A variational approach to coherent structures in unsteady dynamical systems

DISS. ETH NO. 21984

A variational approach to coherent structures in unsteady dynamical systems

A thesis submitted to attain the degree of
DOCTOR OF SCIENCES of ETH ZURICH
(Dr. sc. ETH Zurich)

presented by
MOHAMMAD FARAZMAND
M.A.Sc., McMaster University, Hamilton

born on 18.04.1985
citizen of Iran

accepted on the recommendation of
Prof. George Haller
Prof. Siddhartha Mishra
Dr. Kathrin Padberg-Gehle

2014

Abstract

Lagrangian coherent structures (LCSs) are time-evolving surfaces that shape trajectory patterns in non-autonomous dynamical systems, such as turbulent fluid flows.

Hyperbolic LCSs (generalized stable-unstable manifolds) are the main drivers of chaotic mixing in the phase space. Elliptic and parabolic LCSs (generalized KAM tori), on the other hand, confine coherent patches with regular dynamics. In many applications, these structures co-exist, partitioning the phase space into regions of distinct dynamics. Hence, knowledge of the location and evolution of LCSs is key to the understanding of the overall dynamics.

Here, we show that LCSs are the solutions of suitably defined variational problems. Hyperbolic and parabolic (shearless) LCSs are shown to be the extrema of a Lagrangian shear functional. Elliptic LCSs, on the other hand, extremize a Lagrangian strain functional.

Using these variational principles, we develop algorithms for numerical detection of LCSs from models and data sets. The algorithms are tested on several examples. They are then used to study a variety of transport phenomena in fluid flows as well as the stability of mechanical systems with arbitrary time-dependence.

Compendio

Lagrangian Coherent Structures(LCSs) rappresentano superfici tempo-varianti che guidano le traiettorie di sistemi non autonomi come ad esempio il moto dei fluidi.

LCSs Iperboliche sono le guide principali dell'evoluzione temporale in fenomeni caotici come la miscelazione di fluidi. LCSs Ellittiche e Paraboliche (KAM Tori Generalizzati), invece, confinano regioni coerenti con dinamiche regolari. In molte applicazioni, queste strutture coesistono dividendo il diagramma delle fasi di un sistema dinamico in regioni distinte. La conoscenza della posizione e dell'evoluzione di queste strutture separatrici quindi di fondamentale importanza per capire la dinamica complessiva di sistemi complessi.

Nel presente lavoro mostriamo come LCSs sono soluzioni di particolari problemi variazionali adeguatamente definiti. LCSs Iperboliche e Paraboliche sono estremi del funzionale chiamato Taglio Lagrangiano (Lagrangian Shear) mentre LCSs Ellittiche sono estremi del funzionale Deformazione Lagrangiana (Lagrangian Strain).

Utilizzando questi principi variazionali, sviluppiamo algoritmi numerici per l'identificazione di LCSs in modelli definiti analiticamente o tramite data-set numerici. Tali algoritmi sono stati testati su diversi sistemi e sono utilizzati per lo studio di fenomeni quali il trasporto nei fluidi e la stabilit di sistemi meccanici con arbitrarie dipendenze dal tempo.