ETH zürich

ETH Library

Winkel und Winkelsumme im n-dimensionalen euklidischen Simplex

Doctoral Thesis

Author(s):
Höhn, Walter

Publication date:
1953

Permanent link:
https://doi.org/https://doi.org/10.3929/ethz-a-000089763

Rights / license:
In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

This page was generated automatically upon download from the ETH Zurich Research Collection.
For more information, please consult the Terms of use.

Prom. Nr. 2193

Winkel und Winkelsumme im n-dimensionalen euklidischen Simplex

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES

DOKTORS DER MATHEMATIK

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

Walter Höhn

von Richterswil

Referent: Herr Prof. Dr. H. Hopf

Korreferent: Herr Prof. Dr. B. Eckmann

ZÜRICH 1953

DISSERTATIONSDRUCKEREI LEEMANN AG.

Leer - Vide - Empty

MEINEN ELTERN

GEWIDMET

Leer - Vide - Empty

Einleitung

In der Abhandlung „Sur la généralisation d'un théorème élémentaire de géométrie" (Comptes rendus 1905, I) hat H. Poincaré die bekannten Sätze über die Winkelsummen im ebenen und sphärischen Dreieck

$$\begin{array}{ll} \text{ebenes Dreieck:} & \alpha+\beta+\gamma=\pi \\ \text{sphärisches Dreieck:} & \alpha+\beta+\gamma=\pi+\epsilon^{1)} \end{array}$$

auf n-dimensionale Simplexe verallgemeinert. Das Ergebnis kann in der Form

$$s_0-s_1+s_2-+\cdots+(-1)^n s_n=\begin{cases} 0 & \text{für ein euklid. Simplex} \\ [1+(-1)^n]\Omega & \text{für ein sphär. Simplex} \end{cases}$$

geschrieben werden, wobei $s_0=1$, $s_1=\frac{n+1}{2}$ zu setzen ist und $s_k\,(k\geqq 2)$ die Summe der Winkel an allen $(n-k)$-dimensionalen Randsimplexen bedeutet, gemessen in einem Winkelmaß, in dem der volle Winkel gleich eins gesetzt ist. Ω bezeichnet den durch die Kugeloberfläche dividierten Inhalt des sphärischen Simplexes. Für $n=3$ erhält man im euklidischen Fall aus der obigen Beziehung die wenig bekannte, obwohl schon im Jahre 1783 von *de Gua* [2]) bewiesene Relation zwischen den Winkeln eines Tetraeders

$$2\,\Sigma\,\alpha_{ij}-\Sigma\,\alpha_{ijk}=4\,\pi\,^{3)}$$

Den Anstoß zu der vorliegenden Arbeit gab die folgende Feststellung, die Frau S. Eisner-Billo in ihrer Diplomarbeit (ETH, Zürich 1943, unveröffentlicht) gemacht hatte: Für das n-dimensionale euklidische Simplex gilt neben der Poincaréschen Formel

---

[1]) ϵ bezeichnet den sphärischen Exzeß, d. h. den durch das Quadrat des Kugelradius dividierten Inhalt des sphärischen Dreiecks.

[2]) Vgl. *de Gua:* Propositions neuves, et non moins utiles que curieuses, sur le Tétraèdre. Hist. Acad. R. des Sc., Paris 1783.

[3]) Die α_{ij} bedeuten die 6 Winkel zwischen je zwei Seitenflächen, die α_{ijk} die 4 Raumwinkel in den Ecken des Tetraeders; der volle Raumwinkel beträgt in dem zu Grunde gelegten Winkelmaß $4\,\pi$.

noch eine ähnliche, für $n \geqq 4$ von der Poincaréschen unabhängige Formel, nämlich

$$\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu} \nu s_{\nu} + s_n = 0.$$

Es lag nun nahe, überhaupt einmal nach der Gesamtheit der für ein n-dimensionales Simplex gültigen linearen Winkelsummenformeln zu fragen. Unter einer linearen Winkelsummenformel ist dabei stets eine Beziehung der Form

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu} s_{\nu} = a$$

zu verstehen, wobei a_{ν} und a für alle Simplexe dieselben Konstanten sind. Die Aufstellung dieser Formeln und die sich daran anschließenden Untersuchungen machen den Hauptteil der vorliegenden Arbeit aus. Die Hauptergebnisse lauten:

I. Das gesamte Formelsystem läßt sich, sowohl für $n = 2m$ als auch für $n = 2m + 1$, durch m linear unabhängige Relationen repräsentieren.

II. Die Poincarésche Formel ist die einzige lineare Winkelsummenformel, die für alle konvexen Polyeder gilt.

Ferner ergaben sich folgende Nebenresultate:

III. (Ein Analogon zu II.) Die Eulersche Polyederformel ist die einzige Relation der Form

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \gamma_{\nu} k_{\nu} = c$$

(γ_{ν} und c sind Konstanten, k_{ν} bedeutet die Anzahl der ν-dimensionalen Zellen der Oberfläche des Polyeders), die für alle konvexen Polyeder des R^n gilt.

IV. Die Winkelsummen s_k $(k \geqq 2)$ genügen der folgenden Ungleichung

$$\frac{1}{2}\left\{\binom{\frac{n}{2}}{k} + \binom{\frac{n}{2}+1}{k}\right\} \leqq s_k \leqq \frac{1}{2}\binom{n}{k} \quad \text{für gerades } n$$

$$\binom{\frac{n+1}{2}}{k} \leqq s_k \leqq \frac{1}{2}\binom{n}{k} \quad \text{für ungerades } n$$

Die Gleichheitszeichen gelten im Falle $n > 2$ nur bei Ausartung. Diese Ungleichungen stellen eine weitere Verallgemeinerung des

Satzes von der Winkelsumme im ebenen Dreieck dar (der in der obigen Ungleichung mit $n=k=2$ enthalten ist).

V. Zwei ebene Dreiecke, die in zwei Winkeln übereinstimmen, sind ähnlich. Für das n-dimensionale euklidische Simplex S^n gilt ein analoger Satz. Bezeichnet man die $\binom{n+1}{2}$ Winkel an den $(n-2)$-dimensionalen Randsimplexen eines S^n mit α_{ik}, so lautet er: Zwei Simplexe S^n und $\bar{S}^n$ sind ähnlich, wenn für $\binom{n+1}{2}-1$ Indexkombinationen (i, k) $\alpha_{ik}=\bar{\alpha}_{ik}$ gilt.

§ 1. Definition der Winkel und Winkelsummen

1. Vorbereitungen. Es sei S^n ein n-dimensionales Simplex des n-dimensionalen euklidischen Raumes R^n; dann bezeichnen wir mit

$P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ seine $n+1$ Eckpunkte,

F_i die $(n-1)$-dimensionale Seitenfläche, die der Ecke P_i gegenüberliegt,

h_i die $(n-1)$-dimensionale Hyperebene, die F_i enthält.

Durch eine einzelne Ebene h_i wird der R^n in zwei Halbräume zerlegt, die sich dadurch unterscheiden lassen, daß der eine das Simplex S^n enthält, der andere nicht. Wir bezeichnen nun mit f_i die charakteristische Funktion (im Sinne der Mengenlehre) des Halbraumes, der S^n enthält; ihre Werte sind definiert durch die Vorschrift

$f_i=1$ für alle Punkte, die auf derselben Seite von h_i liegen wie das Simplex S^n,

$f_i=0$ für alle übrigen Punkte.

Die charakteristische Funktion des Halbraumes, der S^n nicht enthält, ist $1-f_i$.

Den Durchschnitt von k dieser Halbräume wollen wir eine *Zelle* k-ter *Ordnung* nennen. Die charakteristische Funktion einer Zelle ist gleich dem Produkt der charakteristischen Funktionen der Halbräume, denen sie angehört, besitzt also die Form

$$f_{j_1} f_{j_2} \ldots f_{j_l} (1-f_{j_{l+1}})(1-f_{j_{l+2}}) \ldots (1-f_{j_k})$$

Diese Darstellung ist gleichzeitig als Ortsbezeichnung verwendbar; wir können daher kurz vom Halbraum $f_i = 1$, vom komplementären Halbraum $f_i = 0$, von der Zelle $f_1 f_2 (1 - f_3) = 1$ usw., sprechen.

Schließlich betrachten wir noch einen beliebigen, irgendwie durch Ebenen h_i begrenzten Teil G des R^n. G läßt sich dann als Summe paarweise punktfremder Zellen $A, B, C, \ldots$ auffassen. Sind $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C, \ldots$ die durch die f_i ausgedrückten charakteristischen Funktionen dieser Zellen, so hat man in

$$\varphi_C = \varphi_A + \varphi_B + \varphi_C + \cdots$$

die charakteristische Funktion von G. Die für sämtliche Punkte von G, und nur für diese, gültige Beziehung

$$\varphi_A + \varphi_B + \varphi_C + \ldots = 1$$

bezeichnen wir als *Gleichung von G*.

Zwei Raumteile sollen *kongruent* heißen, wenn sie sich durch eine orthogonale Transformation (Bewegungen und Spiegelungen) ineinander überführen lassen. So sind z. B. die Zellen

$$f_1 f_2 \ldots f_l (1 - f_{l+1})(1 - f_{l+2}) \ldots (1 - f_k) = 1 \text{ und}$$
$$(1 - f_1)(1 - f_2) \ldots (1 - f_l) f_{l+1} f_{l+2} \ldots f_k = 1$$

kongruent, und zwar sind sie spiegelbildlich in bezug auf jeden Punkt des Schnittgebildes der Ebenen $h_1, h_2, \ldots, h_k$. Denn das Spiegelbild eines Punktes P des Halbraumes $f_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ fällt in den Halbraum $1 - f_i = 1$ und umgekehrt.

Bemerkung: Das Schnittgebilde von k Seitenflächen des S^n, etwa von $F_1, F_2, \ldots, F_k$, heißt ein $(n-k)$-dimensionales Randsimplex (wir sagen gelegentlich auch $(n-k)$-dimensionale „Kante") und wird mit $(F_1, F_2, \ldots, F_k)$ bezeichnet. Die Anzahl der ν-dimensionalen Randsimplexe des S^n ist $\binom{n+1}{\nu+1} = \binom{n+1}{n-\nu}$.

2. *Erste Darstellung der Winkel.* In Anlehnung an die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ nennen wir eine Zelle k-ter Ordnung, falls $k \leqq n$ ist, einen *Winkelraum.* Sind $h_{j_1}, h_{j_2}, \ldots, h_{j_k}$ die Begrenzungsebenen eines Winkelraums, so bezeichnen wir das Randsimplex $(F_{j_1}, F_{j_2}, \ldots, F_{j_k})$ als seinen *Scheitel* und jeden inneren Punkt desselben als einen *Scheitelpunkt.* Ein Winkelraum enthält mit einem Punkte P den ganzen Strahl $\overline{AP}$, wenn A ein Scheitelpunkt ist.

Das Randsimplex $(F_{j_1}, F_{j_2}, \ldots, F_{j_k})$ ist gemeinsamer Scheitel von 2^k Winkelräumen k-ter Ordnung, und zwar sind je zwei unter

diesen spiegelbildlich; zwei solche mögen *Scheitelwinkelräume* heißen. Genau einer der erwähnten 2^k Winkelräume, nämlich derjenige mit der Gleichung

$$f_{j_1} f_{j_2} \dots f_{j_k} = 1,$$

enthält das Simplex S^n.

Wir definieren nun den *Winkel* ω, der einem Winkelraum W zugeordnet ist. Es sei K die um einen Scheitelpunkt von W geschlagene Einheitskugel mit $(n-1)$-dimensionaler Oberfläche; dann verstehen wir unter ω das Verhältnis des innerhalb W gelegenen Oberflächenteils von K zur Gesamtoberfläche von K, welche mit O^n bezeichnet werden soll. Besitzt W die Gleichung

$$f_{j_1} f_{j_2} \dots f_{j_\nu} (1 - f_{j_{\nu+1}}) (1 - f_{j_{\nu+2}}) \dots (1 - f_{j_k}) = 1,$$

und bezeichnet $d\sigma$ das Oberflächenelement von K, so läßt sich ω durch das Integral

$$\omega = \frac{1}{O^n} \int_K f_{j_1} f_{j_2} \dots f_{j_\nu} (1 - f_{j_{\nu+1}}) (1 - f_{j_{\nu+2}}) \dots (1 - f_{j_k}) \, d\sigma \tag{1}$$

darstellen. Insbesondere ergibt sich für den zwischen den Seitenflächen $F_1, F_2, \dots, F_k$ gelegenen *Simplexwinkel*, den wir mit $\alpha_{12\dots k}$ bezeichnen,

$$\alpha_{12\dots k} = \frac{1}{O^n} \int_K f_1 f_2 \dots f_k \, d\sigma \tag{2}$$

Speziell ist

$$\alpha_i = \frac{1}{O^n} \int_K f_1 \, d\sigma = \frac{1}{2} \tag{2'}$$

Als *Winkelsumme* s_k bezeichnen wir die Summe der sämtlichen $\binom{n+1}{k}$ Simplexwinkel, die von genau k Seitenflächen F_i gebildet werden:

$$s_k = \sum \alpha_{j_1 j_2 \dots j_k} \quad \text{(Summation über alle } \binom{n+1}{k} \text{ Indexkombinationen)} \tag{3}$$

Speziell wird

$$s_1 = \sum \alpha_i = \frac{n+1}{2}, \tag{3'}$$

außerdem treffen wir die Festsetzung

$$s_0 = 1 \tag{3''}$$

3. *Zweite Darstellung der Winkel.* Für das Folgende bezeichnen wir eine bestimmte Seitenfläche des S^n, etwa F_{n+1}, als *Grundfläche,* die Gegenecke als *Spitze.* Ferner führen wir ein kartesisches Koordinatensystem ein, dessen n-te Koordinatenebene $x_n = 0$ die Grundfläche F_{n+1} enthalten, also mit h_{n+1} zusammenfallen soll; außerdem soll die x_n-Achse so gerichtet sein, daß die x_n-Koordinate der Spitze P_{n+1} positiv wird. Schließlich sei h'_{n+1} die durch P_{n+1} gelegte Parallelebene zu h_{n+1}. Auf h_{n+1} und h'_{n+1} werden durch die durch P_{n+1} gehenden Ebenen $h_1, h_2, \ldots, h_n$ $(n-1)$-dimensionale Zellenunterteilungen erzeugt, die sich analog wie in der ersten Nummer mit Hilfe von Gleichungen beschreiben lassen.

Die Winkel des S^n lassen sich in zwei Klassen einteilen, je nachdem sie der Grundfläche F_{n+1} anliegen oder nicht anliegen; die ersteren sind mit dem Index $n+1$ behaftet, bei den letzteren fehlt er. Es ist zweckmäßig, die beiden Klassen getrennt zu betrachten.

Es sei zunächst $\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu, n+1}$ $(1 \leqq \nu \leqq n-1)$ ein Winkel, welcher der Grundfläche anliegt. Der zugehörige Winkelraum besteht aus der Gesamtheit der Strahlen, die einen seiner Scheitelpunkte A mit den sämtlichen Punkten des Gebietes $f_{j_1} f_{j_2} \ldots f_{j_\nu} = 1$ auf h'_{n+1} verbinden. Spiegelt man denselben am Mittelpunkt der Strecke $\overline{AP}_{n+1}$, so geht er in den kongruenten Winkelraum über, der aus der Gesamtheit der Strahlen besteht, die P_{n+1} mit jedem Punkte des Gebietes $(1-f_{j_1})(1-f_{j_2}) \ldots (1-f_{j_\nu}) = 1$ auf h_{n+1} verbinden. Demnach ist $\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu, n+1}$ das durch O^n dividierte Maß der Projektion des genannten Gebietes auf die um P_{n+1} geschlagene Einheitskugel. Zur Darstellung dieses Sachverhaltes bezeichnen wir mit

Q einen beliebigen Punkt von h_{n+1},
dF das Flächenelement von h_{n+1},
r die Entfernung $\overline{P_{n+1} Q}$,
x_n die n-te Koordinate von P_{n+1}.

Das Maß $d\omega$ der Projektion von dF auf die um P_{n+1} geschlagene Einheitskugel ist dann durch

$$d\omega = \frac{x_n}{r^n} dF$$

gegeben, und damit ergibt sich für einen Winkel, welcher der Grund-

fläche F_{n+1} anliegt, die Darstellung

$$\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu, n+1} = \frac{1}{O^n} \int\limits_{h_{n+1}} (1-f_{j_1})(1-f_{j_2}) \ldots (1-f_{j_\nu}) \frac{x_n}{r^n} \, dF \tag{4}$$

Nun betrachten wir einen Winkel

$$\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_l} \quad (1 \leqq l \leqq n-1, \; j_k \neq n+1)$$

welcher der Grundfläche F_{n+1} nicht anliegt (die Beschränkung $l \leqq n-1$ bedeutet, daß der Winkel $\alpha_{12\ldots n}$ zunächst außer Betracht gelassen werden soll). Es sei B ein Scheitelpunkt des zugehörigen Winkelraumes W, dann legen wir durch B die Parallelebene E zu h_{n+1}. Hierdurch zerfällt W in zwei Teilwinkelräume; wir wollen mit W' denjenigen bezeichnen, der auf derselben Seite von E liegt wie P_{n+1}, den andern mit W''; die zu W' und W'' gehörigen Winkel seien α' und α''. Schließlich sei B_0 der Punkt, in welchem der Strahl $\overline{P_{n+1} B}$ die Grundfläche trifft. Man sieht nun leicht, daß W' bei der Parallelverschiebung, die B in B_0 überführt, in den Winkelraum $f_{j_1} f_{j_2} \ldots f_{j_l} f_{n+1} = 1$ übergeht; man hat daher nach (4)

$$\alpha' = \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_l, n+1} = \frac{1}{O^n} \int\limits_{h_{n+1}} (1-f_{j_1})(1-f_{j_2}) \ldots (1-f_{j_l}) \frac{x_n}{r^n} \, dF$$

Auf den Winkelraum W'', der aus der Gesamtheit der Strahlen besteht, die den Punkt B mit den sämtlichen Punkten des Gebietes $f_{j_1} f_{j_2} \ldots f_{j_l} = 1$ auf h_{n+1} verbinden, wenden wir in analoger Weise die Parallelverschiebung $B \to P_{n+1}$ an. Dabei geht W'' in den Winkelraum über, der aus den Strahlen besteht, die P_{n+1} mit den Punkten des genannten Gebietes verbinden. Demnach ist α'' gleich dem Winkel, unter dem das Gebiet $f_{j_1} f_{j_2} \ldots f_{j_l} = 1$ auf h_{n+1} im Punkte P_{n+1} erscheint:

$$\alpha'' = \frac{1}{O^n} \int\limits_{h_{n+1}} f_{j_1} f_{j_2} \ldots f_{j_l} \frac{x_n}{r^n} \, dF$$

Die Zusammenfassung der beiden Integrale liefert schließlich für einen Winkel, welcher der Grundfläche F_{n+1} nicht anliegt, die Darstellung

$$\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_l} = \frac{1}{O^n} \int\limits_{h_{n+1}} \{ f_{j_1} f_{j_2} \ldots f_{j_l} + (1-f_{j_1})(1-f_{j_2}) \ldots (1-f_{j_l}) \} \frac{x_n}{r^n} \, dF \tag{5}$$

Bemerkung 1: Formel (5) ist auch für $l=n$, d. h. für $\alpha_{12\ldots n}$, gültig, da das Produkt $(1-f_1)(1-f_2)\ldots(1-f_n)$ überall auf h_{n+1} verschwindet.

Bemerkung 2: Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Koordinaten der Spitze P_{n+1} des S^n, so sind die Funktionen

$$\frac{1}{r^{n-2}} \quad (n \geqq 3) \quad \text{bzw.} \quad \ln r \quad (n = 2)$$

bekanntlich harmonisch in den x_i. Dasselbe gilt von den partiellen Ableitungen nach den x_i, insbesondere also von

$$\frac{x_n}{r^n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2-n}\dfrac{\partial}{\partial x_n}\left(\dfrac{1}{r^{n-2}}\right) & \text{für } n \geqq 3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} \ln r & \text{für } n = 2 \end{cases}$$

und daher auch von den Integralen (4) und (5). Dies führt uns auf folgendes Nebenergebnis:

Ist eine Seitenfläche eines Simplexes S^n fest, so sind seine Winkel harmonische Funktionen der Koordinaten der Gegenecke.

§ 2. Größte und kleinste Werte der Winkelsummen s_k

1. Integraldarstellung für die s_k. Aus der Winkeldarstellung von § 1.3, die hier zu Grunde gelegt werden soll, resultiert zunächst eine Darstellung der s_k als Summe von Integralen der Form (4) und (5). Die sämtlichen Winkel, die zu s_k beitragen, zerfallen in zwei Gruppen, je nachdem sie der Grundfläche F_{n+1} anliegen oder nicht anliegen; die Integration erstreckt sich bei den ersteren über alle Zellen $(k-1)$-ter Ordnung

$$(1-f_{j_1})(1-f_{j_2})\ldots(1-f_{j_{k-1}}) = 1 \text{ von } h_{n+1}, \tag{A}$$

bei den letzteren über alle Zellen k-ter Ordnung

$$f_{j_1} f_{j_2} \ldots f_{j_k} = 1 \text{ und} \tag{B}$$

$$(1-f_{j_1})(1-f_{j_2})\ldots(1-f_{j_k}) = 1. \tag{C}$$

Es ist nun vorteilhaft, obige Integrationsgebiete noch in die Zellen n-ter Ordnung aufzuspalten, aus denen sie sich zusammensetzen, so daß also nur noch Zellen n-ter Ordnung als Integrationsgebiete auftreten. Eine bestimmte Zelle n-ter Ordnung

$$(1-f_{j_1})(1-f_{j_2})\ldots(1-f_{j_l})f_{j_{l+1}}f_{j_{l+2}}\ldots f_{j_n}=1,\quad (l=0,1,\ldots,n-1) \tag{6}$$

wird dabei im allgemeinen mehrfach als Integrationsgebiet vorkommen. Dies veranlaßt uns, dieser Zelle eine *Belegungszahl* $g_{k,l}$ zuzuordnen, die angibt, wie oft sie als Integrationsgebiet auftritt. Aus Symmetriegründen ist klar, daß die Zahlen $g_{k,l}$ von keinen andern Indizes außer k und l abhängen. Für s_k ergibt sich so die Darstellung

$$s_k=\sum_{l=0}^{n-1} g_{k,l} \sum_{j_\nu=1,2,\ldots,n} \frac{1}{O^n}\int_{h_{n+1}} (1-f_{j_1})(1-f_{j_2})\ldots(1-f_{j_l})f_{j_{l+1}}\ldots f_{j_n}\frac{x_n}{r^n}\,dF \tag{7}$$

Um die $g_{k,l}$ zu berechnen, beachten wir zunächst, daß bei der Bildung von s_k über jedes der unter (A), (B), (C) aufgeführten Gebiete genau einmal zu integrieren ist. Es genügt daher, abzuzählen, wieviele unter ihnen die Zelle $(1-f_1)(1-f_2)\ldots(1-f_l)f_{l+1}\ldots f_n=1$ enthalten. Man findet $\binom{l}{k-1}$ Gebiete der Sorte (A), $\binom{n-l}{k}$ Gebiete der Sorte (B) und $\binom{l}{k}$ Gebiete der Sorte (C). $g_{k,l}$ ist gleich der Summe dieser Anzahlen, also

$$g_{k,l}=\binom{l+1}{k}+\binom{n-l}{k} \tag{8}$$

Wir halten noch die hieraus abzulesende Symmetrieeigenschaft fest

$$g_{k,l}=g_{k,\,n-l-1} \tag{9}$$

2. *Extremwerte der* s_k. Es sei $(g_{k,l})_{max}$ die größte und $(g_{k,l})_{min}$ die kleinste unter den Zahlen $g_{k,l}$ mit festem k. Wir ersetzen nun in (7) sämtliche $g_{k,l}$ durch $(g_{k,l})_{max}$ bzw. $(g_{k,l})_{min}$. Beachten wir ferner, daß die sämtlichen unter (6) aufgeführten Zellen n-ter Ordnung eine schlichte Überdeckung der ganzen Ebene h_{n+1} bilden, m. a. W. das Bestehen der Identität

$$\sum_{l=0}^{n-1} \sum_{j_\nu=1,2,\ldots,n} (1-f_{j_1})(1-f_{j_2})\ldots(1-f_{j_l})f_{j_{l+1}}\ldots f_{j_n}=1,$$

so gewinnen wir für s_k die doppelte Ungleichung

$$(g_{k,l})_{min} \cdot \frac{1}{O^n} \int\limits_{h_{n+1}} \frac{x_n}{r^n} \, dF \leqq s_k \leqq (g_{k,l})_{max} \cdot \frac{1}{O^n} \int\limits_{h_{n+1}} \frac{x_n}{r^n} \, dF$$

Nun ist

$$\frac{1}{O^n} \int\limits_{h_{n+1}} \frac{x_n}{r^n} \, dF = \frac{1}{2};$$

denn das Integral stellt den Winkel dar, unter dem die ganze Ebene h_{n+1} im Punkte P_{n+1} erscheint. Demzufolge schreibt sich die Ungleichung in der einfacheren Form

$$\tfrac{1}{2} (g_{k,l})_{min} \leqq s_k \leqq \tfrac{1}{2} (g_{k,l})_{max} \tag{10}$$

Damit ist zunächst eine obere und eine untere Schranke für s_k gefunden; man sieht aber leicht, daß diese Schranken bereits die gesuchten Extremwerte darstellen. Zunächst bemerken wir, daß die durch die Ebenen $h_1, h_2, \ldots, h_n$ auf h_{n+1} erzeugte Zellenzerlegung in keiner Weise von der Lage der Spitze P_{n+1} des Simplexes abhängt. Es sei nun G eine Zelle n-ter Ordnung von h_{n+1} mit der Belegungszahl $g_{k,l}$. Lassen wir dann das Simplex so ausarten, daß die Spitze P_{n+1} mit einem inneren[4]) Punkt von G zusammenfällt, so wird

$$\frac{1}{O^n} \int\limits_{G} \frac{x_n}{r^n} \, dF = \frac{1}{2},$$

während für alle übrigen Zellen n-ter Ordnung

$$\frac{1}{O^n} \int \frac{x_n}{r^n} \, dF = 0$$

gilt, wie wiederum leicht aus der geometrischen Bedeutung des Integrals hervorgeht. Berechnet man mit den obigen Annahmen die Winkelsumme s_k gemäß (7), so gibt nur die Zelle G einen Beitrag, während die übrigen Summanden verschwinden; man erhält

$$s_k = \frac{1}{2} g_{k,l} = \frac{1}{2} \left\{ \binom{l+1}{k} + \binom{n-l}{k} \right\} \tag{11}$$

---

[4]) Dieser Zusatz ist notwendig, da eine Ausartung einer der Seitenflächen F_i nicht zugelassen werden darf.

Hieraus ersieht man, daß die Werte für s_k, die den Schranken in Ungleichung (10) entsprechen, wirklich angenommen werden können (für $n > 2$ allerdings nur bei Ausartung) und demzufolge gleichzeitig die Extremwerte von s_k darstellen.

Es verbleibt uns noch die Berechnung von $(g_{k,l})_{max}$ und $(g_{k,l})_{min}$. Zu diesem Zwecke bilden wir

$$g_{k,l+1} - g_{k,l} = \binom{l+2}{k} - \binom{n-l-1}{k} - \left[\binom{l+1}{k} - \binom{n-l}{k}\right] = \binom{l+1}{k-1} - \binom{n-l-1}{k-1}$$

Hieraus folgt

$$g_{k,l+1} - g_{k,l} \geqq 0 \quad \text{solange} \quad l+1 \geqq n-(l+1)$$

Somit wird unter Beachtung von (9)

$$\left.\begin{aligned} (g_{k,l})_{max} &= g_{k,\,n-1} = g_{k,\,o} = \binom{n}{k} \\ (g_{k,l})_{min} &= \begin{cases} g_{k,\,\frac{n}{2}} = g_{k,\,\frac{n}{2}-1} = \binom{\frac{n}{2}}{k} + \binom{\frac{n}{2}+1}{k} & \text{für gerades } n \\ g_{k,\,\frac{n-1}{2}} = 2\binom{\frac{n+1}{2}}{k} & \text{für ungerades } n \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

und wir haben den

Satz 1: Der Wertevorrat der Winkelsumme $s_k (k \geqq 2)$ ist durch das Intervall

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\{\binom{\frac{n}{2}}{k} + \binom{\frac{n}{2}+1}{k}\right\} \leqq s_k \leqq \frac{1}{2}\binom{n}{k} \quad & \text{für gerades } n \\ \binom{\frac{n+1}{2}}{k} \leqq s_k \leqq \frac{1}{2}\binom{n}{k} \quad & \text{für ungerades } n \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

gegeben.

Bemerkungen: Für $n \geqq 3$ gilt in (13) *stets* das Zeichen $<$, wenn das Simplex nicht ausgeartet ist. Im Falle $n = 2$ geht (13) in eine Gleichung über, nämlich in den Satz von der Winkelsumme im Dreieck; die Ungleichungen (13) können daher als eine weitere Verallgemeinerung dieses Satzes betrachtet werden.

§ 3. Lineare Beziehungen zwischen den Winkelsummen des S^n

Wir gehen nun daran, die zwischen den Winkelsummen s_k eines Simplexes S^n bestehenden linearen Relationen aufzustellen, die wir (vgl. die Einleitung) kurz als *Winkelsummenformeln* bezeichnet haben. Zunächst besteht unser Ziel darin, ein Verfahren anzugeben, wie man solche Formeln gewinnen kann. Die weiteren Untersuchungen dienen dem Zweck, uns einen Überblick über die Gesamtheit aller überhaupt möglichen Beziehungen dieser Art zu verschaffen[5]).

1. Poincarés Winkelsummenformel (Hauptformel). Für alles Folgende stützen wir uns auf die Bezeichnungen der Nr. 1 und 2 von § 1.

Wir denken uns durch die Ecke P_{n+1} des S^n die Parallelebene zu h_{n+1} gelegt und bezeichnen sie mit h'_{n+1}. Ihre charakteristische Funktion werde wie folgt definiert:

$f'_{n+1} = 1$ für alle Punkte auf derjenigen Seite von h'_{n+1}, auf der das Simplex S^n *nicht* liegt;

$f'_{n+1} = 0$ für alle übrigen Punkte.

Die Gebiete $f_1 f_2 \ldots f_n = 1$ u. $f'_{n+1} = 1$ sind offensichtlich punktfremd, desgleichen die dazu spiegelbildlichen Gebiete $(1-f_1)(1-f_2)\ldots(1-f_n) = 1$ und $(1-f'_{n+1}) = 1$. Es gilt daher für jeden Punkt des R^n

$$f_1 f_2 \ldots f_n f'_{n+1} = (1-f_1)(1-f_2)\ldots(1-f_n)(1-f'_{n+1}) = 0$$

Wir bilden nun das Integral des zweiten Ausdrucks über die Oberfläche K der um P_{n+1} geschlagenen Einheitskugel:

$$\int_K (1-f_1)(1-f_2)\ldots(1-f_n)(1-f'_{n+1})\,d\sigma = 0$$

Die linke Seite zerlegen wir durch Ausmultiplizieren des Integranden in eine Summe von Integralen. Dividiert man jedes Glied durch

---

[5]) Vgl. auch die im gleichen Jahre wie die Poincarésche Abhandlung erschienene Arbeit von *M. Dehn:* Die Eulersche Formel im Zusammenhang mit dem Inhalt in der nichteuklidischen Geometrie (Math. Annalen 61, 1905). Als Beweishilfsmittel wird hier eine zerlegungsinvariante Größe eingeführt, die einem Simplex zugeordnet ist und ein lineares Aggregat von Winkelsummen eines solchen darstellt. Allerdings beschränkt sich der Verfasser auf die Fälle $n \leqq 4$.

die Oberfläche O^n von K und läßt den letzten Term, der verschwindet, gleich weg, so folgt

$$\frac{1}{O^n}\int d\sigma-\frac{1}{O^n}\int \Sigma f_{j_1} d\sigma+\frac{1}{O^n}\int \Sigma f_{j_1} f_{j_2} d\sigma-+\cdots+(-1)^n\frac{1}{O^n}\int \Sigma f_{j_1} f_{j_2}\ldots f_{j_n} d\sigma=0 \quad (14)$$

Zu summieren ist jeweils über alle $\binom{n+1}{k}$ Kombinationen der Indizes $j_1, j_2, \ldots, j_k$, ferner hat man das f mit dem Index $n+1$ mit Strich versehen zu denken. Beachtet man schließlich, daß die Winkelräume $f_{j_1} f_{j_2} \ldots f_{j_k} f'_{n+1}=1$ und $f_{j_1} f_{j_2} \ldots f_{j_k} f_{n+1}=1$ kongruent sind, so erkennt man, daß die einzelnen Summanden in (14) der Reihe nach die Winkelsummen $s_0, s_1, \ldots, s_n$ darstellen (siehe (3), (3′) und (3″)). Die Einsetzung der s_k in (14) liefert die von Poincaré gefundene Winkelsummenformel

$$W \equiv s_0-s_1+s_2-s_3+-\cdots+(-1)^n s_n=0 \quad (15)$$

Wir bezeichnen sie fortan als *Hauptformel.*

2. *Nebenformeln.* Um weitere Winkelsummenformeln herzuleiten, lassen wir die Ebene h'_{n+1} wieder weg und drücken aus, daß ein beliebiger Simplexwinkel gleich seinem Scheitelwinkel ist. Dies gibt

$$\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_p}=\frac{1}{O^n}\int f_{j_1} f_{j_2} \ldots f_{j_p} d\sigma=\frac{1}{O^n}\int (1-f_{j_1})(1-f_{j_2})\ldots(1-f_{j_p}) d\sigma, \quad (1 \leqq p \leqq n)$$

wobei über die um einen Scheitelpunkt des Winkels geschlagene Einheitskugel zu integrieren ist. Wieder können wir das zweite Integral durch Ausmultiplizieren des Integranden in mehrere Summanden aufspalten, die sich nach (2) und (2′) durch Winkel ersetzen lassen. Bezeichnet man mit $s_k^{(p)}$ die Summe aller Simplexwinkel, die von je k der den Winkel $\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ begrenzenden Seitenflächen $F_{j_1}, F_{j_2}, \ldots, F_{j_p}$ gebildet werden und setzt ferner $s_0^{(p)}=1$, so folgt

$$\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_p}=s_0^{(p)}-s_1^{(p)}+s_2^{(p)}-+\cdots+(-1)^{p-1} s_{p-1}^{(p)}+(-1)^p \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_p}$$

oder leicht umgeformt

$$s_0^{(p)}-s_1^{(p)}+s_2^{(p)}-+\cdots+(-1)^{p-1} s_{p-1}^{(p)}=[1-(-1)^p] \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_p} \quad (16)$$

Wir denken uns nun Formel (16) für sämtliche Kombinationen der Indizes $j_1, j_2, \ldots, j_p$ hingeschrieben und die entstehenden $\binom{n+1}{p}$ Gleichungen addiert. Dabei liefert die Zusammenfassung sämtlicher Winkel mit k Indizes ein gewisses Vielfaches der Winkelsumme s_k, da aus Symmetriegründen jeder Winkel mit k Indizes gleich oft,

sagen wir a_k mal, als Summand auftritt. a_k ist offensichtlich gleich der Anzahl der Indexkombinationen $(j_1, j_2, \ldots, j_p)$, in welchen die festen Indizes $1, 2, \ldots, k$ vorkommen. In der Summenformel lautet also der Koeffizient von s_k

$$a_k = \binom{n+1-k}{p-k)} = \binom{n+1-k}{n+1-p}$$

Damit ist ein System von neuen Winkelsummenformeln gefunden; wir wollen dieselben inskünftig als *Nebenformeln* bezeichnen:

$$\binom{n+1}{n+1-p} s_0 - \binom{n}{n+1-p} s_1 + \binom{n-1}{n+1-p} s_2 - + \cdots$$
$$+ (-1)^{p-1} \binom{n+2-p}{n+1-p} s_{p-1} + [(-1)^p - 1] s_p = 0 \qquad (17)$$

oder ausführlicher geschrieben

$$\left.\begin{array}{ll}
p=n: & \binom{n+1}{1} s_0 - \binom{n}{1} s_1 + \binom{n-1}{1} s_2 - + \cdots \\
 & + (-1)^{n-1} \binom{2}{1} s_{n-1} + [(-1)^n - 1] s_n = 0 \\
p=n-1: & \binom{n+1}{2} s_0 - \binom{n}{2} s_1 + \binom{n-1}{2} s_2 - + \cdots \\
 & + (-1)^{n-2} \binom{3}{2} s_{n-2} + [(-1)^{n-1} - 1] s_{n-1} = 0 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
p=4: & \binom{n+1}{n-3} s_0 - \binom{n}{n-3} s_1 + \binom{n-1}{n-3} s_2 - \binom{n-2}{n-3} s_3 = 0 \\
p=3: & \binom{n+1}{n-2} s_0 - \binom{n}{n-2} s_1 + \binom{n-1}{n-2} s_2 - 2 s_3 = 0 \\
p=2: & \binom{n+1}{n-1} s_0 - \binom{n}{n-1} s_1 = 0 \\
p=1: & \binom{n+1}{n} s_0 - 2 s_1 = 0
\end{array}\right\} \qquad (18)$$

Bemerkung 1: Die an sich uninteressanten Fälle $p=1$ und $p=2$ sind der Vollständigkeit halber angeführt, da sie in der nächsten Nummer noch verwendet werden.

Bemerkung 2: Multipliziert man die Formel für $p=3$ mit $\frac{n-2}{2}$, so wird sie identisch mit der Formel für $p=4$, woraus man ersieht, daß erst für $n \geqq 4$ eine nichttriviale Nebenformel existiert.

Bemerkung 3: Rein formal betrachtet, umfaßt (17) auch die Hauptformel, wie man erkennt, wenn man $p=n+1$ (und $s_{n+1}=0$) setzt.

Bemerkung 4: Lineare Kombination von (15) mit der ersten ($p=n$) Formel (18) liefert die in der Einleitung genannte Formel von S. Eisner-Billo.

3. Auswahl eines Systems linear unabhängiger Winkelsummenformeln. Betrachtet man die Gesamtheit der bisher abgeleiteten Winkelsummenformeln, so fällt auf, daß dieselben — abgesehen von der Hauptformel für gerades n — in lauter Paare von gleicher Länge zerfallen, wobei mit jedem neuen Paar gleich *zwei* neue Winkelsummen hinzukommen. Es wird sich nun herausstellen, daß man nichts Wesentliches verliert, wenn man pro Paar eine Formel wegläßt; die weggelassenen Formeln erweisen sich als lineare Verbindungen der übrigbleibenden.

Definition 1: Unter dem *Koeffizientenvektor* einer Winkelsummenformel

$$a_2 s_2 + a_3 s_3 + \cdots + a_n s_n = c$$

verstehen wir den n-dimensionalen Vektor $(a_2, a_3, \ldots, a_n, c)$. Dabei bedeutet c das konstante Glied, das durch Zusammenfassung der Glieder mit s_0 und s_1 entsteht. Die *lineare Abhängigkeit* eines Systems von Winkelsummenformeln soll gleichbedeutend sein mit der linearen Abhängigkeit der Koeffizientenvektoren.

Definition 2: Unter dem *Rang* eines Systems von Winkelsummenformeln verstehen wir die Maximalzahl linear unabhängiger Koeffizientenvektoren.

Es werde nun, je nachdem n gerade oder ungerade ist, $n=2m$ oder $n=2m+1$ gesetzt. Dann beweisen wir den

Satz 2: Die Hauptformel und die Nebenformeln bilden zusammen ein System vom Rang m.

Zum Beweise schreiben wir nochmals die Hauptformel hin

$$L_n \equiv \binom{n+1}{0} s_0 - \binom{n}{0} s_1 + \binom{n-1}{0} s_2 - + \cdots + \binom{1}{0} s_n = 0 \quad \text{für gerades } n \tag{19}$$

$$L_n \equiv \binom{n+1}{0} s_0 - \binom{n}{0} s_1 + \binom{n-1}{0} s_2 - + \cdots - \binom{1}{0} s_n = 0 \quad \text{für ungerades } n \qquad (19')$$

sowie die j letzten Nebenformeln, wobei wir, um lauter ganze Paare zu haben, j als *gerade* voraussetzen:

$$\left.\begin{aligned}
L_{j-1} &\equiv \binom{n+1}{n-(j-1)} s_0 - \binom{n}{n-(j-1)} s_1 + \binom{n-1}{n-(j-1)} s_2 - + \cdots - \binom{n-(j-2)}{n-(j-1)} s_{j-1} = 0 \\
L_{j-2} &\equiv \binom{n+1}{n-(j-2)} s_0 - \binom{n}{n-(j-2)} s_1 + \binom{n-1}{n-(j-2)} s_2 - + \cdots - 2\, s_{j-1} = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
L_3 &\equiv \binom{n+1}{n-3} s_0 - \binom{n}{n-3} s_1 + \binom{n-1}{n-3} s_2 - \binom{n-2}{n-3} s_3 = 0 \\
L_2 &\equiv \binom{n+1}{n-2} s_0 - \binom{n}{n-2} s_1 + \binom{n-1}{n-2} s_2 - 2\, s_3 = 0 \\
L_1 &\equiv \binom{n+1}{n-1} s_0 - \binom{n}{n-1} s_1 = 0 \\
L_0 &\equiv \binom{n+1}{n} s_0 - 2\, s_1 = 0
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Wir behaupten nun, daß die folgende Linearverbindung der Formeln (20) in den s_k identisch verschwindet:

$$2\, L_{j-1} + \sum_{\nu=1}^{j-1} (-1)^\nu \binom{n-(j-1)+\nu}{\nu} L_{j-1-\nu} \equiv 0 \qquad (21)$$

Unsere Behauptung zerfällt in zwei Teile, da die Reihe der Koeffizienten der s_k abwechselnd mit einem Binomialkoeffizienten (bei geradem k) oder der Zahl 2 (bei ungeradem k) aufhört. Demnach ist folgendes zu zeigen: Für gerades k

$$2\binom{n+1-k}{n-(j-1)} + \sum_{\nu=1}^{j-1-k} (-1)^\nu \binom{n-(j-1)+\nu}{\nu} \binom{n+1-k}{n-(j-1)+\nu} = 0, \qquad (A)$$
$$(k = 0, 2, 4, \ldots, j-2)$$

Für ungerades k

$$2\binom{n+1-k}{n-(j-1)} + \sum_{\nu=1}^{j-k-1} (-1)^\nu \binom{n-(j-1)+\nu}{\nu} \binom{n+1-k}{n-(j-1)+\nu} - 2\binom{n+1-k}{j-k} = 0,$$
$$(k = 1, 3, 5, \ldots, j-1)$$

oder, da sich das erste Glied gegen das letzte hebt

$$\sum_{\nu=1}^{j-1-k} (-1)^\nu \binom{n-(j-1)+\nu}{\nu} \binom{n+1-k}{n-(j-1)+\nu} = 0, \quad (k=1,3,5,\ldots,j-1) \qquad \text{(B)}$$

(A) und (B) erweisen sich als Identitäten, die man aus der Entwicklung von

$$r!\,\frac{d}{d\,x^r}\,(1-x)^m \Big|_{x=1} = 0, \quad (r<m)$$

nach dem binomischen Satz gewinnen kann. Man hat

$$r!\,\frac{d}{d\,x^r}\,(1-x)^m \Big|_{x=1} = \sum_{\sigma=r}^{m} (-1)^\sigma \binom{m}{\sigma}\binom{\sigma}{r} x^{\sigma-r} \Big|_{x=1}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{m-r} (-1)^{r+\nu} \binom{m}{r+\nu}\binom{r+\nu}{r} = 0$$

oder, wenn man m durch $n+1-k$ und r durch $n-(j-1)$ ersetzt

$$\sum_{\nu=0}^{j-k} (-1)^\nu \binom{n+1-k}{n-(j-1)+\nu}\binom{n-(j-1)+\nu}{\nu} = 0$$

Schreibt man die Glieder für $\nu=0$ und $\nu=j-k$ separat

$$\binom{n+1-k}{n-(j-1)}\left[1+(-1)^{j-k}\right] + \sum_{\nu=1}^{j-k-1} (-1)^\nu \binom{n+1-k}{n-(j-1)+\nu}\binom{n-(j-1)+\nu}{\nu} = 0$$

und beachtet, daß j als gerade vorausgesetzt wurde, so erkennt man, daß dies für gerades k in (A), für ungerades k in (B) übergeht.

Damit ist zunächst Behauptung (21) bewiesen. Es folgt hieraus, daß man von je zwei Winkelsummenformeln gleicher Länge die eine weglassen kann, ohne daß sich dabei der Rang erniedrigt. Die folgenden Systeme besitzen daher denselben Rang wie das Gesamtsystem der Haupt- und Nebenformeln:

$$\underline{n=2m} \qquad \left.\begin{array}{l}
s_0 - s_1 + s_2 - + \cdots + s_n = 0 \\
\binom{n+1}{1} s_0 - \binom{n}{1} s_1 + \binom{n-1}{1} s_2 - + \cdots - \binom{2}{1} s_{n-1} = 0 \\
\binom{n+1}{3} s_0 - \binom{n}{3} s_1 + \binom{n-1}{3} s_2 - + \cdots - \binom{4}{3} s_{n-3} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\binom{n+1}{n-3} s_0 - \binom{n}{n-3} s_1 + \binom{n-1}{n-3} s_2 - \binom{n-2}{n-3} s_3 = 0
\end{array}\right\} \quad (22)$$

$$
\left.\begin{array}{ll}
\underline{n=2m+1} & s_0 - s_1 + s_2 - + \cdots - s_n = 0 \\
& \binom{n+1}{2} s_0 - \binom{n}{2} s_1 + \binom{n-1}{2} s_2 - + \cdots - \binom{3}{2} s_{n-2} = 0 \\
& \binom{n+1}{4} s_0 - \binom{n}{4} s_1 + \binom{n-1}{4} s_2 - + \cdots - \binom{5}{4} s_{n-4} = 0 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \binom{n+1}{n-3} s_0 - \binom{n}{n-3} s_1 + \binom{n-1}{n-3} s_2 - \binom{n-2}{n-3} s_3 = 0
\end{array}\right\} \quad (22')
$$

Die lineare Unabhängigkeit der obigen Formelsysteme zeigt sich am einfachsten an der abnehmenden Länge der Koeffizientenvektoren. Ferner stellt man fest, daß beide Systeme m Gleichungen umfassen, womit Satz 2 bewiesen ist.

Hier sei noch auf den bemerkenswerten Umstand hingewiesen, daß die Formelgruppe (20) die Hauptformel mit umfaßt, wenn n ungerade ist (nämlich für $j-1=n$); diese läßt sich daher aus den Nebenformeln linear kombinieren, womit sie sich als weniger tiefliegend erweist als die Hauptformel für gerades n. Um diesen letzten Punkt noch etwas zu erläutern, sei daran erinnert, daß die Herleitung der Hauptformel die Einführung der zu h_{n+1} parallelen Ebene h'_{n+1} durch die Ecke P_{n+1} erforderte, was einen Schritt darstellt , der sich nicht ohne weiteres auf allgemeine Riemannsche Räume übertragen läßt. Die Nebenformeln dagegen ließen sich durch Betrachtungen gewinnen, die sich nur auf die Umgebung einzelner Punkte bezogen; sie sind demnach schon dann gültig, wenn nur die Summierbarkeit der Formeln (16) gesichert ist. Dies trifft z. B. dann zu, wenn sich die Seitenflächen eines topologischen Simplexes in einem Riemannschen Raum überall unter gleichem Winkel schneiden, so daß wir jedenfalls folgenden Satz aussprechen können:

Satz 3: Die Nebenformeln gelten, bei beliebigem n, auch für ein n-dimensionales Simplex, das von Hyperebenen eines Raumes konstanter Krümmung begrenzt ist, die Hauptformel dagegen nur dann, wenn n ungerade ist.

Bemerkung: Die Hauptformel für gerades n lautet z. B. für ein sphärisches Simplex

$$s_0 - s_1 + s_2 - + \cdots + (-1)^n s_n = \Gamma$$

dabei ist Γ ein Glied, das zum Flächeninhalt des Simplexes proportional ist.

4. Die Gesamtheit aller linearen Winkelsummenformeln. Nicht beantwortet ist bisher die Frage, ob es außer den Haupt- und Nebenformeln noch weitere Winkelsummenformeln gibt, wobei uns natürlich nur solche interessieren, die nicht Linearverbindungen von jenen sind. Es wird sich herausstellen, daß dies nicht der Fall ist, d. h. es gilt der

Satz 4: Die Gesamtheit aller linearen Winkelsummenformeln, die für ein n-dimensionales Simplex gültig sind, besitzt den Rang m.

Der Kernpunkt des Beweises ist folgender: Jeder Winkelsummenformel ist gemäß Definition 1 von Nr. 3 ein Koeffizientenvektor zugeordnet. Die sämtlichen Koeffizientenvektoren spannen ein lineares Vektorgebilde auf, das wir mit $\{V\}$ bezeichnen wollen. Da nach Satz 2 die Dimension von $\{V\}$ mindestens m ist, bleibt nur noch zu zeigen, daß $\{V\}$ höchstens die Dimension m haben kann. Dies gelingt auf Grund der Möglichkeit, eine genügende Anzahl, nämlich $n-m$, linear unabhängiger Vektoren anzugeben, die alle senkrecht auf $\{V\}$ stehen.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir nun zum eigentlichen Beweis über. Unter einem *schwach ausgearteten* Simplex wollen wir ein Simplex verstehen, bei dem eine Ecke in die Ebene der gegenüberliegenden Seitenfläche fällt, ohne daß aber eine der Seitenflächen selbst ausartet. Wir zählen einige Eigenschaften schwach ausgearteter Simplexe auf, die für unsere Zwecke von Interesse sind:

a) Eine beliebige, für ein nichtausgeartetes Simplex gültige Winkelsummenformel gilt aus Stetigkeitsgründen auch für ein schwach ausgeartetes.

b) Die inneren Flächennormalen sind kollinear; ihre Richtungen können durch zwei entgegengesetzt gerichtete Vektoren $\vec{v}$ und $-\vec{v}$ gekennzeichnet werden.

c) Für den Wert eines zwischen k Seitenflächen gelegenen Winkels gibt es lediglich die beiden folgenden Möglichkeiten: Besitzen die zugehörigen k inneren Flächennormalen alle dieselbe Richtung, so hat er den Wert $\frac{1}{2}$, andernfalls den Wert 0[6]).

Auf Grund von Eigenschaft c) lassen sich die Winkelsummen für ein schwach ausgeartetes Simplex sofort angeben. Wir nehmen an, daß j innere Flächennormalen die Richtung $\vec{v}$, die übrigen $n+1-j$ die Richtung $-\vec{v}$ haben; dann ergibt sich

$$s_{k,j} = \frac{1}{2}\left\{\binom{j}{k} + \binom{n+1-j}{k}\right\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{23}$$

wobei der Index j den Ausartungstypus bestimmt.

Es sei nun

$$a_2 s_2 + a_3 s_3 + \cdots + a_n s_n = -\left(a_0 + \frac{n+1}{2} a_1\right) = c \tag{24}$$

eine beliebige, für alle S^n gültige Winkelsummenformel. Die Gesamtheit der zulässigen Koeffizientenvektoren $(a_2, a_3, \ldots, a_n, c)$ spannt ein lineares Vektorgebilde auf, das wir in der Vorbemerkung zum Beweise mit $\{V\}$ bezeichnet haben. Nach Eigenschaft a) muß (24) durch die Wertesysteme (23) befriedigt werden; somit sind die Koeffizientenvektoren den Bedingungen

$$a_2 s_{2,j} + a_3 s_{3,j} + \cdots + a_n s_{n,j} = c, \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

unterworfen. Dies bedeutet aber, daß die Vektoren $\vec{s}_j = (s_{2,j}, s_{3,j}, \ldots, s_{n,j}, 1)$ zu $\{V\}$ orthogonal sind.

Nun zählen wir ab, wieviele unter den Vektoren $\vec{s}_j$ linear unabhängig sind. Setzen wir zunächst n als gerade voraus, so können wir, um Wiederholungen zu vermeiden, den Index j auf die Werte $1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$ beschränken. Die zugehörigen $\vec{s}_j$ sind dann linear unabhängig, wie man sofort sieht, wenn man nur die Komponenten $s_{k,j}$ hinschreibt, die den Indizeswerten $k = \frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+2, \ldots, n$ entsprechen (dabei wollen wir, um nicht immer den Faktor $\frac{1}{2}$ schreiben zu müssen, $s_{k,j}$ durch $2 s_{k,j}$ ersetzen):

---

[6]) Da je 2 der k Halbräume, die den genannten Winkel enthalten, entweder identisch oder zueinander komplementär sind, ist der Durchschnitt dieser k Halbräume im ersten Fall wieder ein Halbraum, sonst aber leer.

$\underline{n = 2m}$

$2s_{k,j}$	$k = \frac{n}{2}+1$	$\frac{n}{2}+2$	$\cdots\cdots$	$n-2$	$n-1$	n
$j=1$	$\binom{n}{\frac{n}{2}+1}$	$\binom{n}{\frac{n}{2}+2}$	$\cdots\cdots$	$\binom{n}{n-2}$	$\binom{n}{n-1}$	1
2	$\binom{n-1}{\frac{n}{2}+1}$	$\binom{n-1}{\frac{n}{2}+2}$	$\cdots\cdots$	$\binom{n-1}{n-2}$	1	0
3	$\binom{n-2}{\frac{n}{2}+1}$	$\binom{n-2}{\frac{n}{2}+2}$	$\cdots\cdots$	1	0	0
$\vdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$
$\frac{n}{2}-1$	$\binom{\frac{n}{2}+2}{\frac{n}{2}+1}$	1	$\cdots\cdots$	0	0	0
$\frac{n}{2}$	1	0	$\cdots\cdots$	0	0	0

Aus der Existenz von $\frac{n}{2}$ linear unabhängigen, zu $\{V\}$ orthogonalen Vektoren folgt, daß $\{V\}$ höchstens die Dimension $\frac{n}{2} = m$ haben kann.

Wird n als ungerade vorausgesetzt, so kann man in (23) den Index j auf die Werte $1, 2, \ldots, \frac{n+1}{2}$ beschränken. Auch jetzt sind die zugehörigen $\vec{s}_j$ linear unabhängig, wie aus folgender Zusammenstellung hervorgeht (S. 26 oben). Die Dimension von $\{V\}$ kann also auch für ungerades n nicht größer als $\frac{n-1}{2} = m$ sein.

Zusammenfassend können wir feststellen, daß $\{V\}$ höchstens die Dimension m, das System aller linearen Winkelsummenformeln daher höchstens den Rang m besitzt. Anderseits existiert wirklich ein System vom Rang m, nämlich (22) bzw. (22′). Damit ist Satz 4 bewiesen.

$n = 2m+1$

$2s_{k,j}$	$k = \frac{n-1}{2}+1$	$\frac{n-1}{2}+2$	$\cdots\cdots$	$n-2$	$n-1$	n
$j=1$	$\binom{n}{\frac{n-1}{2}+1}$	$\binom{n}{\frac{n-1}{2}+2}$	$\cdots\cdots$	$\binom{n}{n-2}$	$\binom{n}{n-1}$	1
2	$\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}+1}$	$\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}+2}$	$\cdots\cdots$	$\binom{n-1}{n-2}$	1	0
3	$\binom{n-2}{\frac{n-1}{2}+1}$	$\binom{n-2}{\frac{n-1}{2}+2}$	$\cdots\cdots$	1	0	0
$\vdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$
$\frac{n-1}{2}$	$\binom{\frac{n-1}{2}+2}{\frac{n-1}{2}+1}$	1	$\cdots\cdots$	0	0	0
$\frac{n+1}{2}$	2	0	$\cdots\cdots$	0	0	0

§ 4. Winkelsummenformeln und Eulersche Polyederformel

1. Nichtgültigkeit der Nebenformeln für Polyeder. Bekanntlich gilt die Hauptformel (15) nicht nur für Simplexe, sondern auch für konvexe Polyeder; für die Nebenformeln (17) dagegen gilt

Satz 5: Die Nebenformeln lassen sich nicht auf beliebige konvexe Polyeder ausdehnen.

Beweis: Es sei

$$W \equiv a_0 s_0 - a_1 s_1 + a_2 s_2 - + \cdots + (-1)^n a_n s_n = 0, \quad s_0 = 1 \tag{25}$$

eine für sämtliche konvexen Polyeder P gültige Winkelsummenformel; dabei bezeichnet s_k wie beim Simplex die Summe der Winkel an allen $(n-k)$-dimensionalen Kanten von P. Wir betrachten nun eine beliebige Zellenzerlegung[7]) von P. Formel (25) gilt nach

[7]) Unter einer Zelle wird im ganzen § 4 ein konvexes Polyeder verstanden.

Voraussetzung auch für jede solche Zelle; man hat daher, wenn man die Winkelsumme s_k der i-ten Zelle mit $s_{k,i}$ und die Anzahl aller Zellen mit z bezeichnet

$$W_i \equiv a_0 s_{0,i} - a_1 s_{1,i} + - \cdots + (-1)^n a_n s_{n,i} = 0, \quad s_{0,i} = 1 \qquad (26)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, z)$$

Wir wollen nun diese z Gleichungen addieren. Die Summe aller $s_{k,i}$ mit festem Index k liefert dann erstens die Winkelsumme s_k des Polyeders P und zweitens so viele volle Winkel, wie die Anzahl γ_{n-k} der im Innern von P gelegenen $(n-k)$-dimensionalen Zellen beträgt. Nur der Index $k=0$ macht hievon eine Ausnahme; hier fehlt nämlich in der Summenformel das Glied mit s_0. Man erhält

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{z} W_i = a_0 \gamma_n - a_1 \gamma_{n-1} + a_2 \gamma_{n-2} - + \cdots + (-1)^n a_n \gamma_0 \\ - a_1 s_1 + a_2 s_2 - + \cdots + (-1)^n a_n s_n = 0\end{aligned} \qquad (27)$$

oder, wenn man beachtet, daß die zweite Zeile auf Grund von (25) durch $-a_0$ ersetzt werden kann,

$$\sum_{i=1}^{z} W_i = a_0 (\gamma_n - 1) - a_1 \gamma_{n-1} + a_2 \gamma_{n-2} - + \cdots + (-1)^n a_n \gamma_0 = 0 \qquad (27')$$

Nun benutzen wir die zwischen den Zahlen γ_ν bestehende Beziehung

$$\gamma_0 - \gamma_1 + \gamma_2 - + \cdots + (-1)^n \gamma_n = (-1)^n \qquad (28)$$

die eine leichte Folgerung aus der Eulerschen Polyederformel darstellt. Wir können sie nach Multiplikation mit $(-1)^n$ in folgender Form schreiben

$$\gamma_n - 1 = \gamma_{n-1} - \gamma_{n-2} + - \cdots + (-1)^{n-1} \gamma_0$$

Hieraus und aus (27′) eliminieren wir γ_n und erhalten nach leichter Umformung

$$\begin{aligned}\gamma_0 (a_n - a_0) - \gamma_1 (a_{n-1} - a_0) + \gamma_2 (a_{n-2} - a_0) - + \ldots \\ + (-1)^n \gamma_{n-1} (a_1 - a_0) = 0\end{aligned} \qquad (29)$$

Satz 5 ist bewiesen, wenn wir zeigen können, daß sämtliche a_i einander gleich sein müssen, mit andern Worten, wenn es uns gelingt, n linear unabhängige Wertesysteme $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$ anzugeben. Dabei ist es keineswegs nötig, daß sich diese Wertesysteme auf ein und dasselbe Polyeder beziehen.

Wir gehen aus von einem Simplex S^n und wählen auf einem seiner ν-dimensionalen Randsimplexe, sagen wir $(F_1, F_2, \ldots, F_{n-\nu})$, einen inneren Punkt, den wir mit A bezeichnen. Denken wir uns die übrigen Seitenflächen $F_{n-\nu+1}, F_{n-\nu+2}, \ldots, F_{n+1}$ von A aus projiziert und das Simplex so deformiert, daß A zu einer wirklichen Ecke wird[8]), so entstehen, den Indexwerten $\nu = 1, 2, \ldots, n$ entsprechend, n Polyeder, von denen jedes mit einer Zellenzerlegung versehen ist. Die Anzahl der im Innern des zum Index ν gehörenden Polyeders gelegenen i-dimensionalen Zellen werde mit $\gamma_{\nu,i}$ bezeichnet. Jedes der von den $\nu+1$ Seitenflächen $F_{n-\nu+1}, F_{n-\nu+2}, \ldots, F_{n+1}$ gebildeten $(i-1)$-dimensionalen Randsimplexe, deren Anzahl somit $\binom{\nu+1}{n-(i-1)}$ beträgt, liefert nun, wenn man es von A aus projiziert, genau eine im Innern von S^n gelegene Zelle der Dimension i; man hat daher

$$\gamma_{\nu,i} = \binom{\nu+1}{n+1-i}, \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \nu = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

Die folgende Zusammenstellung dieser Wertesysteme läßt deren lineare Unabhängigkeit sofort erkennen:

$\gamma_{\nu,i}$	$i=0$	1	.....	$n-3$	$n-2$	$n-1$
$\nu=1$	0	0	.....	0	0	1
2	0	0	.....	0	1	$\binom{3}{2}$
3	0	0	.....	1	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{2}$
⋮	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$n-1$	0	1	.....	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{2}$
n	1	$\binom{n+1}{n}$	.....	$\binom{n+1}{4}$	$\binom{n+1}{3}$	$\binom{n+1}{2}$

Damit ist Satz 5 bewiesen.

[8]) Dies gilt natürlich nur für $\nu \neq n$. Die erwähnte Deformation kann z. B. so vorgenommen werden, daß man, unter Festhaltung der nicht mit A inzidenten Seitenflächen, den Punkt A auf der Verbindungsgeraden zum Schwerpunkt des S^n ein Stück weit nach außen rücken läßt.

2. *Einzigkeit der Eulerschen Polyederformel.* Es sei k_ν die Anzahl der ν-dimensionalen Zellen der Oberfläche eines $(n+1)$-dimensionalen konvexen Polyeders. Dann behaupten wir, daß

$$k_0 - k_1 + k_2 - + \cdots + (-1)^n k_n = 1 + (-1)^n$$

die einzige lineare Relation zwischen den Kantenzahlen k_ν darstellt, die für jedes konvexe Polyeder gilt.

Zum Beweise betrachten wir konvexe Polyeder, die aus einem Simplex S^{n+1} durch Ansetzen eines zweiten Simplexes $\bar{S}^{n+1}$ hervorgehen. Die beiden Simplexen gemeinsame n-dimensionale Seitenfläche sei F_{n+2}, dann sind P_{n+2} und $\bar{P}_{n+2}$ die beiden Gegenecken. Die Bezeichnung der übrigen Seitenflächen werde so vorgenommen, daß (F_i, F_{n+2}) und $(\bar{F}_i, F_{n+2})$ dasselbe $(n-1)$-dimensionale Randsimplex von F_{n+2} darstellt. Das nach Weglassung von F_{n+2} entstandene Polyeder werde mit $\{S^{n+1}, \bar{S}^{n+1}\}$ bezeichnet; seine Kantenzahlen mit k_ν'.

Wesentlich ist nun der Umstand, daß man je nach der Lage von $\bar{P}_{n+2}$ verschiedene Systeme von Kantenzahlen k_ν' erhalten kann. $\bar{P}_{n+2}$ kann z. B. so gewählt werden, daß die Seitenfläche $\bar{F}_j$ für jedes $j \leqq \rho$ $(\rho = 0, 1, \ldots, n-1)$ in die Ebene von F_j zu liegen kommt, so daß zwei Randsimplexe $(F_{j_1}, F_{j_2}, \ldots, F_{j_l})$ und $(\bar{F}_{j_1}, \bar{F}_{j_2}, \ldots, \bar{F}_{j_l})$ nur als *eine* Kante von $\{S^{n+1}, \bar{S}^{n+1}\}$ zählen, wenn keiner der Indizes $j_1, j_2, \ldots, j_l$ größer als ρ ist, während die Schnitte dieser Randsimplexe mit F_{n+2}, also die Kanten $(F_{j_1}, F_{j_2}, \ldots, F_{j_l}, F_{n+2})$, überhaupt in Wegfall kommen.

Wir bezeichnen die Kantenzahlen von S^{n+1} mit k_ν; mit k_ν' wurden diejenigen von $\{S^{n+1}, \bar{S}^{n+1}\}$ bezeichnet. Es ist zweckmäßig, die Differenzen $k_\nu' - k_\nu$ zu berechnen. $k_\nu' - k_\nu$ ist gleich der Anzahl der durch die Seitenflächen $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_{n+1}$ gebildeten ν-dimensionalen Kanten, vermindert um die Anzahl der von den Seitenflächen $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_\rho, F_{n+2}$ gebildeten ν-dimensionalen Kanten, also

$$k_\nu' - k_\nu = \binom{n+1}{n+1-\nu} - \binom{\rho+1}{n+1-\nu}, \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{30}$$

Es sei nun

$$\alpha_0 k_0 - \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 - + \cdots + (-1)^n \alpha_n k_n = C \tag{31}$$

eine für alle konvexen Polyeder gültige lineare Relation zwischen den Kantenzahlen. Denkt man sich dieselbe für S^{n+1} und $\{S^{n+1}, \bar{S}^{n+1}\}$

hingeschrieben und die entstehenden Gleichungen voneinander subtrahiert, so folgt für die Differenzen $k_\nu' - k_\nu$ die homogene Relation

$$\alpha_0(k_0'-k_0)-\alpha_1(k_1'-k_1)+\alpha_2(k_2'-k_2)-+\cdots+(-1)^n\alpha_n(k_n'-k_n)=0 \quad (32)$$

Setzt man hier die Wertesysteme (30) ein, die den Indexwerten $\rho=0,1,2,\ldots,n-1$ entsprechen, so erhält man für die α_i das folgende homogene Gleichungssystem

$$\binom{n+1}{n+1}\alpha_0-\binom{n+1}{n}\alpha_1+-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n+1}{2}\alpha_{n-1}$$
$$+(-1)^n\left\{\binom{n+1}{1}-\binom{1}{1}\right\}\alpha_n=0$$

$$\binom{n+1}{n+1}\alpha_0-\binom{n+1}{n}\alpha_1+-\cdots+(-1)^{n-1}\left\{\binom{n+1}{2}-\binom{2}{2}\right\}\alpha_{n-1}$$
$$+(-1)^n\left\{\binom{n+1}{1}-\binom{2}{1}\right\}\alpha_n=0$$

. . . . . .

$$\binom{n+1}{n+1}\alpha_0-\left\{\binom{n+1}{n}-\binom{n}{n}\right\}\alpha_1+-\cdots+(-1)^{n-1}\left\{\binom{n+1}{2}-\binom{n}{2}\right\}\alpha_{n-1}$$
$$+(-1)^n\left\{\binom{n+1}{1}-\binom{n}{1}\right\}\alpha_n=0$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich in ein einfacheres überführen, wenn man, unter fortgesetzter Anwendung der Identität $\binom{m}{k}+\binom{m}{k+1}=\binom{m+1}{k+1}$, die zweite Gleichung von der ersten, dann die dritte von der zweiten, usw., subtrahiert. Nachdem man noch die letzte Gleichung einfacher geschrieben hat, besitzt das System die Gestalt

$$-\binom{1}{1}\alpha_{n-1}+\binom{1}{0}\alpha_n=0$$

$$\binom{2}{2}\alpha_{n-2}-\binom{2}{1}\alpha_{n-1}+\binom{2}{0}\alpha_n=0$$

. . . . . .

$$(-1)^n\binom{n}{n}\alpha_0+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}\alpha_1+-\cdots+\binom{n}{2}\alpha_{n-2}-\binom{n}{1}\alpha_{n-1}+\binom{n}{0}\alpha_n=0$$

Da die Matrix der Koeffizienten von $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ regulär ist, findet man als einzige Lösung des Systems

$$\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n$$

Damit ist der Einzigkeitsnachweis geleistet.

3. Sphärische Nebenformeln und ihre Nichtübertragbarkeit auf beliebige sphärische Zellen. Es sei

$$K \equiv x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 - r^2 = 0 \tag{33}$$

die Gleichung einer n-dimensionalen Sphäre im R^{n+1}. Durch ihren Mittelpunkt M denken wir uns $n+1$ Hyperebenen $h_1, h_2, \ldots, h_{n+1}$ in allgemeiner Lage gelegt; ferner werde jedem h_i wie in § 1.1 eine charakteristische Funktion zugeordnet. Die Gesamtheit der Punkte, die sowohl (33) als auch eine der Relationen

$$f_{j_1} f_{j_2} \ldots f_{j_\nu} (1 - f_{j_{\nu+1}})(1 - f_{j_{\nu+2}}) \ldots (1 - f_{j_{n+1}}) = 1$$

erfüllen, heißt ein *n-dimensionales sphärisches Simplex.*

Wir wollen nun mit T^n speziell das durch

$$f_1 f_2 \ldots f_{n+1} = 1$$

bestimmte sphärische Simplex bezeichnen. Unter seinen Winkeln verstehen wir die Winkel zwischen den Ebenen h_i, d. h. wir betrachten, um dies am Falle $n = 2$ klarzulegen, nicht direkt die Winkel des sphärischen Dreiecks, sondern die Winkel des Dreikants, das durch Projektion des Dreiecks vom Kugelmittelpunkt aus entsteht. Die Winkel von T^n werden also definiert durch

$$\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_\nu} = \frac{1}{\sigma} \int_K f_{j_1} f_{j_2} \ldots f_{j_\nu} \, d\sigma \tag{34}$$

wenn σ die Oberfläche, $d\sigma$ das Flächenelement von K bedeutet.

Die *sphärischen Nebenformeln* lassen sich nun analog wie die euklidischen gewinnen. Da die Winkelräume

$$f_{j_1} f_{j_2} \ldots f_{j_p} = 1 \quad \text{und} \quad (1 - f_{j_1})(1 - f_{j_2}) \ldots (1 - f_{j_p}) = 1$$

kongruent sind, hat man

$$\frac{1}{\sigma} \int_K (1 - f_{j_1})(1 - f_{j_2}) \cdots (1 - f_{j_p}) \, d\sigma = \frac{1}{\sigma} \int_K f_{j_1} f_{j_2} \cdots f_{j_p} \, d\sigma = \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_p}.$$

Summiert man für ein festes p über alle $\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_p}$, so ergeben sich die sphärischen Nebenformeln

$$\binom{n+1}{n+1-p} s_0 - \binom{n}{n+1-p} s_1 + \binom{n-1}{n+1-p} s_2 - + \cdots + \left[(-1)^p - 1\right] s_p = 0 \quad (35)$$

$$\text{mit } s_0 = 1, \; s_1 = \frac{n+1}{2}, \; 4 \leqq p \leqq n$$

die ersichtlich mit den entsprechenden euklidischen Formeln völlig übereinstimmen. Dasselbe gilt, abgesehen von der rechten Seite, auch von der *sphärischen Hauptformel*, die bereits in der Einleitung erwähnt wurde

$$s_0 - s_1 + s_2 - + \cdots + (-1)^n s_n = [1 + (-1)^n] \Omega \quad (36)$$

wo Ω den durch σ dividierten Flächeninhalt von T^n bedeutet.

In bezug auf Rang und Vollständigkeit des Formelsystems (35) und (36) gelten dieselben Sätze wie für das euklidische Simplex. Desgleichen läßt sich die sphärische Hauptformel auf beliebige sphärische Zellen übertragen, die Nebenformeln dagegen nicht, wie wir nun zeigen wollen.

Es sei k_ν die Anzahl der ν-dimensionalen Zellen der Oberfläche eines $(n+1)$-dimensionalen konvexen Polyeders P; außerdem betrachten wir eine n-dimensionale Sphäre $\mathfrak{S}$, deren Mittelpunkt M im Innern von P liegen soll. Projiziert man die Oberfläche von P von M aus zentral auf $\mathfrak{S}$, so entsteht auf $\mathfrak{S}$ eine sphärische Zellenzerlegung mit denselben Anzahlen k_ν, wie sie P besitzt.

Nun sei

$$a_0 s_0 + a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n = c\Omega \quad (37)$$

eine für jede sphärische Zelle gültige Winkelsummenformel; dabei bedeutet Ω wie in (36) den durch die Kugeloberfläche dividierten Inhalt der Zelle, während die a_i und c für alle Zellen dieselben Konstanten sind. Denkt man sich (37) für sämtliche Zellen hingeschrieben und die erhaltenen Gleichungen addiert, so wird die Summe aller s_0 gleich k_n, während die Summe aller Ω einen vollen Winkel, also eins, ergibt. Da sich die Winkel an jeder ν-dimensionalen sphärischen Zelle zu einem vollen ergänzen, so wird die Summe aller $s_{n-\nu}$ gleich k_ν. Die Summation der Gleichungen (37) führt daher auf die folgende Relation zwischen den k_ν:

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu k_{n-\nu} = c \quad (38)$$

Nun ist, wie in der vorletzten Nummer gezeigt wurde, die Eulersche Polyederformel die einzige für alle konvexen Polyeder gültige Relation zwischen den Kantenzahlen k_ν. Somit kann in (37) für die a_i nur das Koeffizientensystem der Hauptformel gesetzt werden, was zu beweisen war.

Bemerkung: Falls das Polyeder P eine simplizial unterteilte Oberfläche besitzt, liefert jede für ein T^n gültige Winkelsummenformel eine richtige Relation zwischen den Kantenzahlen k_ν. Berücksichtigt man dabei auch die triviale Nebenformel, die nur s_0 und s_1 enthält, so ergibt sich als Folge von Satz 4:

Die Anzahlen k_ν der ν-dimensionalen sphärischen Simplexe einer simplizialen Unterteilung der n-dimensionalen Sphäre genügen einem linearen Gleichungssystem vom Rang $m+1$.

§ 5. Ein Satz über die Ähnlichkeit zweier Simplexe

Zwei Simplexe nennen wir *ähnlich*, wenn sie durch eine orthogonale Transformation und eine Streckung ineinander übergeführt werden können. Bekanntlich sind zwei ebene Dreiecke, die in zwei Winkeln übereinstimmen, einander ähnlich, während zwei sphärische Dreiecke, um ähnlich zu sein, in allen drei Winkeln übereinstimmen (und daher kongruent) sein müssen. Wir übertragen hier diese Sätze auf n Dimensionen. Dabei werden nur die α_{ij}, also die Winkel an den $(n-2)$-dimensionalen Kanten, eine Rolle spielen. Im Falle eines sphärischen Simplexes T^n (vgl. § 4.3) verstehen wir unter den Winkeln α_{ij} wiederum die Winkel zwischen je zwei Hyperebenen, die durch den Kugelmittelpunkt gehen und T^n begrenzen. Für ausgeartete Simplexe sind die folgenden Sätze nicht gültig. Wir setzen daher überall voraus, daß keines der α_{ij} gleich 0 oder $\frac{1}{2}$ sei.

Satz 6: Zwei sphärische Simplexe T^n und $\overline{T}^n$ sind ähnlich, wenn für sämtliche $\binom{n+1}{2}$ Indexkombinationen (i,j) $\alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ij}$ gilt.

Satz 6': Zwei euklidische Simplexe S^n und $\bar{S}^n$ sind ähnlich, wenn für sämtliche $\binom{n+1}{2}$ Indexkombinationen (i,j) $\alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ij}$ gilt. Dabei genügt es, das Bestehen dieser Gleichheit nur für $\binom{n+1}{2} - 1$ Indexkombinationen vorauszusetzen.

Beweis von Satz 6: Es sei h_i die i-te durch den Kugelmittelpunkt gehende Begrenzungsebene eines $T^n, \vec{a}_i$ der äußere Normaleneinheitsvektor von h_i. Dann gilt

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = -\cos(2\pi\alpha_{ij}) \tag{39}$$

Zu zeigen ist, daß die gegenseitige Lage der $\vec{a}_i$ durch die α_{ij} bis auf Spiegelungen eindeutig bestimmt ist. Zu diesem Zwecke führen wir ein festes kartesisches Koordinatensystem ein. Dann können wir T^n durch Drehungen in eine solche Lage bringen, daß die Komponentendarstellung der $\vec{a}_i$ die folgende Form hat:

$$\left.\begin{array}{lllll}
\vec{a}_1 & = (a_{11}, & 0, & 0, \cdots\cdots, 0, & 0) \\
\vec{a}_2 & = (a_{21}, & a_{22}, & 0, \cdots\cdots, 0, & 0) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vec{a}_n & = (a_{n1}, & a_{n2}, & a_{n3}, \cdots\cdots, a_{nn}, & 0) \\
\vec{a}_{n+1} & = (a_{n+1,1}, & a_{n+1,2}, & a_{n+1,3}, \cdots, a_{n+1,n}, & a_{n+1,n+1})
\end{array}\right\} \tag{40}$$

Da die $\vec{a}_i$ Einheitsvektoren sind, bestehen zwischen ihren Komponenten die Bedingungen

$$\sum_{k=1}^{i} a_{ik}^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{41}$$

Durch Spiegelungen des T^n an den Koordinatenebenen kann man ferner erreichen, daß sämtliche Komponenten a_{ik} mit zwei gleichen Indizes positiv werden:

$$a_{\nu\nu} > 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{42}$$

Nun ist leicht zu sehen, daß die a_{ik} auf Grund von (39) bis (42) eindeutig bestimmt sind, womit Satz 6 bewiesen ist.

Beweis von Satz 6': Wir bezeichnen mit $\vec{a}_i$ den äußeren Normaleneinheitsvektor der Seitenfläche F_i des S^n. Dann gilt außer den Beziehungen (39) noch die Vektorgleichung

$$F_1\vec{a}_1 + F_2\vec{a}_2 + \cdots + F_{n+1}\vec{a}_{n+1} = 0 \tag{43}$$

wenn F_i gleichzeitig für den Inhalt der i-ten Seitenfläche steht. Da S^n als nichtausgeartet vorausgesetzt ist, sind je n der Vektoren $\vec{a}_i$ linear unabhängig. Gibt man sich umgekehrt $n+1$ Einheitsvektoren $\vec{a}_i$ vor, so daß je n unter ihnen linear unabhängig sind, und die der Bedingung

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_{n+1}\vec{a}_{n+1} = 0, \quad \lambda_i > 0 \; (i = 1, 2, \ldots, n+1)$$

genügen, so existiert auch ein Simplex S^n, das die $\vec{a}_i$ als äußere Normaleneinheitsvektoren besitzt, und zwar bis auf Streckungen nur eines[9]).

Nach diesen Vorbemerkungen denken wir uns die sämtlichen α_{ij} eines S^n, mit Ausnahme von $\alpha_{n,n+1}$, vorgegeben und zeigen, daß die gegenseitige Lage der $\vec{a}_i$ durch diese $\binom{n+1}{2} - 1$ Winkel bis auf Spiegelungen eindeutig bestimmt ist. Denken wir uns wiederum ein festes kartesisches Koordinatensystem gegeben, so können wir S^n in eine solche Lage bringen, daß die Koeffizientenmatrix der ersten n Vektoren $\vec{a}_i$ rechts von den Hauptdiagonalelementen lauter Nullen enthält, und durch Spiegelungen können wir erreichen, daß die Elemente der Hauptdiagonale alle positiv werden; d. h. wir können von der Darstellung

$$\left.\begin{array}{lll}
\vec{a}_1 & = (a_{11}, & 0, \quad 0, \ldots\ldots, 0) \\
\vec{a}_2 & = (a_{21}, & a_{22}, \quad 0, \ldots\ldots, 0) \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vec{a}_n & = (a_{n1}, & a_{n2}, \quad a_{n3}, \ldots\ldots, a_{nn}) \\
\vec{a}_{n+1} & = (a_{n+1,1}, & a_{n+1,2}, \; a_{n+1,3}, \ldots, a_{n+1,n})
\end{array}\right\} \tag{44}$$

und den Bedingungen

$$a_{\nu\nu} > 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{45}$$

---

[9]) Vgl. *Coxeter:* Regular Polytopes, §§ 10.8 und 10.9.

$$\vec{a}_i^{\,2} = \sum_{k=1}^{i} a_{ik}^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{46}$$

$$\vec{a}_{n+1}^{\,2} = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1,k}^2 = 1 \tag{46'}$$

ausgehen. Auf Grund von (39), (44), (45) und (46) sind sämtliche a_{ik} außer $a_{n+1,n}$ eindeutig bestimmt; ferner ist durch (46′) auch $|a_{n+1,n}|$ bestimmt. Das Vorzeichen von $a_{n+1,n}$ läßt sich aus der Vektorgleichung (43) erhalten; deren n-te Komponentengleichung lautet nämlich

$$F_n a_{nn} + F_{n+1} a_{n+1,n} = 0 \tag{47}$$

und somit wird, da F_n und F_{n+1} positiv sind

$$\operatorname{sign} a_{n+1,n} = -\operatorname{sign} a_{nn}$$

Damit ist alles bewiesen.

Bemerkung 1: Die Tatsache, daß ein Simplexwinkel α_{ik} im euklidischen Fall durch die übrigen bestimmt ist, beruht auf einer zwischen diesen Winkeln bestehenden Relation, die sich aus der linearen Abhängigkeit der $n+1$ Vektoren $\vec{a}_i$ ergibt; es handelt sich einfach um die gleich 0 gesetzte Gramsche Determinante dieser Vektoren, in der die Skalarprodukte $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_k$ durch die rechten Seiten von (39) ersetzt sind:

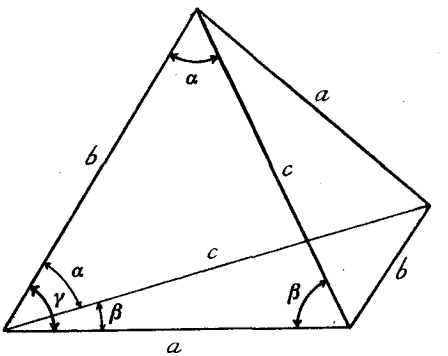
$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos(2\pi\alpha_{12}) & \cdots & -\cos(2\pi\alpha_{1,n+1}) \\ -\cos(2\pi\alpha_{12}) & 1 & \cdots & -\cos(2\pi\alpha_{2,n+1}) \\ -\cos(2\pi\alpha_{13}) & -\cos(2\pi\alpha_{23}) & \cdots & -\cos(2\pi\alpha_{3,n+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\cos(2\pi\alpha_{1,n+1}) & -\cos(2\pi\alpha_{2,n+1}) & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{48}$$

(48) kann als Gleichung für $\alpha_{n,n+1}$ aufgefaßt werden, wenn man sich die übrigen α_{ik} gegeben denkt. Sie ist quadratisch in $\cos(2\pi\alpha_{n,n+1})$, und zwar wird der Koeffizient des quadratischen Gliedes durch die Gramsche Determinante der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{n-1}$ gebildet, die somit linear unabhängig sein müssen, damit dieser Koeffizient nicht verschwindet. Dies voraussetzend, wollen wir kurz die Lösbarkeit der Gleichung (48) diskutieren, was vorteilhaft mit Hilfe einer geometrischen Überlegung geschieht.

Wir denken uns die Vektoren $\vec{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (die ja durch die gegebenen α_{ik} eindeutig bestimmt sind) alle im gleichen Punkte P angesetzt. Dann schlagen wir um den Vektor $\vec{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ als Achse den Kegel mit dem halben Öffnungswinkel $\frac{1}{2} - \alpha_{i,\,n+1}$ und der Spitze P. Wenn nun überhaupt ein reelles Schnittgebilde dieser $n-1$ Kegel existiert, so besteht es aus zwei (gerichteten) Mantellinien, die symmetrisch zur Verbindungsebene E der Kegelachsen liegen (oder auf E zusammenfallen) und die beiden möglichen Richtungen von $\vec{a}_{n+1}$ repräsentieren. Somit ergibt sich, daß die Gleichung (48), wenn sie überhaupt reelle Lösungen besitzt, stets zwei Werte für $\alpha_{n,\,n+1}$ (die ausnahmsweise zusammenfallen können) liefert[10]).

Sollen die $\vec{a}_i$ die äußeren Normalvektoren eines S^n bilden (was bisher nicht vorausgesetzt wurde), so darf $\vec{a}_n$ nicht in die Ebene E fallen, ebensowenig $\vec{a}_{n+1}$, ansonst S^n ausarten würde. Der für das S^n in Frage kommende Vektor $\vec{a}_{n+1}$ ist eindeutig bestimmt; derjenige nämlich, der auf derselben Seite von E liegt wie $\vec{a}_n$, kommt nicht in Betracht, da $-\vec{a}_{n+1}$ auf Grund von (43) eine Linearverbindung von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ mit lauter positiven Koeffizienten sein muß.

Bemerkung 2: Für die Winkel mit mehr als zwei Indizes besitzen die bewiesenen Sätze kein Analogon, wie man sich schon im Falle $n = 3$ überzeugen kann. So ist z. B. ein Tetraeder durch seine 4



Tetraeder mit vier gleichen Raumwinkeln

[10]) Dies schließt die Möglichkeit aus, daß die Gleichung (48) zwei reelle Werte für $\cos(2\pi\alpha_{n,n+1})$ liefert, von denen der eine absolut kleiner, der andere absolut größer als 1 ist.

Raumwinkel der Form nach nicht bestimmt, nicht einmal dann, wenn alle einander gleich sind. Um ein Tetraeder mit vier gleichen Raumwinkeln zu konstruieren, kann man vier kongruente Dreiecke so zu einem solchen zusammenfügen, daß je zwei gleich lange Kanten diametral werden (siehe Figur). Denkt man sich um jeden der vier Eckpunkte die Einheitskugel geschlagen, so sind die herausgeschnittenen sphärischen Dreiecke kongruent, außerdem haben sie alle die Seitensumme π. Nun gibt es jedenfalls unendlich viele sphärische Dreiecke mit vorgeschriebenem Exzeß ω (will sagen vorgeschriebener Winkelsumme) und mit der Seitensumme π. Sind α, β, γ die Seiten eines solchen sphärischen Dreiecks, so hängen diese Seiten noch von einem Parameter ab. Daher erhält man, wenn man je vier kongruente Dreiecke mit den Winkeln α, β, γ in der oben beschriebenen Weise zu einem Tetraeder zusammenfügt, unendlich viele nichtähnliche Tetraeder, von denen jedes vier gleiche Raumwinkel der vorgeschriebenen Größe ω besitzt.

Lebenslauf

Ich wurde am 3. September 1920 als Bürger von Richterswil in Zürich geboren. Hier besuchte ich die Primarschule und das kantonale Gymnasium. Nach bestandener Maturitätsprüfung wandte ich mich im Herbst 1939 dem Studium der Mathematik und Physik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich, zu, wo ich im Herbst 1945 das Diplom als Mathematiker erhielt. Während der folgenden anderthalb Jahre war ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter von Herrn Prof. C. F. Baeschlin am Geodätischen Institut der ETH beschäftigt, der mich mit der Redaktion der „Einführung in die Kurven- und Flächentheorie" sowie einiger Kapitel im „Lehrbuch der Geodäsie" *) betraute. Im Frühling 1947 wählte mich der Regierungsrat als Hauptlehrer für Mathematik und Physik an das kantonale Gymnasium Zürich. Während meiner Lehrtätigkeit entstand auch die vorliegende Arbeit.

Ich möchte nicht unterlassen, an dieser Stelle all den Persönlichkeiten, die mir meinen Weg ebnen halfen, meinen herzlichen Dank auszusprechen, vorab den Herren Prof. C. F. Baeschlin, Prof. F. Stüssi und Rektor W. Hardmeier. Ganz besonders gilt mein Dank Herrn Prof. H. Hopf, der mir bei der Abfassung dieser Arbeit stets mit liebenswürdigem Interesse zur Seite stand und mich mit wertvollen Anregungen unterstützte.

Zürich, im Herbst 1952.

Walter Höhn

---

*) Erschienen 1947, bzw. 1948 im Orell Füßli Verlag, Zürich.