ETH zürich

ETH Library

Kategorische Homologietheorie und Spektralsequenzen

Doctoral Thesis

Author(s):
Bachmann, Franz

Publication date:
1969

Permanent link:
https://doi.org/https://doi.org/10.3929/ethz-a-000093426

Rights / license:
In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

This page was generated automatically upon download from the ETH Zurich Research Collection.
For more information, please consult the Terms of use.

Diss. Nr. 4277

Kategorische Homologietheorie und Spektralsequenzen

ABHANDLUNG

zur Erlangung
der Würde eines Doktors der Mathematik
der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von

FRANZ BACHMANN

dipl. Math. ETH

geboren am 3. März 1941
von Schaffhausen

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. B. Eckmann, Referent
Prof. Dr. P. J. Huber, Korreferent

1969, City-Druck AG, Zürich

Einleitung

Sei $\underline{A}$ eine kleine Kategorie, $\underline{C}$ eine abelsche Kategorie mit exakten unendlichen Coprodukten und $F : \underline{A} \longrightarrow \underline{C}$ ein Funktor. In dieser Situation definierten André(1), Deheuvels(4) u.a. die Homologieobjekte $H_n(\underline{A},F)$ $(n=0,1,..)$. Diese lassen sich einerseits aus den Linkssatelliten des Funktors $\sup : (\underline{A},\underline{C}) \longrightarrow \underline{C}$ und anderseits als Homologieobjekte eines geeigneten Komplexes in $\underline{C}$ berechnen.
Untersucht man das Verhalten der Objekte $H_n(\underline{A},F)$ bei einer Basisänderung $J : \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$, so findet man eine Spektralsequenz (André(1), Oberst(14)):

$$H_p(\underline{B},(S_q\tilde{J})F) \underset{\rho}{\Longrightarrow} H_n(\underline{A},F) \quad .$$

Dabei ist $\tilde{J} : (\underline{A},\underline{C}) \longrightarrow (\underline{B},\underline{C})$ der Funktor, der F seine Kan-Erweiterung $\tilde{J}F$ (Ulmer(16)) zuordnet.
In der vorliegenden Arbeit definieren wir in einer Situation

$$\begin{tikzcd} \underline{B} & \\ \underline{A} \arrow[u, "J"] \arrow[r, "F"'] & \underline{C} \end{tikzcd}$$

die J-Homologie der kleinen Kategorie $\underline{A}$ mit Koeffizienten in F :

$$H_n^J(\underline{A},F) \quad = \quad (S_n\tilde{J})F \qquad n = 0,1,\ldots$$

Auf diese Weise ergibt sich eine naheliegende Verallgemeinerung der obigen, "gewöhnlichen" Homologie von $\underline{A}$. Setzt man nämlich $\underline{B} = \mathbb{1}$ (die Kategorie mit genau einem Morphismus), so gilt $\tilde{J} = \sup : (\underline{A},\underline{C}) \longrightarrow \underline{C}$; die Kan-Erweiterung lässt sich also als verallgemeinertes Supremum auffassen(Kock(10)).

In 1. stellen wir die wichtigsten Resultate über Kan-Erweiterungen zusammen. Dann definieren wir in 2. die J-Homologie und leiten einige Eigenschaften derselben her. Ist B ein Objekt von $\underline{B}$, so lässt sich der Wert von $H_n^J(\underline{A},F)$ auf B als ntes Homologieobjekt eines Komplexes $C^J(F,B)$ darstellen. In 3. geben wir Beispiele; falls J eine volle Inklusion ist, erhält man die "André-Derivierten" des Funktors F. Ist auf $\underline{B}$ ein Cotripel $\mathbb{G} = \langle G, \varepsilon, \eta \rangle$ gegeben, so gibt es bekanntlich zu einem Funktor $T : \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$ $\mathbb{G}$-Derivierte $H_n^{\mathbb{G}}(T) : \underline{B} \longrightarrow \underline{C}$. Sei $\underline{A} = G\underline{B}$ (Bildkategorie von G) und J die Inklusion. Mit Hilfe der André-Homologie sieht man :

$$H_n^{\mathbb{G}}(T) = H_n^J(\underline{A},T.J) \qquad n = 0,1,\ldots$$

Natürlich schliesst man mit der Annahme "$\underline{A}$ klein" sehr viele Beispiele aus. F.Ulmer(17) hat sich mit diesem Problem eingehend befasst ; er bewies die obige Gleichheit unter schwächeren Bedingungen für das Cotripel $\mathbb{G}$.
Beispiele der homologischen Algebra erhält man, wenn man eine additive Situation

$$\begin{tikzcd} \underline{B} & \\ \underline{A} \arrow[u, "J"] \arrow[r, "F"'] & \underline{C} \end{tikzcd}$$

betrachtet und sich vollständig auf additive Funktoren beschränkt.

Die additive J-Homologie definiert man mit Hilfe der additiven Kan-Erweiterung $\tilde{J}_+ : (\underline{A},\underline{C})_+ \longrightarrow (\underline{B},\underline{C})_+$.
Sei K ein kommutativer Ring, $J:R \longrightarrow K$ eine augmentierte K-Algebra und M ein R-Linksmodul. Die additive J-Homologie der Situation

$$\begin{tikzcd} K & \\ R \arrow[u, "J"] \arrow[r, "M"'] & \underline{Ab} \end{tikzcd}$$

liefert dann gerade die "klassische" Homologie der augmentierten Algebra R mit Koeffizienten in M.
In 4. betrachten wir eine "Basisänderung", also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \underline{B} & \\ \underline{A} \arrow[ur, "J"] \arrow[rr, "\phi"'] & & \underline{A}' \arrow[ul, "J'"'] \end{tikzcd}$$

Diesem entspricht eine Spektralsequenz

$$H_p^{J'}(\underline{A}',H_q^{\phi}(\underline{A},F)) \underset{\rho}{\Longrightarrow} H_n^{J}(\underline{A},F) \quad .$$

Untergewissen Voraussetzungen über ϕ und $\underline{C}$ existiert eine solche Sequenz auch im additiven Fall.
Ist $\underline{B} = \mathbb{1}$, so erhält man die eingangs erwähnte Spektralsequenz. Im Falle der augmentierten Algebren resultiert eine Verallgemeinerung der Hochschild-Serre-Sequenz.
Wir beschliessen die Arbeit mit einem Hinweis auf die zur obigen Spektralsequenz gehörige exakte Folge in den unteren Graden.
Als Anwendungen ergeben sich Folgen, wie sie Knus(11) und Eckmann-Stammbach(5) ohne Benützung von Spektralsequenzen gefunden haben.

Einige allgemeine Resultate dieser Arbeit wurden von verschiedenen Autoren gleichzeitig gefunden (z.B. F.Ulmer, E.Dubuc, U.Oberst). Den Herren U.Oberst und F.Ulmer danke ich dafür, dass sie mir ihre Kenntnisse über die Homologie kleiner Kategorien und die entsprechende Literatur zur Verfügung stellten. Die vorliegende, einfache Form des Beweises in 2.7. stammt von U.Oberst.
Herrn Professor B.Eckmann möchte ich für sein Interesse und seine Anregungen meinen herzlichen Dank aussprechen.