\delta = 10^{-3}$ | $1.56 \cdot 10^2$ | $1.87 \cdot 10^2$ | $6.38 \cdot 10^2$ | $3.31 \cdot 10^4$ |
| | | | $10^{-2}$ | $1.56 \cdot$ " | $1.86 \cdot$ " | $6.26 \cdot$ " | $2.26 \cdot$ " |
| | | | $10^{-1}$ | $1.56 \cdot$ " | $1.84 \cdot$ " | $5.26 \cdot$ " | $5.43 \cdot 10^3$ |
| | | | (1) | $1.56 \cdot$ " | $1.62 \cdot$ " | $2.03 \cdot$ " | $6.32 \cdot 10^2$ |
| 14 | | $V_Q$ | $\delta = 10^{-3}$ | $2.51 \cdot 10^2$ | $2.83 \cdot 10^2$ | $6.27 \cdot 10^2$ | $7.00 \cdot 10^3$ |
| | | | $10^{-2}$ | $2.51 \cdot$ " | $2.83 \cdot$ " | $6.15 \cdot$ " | $4.78 \cdot$ " |
| | | | $10^{-1}$ | $2.51 \cdot$ " | $2.79 \cdot$ " | $5.17 \cdot$ " | $1.15 \cdot$ " |
| | | | (1) | $2.51 \cdot$ " | $2.46 \cdot$ " | $1.99 \cdot$ " | $1.33 \cdot 10^2$ |
| 15 | $\delta = 10^{-1}$, $l = 40$, $k_{12} = 0$, $k_{11} = 1$, $k_{22} = 1$ | $V_D$ | $\Lambda = 10^{-4}$ | $1.56 \cdot 10^3$ | $1.62 \cdot 10^3$ | $2.03 \cdot 10^3$ | $6.32 \cdot 10^3$ |
| | | | $10^{-3}$ | $1.56 \cdot 10^2$ | $1.84 \cdot 10^2$ | $5.26 \cdot 10^2$ | $5.43 \cdot$ " |
| | | | $10^{-2}$ | $1.56 \cdot 10^1$ | $1.86 \cdot 10^1$ | $6.26 \cdot 10^1$ | $2.26 \cdot$ " |
| | | | $10^{-1}$ | $1.56 \cdot 1$ | $1.87 \cdot 1$ | $6.38 \cdot 1$ | $3.31 \cdot 10^2$ |
| 17 | | $V_Q$ | $\Lambda = 10^{-4}$ | $2.51 \cdot 10^3$ | $2.48 \cdot 10^3$ | $1.99 \cdot 10^3$ | $1.33 \cdot 10^3$ |
| | | | $10^{-3}$ | $2.51 \cdot 10^2$ | $2.79 \cdot 10^2$ | $5.17 \cdot 10^2$ | $1.15 \cdot$ " |
| | | | $10^{-2}$ | $2.51 \cdot 10^1$ | $2.83 \cdot 10^1$ | $6.15 \cdot 10^1$ | $4.78 \cdot 10^2$ |
| | | | $10^{-1}$ | $2.51 \cdot 1$ | $2.83 \cdot 1$ | $6.27 \cdot 1$ | $7.00 \cdot 10^1$ |
| 20 | $\delta = 10^{-1}$, $\Lambda = 10^{-3}$, $k_{12} = 0$, $k_{11} = 1$, $k_{22} = 1$ | $V_Q$ | $l = 40$ | $2.51 \cdot 10^2$ | $2.79 \cdot 10^2$ | $5.17 \cdot 10^2$ | $1.15 \cdot 10^3$ |
| | | | 30 | $1.41 \cdot$ " | $1.63 \cdot$ " | $3.36 \cdot$ " | $6.64 \cdot 10^2$ |
| | | | 20 | $6.28 \cdot 10^1$ | $7.74 \cdot 10^1$ | $1.85 \cdot$ " | $3.03 \cdot$ " |

## c. DISKUSSION DER DIAGRAMME

Diagramm No:

1 Der Eigenfrequenzparameter $f$ und damit die Eigenfrequenz $\omega/2\pi$ bleiben besonders im Bereich starker Einspannungen ( $n$ klein) nahezu konstant und sinken erst mit $|k_{12}| \to 1$ rasch auf Null ab. (Das Diagramm ist nur für positive Werte von $k_{12}$ gezeichnet. Für negative Werte ist es an der Ordinate nahezu gespiegelt zu denken.)

2 Die allgemein elastische und rotatorische Einspannung zeigen annähernd den gleichen Verlauf des Grundfrequenzparameters, wobei das rasche Absinken mit abnehmendem Einspannungsgrad $1/n$ beachtenswert ist und den Einfluss der elastischen Einspannung deutlich zum Ausdruck bringt. *)
Für $n = 100$ beträgt $f$ ca. 40% der starren Einspannung, was einer Senkung der Eigenfrequenz um ca. 64% (!) gleichkommt. Schon für $n = 1$ (Halter und Schwinger aus Material mit gleichem Elastizitätsmodul bestehend) d.h. einer Einspannung die allgemein als vollständig bezeichnet wird, ergibt sich ein ca 4% kleinerer Wert der Eigenfrequenz.
Die Eigenfrequenz der translatorischen Einspannung hingegen bleibt annähernd konstant; ist also praktisch unabhängig von der Einspannung.

3 Um den Einfluss der Schlankheit auf die Grundfrequenz darzustellen (Als Mass für die Schlankheit $\lambda$ kann die Stablänge $l$ betrachtet werden, da bei gleichbleibendem Querschnitt $\lambda$ und $l$ zueinander proportional sind; $\lambda = \frac{l}{i}$, $i$ = Trägheitsradius) wurde nicht $f$ , das implizite noch $l$ enthält, sondern $k$ in Abhängigkeit von $n$ dargestellt. Wie

*) Die Kurve der rotatorischen Einspannung entspricht vollständig der in (15), S. 249 dargestellten Frequenzkurve $m - \lambda$ . Aus dem Vergleich von (49) mit (13) in (15) ergibt sich, dass einem $n = 100$ eine Bettungsziffer von $C = 7.28\,kg\,cm^{-3}$ entspricht.

zu erwarten war, sinkt die Grundfrequenz mit zunehmender Schlankheit, doch nicht in dem Masse wie für eine starre Einspannung. Der Faktor 2 in der Stablänge hat für eine elastische Einspannung $n = 10$ eine Abnahme der Grundfrequenz von ca. 69% zur Folge, im Gegensatz zur starren Einspannung $n = 0$ von 75%. Die elastische Einspannung "dämpft" gewissermassen den Einfluss der Schlankheit auf die Grundfrequenz.

4 Der Anteil der Abstrahlung an der Gesamtdämpfung nimmt mit abnehmendem Einspannungsgrad zu, d.h. je "weicher" der Halter, umso mehr wird prozentual abgestrahlt. Der Stab verhält sich relativ starr, die Deformationsgeschwindigkeit und damit die innere Reibung (Werkstoffdämpfung) ist klein.
Wie erwartet nimmt der Abstrahlungsanteil mit zunehmendem Verhältnis $\delta/\Lambda$ zu.

5 Die grössere Stablänge (Schlankheit) hat einen abnehmenden Abstrahlungsanteil zur Folge. Der Grund dafür liegt offenbar darin, dass durch die stärkere Verbiegung die innere Reibung überwiegt.

6÷8 Die Vergrösserungsfaktoren erreichen ein Maximum für $k_{12} \approx 0.1$ , sinken aber rasch auf Null ab für $|k_{12}| \rightarrow 1$ (Das Diagramm 6 ist nur für positive Werte von $k_{12}$ gezeichnet. Für negative Werte ist es an der Ordinate der Maximalwerte nahezu gespiegelt zu denken.)

9÷11 Bemerkenswert ist der Verlauf der Kurve für die translatorische Einspannung, die entgegen den andern beiden Kurven mit zunehmender "Weichheit" der Einspannung $(n)$ abfällt. Die allgemein elastische Einspannung liefert Werte, die zwischen denen der Spezialfälle (rotatorisch und translatorisch) liegen.

12÷17 Erwartungsgemäss steigen die Vergrösserungsfaktoren mit abnehmenden Dämpfungskoeffizienten $\delta$ und $\Lambda$ . Je nachdem $\Lambda$ oder $\delta$ konstant gehalten werden, divergieren die

Kurven gleicher $\delta$ -, resp. $\Lambda$ -Werte von einem gemeinsamen Punkte aus oder konvergieren asymptotisch gegen einen endlichen Wert, wenn der Einspannungsgrad $1/n$ verkleinert wird. Es ist dies eine Folge davon, dass für harte Einspannung ( $n$ klein) die innere Dämpfung, für weiche Einspannung ( $n$ gross) die Abstrahlung massgebend wird.

18÷20 Die Variation der Stablänge (Schlankheit) führt zu dem Ergebnis, dass mit wachsender Schlankheit die Vergrösserungsfaktoren zunehmen. Dies ist offenbar eine Folge davon, dass der günstige Einfluss der Dämpfung auf die Beanspruchung in der Resonanz mit zunehmender Schlankheit des Schwingers abnimmt.

Zusammenfassung:

Allgemein ist zu bemerken, dass mit den der Berechnung zu Grunde gelegten, mutmasslichen Dämpfungskoeffizienten die Vergrösserungsfaktoren $V_D$ , $V_M$ und $V_Q$ erstaunlich grosse Werte annehmen. Es ist jedoch zu Beachten, dass es sich in den vorliegenden Fällen durchwegs um schlanke Objekte handelt, bei denen erfahrungsgemäss der Einfluss der Dämpfung gering ist. Ausserdem wurden die Ergebnisse für einen stationären Zustand abgeleitet und enthalten somit die Voraussetzung, dass der Einschwingungsvorgang beendet ist.
Dass die Resonanzfrequenz der Grundschwingung mit zunehmender Nachgiebigkeit der Einspannung abnimmt war zu vermuten, dass sie so rasch abnimmt, ist immerhin beachtenswert.
Was die Dämpfungsformen anbetrifft, war zu erwarten, dass der Luftwiderstand (die äussere Dämpfung) kaum in Erscheinung tritt; interessanter ist die Feststellung, dass die innere Dämpfung und die Abstrahlungsdämpfung in der gleichen Grössenordnung erscheinen.
Inwieweit die vorliegenden Ergebnisse den tatsächlichen Verhältnissen entsprechen, können nur diesbezügliche Versuche abklären, wobei besonders den DEG mit Rücksicht auf ihre grundlegende Bedeutung für Einspannung und Abstrahlung die grösste Aufmerksamkeit geschenkt werden müsste. Im Besonderen interessieren die DEG mit gemischten Indices, deren Wirkung auf die Resonanzfrequenzen praktisch bedeutungslos, auf die Vergrösserungsfaktoren hingegen von abminderndem Einfluss sein wird.

Im Hinblick auf die hier gewonnenen Ergebnisse ist zu sagen, dass es unwirtschaftlich scheint, schlanke Bauwerke für den stationären Fall der Grundresonanz zu dimensionieren.

### d. NACHWEIS SCHWACHER DAEMPFUNG

Der Vollständigkeit halber bleibt noch der Nachweis zu leisten, dass die Annahme schwacher Dämpfung und damit die Voraussetzung Ba 3, S.33 ( $\delta$ -Grössen klein gegen 1 ) für stabförmige Schwinger i.a. zutrifft. Es handelt sich dabei um die drei Grössen $\delta_{11} = \delta$, $\delta_o$ und $\delta_\gamma$ , welche implizite den Einfluss der Abstrahlung, der innern und äussern Dämpfung enthalten.
Dass $\delta$ offensichtlich klein gegen 1 ist, wurde schon bei der Behandlung der Abstrahlungsdämpfung (Cd) gezeigt und auf S.65 erwähnt. Was $\delta_o$ und $\delta_\gamma$ anbetrifft, so wurde bei der Behandlung der äussern Dämpfung (Cc, S. 51 ) an einem konkreten Beispiel nachgewiesen, dass $\delta_\gamma \ll \delta_o$ und $\delta_o < 1\%$ wird. Selbst im ungünstigsten Fall der starren Einspannung und eines halb so schlanken Stabes wird unter gleichen Voraussetzungen $\delta_o = 6{,}2 \cdot 10^{-3}$, also immer noch kleiner als 1% bleiben.

## NACHWORT

Zum Schlusse möchte ich meinem sehr verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. F. Gassmann für das lebhafte Interesse, das er dieser Arbeit entgegenbrachte, sowie für die zahlreichen Anregungen und Diskussionen meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Ebenso bin ich der Kreisdirektion II der Schweiz. Bundesbahnen, speziell dem Sektionschef für Brückenbau, Herrn R. Becker, dipl. ing. ETH, für das Verständnis und Entgegenkommen während den Abschlussarbeiten zu Dank verpflichtet.

Leer - Vide - Empty

## LITERATURVERZEICHNIS


(1) ALFREY,T.Jr., Mechanical Behavior of High Polymers., Interscience Publishers, Inc., New York, 1948.

(2) ARNOLDI,R.A. und HOFF,N.J., "International Union for Theoretical and Applied Mechanics"., Report to US National Committee: Research Progress in USA on the Damping of Vibrations., March 31, 1950.

(3) BIEZENO,C.B. und GRAMMEL,R., Technische Dynamik., Springer Berlin 1939.

(4) "DEGEBO", Deutsche Gesellschaft für Bodenmechanik, Veröffentlichung Heft 1: Die Ermittlung der für das Bauwesen wichtigsten Eigenschaften des Bodens durch erzwungene Schwingungen., Springer Berlin, 1933.

(5) DEN HARTOG,J.P., Trans.Am.Soc.Mech.Engrs.,vol 54,p.153.

(6) DIEKMANN,J.H., Beitrag zur Frage der Fundament- und Erdbebenschwingungen., Diss. TH. Braunschweig, 1939.

(7) GASSMANN,F., Ueber Dämpfung durch Abstrahlung elastischer Wellen und über gedämpfte Schwingungen von Stäben., Z.f.angew.Math.u.Phys., Vol.II,Fasc.5,1951,S.333-357.

(8) GASSMANN,F., Ueber kleine Bewegungen in nicht vollkommen elastischen Körpern., Schweiz.Bauzeitg.No.4,1949.

(9) GUTENBERG,B., Handbuch der Geophysik, Bd.II, Gebr. Bornträger,. Berlin, 1931,S.529-557.

(10) GUTENBERG,B.und SCHLECHTWEG,H., Viskosität und innere Reibung fester Körper., Phys.Ztschr.,Bd.31,1930,S.745.

(11) HONDA,K. und KONNO,S., On the Determination of the Coefficient of Normal Viscosity of Metals.,Phil.Mag.Vol.42,1921,p.115.

(12) JEFFREYS,H.,The Viscosity of the Earth., Monthly Not. Roy. Astron. Soc.,London,vol.77,1917,p.449.

(13) JOKIBE,K. und SAKAY,S.,The Effect of Temperature on the Modulus of Rigidity and on the Viscosity of Solid Metals, Phil.Mag.,vol. 42,1921 p.397.

(14) LAMB,H., On the Propagations of Tremors over the Surface of an Elastic Solid.,Phil.Trans.Roy.Soc.,A 203, p.1.

(15) LARDY,P., Schwingungen von Kirchtürmen bei elastischer Einspannung im Baugrund.,Sonderdruck Bd.7,Abhandlgn.IVBH,Zürich 1943/44.

(16) MAXWELL,J.C.,On the Dynamical Theory of Gases., Phil. Mag.vol.35, 1868,p.134.

(17) POPERT,F., Mechanische Eigenschaften quasi-elastischer, isotroper Körper.,Diss.ETH,1945.

(18) REISSNER,E., Stationäre, axialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen, elastischen Halbraumes.,Ing.Arch.7,1936.

(19) SEZAWA,K. und KANAI,K.,Improved Theory of Energy Dissipation in Seismic Vibrations of a Structure., Bull. of the Earthquake Res. Inst., Tokyo,Imperial University,part 2, June 1936,p.164.

(20) TIMOSHENKO,S., Vibration Problems in Engineering., New York1937.

(21) VOIGT,W.,Ueber innere Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle.,Ann.d.Phys.u.Chem.,Bd.47,1892.

(22) WEBER,M.,Die Grundlagen der Aehnlichkeitsmechanik und ihre Verwertung bei Modellversuchen., Jahrbuch Schiffbautechn.Ges., Bd.20. 1919,S.355.

(23) WEBER,M., VOEGTLI,K., GASSMANN,F., Ueber Longitudinalschwingungen von Gesteinsstäben.Mittlg.No.22 d.Inst.f.Geophys.ETH,1952 und Verhandlgn.d.Schweiz.Naturforschenden Ges., Luzern 1951.

(24) dito, Beitrag zur Ermittlung der innern Dämpfung von Gesteinsstäben. Mittlg.No.22 d.Inst.f.Geophys.ETH,1952 und Verhandlgn.d.Schweiz. Naturforschenden Ges., Luzern 1951.

(25) WEINBERG,B., Some Results of Experimental Study of Substances having Considerable Internal Friction., Indian Journal of Physics, vol. I,part III,1927,p.279.

(26) WOLF,A.,The Equation of Motion of a Geophone on the Surface of an Elastic Earth.,Geophysics.vol.9,1944,p.29-35.

Nachtrag:

SCHMIDT,E.,Ueber Entstehung und Dämpfung von Fundamentschwingungen. Z.angew.Mech.,Bd.3(1923)S.161.

## LEBENSLAUF

Am 18. August 1923 wurde ich in St.Gallen geboren, besuchte dort die Primar- und Realschule der Stadt und trat dann in die Kantonsschule über. Nach abgelegter Maturitätsprüfung, Typus C, schrieb ich mich im Wintersemester 1943/44 an der Abteilung für Bauingenieurwesen der Eidg. Techn. Hochschule ein. Mit einem Jahr Studienunterbruch infolge Militärdienstes und praktischer Tätigkeit im Ing.Bureau Brunner, St. Gallen, diplomierte ich im Jahre 1948 bei Herrn Prof.Dr.P. Lardy als Bauingenieur. Anschliessend trat ich als Betriebsassistent in das Institut für Geophysik der ETH ein (Prof.Dr.F.Gassmann) und beschäftigte mich vorwiegend mit Schwingungsaufgaben im Bauwesen. Es wurde mir daselbst Gelegenheit geboten, die im Diplomsemester begonnene Preisaufgabe der Abteilung für Bauingenieurwesen über elastische Platten zu beenden, die ich 1950 mit der silbernen Medaille der ETH gewann. Seit dem 1. Juni 1951 arbeite ich bei der Sektion für Brückenbau des Kreises II der Schweiz. Bundesbahnen in Luzern. Die vorliegende Arbeit entstand zur Hauptsache während meiner Tätigkeit am Inst.f.Geophysik.