ETH zürich

ETH Library

# Annehmbare Modelle in der linearen Stabilitätstheorie

**Doctoral Thesis**

**Author(s):**
Niederer, Peter Felix

**Publication date:**
1972

**Permanent link:**
https://doi.org/https://doi.org/10.3929/ethz-a-000274123

**Rights / license:**
In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

This page was generated automatically upon download from the ETH Zurich Research Collection.
For more information, please consult the Terms of use.

**Diss. Nr. 4837**

# Annehmbare Modelle in der linearen Stabilitätstheorie

ABHANDLUNG

zur Erlangung
der Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von

PETER FELIX NIEDERER
dipl. Phys. Univ. Zürich
geboren am 1. Mai 1941
von Zürich und Masein (Kt. Graubünden)

Angenomen auf Antrag von
Prof. Dr. H. Ziegler, Referent
Prof. Dr. Ch. Wehrli, Korreferent

Juris Druck + Verlag Zürich
1972

Erscheint auszugsweise in ZAMP 23 (1972) Fasc. 4

ISBN 3 260 03281 9

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung . . . . . 3

I. Teil : Ungestörte Systeme

1. Lineare Systeme mit endlichem Freiheitsgrad

1.1. Auswahl und Klassierung von mechanischen und elektrischen Systemen . . . . . 6

1.2. Stabilität . . . . . 12

1.3. Annehmbare Modelle für Systeme mit endlichem Freiheitsgrad . . . . . 15

2. Lineare Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden

2.1. Auswahl und Klassierung . . . . . 19

2.2. Approximation eines Systems mit unendlich vielen Freiheitsgraden durch eines mit endlich vielen . . 21

2.3. Annehmbare Modelle für Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden . . . . . 38

II. Teil : Gestörte Systeme

3. Einfluss kleiner Störungen auf die Stabilität mechanischer Systeme . . . . . 39

3.1. Störungsrechnung . . . . . 40

3.2. Konservative Systeme . . . . . 43

3.3. Nichtkonservative Systeme . . . . . 45

3.4. Zusammenfassung . . . . . 53

Schlussbemerkungen . . . . . 54

Literaturverzeichnis . . . . . 56

Seite Leer /
Blank leaf

## EINLEITUNG

Bereits im Jahre 1879 haben Thomson und Tait in ihrem damals erschienenen Buch [1], p. 391 bemerkt, dass dissipative Kräfte Systeme, die durch gyroskopische Kräfte stabilisiert werden, wieder destabilisieren können. So kann die Stabilität einer rotierenden Welle mit einer Scheibe in der Mitte an einem einfachen Modell untersucht werden. Die entsprechenden Rechnungen sind beispielsweise in [2], p. 94, oder auch in [3], p. 139 ausgeführt und ergeben, dass die Welle zunächst oberhalb einer bestimmten, kritischen Frequenz durch die Corioliskraft stabilisiert wird. Eine noch so kleine innere Reibung hebt diese Stabilisierung jedoch auf; erst bei Mitberücksichtigung einer allenfalls vom Luftwiderstand herrührenden äusseren Dämpfung erhält man wieder das alte Resultat.

Im Jahre 1952 hat Ziegler [4] die destabilisierende Wirkung einer beliebig kleinen inneren Reibung bei einem tangential und somit nichtkonservativ belasteten Doppelpendel gefunden. Diesen Effekt haben in der Folge vor allem Herrmann, Jong und Nemat-Nasser in [5], [6] und Leipholz in [7] weiter untersucht. Auch hier wird die Destabilisierung durch eine äussere Dämpfung wieder aufgehoben, sie wird ausserdem, wie Bolotin in [3], p. 79 sowie Herrmann und Jong in [5] gezeigt haben, stark von der relativen Grösse der Dämpfungsparameter beeinflusst.

Weiter kann die Stabilität eines Systems davon abhängen, ob kleine Massen vernachlässigt oder mitberücksichtigt werden. Man kann diesen Effekt ebenfalls anhand des Doppelpendels zeigen ([2], p. 67).

Bei einem realen System sind immer kleine Einflüsse vorhanden, seien es Luftwiderstand, Lagerreibungen oder Kräfte im Magnetfeld der Erde. Zur Berech-

nung muss jedoch ein System klar abgegrenzt und vor allem idealisiert werden, indem man beispielsweise bei einem Stab mit konstanter Masse pro Längeneinheit rechnet. Offenbar können aber kleine Einflüsse das Stabilitätsverhalten entscheidend ändern. Es tritt also die Frage auf, wie ein Modell für ein reales System beschaffen sein muss, welches die Eigenschaften dieses Systems in Bezug auf die Stabilität befriedigend wiedergibt. Diese Frage hat Ziegler in [8] aufgeworfen und Lösungsvorschläge gemacht. Es wird in der Arbeit [8] vor allem die Stabilität von stationären Strömen in geschlossenen Kreisen untersucht, und zwar werden Rechnungen an stationären, aus einem Generator und einem Verbraucher bestehenden Stromkreisen gemacht und Rückschlüsse auf geschlossene Massen- und Wärmekreisläufe gezogen. Es zeigt sich auch hier, dass kleine Einflüsse wie die Streukapazität eines Stromkreises eine grosse Wirkung auf das Stabilitätsverhalten ausüben.

Reale Systeme haben immer unendlich viele Freiheitsgrade. Zur Vereinfachung werden häufig starre Körper eingeführt, es werden kontinuierlich verteilte Kapazitäten in einen Kondensator zusammengefasst und weitere ähnliche Idealisierungen gemacht. Mit solchen Mitteln erhält man Systeme mit endlichem Freiheitsgrad. Es wird sich aber im Verlauf dieser Arbeit zeigen, dass es Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden gibt, für die kein befriedigendes Modell mit endlich vielen existiert. Auch hier erhebt sich wieder die Frage, wann und wie man ein kompliziertes reales System zur Stabilitätsuntersuchung vereinfachen kann.

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir diese Fragen unter dem Gesichtspunkt der Annehmbarkeit von Modellen. Die Rechnungen werden durchgeführt an linearen, allenfalls linearisierten mechanischen und elektrischen Systemen mit beliebigem Freiheitsgrad.

In einem ersten Teil werden ungestörte Systeme besprochen, d.h. Systeme, bei denen die Grösse aller auftretenden Kräfte miteinander vergleichbar ist, sodass man keine Kräfte als kleine Störungen betrachten kann. Im ersten Kapitel behandeln wir Systeme mit endlichem Freiheitsgrad. Zunächst werden in den Abschnitten 1.1 und 1.2 die Grundlagen zusammengestellt; in 1.3 können wir darauf die Forderungen begründen, die an ein Modell der bisher besprochenen Art zu stellen sind.

Im zweiten Kapitel, in dem Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden betrachtet werden, wird vor allem die Frage untersucht, wann ein solches System durch ein Modell mit endlichem Freiheitsgrad ersetzt werden kann, auf das dann wieder die Kriterien von 1.3 anwendbar sind.

Im zweiten Teil wird schliesslich auf gestörte Systeme eingegangen, d.h. Systeme, bei denen zusätzlich kleine Kräfte vorhanden sind. Auf Grund einer Störungsrechnung können wir Kriterien dafür angeben, ob solche kleinen Kräfte vernachlässigt werden dürfen, oder ob sie das Stabilitätsverhalten des Systems wesentlich ändern. Diese Frage ist auch aus einem Grunde wichtig, auf den schon Leipholz in [7] hingewiesen hat: Die Stabilität ungedämpft schwingender linearisierter Systeme ist nach Ljapunov kritisch. Es ist daher entscheidend, ob ein solches System durch eine kleine, zunächst vernachlässigte Kraft linearisiert asymptotisch stabil gemacht oder destabilisiert wird, denn diese Eigenschaft ändert sich unter dem Einfluss der Nichtlinearitäten nicht mehr.

# I. TEIL : UNGESTOERTE SYSTEME

## 1. LINEARE SYSTEME MIT ENDLICHEM FREIHEITSGRAD

### 1.1. Auswahl und Klassierung von mechanischen und elektrischen Systemen

1.1.1. Mechanische Systeme. Ein lineares, holonomes und skleronomes System mit $n$ Freiheitsgraden und den Lagekoordinaten $q_k$, $k = 1, \dots, n$ wird durch einen Satz von $n$ gewöhnlichen, linearen Differentialgleichungen beschrieben :

$$\sum_{k=1}^{n} \left( m_{ik} \ddot{q}_k + g_{ik} \dot{q}_k + d_{ik} q_k \right) + h_i = 0 , \qquad (1.1)$$

$$i = 1, \dots, n .$$

Wir beschränken uns auf solche Fälle, bei denen die inhomogenen Beiträge $h_i$ verschwinden. Dann ist $q_k = 0$ eine Gleichgewichtslage. Um die Stabilität solcher Gleichgewichtslagen wird es sich in dieser Arbeit handeln. Weiter sei angenommen, dass die Koeffizienten $m_{ik}$, $g_{ik}$ und $d_{ik}$ von der Zeit unabhängig sind. Da wir uns im Folgenden auf Fälle mit kleinen Bewegungen um die Gleichgewichtslage beschränken, ist es durchaus zulässig, ein allenfalls nichtlineares System zu linearisieren, sofern dies möglich ist.

Die Matrix $m_{ik}$ ist im allgemeinen Fall symmetrisch und positiv definit; die kinetische Energie beträgt $T = \frac{1}{2} \sum m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$ . Sie kann jedoch semidefinit werden, wenn man - etwa bei Vernachlässigungen oder Vereinfachungen - Teile des Systems als masselos annimmt. Es gibt dann möglicherweise Bewegungszustände,

die keine kinetische Energie besitzen.

Beispielsweise wird im Doppelpendel von Fig. 1 mit den Lagekoordinaten $\varphi_1, \varphi_2$ $(|\varphi_i| \ll 1)$

$$m_{ik} = \begin{pmatrix} \ell^2(m_1+m_2) & \ell^2 m_2 \\ \ell^2 m_2 & \ell^2 m_2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $m_{ik}$ ist damit symmetrisch und positiv definit; falls aber $m_1 = 0$ oder $m_2 = 0$ ist, wird sie semidefinit. Die beiden energielosen Bewegungszustände sind $\dot{\varphi}_1 = -\dot{\varphi}_2$ bzw. $\dot{\varphi}_1 = 0$, $\dot{\varphi}_2$ beliebig.

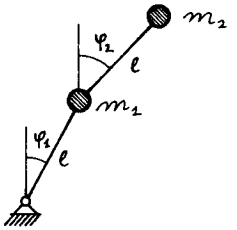


Fig. 1

Aufgrund der Eigenschaften der Matrizen $g_{ik}$ und $d_{ik}$ werden die Systeme nach folgendem Schema klassiert [2] :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $d_{ik}$ symmetrisch, | $g_{ik} = 0$ | : konservativ, | nichtgyroskopisch |
| 2. $d_{ik}$ symmetrisch, | $g_{ik}$ antimetrisch | : konservativ, | gyroskopisch |
| 3. $d_{ik}$ symmetrisch, | $g_{ik}$ symmetrisch, positiv definit | : dissipativ | |
| 4. $d_{ik}$ antimetrisch, | $g_{ik} = 0$ | : zirkulatorisch. | |

Diese Fälle können natürlich auch kombiniert vorkommen. Ein System ist aber nur dann konservativ, wenn alle Beiträge konservativ sind. Im Fall symmetrischer Matrizen $d_{ik}$ und $g_{ik}$ existieren Potentiale, und zwar $V = \frac{1}{2}\sum d_{ik} q_i q_k$ sowie die Rayleigh'sche Funktion $D = \frac{1}{2}\sum g_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ . Letztere wird auch als Dissipationsfunktion bezeichnet, wenn sie positiv definit ist.

1.1.2. Elektrische Systeme. Um zu einer Auswahl und Darstellung der uns interessierenden elektrischen Systeme zu kommen, betrachten wir, ausgehend von den beiden Arbeiten von Ziegler [8] bzw. Grassmann und Ziegler [9], stationäre Stromkreise der in Fig. 2a skizzierten Art. Dabei ist A ein Generator, B ein Verbraucher. Die Charakteri-

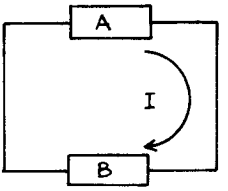


Fig. 2a

stiken von $A$ und $B$, d.h. die Abhängigkeit der Spannungen $V$ an $A$ und $B$ vom Strom $I$ seien $V = f(I)$ für $A$ bzw. $V = g(I)$ für $B$. Diese Charakteristiken dürfen weitgehend beliebig sein, es soll nur in jedem Betriebspunkt dem Generator bzw. dem Verbraucher ein Widerstand $-f'$ bzw. $g'$, nämlich die Tangenten an $f$ und $g$, zugeordnet werden können. Dabei dürfen $-f'$ und $g'$ positive und negative Werte annehmen.

Beispielsweise ist bei einem Generator mit Innenwiderstand $-f'$ positiv, bei einem Lichtbogen als Verbraucher $g'$ negativ (Fig. 2b).

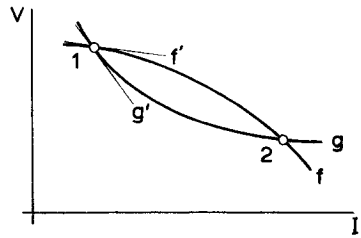


Fig. 2b

Die Schnittpunkte der Charakteristiken - in Fig. 2b sind diese Punkte mit 1 und 2 bezeichnet - sind die Betriebspunkte, bei denen ein stationärer Betrieb möglich ist. Um die Stabilität eines solchen stationären Stromes untersuchen zu können, ist man genötigt, die Selbstinduktion, die Streukapazität und den Ohm'schen Widerstand des Kreises einzuführen, da andernfalls keine Abweichungen vom Gleichgewicht möglich sind [8]. Solche Elemente kann man sich als kleine Kondensatoren etc. in den Stromkreis eingebaut denken, wodurch ein beliebig kompliziertes Netzwerk entsteht.

Als Beispiel wurde in [8] das in Fig. 3 skizzierte Netzwerk untersucht.

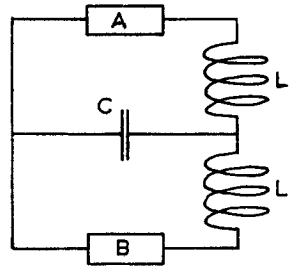


Fig. 3

Man kann sich die Elemente auch kontinuierlich auf den Leitern verteilt vorstellen. In diesem Fall entsteht allerdings ein System mit unendlich vielen Freiheitsgraden. Derartige Systeme werden im zweiten Kapitel betrachtet.

Es sollen zunächst die "Bewegungsgleichungen", d.h. die Gleichungen für die Abweichungen von den Gleichgewichtsströmen so dargestellt werden, dass ein direkter Vergleich mit den mechanischen Fällen möglich ist. Alle Aussagen sind dann für mechanische und elektrische Systeme gleichermassen gültig. Zu diesem Zweck betrachten wir allgemein ebene, endliche und geschlossene Stromkreissysteme, bei denen zeitlich konstante Spannungsquellen, Kondensatoren, Ohm'sche Wider-

stände und Induktivitäten beliebig miteinander kombiniert sind. Die Verbindungsstellen zweier oder mehrerer Elemente heissen Verzweigungspunkte, die einzelnen Elemente Zweige. Der Freiheitsgrad des Systems ist gleich der Anzahl der elementaren Kreise, d.h. derjenigen Kreise, in deren Innerem sich keine Zweige befinden. Er kann durch Abzählen der Zweige und Verzweigungspunkte ermittelt werden, und zwar ist (z.B. [10], p. 9)

$$n = z - V + 1 \qquad (1.2)$$

mit $z$ : Anzahl Zweige

$V$ : Anzahl Verzweigungspunkte.

Die Formel (1.2) kann mit vollständiger Induktion bewiesen werden. Wenn man an einem beliebigen Netzwerk einen weiteren Zweig anbringt, so kann dies auf zwei Arten geschehen: Entweder wird der Zweig in einen schon bestehenden Kreis eingeschaltet, wobei sich die Anzahl der elementaren Kreise nicht verändert, oder er wird an zwei verschiedenen Verzweigungspunkten angeschlossen, wodurch die Anzahl der elementaren Kreise um eins erhöht wird. Diese Situation ist in Fig. 4 dargestellt; der Kasten $N$ bezeichnet das schon bestehende Netzwerk, $z$ den zusätzlichen Zweig. Im ersten Fall gilt $\Delta n = 0$, $\Delta z = 1$, $\Delta V = 1$, im zweiten $\Delta n = 1$, $\Delta z = 1$, $\Delta V = 0$. Es entsteht damit die Bedingung

$$\Delta n = \Delta z - \Delta V . \qquad (1.3)$$

Das Netzwerk von Fig. 5 ergibt zusammen mit (1.3) die Formel (1.2).

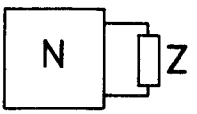



Fig. 4

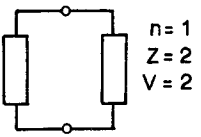



Fig. 5

Die "Maschentransformation" (z.B. [10], p. 26) führt auf Kreisströme $I_1, I_2, \ldots, I_n$ als "Lagekoordinaten" des Systems. Die erste Kirchhoff'sche Regel wird dabei von selbst befriedigt, wie aus Fig. 6 ersichtlich ist. Der wirkliche Strom in einem Zweig ist gleich der Summe aller durch ihn fliessenden Kreisströme. Allenfalls vorhandene konstante Gleichgewichtsströme sollen abgezählt werden, sodass von nun an $I_1, \ldots, I_n$ die Abweichungen vom Gleichgewicht bedeuten. Wir interessieren uns für die Stabilität dieses Gleichgewichtes.

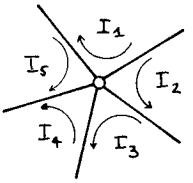
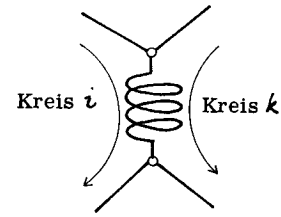



Fig. 6
Der Richtungssinn der Ströme ist beliebig; die Summe aller ein- und ausfliessenden Ströme verschwindet.

Wir betrachten den $i$ -ten Kreis. Die Summe aller Induktivitäten, die in den Zweigen des $i$-ten Kreises vorhanden sind, wird als $L_{ii}$ bezeichnet. Falls der $k$ -te Kreis eine Induktivität mit dem $i$ -ten gemeinsam hat, nennt man diese $L_{ik}$ . Wie Fig. 7 zeigt, ist $L_{ik} = L_{ki}$. Das Vorzeichen von $L_{ik}$ soll negativ sein, wenn die beiden Ströme sich entgegen laufen. Es ist somit $|L_{ik}|$ ein Teil von $L_{ii}$ und es gilt




$L_{ik} = L_{ki}$
Fig. 7

$$L_{ii} = \sum_{\substack{k=1 \\ \neq i}}^{n} |L_{ik}| + L_i \qquad (>0),$$

wobei $L_i$ diejenige Induktivität ist, die der $i$ -te Kreis nur für sich allein besitzt. Die Vorzeichenkonvention wird eingeführt, damit in (1.4) alle Beiträge zu den Spannungen das richtige Vorzeichen erhalten. Die Matrix $L_{ik}$ ist in jedem Fall symmetrisch[1]. Entsprechend sind die Matrizen $R_{ik}$ für die Ohm'schen Widerstände und $\frac{1}{C_{ik}}$ für die Kapazitäten $C_{ik}$ definiert. Die Spannungen an den verschiedenen Elementen im $i$ - ten Kreis betragen, wenn $J_k$ die Gleichgewichtsströme bedeuten,

$$\sum_{k=1}^{n} L_{ik}\dot{I}_k \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} R_{ik}(I_k + J_k) \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_{ik}} \int^{t} I_k(t')\,dt' .$$

Die zweite Kirchhoff'sche Regel ergibt nach einmaliger Ableitung nach der Zeit, da die Gleichgewichtsströme und die zeitlich konstanten Spannungsquellen herausfallen,

$$\sum_{k=1}^{n} \left( L_{ik}\ddot{I}_k + R_{ik}\dot{I}_k + \frac{1}{C_{ik}} I_k \right) = 0. \qquad (1.4)$$

Damit ist die formale Analogie zur Mechanik erreicht.

Die Matrix $L_{ik}$ ist mindestens positiv semidefinit. Diese Tatsache wird normalerweise physikalisch begründet (z.B. [10] , p. 353 ) ; im Folgenden wird hingegen ein formaler Beweis gegeben.

Es ist zu zeigen, dass die Determinante der Matrix und alle Hauptminoren positiv sind. Sie hat folgenden Aufbau :

---

[1]Der Effekt der gegenseitigen Induktion (im Gegensatz zu der hier als gemeinsam bezeichneten Induktivität ), d.h. der Strom, der durch das Magnetfeld des $k$ - ten Kreisstromes im $i$ - ten Kreis induziert wird, soll hier vernachlässigt werden. Es dürfen also, wie in Fig. 3, p. 8, nur Selbstinduktionen vorkommen und beispielsweise keine Transformatoren.

$$L_{ik} = \begin{pmatrix} \underbrace{L_1 + |L_{12}| + \cdots + |L_{1n}|}_{L_{11}} & L_{12} & \cdots & L_{1n} \\ L_{21} & \underbrace{|L_{21}| + L_2 + |L_{23}| + \cdots + |L_{2n}|}_{L_{22}} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & & & \\ L_{n1} & \cdots & & \underbrace{|L_{n1}| + \cdots + |L_{n\,n-1}| + L_n}_{L_{nn}} \end{pmatrix}$$

Bei der Berechnung aller der zu untersuchenden Determinanten sind die einzigen Summanden, die allenfalls ein negatives Vorzeichen haben, solche, bei denen mindestens ein Faktor nicht auf der Diagonale steht. Zu jedem solchen Term lässt sich einer finden, der denselben Betrag hat, aber sicher positiv ist : Man nimmt das Produkt der gleichen, in denselben Zeilen auf der Diagonale stehenden Faktoren. Das ist stets zu erreichen, da alle nicht auf der Diagonale stehenden Elemente als Summanden auf der Diagonale vorkommen. Da es aber höchstens noch mehr positive Produkte aus Termen auf der Diagonale gibt, beispielsweise $L_1 \cdots L_n$ , ist die Behauptung bewiesen.

Ein entsprechender Beweis lässt sich durchführen für $\frac{1}{C_{ik}}$ . Im Gegensatz zu den mechanischen Fällen ist also hier das "Potential" $V = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{C_{ik}} I_i I_k$ immer mindestens positiv semidefinit.

Die Matrizen werden sicher dann semidefinit, wenn induktions- bzw. kapazitätsfreie Kreise vorkommen. Dann stehen nämlich in gewissen Spalten und Zeilen lauter Nullen, sodass die Determinante (samt einigen der Hauptminoren) null wird. Kapazitätsfreie Kreise sind wohl realisierbar, induktionsfreie jedoch nicht, da immer ein Rest von Selbstinduktion vorhanden ist.

Wegen der Symmetrie der Matrizen $L_{ik}$ , $R_{ik}$ und $\frac{1}{C_{ik}}$ kommen hier nur die folgenden beiden, zur Mechanik analogen Fälle vor :

| | |
|---|---|
| 1. $R_{ik} = 0$ | : System konservativ, nichtgyroskopisch |
| 2. $R_{ik} \neq 0$ | : System dissipativ, falls $R_{ik}$ positiv definit |

Zusammenfassung:

1. In Bezug auf die Matrix $L_{ik}$ herrschen dieselben Zustände wie im mechanischen Fall bei $m_{ik}$. Sie ist positiv definit und wird höchstens bei Vernachlässigung von Selbstinduktionen semidefinit.
2. Ueber die Matrix $R_{ik}$ lässt sich ausser der Symmetrie nichts aussagen, da wir negative Widerstände zulassen.
3. Die Matrix $\frac{1}{C_{ik}}$ ist immer mindestens positiv semidefinit.

## 1.2. Stabilität

1.2.1. Allgemeines. Um die Stabilität des Gleichgewichtes eines Systems zu untersuchen, betrachtet man das Verhalten desselben bei kleinen Störungen (kinetische Methode [2]). Die dabei entstehenden Abweichungen vom Gleichgewicht $q_k(t)$ bzw. $I_k(t)$ sind die Lösungen der Differentialgleichungen (1.1) und (1.4). Ein Gleichgewichtszustand wird als stabil bezeichnet, falls für genügend kleine Anfangswerte $q_k(0)$, $\dot{q}_k(0)$ ($k = 1, \ldots, n$) die Lösungen $q_k(t)$, $\dot{q}_k(t)$ beliebig klein bleiben. (Für eine äquivalente Definition im Ljapunov'schen Formalismus siehe z.B. [11].)

Die grundlegenden Theoreme über die verschiedenen, in 1.1 klassierten Fälle findet man in [2]. Für die elektrischen Systeme gelten die entsprechenden Sätze.

1.2.2. Normalkoordinaten. Bei Systemen ohne geschwindigkeitsabhängige Kräfte bzw. ohne Ohm'sche Widerstände reduziert sich das Differentialgleichungssystem auf die Form

$$A_{ik}\ddot{q}_k + B_{ik}q_k = 0 , \qquad (1.5)$$

wo $A_{ik}$ symmetrisch und mindestens positiv semidefinit, $B_{ik}$ beliebig ist. Im konservativen Fall ist $B_{ik}$ symmetrisch, im nichtkonservativen kann zumindest ein symmetrischer Teil $B_{ik}'$ abgespaltet werden, sodass der verbleibende Rest $B_{ik}''$ schief ist. Falls $A_{ik}$ positiv definit ist, kann man einen Satz von Normalkoordinaten finden, in welchem $A_{ik}$ und $B_{ik}'$ diagonal sind [12]. Der schiefe Teil $B_{ik}''$ bleibt bei dieser Transformation schief. Wenn $A_{ik}$ positiv semidefinit ist, lässt sich die Transformation auf Normalkoordinaten nicht durchführen. Der Uebergang vom definiten zum semidefiniten Fall wird im Abschnitt 1.2.3 besprochen.

Nach der Transformation auf Normalkoordinaten und mit dem Ansatz

$$q_i(t) = y_i e^{-i\lambda t} \qquad (1.6)$$

erhalten wir für die Gleichungen (1.5)

$$\Omega y = \lambda^2 y . \qquad (1.7)$$

Dabei bedeutet $\Omega$ eine reelle, im konservativen Fall diagonale, im nichtkonservativen Fall beliebige Matrix und $y$ eine Spaltenmatrix, d.h. einen Vektor in einem $n$ - dimensionalen Raum. Dieser Vektorraum kann allenfalls komplex sein, denn im nichtkonservativen Fall besteht die Möglichkeit komplexer Eigenwerte. Falls solche auftreten, ist aber das System instabil, da beim Einsetzen eines komplexen $\lambda^2$ in (1.6) immer ein exponentiell anwachsender Teil entsteht. Solange sämtliche $n$ Eigenwerte verschieden, reell und positiv sind, ist das System stabil und es genügt die Beschränkung auf einen reellen Raum.

1.2.3. Uebergang von einem definiten $A_{ik}$ zu einem semidefiniten. Ziegler hat in [2], p. 67 und [8] an den bereits erwähnten Systemen von Fig. 1, p. 7 und Fig. 3, p. 8 mit zwei Freiheitsgraden gezeigt, dass man den semidefiniten Fall nicht als Grenzfall des definiten darstellen kann : Wenn bei einem mechanischen oder elektrischen System gewisse Massen oder Selbstinduktionen gegen null gehen und somit $m_{ik}$ bzw. $L_{ik}$ semidefinit werden, so ergibt sich nicht dasselbe Stabilitätsverhalten, wie wenn von Anfang an die entsprechenden Grössen gleich null gesetzt werden. Wir wollen nun zeigen, dass diese Erscheinung bei beliebigem endlichem Freiheitsgrad auftritt.

Beweis : Die Lösungen von (1.1) und (1.4) findet man mit dem Ansatz (z.B. für (1.1))

$$q_i(t) = a_i e^{\mu t}. \qquad (1.8)$$

In (1.1) eingesetzt ergibt dies

$$m_{ik} a_k \mu^2 + g_{ik} a_k \mu + d_{ik} a_k = 0 .$$

Damit Lösungen für die $a_k$ bestehen, muss die Determinante der Koeffizienten verschwinden. Dabei entsteht eine Gleichung $2n$ - ter Ordnung für die Eigenfrequenzen, deren höchster Term $(\det m_{ik}) \cdot \mu^{2n}$ ist. Wie (1.8) zeigt, ist das System stabil, falls alle Lösungen der Frequenzengleichung negativen Realteil haben. Die Lösungen einer Gleichung

$$a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_m = 0 \qquad (a_0 > 0)$$

haben genau dann diese Eigenschaft, wenn die Determinanten

$$a_1 , \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} , \quad \text{etc.} \qquad (1.9)$$

alle positiv sind (Routh - Hurwitz - Kriterien). Diese Kriterien ergeben in unserem Fall $2n-1$ Ungleichungen, welche sich stetig ändern, wenn wir $m_{ik}$ semidefinit werden lassen. Falls aber $m_{ik}$ von Anfang an semidefinit ist, verschwindet der Term mit der höchsten Potenz in $\mu$ , da die Determinante

einer semidefiniten Matrix verschwindet [12]. Damit entsteht eine Frequenzengleichung $(2n-1)$ - ter Ordnung. Es ergibt sich eine Bedingung weniger, und ausserdem lauten die $2n-2$ neuen Bedingungen im allgemeinen anders als solche aus der Reihe (1.9). Diese Tatsache ist schon aus dem ersten Routh - Hurwitz - Kriterium ersichtlich: $a_1 > 0$ war im definiten Fall die erste Stabilitätsbedingung ( $a_0$ ist als Determinante einer positiv definiten Matrix positiv). Diese lautet jetzt, da das Vorzeichen von $a_1$ nicht bestimmt ist, $\frac{a_2}{a_1} > 0$. Letztere Bedingung ist auch für negative $a_1$ erfüllt, falls gleichzeitig $a_2$ negativ ist. Diese Möglichkeit ist im definiten Fall nicht gegeben.

## 1.3. Annehmbare Modelle für Systeme mit endlichem Freiheitsgrad

1.3.1. Allgemeines. Es sei ein System mit endlichem Freiheitsgrad gegeben, dessen Stabilität mit Hilfe eines Modells untersucht werden soll. Nicht jedes Modell, das sich anschaulich dazu anbietet, ist für diesen Zweck geeignet.

Für Systeme der Art von Fig. 2a, p. 7, erhält man je nach Modell ganz verschiedene Stabilitätskarten (Fig. 13, 14 p. 32, Fig. 17, p. 34).

Ein Modell nennen wir annehmbar, wenn es das Stabilitätsverhalten des gegebenen Systems in Funktion aller interessierenden Parameter in bestimmten, von Fall zu Fall festzulegenden Grenzen physikalisch richtig wiedergibt. Solche Parameter sind beispielsweise Lasten, Kapazitäten usw. Die Anforderungen an ein Modell hängen also auch davon ab, wie genau ein reales System wiedergegeben werden soll. In den folgenden drei Abschnitten werden vier Grundregeln an-

gegeben, die bei der Auswahl von Modellen beachtet werden müssen. Dazu können im Einzelfall natürlich noch weitere Forderungen kommen.

1.3.2. Die Matrizen $m_{ik}$ und $L_{ik}$. In einem realen System gibt es keine masselosen Teile, es gibt also auch keine Bewegungszustände ohne kinetische Energie. Ebenso existieren keine Stromkreise ohne Selbstinduktion. Da aber der Fall mit semidefiniter kinetischer Energie bzw. semidefiniter Matrix $L_{ik}$ nicht als Grenzfall des definiten dargestellt werden kann, fordern wir für ein annehmbares Modell:

REGEL I: Die Matrizen $m_{ik}$ und $L_{ik}$ müssen positiv definit sein.[1]

1.3.3. Systeme ohne geschwindigkeitsabhängige Kräfte bzw. ohne Ohm'sche Widerstände.

a) Konservativer Fall. Bei positiv definitem $m_{ik}$ bzw. $L_{ik}$ hängt die Stabilität nur von der Definitheit des Potentials $V = \frac{1}{2} \sum d_{ik} q_i q_k$ bzw. $V = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{C_{ik}} I_i I_k$ ab [2]. Es ist deshalb als zweite Regel zu verlangen:

REGEL II: Bei konservativen Systemen ohne geschwindigkeitsabhängige Kräfte bzw. ohne Ohm'sche Widerstände muss das Potential des Modells in Funktion der interessierenden Parameter dieselben Eigenschaften hinsichtlich der Definitheit haben wie das gegebene System.

b) Nichtkonservativer Fall. Hier interessiert nur der mechanische Fall, da bei einem elektrischen Netzwerk $\frac{1}{C_{ik}}$ immer symmetrisch ist. Durch Transforma-

---

[1] Wärmeströme sind trägheitslos. Aus demselben Grunde, aus dem die Regel I für mechanische und elektrische Systeme gefordert wird, ist sie für Wärmestromkreise dahingehend abzuändern, dass bei solchen Modellen nur trägheitslose Kreise vorkommen dürfen. Im Folgenden werden keine Wärmeströme mehr betrachtet.

tion auf Normalkoordinaten wird das System auf die Form (1.7) gebracht. Die Eigenwerte $\lambda^2$ der Matrix $\Omega$ müssen in Funktion der interessierenden Parameter die Verhältnisse beim exakten System befriedigend wiedergeben; eine Forderung, über deren Erfüllung nur durch explizite Berechnung von Fall zu Fall entschieden werden kann.

1.3.4. Systeme mit geschwindigkeitsabhängigen Kräften bzw. mit Ohm'schen Widerständen. Ueber die Stabilität von solchen Systemen gibt es eine Reihe von Sätzen, die in einer Arbeit von Magnus [13] zusammengestellt sind.

a) Geschwindigkeitsabhängige und -unabhängige Kräfte aus Potentialen herleitbar. Das Folgende gilt auch für elektrische Systeme, da $R_{ik}$ und $\frac{1}{C_{ik}}$ immer symmetrisch sind. Es lässt sich eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Annehmbarkeit von Modellen angeben:

REGEL III: Falls beim gegebenen System die geschwindigkeitsabhängigen Kräfte aus einer Rayleigh'schen Funktion $D = \frac{1}{2} \sum g_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k$ und die geschwindigkeitsunabhängigen aus einem Potential $V = \frac{1}{2} \sum d_{ik} q_i q_k$ herleitbar sind (entsprechend für elektrische Systeme), müssen $D$ und $V$ des Modells in Bezug auf die Definitheit dieselben Eigenschaften haben wie beim gegebenen System.

Zusammen mit der Forderung, dass die kinetische Energie positiv definit sein muss, nimmt diese Regel einen zentralen Platz ein, da sie für eine grosse Klasse von Systemen anwendbar ist. Sie folgt aus der Tatsache, dass bei solchen Systemen zusätzlich zu den bereits besprochenen Eigenschaften von $V$ die Definitheit von $D$ allein für die Wirkung der damit beschriebenen Kräfte entscheidend ist, was die Stabilität betrifft ([13], siehe auch 3.4). Die Regel III ist deshalb notwendig und hinreichend.

b) Beliebige Kräfte. Dieser Fall tritt nur für mechanische Systeme ein. Wenn die geschwindigkeitsabhängigen Kräfte ein Potential haben, die geschwindigkeits-

unabhängigen aber nicht, kann man keine zum Fall a) analoge Ueberlegung anstellen, denn Kräfte, die aus positiv definiten Rayleigh'schen Funktionen folgen, können bei solchen Systemen, wie wir im Abschnitt 3.3 sehen werden, die Stabilität in verschiedener Weise beeinflussen. Immerhin lässt sich für einen Spezialfall noch eine Regel angeben, die zwar notwendig, aber nicht hinreichend ist:

REGEL IV : Falls beim gegebenen System bei beliebigen geschwindigkeitsabhängigen Kräften die geschwindigkeitsunabhängigen rein zirkulatorisch sind, muss die Anzahl der Freiheitsgrade des Modells entsprechend derjenigen des exakten Systems gradzahlig oder ungradzahlig sein.

Dies folgt daraus, dass solche Systeme, je nach dem sie eine gradzahlige oder ungradzahlige Anzahl von Freiheitsgraden haben, ganz verschiedene Eigenschaften in Bezug auf die Stabilisierbarkeit durch geschwindigkeitsabhängige Kräfte haben [13]. Im Uebrigen ist hier die Annehmbarkeit eines Modells im Einzelfall zu prüfen.

1.3.5. Schlussbemerkungen. Die Regeln II und III wurden bereits von Ziegler [8] für mechanische Systeme vermutet. Hier werden sie ebenfalls für elektrische Systeme begründet; ausserdem ist hier die Regel I für beliebige endliche Freiheitsgrade bewiesen.

# 2. LINEARE SYSTEME MIT UNENDLICH VIELEN FREIHEITSGRADEN

## 2.1. Auswahl und Klassierung

Wir betrachten eindimensionale, lineare, elastische mechanische und elektrische Systeme mit unendlichem Freiheitsgrad, also elastische Balken, Leiter mit kontinuierlich verteilter Kapazität etc. Die Stabilität von Gleichgewichtszuständen solcher Systeme untersuchen wir wie im endlichen Fall mit Hilfe kleiner Abweichungen vom Gleichgewicht. Dies führt auf lineare partielle Differentialgleichungen für die gesuchte Lösungsfunktion $q(x,t)$, wo $q(x,t)$ die Abweichung vom Gleichgewicht, $0 \leq x \leq \ell$ und $\ell$ die Länge des Balkens oder des Leiters ist. Wir wollen annehmen, dass ausser allenfalls in den Randbedingungen keine zeit- und geschwindigkeitsabhängigen Kräfte bzw. Ohm'schen Widerstände vorkommen. Ebenso sollen die auftretenden Koeffizienten wie Massenverteilung, Induktionen usw. zeitunabhängig sein.

Unter diesen Voraussetzungen erhält man mit dem Ansatz

$$q(x,t) = y(x)\, e^{-i\lambda t} \qquad (2.1)$$

ein Eigenwertproblem der Form

$$\Omega y = \lambda^2 y \,. \qquad (2.2)$$

Dabei ist $\Omega$ ein gewöhnlicher linearer Differentialoperator. Ein System ist genau dann stabil, wenn alle Eigenwerte von $\Omega$ reell und nichtnegativ sind. Wie bei endlichen Systemen ist also der zugrundeliegende Raum im stabilen Fall

reell.[1] Die Aussage (2.2) soll kurz begründet werden.

1. Mechanische Systeme. Die einzigen Kräfte, die vorkommen können, sind lageabhängige konservative oder nichtkonservative Kräfte sowie Trägheitskräfte. Nur die letzteren enthalten eine zeitliche Ableitung von $q(x,t)$. In der Euler - Lagrange'schen Gleichung des Hamilton'schen Prinzips ergibt die kinetische Energie den Beitrag

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta T}{\delta \dot{q}(x,t)}\right) \quad ; \quad T = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} m(x)\,[\dot{q}(x,t)]^2\,dx \;,$$

welcher mit dem Ansatz (2.1) die gewünschte Form (2.2) ergibt.

2. Elektrische Systeme. Der hier behandelte Fall wird durch die Telegraphengleichungen (z.B. [14], vol. 2, p. 192) beschrieben, welche, da wir zunächst keine Ohm'schen Widerstände zulassen, lauten:

$$\left.\begin{aligned} L(x)\,\dot{\varepsilon}(x,t) &= -\frac{\partial \nu(x,t)}{\partial x} \\ C(x)\,\dot{\nu}(x,t) &= -\frac{\partial \varepsilon(x,t)}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (2.3)$$

$L(x)$ ist die Selbstinduktion des Leiters pro Längeneinheit,
$C(x)$ die Kapazität pro Längeneinheit,
$\varepsilon(x,t)$ die Abweichung vom Gleichgewichtsstrom und
$\nu(x,t)$ die Abweichung von der Gleichgewichtsspannung.

Durch Elimination folgt sowohl für $\nu$ als auch für $\varepsilon$ die Wellengleichung

$$LC\,\ddot{\varepsilon} - \varepsilon'' = 0. \qquad (L, C \text{ konstant}) \qquad (2.4)$$

Diese ergibt mit (2.1) ebenfalls eine Gleichung der Form (2.2).

Zur vollständigen Bestimmung der Operatoren $\Omega$ gehören noch Randbedingungen. Da wir von den inneren Kräften annehmen, dass sie konservativ sind, stammt die Nichtkonservativität normalerweise von den Randbedingungen. Mit Hilfe der folgenden Aussage lassen sich die Systeme klassieren (z.B. [15], p.

---

[1] Es handelt sich um den reellen $\mathcal{L}^2(0,\ell)$ - Raum. Das Skalarprodukt ist definiert als

$$(y_1, y_2) = \int_0^{\ell} dx\; y_1(x)\, y_2(x) \;.$$

183) :

Konservativen nichtgyroskopischen Systemen entsprechen selbstadjungierte Operatoren und umgekehrt, nichtkonservativen entsprechen nichtselbstadjungierte.

## 2.2. Approximation eines Systems mit unendlich vielen Freiheitsgraden durch eines mit endlich vielen

2.2.1. Problemstellung. In dem in Fig. 3, p. 8 skizzierten System mit zwei Freiheitsgraden wird die gesamte, über den Leiter verteilte Induktivität und Kapazität durch $L$ und $C$ dargestellt. Es erhebt sich die Frage, ob dieses Vorgehen zulässig ist. Wenn man Modelle mit einer grösseren Anzahl von Freiheitsgraden zulässt, können beliebig viele andere Anordnungen betrachtet werden, beispielsweise Fig. 15 und 17, p. 34 usw. Insbesondere kann man das "exakte" System mit unendlich vielen Freiheitsgraden nehmen, für welches die Telegraphengleichungen (2.3) mit den Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} v(0,t) &= \varepsilon(0,t)\cdot f' \\ v(\ell,t) &= \varepsilon(\ell,t)\cdot g' \end{aligned}\right\} \quad (2.5)$$

gelten. Sie folgen aus dem Ohm'schen Gesetz für die beiden Widerstände $-f'$ und $g'$ (Fig. 12, p. 28).

Reale Systeme haben immer unendlich viele Freiheitsgrade. Häufig will man aber endliche Modelle zur Stabilitätsuntersuchung verwenden. Es stellen sich folgende Fragen :

1) Gibt es Systeme mit endlichem Freiheitsgrad, die ein ähnliches oder dasselbe Stabilitätsverhalten wie das gegebene unendliche System haben ?

2) Ist allenfalls eine gewisse "Konvergenz" gegen das Stabilitätsverhalten des unendlichen Systems feststellbar, falls der Freiheitsgrad des als Modell dienenden endlichen Systems, wie zum Beispiel in Fig. 16 , p.33 , gegen unendlich geht ?

Den Begriff der Konvergenz , der noch genau zu definieren sein wird, werden wir zur Erweiterung der Definition von annehmbaren Modellen für Systeme mit unendlichem Freiheitsgrad brauchen. Zunächst sollen aber die unter 1) und 2) gestellten Fragen in den beiden nächsten Abschnitten untersucht werden.

2.2.2. Konservative Systeme. Konservative Systeme der hier betrachteten Art sind genau dann stabil, wenn das Potential positiv definit ist. Dieser Satz gilt unabhängig von der Anzahl der Freiheitsgrade.

Wir nehmen an, wir hätten ein System mit unendlich vielen Freiheitsgraden, das äusserlich in sinnvoller Weise durch ein endliches Modell wiedergegeben werden kann. Das Modell muss natürlich alle Parameter enthalten, in Bezug auf welche das Stabilitätsverhalten untersucht werden soll.

Beispiel : Wir betrachten den Euler'schen Knickstab in Fig. 8a, p. 23, welcher die Knicklast

$$P_k = \frac{\pi^2 E J}{4 \ell^2}$$

besitzt. Mögliche Modelle sind in Fig. 8b dargestellt. [16]. Sie besitzen das Potential

$$V = \frac{c'}{2} \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i - \varphi_{i+1})^2 - \frac{P\ell}{2n} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2 \ . \quad (\varphi_n = 0) \qquad (2.6)$$

Damit der Grenzübergang $n \longrightarrow \infty$ möglich wird, verlangen wir

$$\begin{aligned} &|\varphi_i| \leqq \eta \quad \text{und} \\ &|\varphi_i - \varphi_{i+1}| \leqq \eta \cdot \frac{1}{n} \ , \quad 0 < \eta \ll 1 \ . \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Anstelle der Winkel $\varphi_i$ wählen wir als Koordinaten die Auslenkungen $y(x_i)$ , womit (2.6) wegen $x_i - x_{i+1} = \frac{\ell}{n}$ lautet

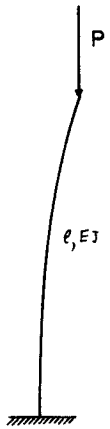
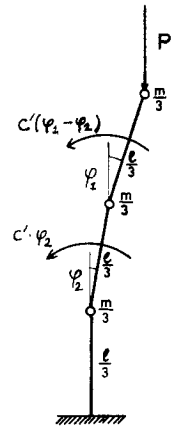



Fig. 8a



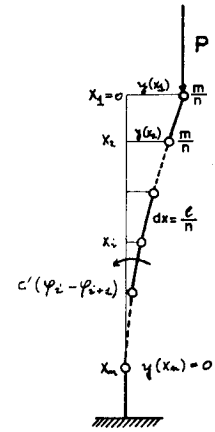




Fig. 8b

$$V = \frac{c'}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{[y(x_{i-1})-y(x_i)]\cdot n}{\ell} - \frac{[y(x_i)-y(x_{i+1})]\cdot n}{\ell}\right)^2$$

$$-\frac{P\ell}{2n}\sum_{i=1}^{n}\frac{[y(x_{i-1})-y(x_i)]^2\cdot n^2}{\ell^2}\,.$$

Aus der ersten Bedingung (2.7) folgt

$$|y(x_{i-1}) - y(x_i)| \leq \frac{\eta\cdot\ell}{n} \quad \text{und}$$

$$\left|\frac{y(x_{i-1})-y(x_i)}{x_{i-1}-x_i}\right| \leq \eta\,,$$

womit $y(x_i)$ für $n \to \infty$ stetig und differenzierbar wird; ebenso gilt wegen der zweiten Bedingung

$$|[y(x_{i-1}) - y(x_i)] - [y(x_i) - y(x_{i+1})]| \leq \eta\frac{\ell^2}{n^2} \quad \text{und}$$

$$\left|\frac{\left\{\frac{[y(x_{i-1})-y(x_i)]}{x_{i-1}-x_i} - \frac{[y(x_i)-y(x_{i+1})]}{x_i-x_{i+1}}\right\}}{x_{i-1}-x_i}\right| \leq \eta\,.$$

$y(x)$ ist somit zweimal differenzierbar. Jetzt können wir mit $\frac{\ell}{n} = dx$ den Grenzübergang $n \to \infty$ durchführen, falls für die Federkonstante $c'$ jeweils der Wert $c' = n\cdot c$ gewählt wird:

$$V = \frac{c\ell}{2}\int_0^\ell [y'(x)]^2\,dx - \frac{P}{2}\int_0^\ell [y'(x)]^2\,dx\,.$$

Dies ist aber gerade das Potential für den Euler'schen Knickstab.

Die in diesem Beispiel interessierenden Parameter sind die Last $P$, die Biegesteifigkeit $EJ$, deren Rolle im Modell von $c \cdot \ell$ übernommen wird und die Länge $\ell$ des Stabes. Da wegen der Beschränkung (2.7) die Werte des Potentials in diesen Parametern gegen die Werte des gegebenen Systems konvergieren, konvergieren auch die Knicklasten $P_k^i$, bei welchen das Potential semidefinit wird, gegen den richtigen Wert. Am Ende dieses Abschnittes wird diese Aussage allgemein bewiesen.

Die in den Bewegungsgleichungen (1.1) vorkommende Matrix $c_{ik}$ ist für das obige Beispiel

$$\sim \begin{pmatrix} 1-\frac{P\ell}{cn^2} & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 2-\frac{P\ell}{cn^2} & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 2-\frac{P\ell}{cn^2} & -1 & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieser Matrix lässt sich rekursiv berechnen. Damit kann man die Knicklasten numerisch angeben; in Fig. 8c, p. 25, sind einige davon aufgetragen.

Die Potentiale sind Funktionen bzw. im unendlichen Fall Funktionale, welche die Menge aller möglichen Abweichungen vom Gleichgewicht ( $y_i$ bzw. $y(x)$ ) auf ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall auf der reellen Achse abbilden. Die Beschränktheit und Abgeschlossenheit des Intervalls folgt aus der Tatsache, dass wegen der Linearität immer Bedingungen von der Art (2.7) gestellt werden müssen. Falls überhaupt für ein System ein sinnvolles endliches Modell existiert, wird es im allgemeinen auch möglich sein, den Freiheitsgrad des Modells wie im eben besprochenen Beispiel beliebig zu erhöhen. Unter der "Konvergenz" des Potentials für $n \to \infty$ wollen wir die Eigenschaft verstehen, dass die unteren Endpunkte der Intervalle gleichmässig in den Parametern gegen die entsprechenden Werte des exakten Potentials konvergieren. Dann geht aber auch das Stabilitätsverhalten des Modells für $n \to \infty$ in dasjenige des exakten Systems über, d.h. es konvergieren die Parameterwerte, bei denen das System stabil oder instabil wird.

Knicklasten für die Modelle des Euler'schen Knickstabes

( $\ell$ = 1, $EJ$ = 1, $C$ = 1)

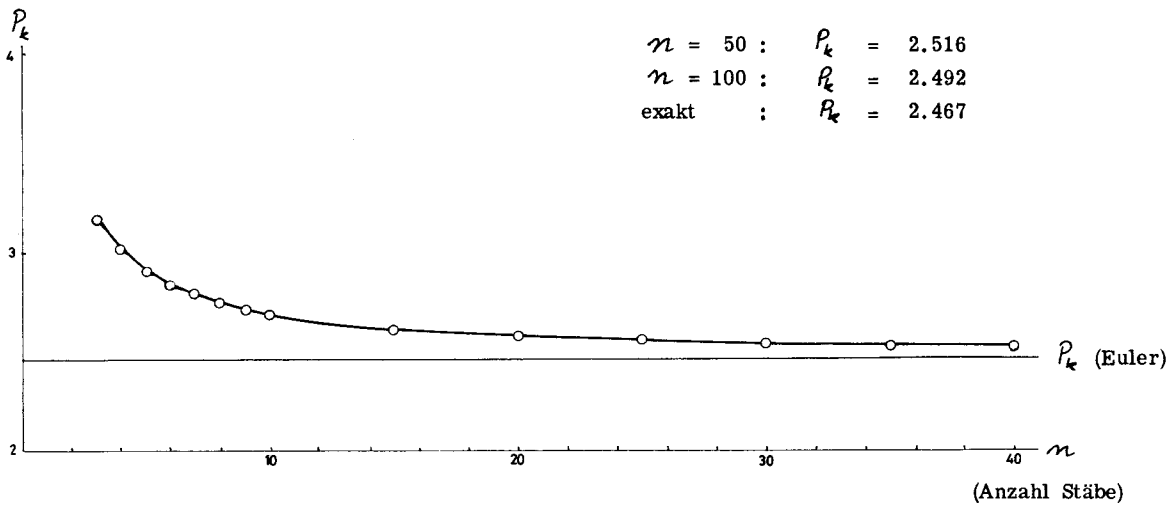



Fig. 8c

Beweis : Gegeben sei das Potential eines unendlichen Systems $V_\infty(A, y(x,A))$ mit einem beliebigen Parameter $A$ . Für $A > A_\infty$ sei $V_\infty$ indefinit, für $A < A_\infty$ positiv definit, d.h. das System ist für $A > A_\infty$ instabil und für $A < A_\infty$ stabil. Weiter sei ein Modell gegeben mit den entsprechenden Werten $V_n(A, y_i(A))$ und $A_n$ . Es konvergiere $V_n$ im oben definierten Sinne gegen $V_\infty$ . Wir behaupten, dass $A_n \to A_\infty$ für $n \to \infty$ . Zunächst schränken wir $A_n$ von oben ein. Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ existieren Abweichungen vom Gleichgewicht $y(x, A)$ , sodass $V_\infty(A_\infty + \varepsilon, y(x, A_\infty + \varepsilon)) < 0$ ist; die untere Grenze von $V_\infty(A_\infty + \varepsilon, y(x, A_\infty + \varepsilon))$ werde mit $V_\infty^u$ bezeichnet. Wegen der Konvergenz gibt es ein $n_{01}$ , so dass für $n > n_{01}$ $V_n^u(A_\infty + \varepsilon, y_i(A_\infty + \varepsilon))$ ebenfalls negativ ist, wobei $V_n^u$ entsprechend die untere Grenze von $V_n$ bedeutet. Es gilt also, da $V_n$ für $A = A_\infty + \varepsilon$ offensichtlich indefinit ist, $A_n < A_\infty + \varepsilon$. Für die Abschätzung von $A_n$ nach unten ist noch eine weitere Bedingung notwendig. Für $A < A_\infty$ ist die untere Grenze $V_\infty^u$ von $V_\infty$ gleich null, denn für $y(x) = 0$ ist $V_\infty = 0$ . Damit $V_\infty^u$ und $V_n^u$ im positiv definiten Fall positiv werden, verlangen wir $|y(x)|_{max} > h$ und $|y_i|_{max} > h$ , $0 < h \ll h_0$, wo $h_0$ die Linearitätsgrenze bedeutet. Es ist also für $A = A_\infty - \varepsilon$ jetzt $V_\infty^u$ positiv, und wegen der Konvergenz existiert wiederum ein $n_{02}$, so dass für $n > n_{02}$ $V_n^u(A_\infty - \varepsilon, y_i(A_\infty - \varepsilon))$ ebenfalls positiv und $V_n$ folglich positiv definit ist. Es gilt also

$$A_\infty + \varepsilon > A_n > A_\infty - \varepsilon ,$$

womit die Behauptung bewiesen ist, da $\varepsilon$ beliebig gewählt werden kann.

2.2.3. Nichtkonservative Systeme. Unter dem Spektrum eines Systems verstehen wir die Menge aller Eigenwerte der Matrix $\Omega$ in (1.7) bzw. das Spektrum des Operators $\Omega$ in (2.2), je nach dem das System endlichen oder unendlichen Freiheitsgrad hat. Durch das Spektrum ist die Stabilität eines Systems eindeutig bestimmt. Das Stabilitätsverhalten eines endlichen Modells geht folglich für $n \to \infty$ in dasjenige des gegebenen unendlichen Systems über, wenn die Spektren ineinander übergehen. Es kann aber nur durch explizite Rechnung von Fall zu Fall nachgeprüft werden, ob diese Bedingung erfüllt ist. Im

Folgenden sollen diese Dinge an zwei Beispielen erhellt werden.

1. Beispiel : Wir betrachten den Beck'schen Knickstab, Fig. 9a. Für die naheliegenden Modelle in Fig. 9b ist

$$\Omega = \begin{pmatrix} cn^4 & -2cn^4 & cn^4 & 0 & 0 & \cdots \\ -2cn^4 + Pn^2 & 5cn^4 - 2Pn^2 & -4cn^4 + Pn^2 & cn^4 & 0 & \\ cn^4 & -4cn^4 + Pn^2 & 6cn^4 - 2Pn^2 & -4cn^4 + Pn^2 & cn^4 & \\ 0 & cn^4 & -4cn^4 + Pn^2 & 6cn^4 - 2Pn^2 & -4cn^4 + Pn^2 & \\ 0 & 0 & cn^4 & -4cn^4 + Pn^2 & 6cn^4 - 2Pn^2 & \cdots \\ \vdots & & & & & \vdots \end{pmatrix},$$

denn die Bewegungsdifferentialgleichungen folgen aus

$$T = \sum_i \frac{m}{n} \dot{y}_i^2 ,$$

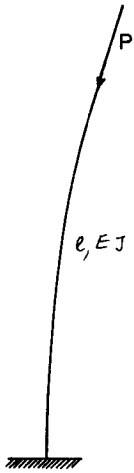



Fig. 9a

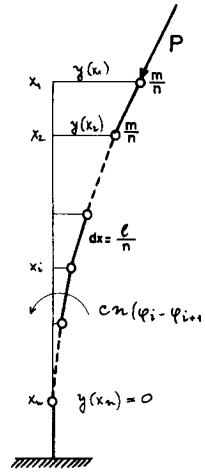



Fig. 9b

$$V = \frac{cn^3}{2} \sum_i (y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2})^2,$$

$$Q_i = nP(-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1}).$$

$$(Q_1 = 0,\ y_n = y_{n+1} = 0,\ \ell = 1,\ c' = c \cdot n)$$

Die in Fig. 9b eingeführten Koordinaten $y_i$ sind zwar keine Normalkoordinaten; immerhin ist aber die Matrix $m_{ik}$ diagonal, sodass die Darstellung (1.7) möglich ist. Die Eigenfrequenzen wurden für einige Modelle numerisch berechnet. In einem ( $P$ , $\lambda^2$ ) - Diagramm liegen die Werte der Eigenfrequenzen auf Kurvenästen, die im vierten Quadranten aufsteigen, im ersten ein Maximum haben und wiederum in den vierten Quadranten zurückgehen. In Fig. 10, p. 29, und Fig. 11, p. 30, sind die beiden ersten Kurvenäste des exakten Systems sowie diejenigen der Modelle aufgezeichnet. Das einfachste Modell besteht aus drei Stäben, denn der unterste Stab wurde als fest eingespannt angenommen, um die Randbedingung des exakten Systems ( $y'(\ell) = 0$ ) zu simulieren. Die Modelle wurden bis zu zehn Stäben gerechnet. Mit zunehmendem Freiheitsgrad nähern sich die Kurven der exakten Kurve.

2. Beispiel : Wir untersuchen das bereits mehrmals erwähnte, in Fig. 2a, p. 7 skizzierte System. Das unendliche System (Fig. 12) besteht aus dem Generator A und dem Verbraucher B mit den Widerständen $-f'$ und $g'$. Leiter mit kontinuierlich verteilter Induktivität $L(x)$ und Kapazität $C(x)$ verbinden A und B miteinander, und zwar seien $L(x)$ und $C(x)$ konstant. Das System wird, wie in (2.4) und (2.5) erwähnt, durch die Differentialgleichungen

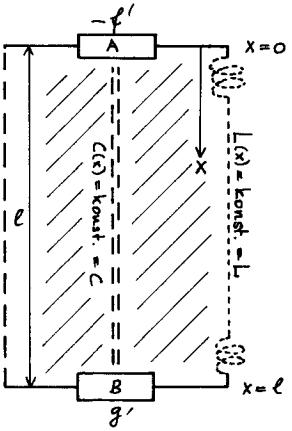


Fig. 12

$$LC\ddot{\varepsilon} - \varepsilon'' = 0, \qquad (2.8)$$

$$LC\ddot{\nu} - \nu'' = 0$$

mit den Randbedingungen

## Die beiden tiefsten Eigenwerte des Beck'schen Knickstabes und der Modelle

Die Eigenwerte zur Last $P$ erhält man als Schnittpunkte zwischen den Kurven und Parallelen zur $\lambda^2$ - Achse durch $P$. Oberhalb des Scheitels sind die Eigenwerte konjugiert komplex und das System somit instabil.

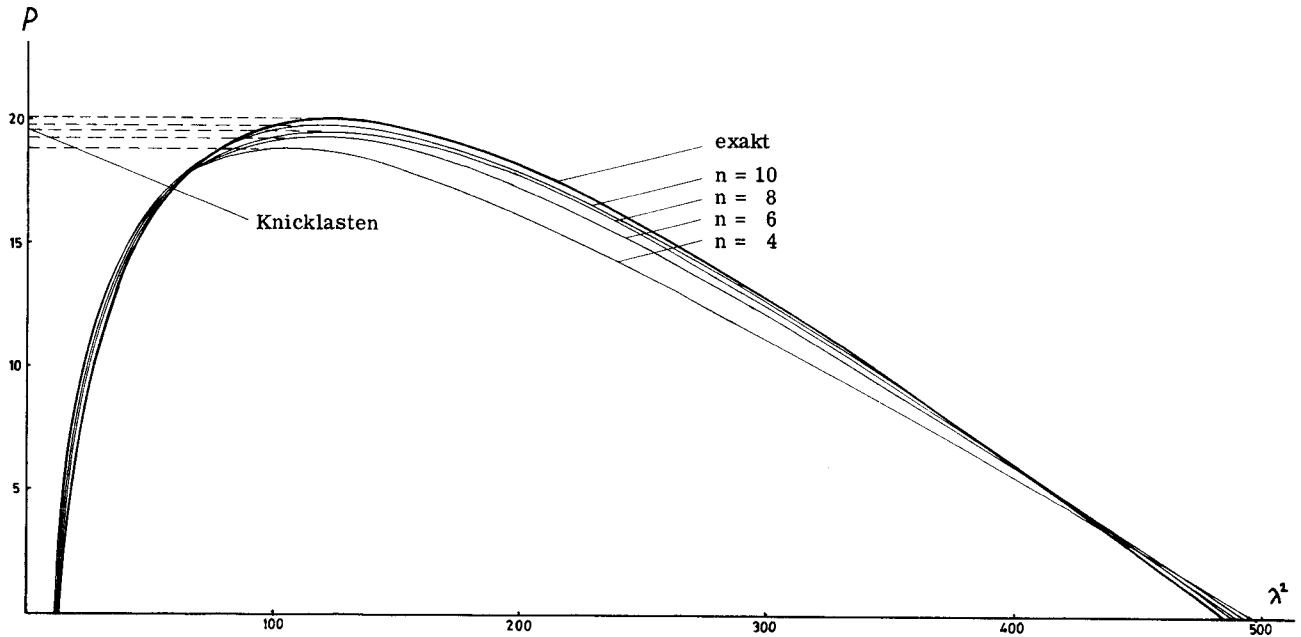



Fig. 10

Dritter und vierter Eigenwert des Beck'schen Knickstabes und der Modelle

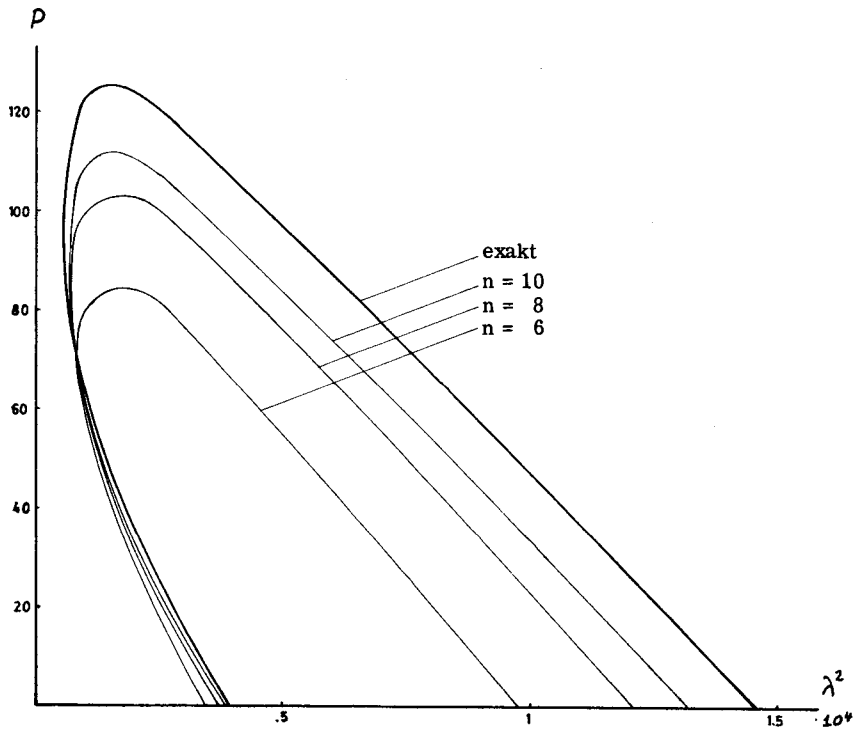



Fig. 11

$$\begin{aligned} v(0,t) &= f'\,\varepsilon(0,t) \\ v(\ell,t) &= g'\,\varepsilon(\ell,t) \end{aligned} \qquad (2.9)$$

beschrieben. Die allgemeine Lösung der Gleichung (2.8) lautet

$$\begin{aligned} v &= \chi_1(t+\sqrt{LC}\,x) + \chi_2(t-\sqrt{LC}\,x)\,, \\ \varepsilon &= \phi_1(t+\sqrt{LC}\,x) + \phi_2(t-\sqrt{LC}\,x)\,. \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Die beiden Randbedingungen ergeben

$$\chi_1(t) + \chi_2(t) - f'(\phi_1(t) + \phi_2(t)) = 0, \qquad (2.11)$$

$$\chi_1(t+\sqrt{LC}\,\ell) + \chi_2(t-\sqrt{LC}\,\ell) - g'\left[\phi_1(t+\sqrt{LC}\,\ell) + \phi_2(t-\sqrt{LC}\,\ell)\right] = 0\,. \qquad (2.12)$$

Diese beiden Gleichungen genügen noch nicht zur Lösung des Problems. Da aber (2.8) durch Differentiation und Elimination aus den Telegraphengleichungen (2.3) gewonnen wurde, müssen $\phi_1$, $\phi_2$, $\chi_1$ und $\chi_2$ untereinander noch die Beziehungen

$$\chi_1(t) + \chi_2(t) + \sqrt{\frac{L}{C}}\,(\phi_1(t) - \phi_2(t)) = 0, \qquad (2.13)$$

$$\phi_1(t) + \phi_2(t) + \sqrt{\frac{C}{L}}\,(\chi_1(t) - \chi_2(t)) = 0 \qquad (2.14)$$

erfüllen. Aus (2.11) und (2.13) folgt

$$\phi_2(t) = \phi_1(t)\cdot\frac{\sqrt{\frac{L}{C}} + f'}{\sqrt{\frac{L}{C}} - f'}\,.$$

Aus (2.11) und (2.14) erhält man

$$-\chi_2(t) = \chi_1(t)\,\frac{\sqrt{\frac{L}{C}} + f'}{\sqrt{\frac{L}{C}} - f'} \quad \text{und} \quad \chi_1(t) = -\phi_1(t)\sqrt{\frac{L}{C}}\,.$$

In (2.12) eingesetzt ergibt dies

$$\phi_1(t+\sqrt{LC}\,\ell) = \phi_1(t-\sqrt{LC}\,\ell)\,\frac{\frac{L}{C} - f'g' + \sqrt{\frac{L}{C}}\,(f'-g')}{\frac{L}{C} - f'g' - \sqrt{\frac{L}{C}}\,(f'-g')} = K\cdot\phi_1(t-\sqrt{LC}\,\ell) \qquad (2.15)$$

und gleiche Ergebnisse für $\phi_2$, $\chi_1$ und $\chi_2$. Das System ist stabil, falls $|K|<1$ ist. Das entspricht den beiden Möglichkeiten

$$\begin{aligned} &\frac{L}{C} - f'g' > 0 \quad \text{und} \quad g' - f' > 0 \quad \text{oder} \\ &\frac{L}{C} - f'g' < 0 \quad \text{und} \quad g' - f' < 0\,. \end{aligned} \qquad (2.16)$$

Das stabile Gebiet in der $(f', g')$ - Ebene ist in Fig. 13 schraffiert eingezeichnet.

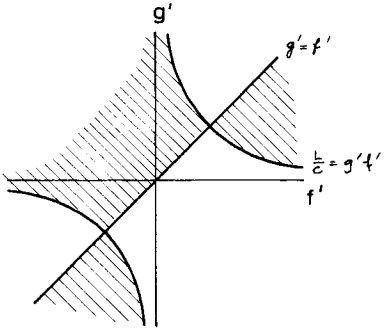



Fig. 13

Das einfachste Modell, das sich anbietet, ist in Fig. 14a skizziert. Die zugehörige Stabilitätskarte zeigt Fig. 14b [8], [9]. Das System ist stabil, wenn

$$\frac{L}{C} - f'g' > 0 \quad \text{und} \quad g' - f' > 0. \qquad (2.17)$$

Es ergibt sich nur die erste der beiden stabilen Möglichkeiten (2.16).

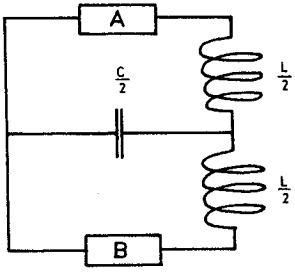



Fig. 14a

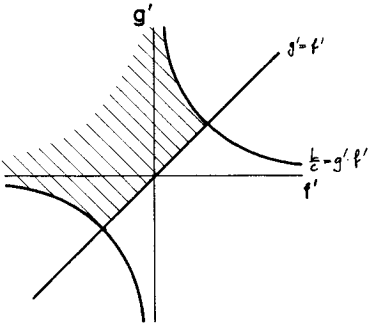



Fig. 14b

Falls man den Freiheitsgrad dieses Systems erhöht, ändert sich an der Stabilitätskarte von Fig. 14b nichts, denn die "Bewegungsgleichungen" lauten für das System mit drei Freiheitsgraden (Fig. 15)

$$\frac{L}{3}\ddot{I}_1 - f'\dot{I}_1 + \frac{3}{C}(I_1 - I_2) = 0,$$

$$\frac{L}{3}\ddot{I}_2 - \frac{3}{C}(I_1 - 2I_2 + I_3) = 0, \qquad (2.18)$$

$$\frac{L}{3}\ddot{I}_3 + g'\dot{I}_3 - \frac{3}{C}(I_2 - I_3) = 0,$$

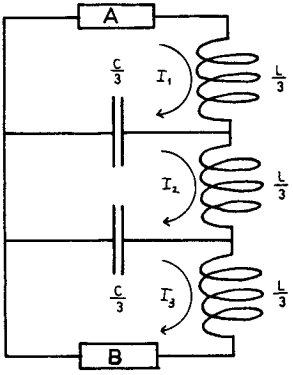



Fig. 15

mit vier Freiheitsgraden

$$\begin{aligned}
&\frac{L}{4}\ddot{I}_1 - f'\dot{I}_1 + \frac{4}{C}(I_1 - I_2) = 0 \,, \\
&\frac{L}{4}\ddot{I}_2 - \frac{4}{C}(I_1 - 2I_2 + I_3) = 0 \,, \\
&\frac{L}{4}\ddot{I}_3 - \frac{4}{C}(I_2 - 2I_3 + I_4) = 0 \,, \\
&\frac{L}{4}\ddot{I}_4 + g'\dot{I}_4 + \frac{4}{C}(I_4 - I_3) = 0 \,.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

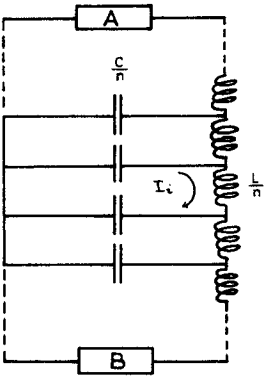



Fig. 16

Wendet man die Routh - Hurwitz - Kriterien auf die Gleichungen (2.18) und (2.19) an, so ergeben alle entweder

$$g' - f' > 0 \qquad (2.20) \qquad \text{oder}$$

$$\frac{L}{C} - g'f' > 0 \qquad (2.21) \qquad \text{oder}$$

triviale Aussagen. Es lässt sich zeigen, dass auch bei weiterer Erhöhung des Freiheitsgrades (Fig. 16) die Bedingung (2.20) erhalten bleibt. Die Determinante, aus welcher die Gleichung für die Eigenfrequenzen des Modells mit $n$ Freiheitsgraden folgt, hat allgemein die Form

$$\begin{vmatrix}
\frac{L}{n}\lambda^2 - f'\lambda + \frac{n}{C} & -\frac{n}{C} & 0 & 0 & \cdots \\
-\frac{n}{C} & \frac{L}{n}\lambda^2 + \frac{2n}{C} & -\frac{n}{C} & 0 & \cdots \\
0 & -\frac{n}{C} & \frac{L}{n}\lambda^2 + \frac{2n}{C} & -\frac{n}{C} & \\
\vdots & & & \ddots & \\
 & & & -\frac{n}{C} & \frac{L}{n}\lambda^2 + g'\lambda + \frac{n}{C}
\end{vmatrix} .$$

Die beiden ersten Terme der Gleichung lauten damit

$$\left(\frac{L}{n}\right)^n \lambda^{2n} + (g' - f')\left(\frac{L}{n}\right)^{n-1} \cdot \lambda^{2n-1} + \cdots \quad .$$

Das erste Routh - Hurwitz - Kriterium ergibt die Bedingung (2.20). Das Stabilitätsverhalten des Modells geht also für $n \to \infty$ nicht in dasjenige des gegebenen unendlichen Systems über.

Man könnte denken, dass ein anderes Modell die Stabilitätskarte des exakten Systems besser wiedergibt, beispielsweise dasjenige in Fig. 17a. Hier lauten die Gleichungen

$$-f'\dot{I}_1 + \frac{3}{C}(I_1 - I_2) = 0,$$

$$\frac{L}{3}\ddot{I}_2 + \frac{3}{C}(-I_1 + 2I_2 - I_3) = 0,$$

$$g'\dot{I}_3 + \frac{3}{C}(I_3 - I_2) = 0.$$

Die Routh - Hurwitz - Kriterien ergeben hier die Bedingungen

$$\frac{g' - f'}{g' f'} < 0 \quad (2.22) \quad \text{und} \quad \frac{g'f' - \frac{L}{C}}{g' - f'} > 0. \quad (2.23)$$

Die Stabilitätskarte ist in Fig. 17b aufgezeichnet. Das Modell besitzt oben und

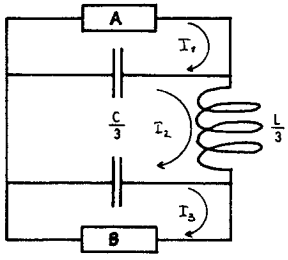



Fig. 17a

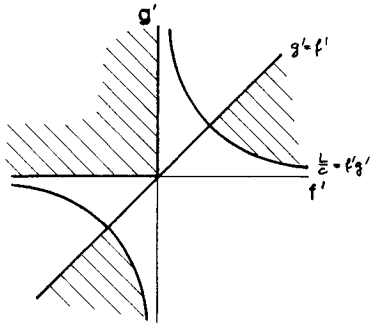



Fig. 17b

unten einen trägheitslosen Kreis, wäre also von vornherein abzulehnen. Es ist deshalb von Interesse, weil es die zum zuerst besprochenen Modell gewissermassen komplementäre Stabilitätskarte ergibt. Man würde erwarten, dass beide Systeme für $n \to \infty$ in das richtige System übergehen (siehe Bemerkung 2, p. 36). Auch hier bleibt aber die Bedingung (2.22) für $n \to \infty$ erhalten. Die Determinante, welche die charakteristische Gleichung ergibt, lautet hier für $n$ Stromkreise

$$\begin{vmatrix} -f'\lambda + \frac{n}{c} & -\frac{n}{c} & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{n}{c} & \frac{L}{n}\lambda^2 + \frac{2n}{c} & -\frac{n}{c} & 0 & \cdots \\ 0 & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ & & & -\frac{n}{c} & g'\lambda + \frac{n}{c} \end{vmatrix} .$$

Die ersten Terme der charakteristischen Gleichung lauten

$$\left(\frac{L}{n}\right)^{n-2} \cdot \lambda^{2n-2} - \left(\frac{L}{n}\right)^{n-2} \cdot \frac{g'-f'}{g'\cdot f'} \cdot \frac{n}{c} \cdot \lambda^{2n-3} + \cdots,$$

woraus die Bedingung (2.22) folgt.

Es konnte kein System mit nur wenigen Freiheitsgraden gefunden werden, welches für $n \to \infty$ das Stabilitätsverhalten des unendlichen Systems aufweist.

Zum Schluss dieses Abschnittes seien noch zwei Bemerkungen zum eben besprochenen System gemacht.

1. Da offenbar die untersuchten Modelle nicht die Eigenschaft haben, dass ihr Spektrum für $n \to \infty$ in dasjenige des unendlichen Systems übergeht, könnte man allenfalls denken, letzteres habe kein reines Punktspektrum. Dass dies aber der Fall ist, sieht man aus der Resolventen[1]. Die Randbedingungen (2.9) lassen sich entkoppeln; mit dem Ansatz (2.1) erhalten wir das Eigenwertproblem

$$\frac{1}{LC}\, y'' + \lambda^2 y = 0$$

mit den Randbedingungen

$$i\lambda g' y(\ell) - \frac{1}{c} y'(\ell) = 0,$$

$$i\lambda f' y(0) - \frac{1}{c} y'(0) = 0.$$

[1]Reguläre selbstadjungierte Differentialoperatoren haben immer ein reines Punktspektrum ([18], p. 312). Die Resolvente existiert nicht auf den Punkten des Punktspektrums, währenddem sie auf den Punkten des kontinuierlichen Spektrums ein unbeschränkter, auf allen anderen Punkten ein beschränkter Operator ist ([18], [19]).

$y(x)e^{-i\lambda t}$ bedeutet dabei die Abweichung vom Gleichgewichtsstrom; für die Spannung würde die Rechnung analog verlaufen. Die Resolvente konstruieren wir mit Hilfe der Green'schen Funktion $K(x,\xi)$ ([14], vol. 1, p. 354), welche für dieses Problem lautet

$$K(x,\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{D}\,\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(\xi) & x \leqq \xi \\ -\frac{1}{D}\,\varphi_1(\xi)\cdot\varphi_2(x) & x > \xi \end{cases},$$

$$\varphi_1(x) = k_1 e^{i\lambda\sqrt{LC}\,x} + e^{-i\lambda\sqrt{LC}\,x},$$

$$\varphi_2(x) = k_2 e^{-2i\lambda\sqrt{LC}\,\ell} e^{i\lambda\sqrt{LC}\,x} + e^{-i\lambda\sqrt{LC}\,x},$$

wobei

$$D = 2i\lambda\sqrt{LC}\,(k_2 e^{-2i\lambda\sqrt{LC}\,\ell} - k_1),$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}} + f'}{\sqrt{\frac{L}{C}} - f'}, \qquad k_2 = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}} + g'}{\sqrt{\frac{L}{C}} - g'}.$$

$\varphi_1(x)$ erfüllt die Randbedingung bei $x = 0$, $\varphi_2(x)$ erfüllt die Randbedingung bei $x = 1$, die Ableitung $\frac{dK(x,\xi)}{dx}$ macht an der Stelle $x = \xi$ einen Sprung der Grösse -1. Die Resolvente hat damit die Form

$$R(\lambda) = \int K(x,\xi)\cdots d\xi$$

und ist ein beschränkter Integraloperator ausser auf den Nullstellen von $D$. Das Problem hat demnach ein reines Punktspektrum. Uebrigens erhält man auch hier die Stabilitätskriterien (2.16), indem alle Lösungen der Gleichung $D(\lambda) = 0$ negative Imaginärteile haben müssen.

2. Die Differentialgleichungen des exakten Systems (2.8), (2.9) lassen sich aus den Funktionalen

$$T = \frac{1}{2}\int_0^\ell dx\, L(x)\,[\dot{I}(x,t)]^2$$

$$D = \frac{1}{2}\,[-f'(\dot{I}(0,t))^2 + g'(\dot{I}(\ell,t))^2]$$

$$V = \frac{1}{2}\int_0^\ell dx\,\frac{1}{C(x)}\,[I'(x,t)]^2$$

mit Hilfe eines Variationsprinzips erhalten. Für das erste Modell lauten diese Grössen

$$T = \frac{L}{2n} \sum_{i=1}^{n} \dot{I}_i^2$$

$$D = \frac{1}{2} \left[ -f' \dot{I}_1^2 + g' \dot{I}_n^2 \right]$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n}{C} \left( I_{n+1} - I_n \right)^2 ,$$

und sie haben mit einer (2.7) entsprechenden Bedingung die in 2.2.2. definierten Konvergenzeigenschaften. Offensichtlich folgt daraus aber nicht das gewünschte Stabilitätsverhalten. Wenn man das System konservativ macht, indem man beispielsweise statt des Generators $A$ und des Verbrauchers $B$ je einen Kondensator $C_1$ einsetzt, erhält man für dieses (allerdings triviale) System sofort Modelle mit der gewünschten Eigenschaft. Für das Fig. 16 entsprechende System ist

$$\Omega \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1} + \frac{n}{C} & -\frac{n}{C} & 0 & \cdots & & \\ -\frac{n}{C} & \frac{2n}{C} & -\frac{n}{C} & & & \cdots \\ 0 & -\frac{n}{C} & \frac{2n}{C} & -\frac{n}{C} & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ & & \cdots & 0 & -\frac{n}{C} & \frac{n}{C} + \frac{1}{C_1} \end{pmatrix}$$

und ergibt für $n \to \infty$ die einzige Stabilitätsbedingung $C > 0$, welche man auch für das unendliche System mit einer Rechnung wie (2.8) ff erhält.

## 2.3. Annehmbare Modelle für Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden

Die Definition von annehmbaren Modellen soll jetzt erweitert werden auf solche für Systeme mit unendlichem Freiheitsgrad. Es ist naheliegend, die Modelle für den Euler'schen sowie den Beck'schen Knickstab in (2.2) als annehmbar zu bezeichnen im Gegensatz zu denjenigen für das System von Fig. 12, p. 28. Wir bezeichnen allgemein ein Modell für ein System mit unendlichem Freiheitsgrad als annehmbar, falls sein Stabilitätsverhalten bei unbeschränkter Erhöhung des Freiheitsgrades in dasjenige des gegebenen Systems übergeht. Wir fassen die Ergebnisse dieses Kapitels in zwei weiteren Regeln zusammen.

REGEL V : Falls das gegebene unendliche System konservativ und nichtgyroskopisch ist und mit den Funktionalen $T$ und $V$ beschrieben werden kann, ist für die Annehmbarkeit eines Modells die Konvergenz (vergl. p. 24) der entsprechenden Funktionen $T$ und $V$ hinreichend.

REGEL VI : In allen anderen Fällen ist zu untersuchen, ob das Spektrum des Modells für $n \to \infty$ in das Spektrum des exakten Systems übergeht. Ist dies der Fall, so ist das Modell annehmbar.

Zum Schluss sei noch die wichtige Tatsache festgehalten, dass für Systeme, die durch Funktionale $T$, $V$ und das Rayleigh'sche Funktional $D$ beschrieben werden, die Konvergenz der Funktionen $T$, $V$ und $D$ der Modelle nicht für deren Annehmbarkeit genügt.

# II. TEIL : GESTOERTE SYSTEME

## 3. EINFLUSS KLEINER STOERUNGEN AUF DIE STABILITAET MECHANISCHER SYSTEME

Es wurde in der Einleitung darauf hingewiesen, dass es Systeme gibt, deren Stabilitätsverhalten sich bei Berücksichtigung oder Vernachlässigung kleiner Störungen (Lagerreibungen etc.) sprunghaft ändert [4], [5]. In diesem Kapitel wenden wir uns der Frage zu, in welchen Fällen welche Arten von kleinen Einflüssen mitberücksichtigt werden müssen. Während wir in den letzten beiden Kapiteln gewissermassen mathematische Anforderungen an das Modell stellten, damit wir es als annehmbar bezeichnen konnten, sollen es jetzt physikalische sein. Aus den Ergebnissen wird man sehen, dass diese Untersuchungen nur für mechanische Systeme von Interesse sind. Wir wollen deshalb von nun an keine elektrischen Systeme mehr betrachten.

Kleine Störungen ergeben kleine Verschiebungen des Spektrums. Falls ein System stark instabil oder stabil ist, hat eine kleine Frequenzverschiebung keinen grossen Einfluss. Wenn es aber ungedämpfte Schwingungen um die Gleichgewichtslage ausführt, besteht die Möglichkeit, dass einige der Eigenfrequenzen in die stabile oder instabile Halbebene verschoben werden. Im Fall linearisierter Systeme ist dies besonders wichtig [7]. Wir werden deshalb die Frage nach dem

Einfluss kleiner Störungen im Fall ungedämpft, mit wesentlich von Null verschiedener Frequenz schwingender Systeme untersuchen. Die kleinen Frequenzverschiebungen sollen mit Hilfe einer Störungsrechnung berechnet werden. Da Reibungen aller Art immer geschwindigkeitsabhängige Kräfte sind, wollen wir annehmen, dass das ungestörte System keine solchen enthält; alle geschwindigkeitsabhängigen Kräfte werden als Störungen betrachtet. Dazu ist notwendig, dass alle diese Kräfte klein sind im Vergleich zu den geschwindigkeitsunabhängigen. Explizite Anwendungen werden später zeigen, dass die Ergebnisse selbst für vergleichbare Kräfte noch brauchbar sind.

Im Abschnitt 3.1 wird die Störungsrechnung allgemein durchgeführt, und zwar zunächst der Vollständigkeit halber für geschwindigkeitsunabhängige Störungen. Diese stellen sich aber sogleich als bedeutungslos heraus und brauchen im Folgenden nicht mehr beachtet zu werden. In den Abschnitten 3.2 und 3.3 wird die Rechnung für geschwindigkeitsabhängige Störungen gemacht und auf physikalische Systeme angewandt. In 3.4 schliesslich werden die Kriterien zusammengefasst, nach welchen Störungen vernachlässigt werden dürfen oder nicht.

## 3.1. Störungsrechnung

3.1.1. Störung durch geschwindigkeitsunabhängige Kräfte. In diesem Kapitel bedeutet in der Eigenwertgleichung

$$\Omega y = \lambda^2 y \qquad (3.1)$$

$y$ eine Spaltenmatrix mit $n$ reellen Zahlen, falls der Freiheitsgrad des Systems gleich $n$ ist, oder eine reelle Funktion, falls der Freiheitsgrad unendlich ist, $\Omega$ eine reelle $n \times n$ Matrix oder einen Differentialoperator. Da wir uns nur für Systeme interessieren, die im ungestörten Zustand unge-

dämpfte Schwingungen ausführen, genügt die Beschränkung auf reelle Räume. Das Skalarprodukt $(\psi_i, \psi_k)$ zwischen zwei Elementen $\psi_i$ und $\psi_k$ dieser Vektorräume ist im endlichdimensionalen Fall als Matrizenmultiplikation zwischen einer Zeilen- und einer Spaltenmatrix zu verstehen, im unendlichdimensionalen Fall wurde es in der Fussnote auf Seite 20 definiert.

Eine zeit- und geschwindigkeitsunabhängige Störung wird beschrieben durch einen zusätzlichen Term $\alpha\Omega^{(1)}$, wobei der Störparameter $\alpha$ die Bedingung $0 < \alpha \ll 1$ erfüllt. Die Formel (3.1) lautet jetzt

$$(\Omega + \alpha\Omega^{(1)})y = \lambda^2 y. \qquad (3.2)$$

Bei nichtentarteten, orthogonalen Eigenfunktionen $\psi_i$ von $\Omega$ ergibt die erste Ordnung in $\alpha$

$$\Delta\lambda_i^2 = \alpha \frac{(\psi_i, \Omega^{(1)}\psi_i)}{(\psi_i, \psi_i)}, \qquad (3.3)$$

wo $\Delta\lambda_i^2$ die Störung zum Eigenwert $\lambda_i^2$ bedeutet. Das bekannte Ergebnis (3.3) kann auch aus den Rechnungen des nächsten Abschnittes nach entsprechender Umdeutung entnommen werden. Die Formel (3.3) ergibt eine kleine, reelle Verschiebung von $\lambda_i$, was natürlich keinen wesentlichen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten hat. Bei Entartung oder bei nichtorthogonalen Eigenfunktionen wird $\Delta\lambda_i^2$ zwar komplizierter, bleibt aber reell. Auch die höheren Ordnungen in der Entwicklung in $\alpha$ ergeben keine komplexen Beiträge, denn alle Matrixelemente $(\psi_i, \Omega^{(1)}\psi_k)$, alle Eigenwerte und Eigenfunktionen sind reell.

Kleine zeit- und geschwindigkeitsunabhängige Kräfte dürfen also beliebig vernachlässigt oder mitberücksichtigt werden.

3.1.2. Störung durch geschwindigkeitsabhängige Kräfte. Mit dem Ansatz (1.6) bzw. (2.1) ergeben geschwindigkeitsabhängige Störungen in (3.1) den zusätzlichen Term $-i\beta\lambda\Omega^{(1)}$ mit dem Parameter $0 < \beta \ll 1$. Es gilt dann

$$\left(\Omega - i\beta\lambda\Omega^{(1)}\right)y = \lambda^2 y . \qquad (3.4)$$

Wir nehmen an, das Eigenfunktionensystem von $\Omega$ sei nichtentartet und vollständig. Letztere Eigenschaft muss bei nichtselbstadjungierten Operatoren von Fall zu Fall nachgeprüft werden. (Reguläre selbstadjungierte Differentialoperatoren haben immer ein vollständiges Eigenfunktionensystem [19], bei endlichdimensionalen Problemen genügt die lineare Unabhängigkeit der Eigenfunktionen.) Wir entwickeln die gestörte Eigenfunktion $y$ nach Eigenfunktionen von $\Omega$, d.h.

$$y = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k \qquad \text{mit} \qquad \Omega\psi_k = \lambda_k^{(0)2}\psi_k . \qquad (3.5)$$

Die Entwicklungskoeffizienten $c_k$ und die gestörten Eigenwerte $\lambda^2$ entwickeln wir nach $\beta$ :

$$\left.\begin{aligned} c_k &= c_k^{(0)} + \beta c_k^{(1)} + \cdots \\ \lambda^2 &= \left(\lambda^{(0)} + \beta\lambda^{(1)} + \beta^2\lambda^{(2)} + \cdots\right)^2 = \lambda^{(0)2} + 2\beta\lambda^{(1)}\lambda^{(0)} + \beta^2\left(\lambda^{(1)2} + 2\lambda^{(2)}\lambda^{(0)}\right) + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (3.6)$$

Die Beziehungen (3.5) und (3.6) in (3.4) eingesetzt ergeben nach skalarer Multiplikation mit $\psi_i$ von vorne die Gleichung

$$\begin{aligned} &\sum_k c_k^{(0)}(\psi_i, \Omega\psi_k) - \lambda^{(0)2}\sum_k c_k^{(0)}(\psi_i, \psi_k) \\ &+\beta\Big\{\sum_k c_k^{(1)}(\psi_i, \Omega\psi_k) - \lambda^{(0)2}\sum_k c_k^{(1)}(\psi_i, \psi_k) \\ &\quad - i\lambda^{(0)}\sum_k c_k^{(0)}(\psi_i, \Omega^{(1)}\psi_k) - 2\lambda^{(0)}\lambda^{(1)}\sum_k c_k^{(0)}(\psi_i, \psi_k)\Big\} \qquad (3.7) \\ &+\beta^2\Big\{\sum_k c_k^{(2)}(\psi_i, \Omega\psi_k) - \lambda^{(0)2}\sum_k c_k^{(2)}(\psi_i, \psi_k) \\ &\quad - i\lambda^{(0)}\sum_k c_k^{(2)}(\psi_i, \Omega^{(1)}\psi_k) - 2\lambda^{(0)}\lambda^{(1)}\sum_k c_k^{(1)}(\psi_i, \psi_k) \\ &\quad - \left(\lambda^{(1)2} + 2\lambda^{(0)}\lambda^{(2)}\right)\sum_k c_k^{(0)}(\psi_i, \psi_k) - i\lambda^{(1)}\sum_k c_k^{(0)}(\psi_i, \Omega^{(1)}\psi_k)\Big\} + \cdots = 0 . \end{aligned}$$

Die nullte Näherung ergibt die $n$ ungestörten Lösungen

$$c_k^{(0)} = \delta_{k\ell} \;, \quad \lambda^{(0)2} = \lambda_\ell^{(0)2} \;, \quad \ell = 1, \ldots, n . \qquad (3.8)$$

Die Gleichung der ersten Näherung für den $\ell$ - ten Eigenwert und für die $\ell$ - te

Eigenfunktion lautet damit

$$\sum_k {}^{(\ell)}c_k^{(1)} \left( \lambda_k^{(0)2} - \lambda_\ell^{(0)2} \right) (\psi_i, \psi_k) - 2\lambda_\ell^{(0)} \lambda_\ell^{(1)} (\psi_i, \psi_\ell) = i\lambda_\ell^{(0)} (\psi_i, \Omega^{(1)} \psi_\ell) \,, \quad \ell \text{ fest} \,, \quad i = 1, \dots, n \,. \tag{3.9}$$

Diese $n$ Gleichungen dienen zur Bestimmung der $n$ Unbekannten $\lambda_\ell^{(1)}$ und ${}^{(\ell)}c_k^{(1)}$ ($k \neq \ell$). Zu sämtlichen $n$ nullten Näherungen $\lambda_\ell^{(0)}$ und ${}^{(\ell)}c_k^{(0)}$ existiert ein solches Gleichungssystem. Für die weitere Auswertung wird es nun wichtig, ob die Eigenfunktionen orthogonal sind oder nicht.

## 3.2. Konservative Systeme

Im konservativen Fall sind die Eigenfunktionen orthogonal. Damit vereinfachen sich die Gleichungen (3.9) wesentlich und führen auf die Ergebnisse

$$\left.\begin{aligned} \lambda_\ell^{(1)} &= -\frac{i}{2} \frac{(\psi_\ell, \Omega^{(1)} \psi_\ell)}{(\psi_\ell, \psi_\ell)} \quad \text{und} \\ {}^{(\ell)}c_i^{(1)} &= -i\lambda_\ell^{(0)} \frac{(\psi_i, \Omega^{(1)} \psi_\ell)}{(\lambda_i^{(0)2} - \lambda_\ell^{(0)2}) \cdot (\psi_i, \psi_i)} \,, \quad i = 1, \dots, n, \; \neq \ell \,, \end{aligned}\right\} \ell = 1, \dots, n \tag{3.10}$$

welche wir mutatis mutandis schon in (3.3) verwendet haben. Um die wirklichen Frequenzen zu erhalten, sind die Störungen jeweils noch entsprechend (3.5) mit dem Parameter $\beta$ zu multiplizieren. Wir unterscheiden nun weiter nach den Eigenschaften der Matrix $(\psi_i, \Omega^{(1)} \psi_k)$.

### 3.2.1. $(\psi_i, \Omega^{(1)} \psi_k)$ symmetrisch.

Die Störung lässt sich in diesem Fall

aus einer Rayleigh'schen Funktion herleiten.

Beispielsweise wird beim Doppelpendel von Fig. 18 bei einer geschwindigkeitsproportionalen äusseren Dämpfung

$$D = \frac{\beta}{2}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2),$$

$$\Omega^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.11)$$

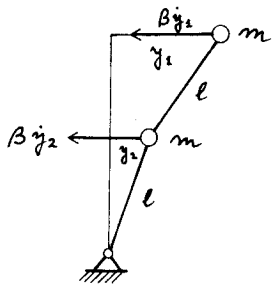



Fig. 18

Durch ein positiv definites $\Omega^{(1)}$ erhält $\lambda_\ell^{(1)}$ immer einen negativen Imaginärteil, was in (1.6) resp. (2.1) eingesetzt immer eine Dämpfung zur Folge hat. Ist die Rayleigh'sche Funktion indefinit, ist Destabilisierung möglich [13]. Einflüsse dieser Art dürfen in einem Modell also nicht vernachlässigt werden.

3.2.2. $(\psi_i, \Omega^{(1)}\psi_k)$ antimetrisch (gyroskopische Störung). Da die Matrix $(\psi_i, \Omega^{(1)}\psi_k)$ keine Diagonalelemente hat, verschwindet in (3.10) $\lambda_\ell^{(1)}$. Deshalb wollen wir für diesen Spezialfall die zweite Ordnung des gestörten Eigenwertes noch berechnen. Aus der Gleichung (3.7) erhalten wir, da $(\psi_i, \psi_k) = \delta_{ik}(\psi_i, \psi_i)$ und $(\psi_i, \Omega^{(1)}\psi_i) = \lambda_\ell^{(1)} \cdot (\psi_i, \psi_i) = 0$ ist,

$$\lambda_\ell^{(2)} = \frac{\lambda_\ell^{(0)}}{2(\psi_\ell, \psi_\ell)} \sum_{k \neq \ell} \frac{(\psi_k, \Omega^{(1)}\psi_\ell)(\psi_\ell, \Omega^{(1)}\psi_k)}{(\lambda_\ell^{(0)2} - \lambda_k^{(0)2}) \cdot (\psi_k, \psi_k)}, \qquad (3.12)$$

also eine kleine reelle Frequenzverschiebung. Bis zu dieser Genauigkeit kann man also eine solche Störung vernachlässigen. Aus anderen Ueberlegungen weiss man, dass Destabilisierung eines stabilen konservativen Systems durch solche Kräfte nicht möglich ist[1] [2], p. 73 ff.

---

[1] Sie können jedoch ein instabiles System stabilisieren. Wir haben aber angenommen, dass das ungestörte System ungedämpfte Schwingungen ausführe, also stabil sei. Bei instabilen Zuständen müsste in einem komplexen Raum gearbeitet werden.

## 3.3 Nichtkonservative Systeme

3.3.1. Systeme mit zwei Freiheitsgraden. Da das Gleichungssystem (3.9) nicht mehr - wie bei orthogonalen Eigenfunktionen - entkoppelt und die Anzahl der linear unabhängigen Eigenfunktionen gleich derjenigen der Freiheitsgrade ist, betrachten wir zunächst den zweidimensionalen Fall. Die Auflösung des Gleichungssystems ergibt die beiden Abweichungen von den ungestörten Werten

$$\left.\begin{aligned} -i\lambda_1^{(1)} &= -\frac{1}{2}\,\frac{(\psi_1,\Omega^{(1)}\psi_1)(\psi_1,\psi_1)-(\psi_2,\Omega^{(1)}\psi_1)(\psi_1,\psi_2)}{(\psi_1,\psi_1)(\psi_1,\psi_2)-(\psi_1,\psi_2)^2} \\ -i\lambda_2^{(1)} &= -\frac{1}{2}\,\frac{(\psi_2,\Omega^{(1)}\psi_2)(\psi_1,\psi_2)-(\psi_1,\Omega^{(1)}\psi_2)(\psi_2,\psi_1)}{(\psi_1,\psi_1)(\psi_2,\psi_2)-(\psi_1,\psi_2)^2} \end{aligned}\right\} \quad (3.13)$$

Der Nenner ist immer positiv (Schwartz'sche Ungleichung). Da die Zeitabhängigkeit $\sim e^{-i(\lambda^{(0)}+\beta\lambda^{(1)})t}$ ist, tritt Destabilisierung dann auf, wenn der Zähler negativ wird. Wiederum unterscheiden wir weiter nach der Art von $(\psi_i,\Omega^{(1)}\psi_k)$.

3.3.1.1. $(\psi_i,\Omega^{(1)}\psi_k)$ symmetrisch. Im Gegensatz zum konservativen Fall ist hier auch bei positiv definiter Rayleighfunktion Destabilisierung möglich. Das kommt hier direkt davon her, dass die Eigenvektoren einer nichtsymmetrischen Matrix im allgemeinen nicht orthogonal sind und somit in (3.13) trotz positiv definiter Dissipationsfunktion negative Zähler vorkommen können.

Beispiel: Beim tangential belasteten Doppelpendel (Fig. 19, p. 46) sind die beiden Eigenfunktionen mit der dimensionslosen Last $P$

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} (2-\sqrt{2})P \\ \sqrt{2}(8-3P)+4\sqrt{P^2-6P+8} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}(8-3P)+4\sqrt{P^2-6P+8} \\ (2+\sqrt{2})P \end{pmatrix} \qquad (3.14)$$

zu den Eigenfrequenzen

$$\lambda^2_{1,2} = 3 - P \pm \sqrt{P^2 - 6P + 8}\,. \qquad (3.15)$$

Dabei ist (3.14) eine Darstellung in Normalkoordinaten $q_1, q_2$, aus welchen sich $\varphi_1$ und $\varphi_2$ berechnen als

$$\varphi_1 = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}\; q_1 + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}\; q_2\,,$$

$$\varphi_2 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\; q_1 + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}\; q_2\,. \qquad (3.16)$$

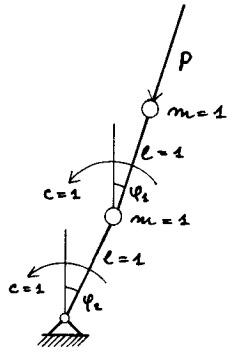



Fig. 19

Bei innerer Dämpfung, d.h. bei Reibungsmomenten, die proportional der Relativwinkelgeschwindigkeit in den Gelenken sind, lautet die (positiv definite) Dissipationsfunktion

$$D_1 = \frac{\beta_1}{2}\left(\dot\varphi_1^2 - 2\dot\varphi_1\dot\varphi_2 + 2\dot\varphi_2^2\right).$$

Die Störmatrix hat damit die Form

$$\Omega^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

und auf Normalkoordinaten umgerechnet ist sie

$$\Omega^{(1)} = \begin{pmatrix} 3+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix}. \qquad (3.17)$$

In Fig. 20, p. 47, sind $-i\lambda_1^{(0)}, -i\lambda_2^{(0)}, -i\beta\lambda_1^{(1)}$ und $-i\beta\lambda_2^{(1)}$ in dem Gebiet, das im ungestörten Zustand stabil ist, aufgetragen. Dieses Gebiet umfasst die Werte $0 \leq P \leq 2$ ; für den Parameter wurde der Wert $\beta_1 = 0.01$ gewählt. Zum Vergleich sind in einer Tabelle für einige Werte von $P$ die entsprechenden, aus der exakten Frequenzengleichung

$$\lambda^4 + 6i\beta_1\lambda^3 - (6 - 2P + \beta_1^2)\lambda^2 - 2i\beta_1\lambda + 1 = 0$$

errechneten Werte angegeben.

Dagegen hat eine äussere Dämpfung der Art (3.11) - in Normalkoordinaten ist ebenfalls

$$\Omega^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

immer noch eine stabilisierende Wirkung. (3.13) ergibt, da

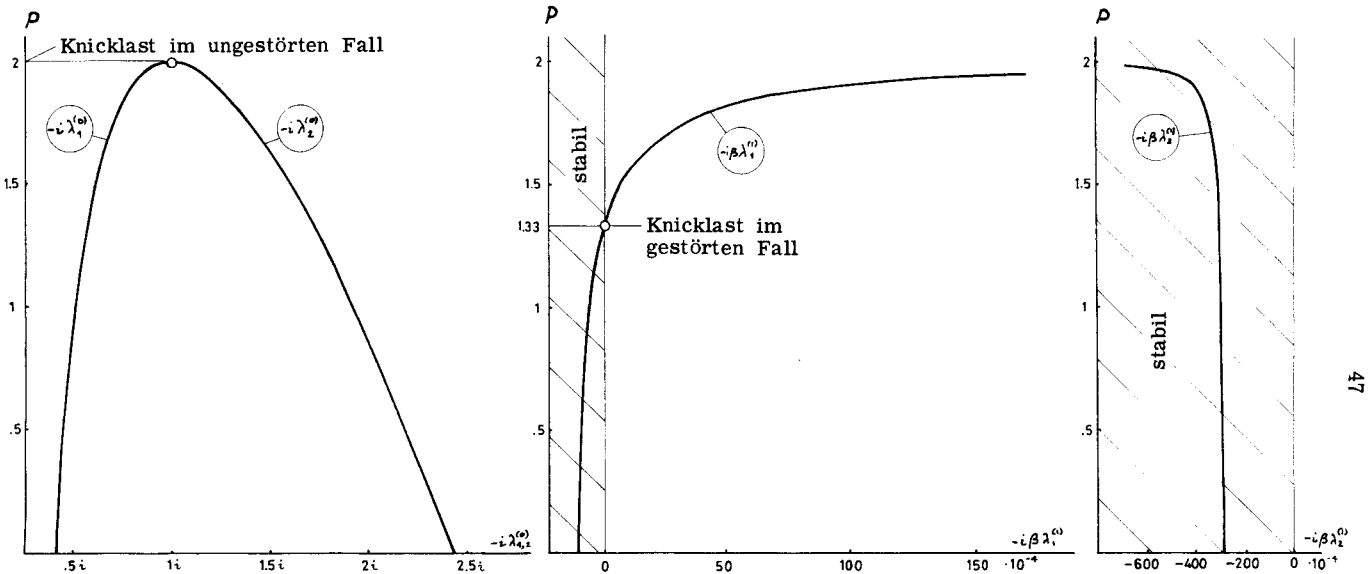
$(\psi_1, \Omega^{(1)}\psi_1) = (\psi_1, \psi_1)$,

$(\psi_2, \Omega^{(1)}\psi_2) = (\psi_2, \psi_2)$ und

$(\psi_1, \Omega^{(1)}\psi_2) = (\psi_1, \psi_2)$

ist, das triviale Resultat $\lambda^{(1)}_{1,2} = -\frac{i}{2}$. (3.18)

Erste Ordnung der Störungsrechnung für das nichtkonservativ belastete Doppelpendel (Fig. 19), $\beta = 0.01$




Vergleich mit der exakten Rechnung:

| $p$ | $-i\beta\lambda_1^{(1)}$ | $Re(-i\lambda_1)$(exakt) | $-i\beta\lambda_2^{(1)}$ | $Re(-i\lambda_2)$ (exakt) |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $-8.578644 \cdot 10^{-4}$ | $-8.578644 \cdot 10^{-4}$ | $-2.914214 \cdot 10^{-2}$ | $-2.914214 \cdot 10^{-2}$ |
| 1 | $-5.662433 \cdot 10^{-4}$ | $-5.662506 \cdot 10^{-4}$ | $-2.943376 \cdot 10^{-2}$ | $-2.943373 \cdot 10^{-2}$ |
| 1.9 | $1.009506 \cdot 10^{-2}$ | $1.001159 \cdot 10^{-2}$ | $-4.009506 \cdot 10^{-2}$ | $-4.001161 \cdot 10^{-2}$ |

Fig. 20

Es tritt also immer Stabilisierung ein, unabhängig von der Last $P$. Der Vergleich mit der exakten Rechnung zeigt, dass noch für $\beta = 1$ der relative Fehler der Störungsrechnung bis auf Werte in unmittelbarer Nähe der Knicklast $P = 2$ kleiner als 1 % ist. Für $P = 2$ fallen die beiden Eigenfunktionen zusammen und die Störungsrechnung wird in dieser Form somit unzulässig.

3.3.1.2. $(\psi_i, \Omega^{(1)} \psi_k)$ antimetrisch. Wegen der Antimetrie ist

$$(\psi_i, \Omega^{(1)} \psi_i) = 0 \quad \text{und}$$

$$(\psi_i, \Omega^{(1)} \psi_k) = -(\psi_k, \Omega^{(1)} \psi_i).$$

Aus (3.13) folgt, dass dann immer entweder $-i\lambda_1^{(1)}$ oder $-i\lambda_2^{(1)}$ positiv ist, d.h. es tritt immer Destabilisierung ein.

Zusammenfassend kann man sagen, dass keine geschwindigkeitsabhängigen Störungen vernachlässigt werden dürfen.

3.3.2. $2 < n < \infty$. Die in 3.3.1.1. gemachten Aussagen sind im Prinzip immer noch gültig. Kräfte, die durch ein symmetrisches $\Omega^{(1)}$ beschrieben werden, können auch im positiv definiten Fall stabilisierende oder destabilisierende Wirkung haben. Auch bei beliebigem endlichen Freiheitsgrad hat eine gyroskopische Störung immer eine Destabilisierung zur Folge.

Beweis: Die allgemeinen Lösungen der Gleichungen (3.9) lauten

$$\lambda_\ell^{(1)} = \frac{i\lambda_\ell^{(0)}}{D} \sum_k (\psi_k, \Omega^{(1)} \psi_\ell) A_{k\ell} .$$

Dabei bedeutet $D$ die Determinante der Koeffizienten auf der linken Seite von (3.9), $A_{k\ell}$ diejenige mit $(-1)^{k+\ell}$ multiplizierte Unterdeterminante von $D$, die dadurch entsteht, dass bei $D$ die $k$-te Zeile und die $\ell$-te Spalte gestrichen werden. Bei der Division aller $\lambda_\ell^{(0)} \cdot A_{k\ell}$ mit $D$ heben sich die $\lambda_\ell^{(0)}$ und die Produkte $\prod_{i \neq \ell} (\lambda_i^{(0)2} - \lambda_\ell^{(0)2})$ weg, sodass die Lösungen die Form haben

$$\lambda_1^{(1)} \sim \qquad i(\psi_2, \Omega^{(1)}\psi_1)U_{21} + i(\psi_3, \Omega^{(1)}\psi_1)U_{31} + \cdots + i(\psi_n, \Omega^{(1)}\psi_1)U_{n1}$$

$$\lambda_2^{(1)} \sim i(\psi_1, \Omega^{(1)}\psi_2)U_{21} \qquad + i(\psi_3, \Omega^{(1)}\psi_2)U_{32} + \cdots + i(\psi_n, \Omega^{(1)}\psi_2)U_{n2}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\lambda_n^{(1)} \sim i(\psi_1, \Omega^{(1)}\psi_n)U_{n1} + \cdots \qquad + i(\psi_{n-1}, \Omega^{(1)}\psi_n)U_{n-1\,n} \quad .$$

Die $U_{ik}$ sind symmetrisch, da sie nur noch aus Produkten und Summen der $(\psi_i, \psi_k)$ zusammengesetzt sind. Wegen der Antimetrie von $(\psi_i, \Omega^{(1)}\psi_k)$ ist aber immer mindestens eines der $-i\,\lambda_\ell^{(1)}$ positiv, somit das System instabil.

3.3.3. $n = \infty$ . Das Gleichungssystem (3.9) ist nicht mehr sinnvoll. Wenn man aber ein annehmbares Modell mit endlichem Freiheitsgrad zur Verfügung hat, lassen sich die Rechnungen am Modell durchführen, da dann Ausdrücke wie $(\psi_i, \Omega^{(1)}\psi_k)$ für $n \to \infty$ gegen den exakten Wert konvergieren.

Am tangential belasteten Beck'schen Knickstab (Fig. 9a ,p. 27 ) ergeben

$$D_1 = \frac{1}{2}\gamma_1 \int_0^\ell [\dot{q}(x,t)]''^2 dx \qquad \text{(innere Dämpfung) und}$$

$$D_2 = \frac{1}{2}\gamma_2 \int_0^\ell [\dot{q}(x,t)]^2 dx \qquad \text{(äussere Dämpfung)}$$

die Bewegungsdifferentialgleichung

$$\alpha q^{\text{IV}} + \gamma_1 \dot{q}^{\text{IV}} + P q'' + \mu \ddot{q} + \gamma_2 \dot{q} = 0 . \qquad \begin{array}{l} \alpha : \text{Biegesteifigkeit} \\ \mu : \text{Masse pro Längeneinheit.} \end{array}$$

Die Randbedingungen lauten

$$q(0,t) = q'(0,t) = q''(\ell,t) = q'''(\ell,t) = 0 .$$

Der Ansatz (2.1) mit $y(x) = c_\varkappa e^{i\varkappa x}$ , eingesetzt in die Differentialgleichung und die Randbedingungen, führt auf die Gleichung für die Eigenfrequenzen $\lambda$ :

$$\frac{\rho^2}{(1-i\lambda'\Gamma_2)^2} + \frac{2\lambda'^2}{(1-i\lambda'\Gamma_2)} + \frac{2\lambda'^2}{(1-i\lambda'\Gamma_2)^2}\cos\varkappa_1\cos\varkappa_3$$

$$-\frac{i\rho}{(1-i\lambda'\Gamma_1)}\sqrt{\lambda'^2(1-i\lambda'\Gamma_1)}\,\sin\varkappa_1\sin\varkappa_3 = 0. \qquad (3.19)$$

Dabei bedeutet

$$\rho = \frac{Pe^2}{\alpha}, \quad \lambda' = \lambda\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}\,e^2, \quad \Gamma_1 = \gamma_1 e^2\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}}, \quad \Gamma_2 = \gamma_2 e^2\sqrt{\frac{\mu}{\alpha}},$$

$$\varkappa_1 = \left(\left(\frac{\rho^2}{4(1-i\lambda'\Gamma_1)^2} + \frac{\lambda'^2}{(1-i\lambda'\Gamma_1)} + i\lambda'\Gamma_2\right)^{1/2} + \frac{\rho}{2(1-i\lambda'\Gamma_1)}\right)^{1/2},$$

$$\varkappa_3 = \left(\left(\frac{\rho^2}{4(1-i\lambda'\Gamma_1)^2} + \frac{\lambda'^2}{(1-i\lambda'\Gamma_1)} + i\lambda'\Gamma_2\right)^{1/2} \frac{\rho}{2(1-i\lambda'\Gamma_1)}\right)^{1/2}.$$

Bei innerer Dämpfung allein ergibt sich eine Destabilisierung um ca. 50 %; in Fig. 21, p. 51 sind für diesen Fall die Real- und Imaginärteile der beiden kleinsten Eigenwerte in Funktion von $\rho$ dargestellt. Die nächsthöheren Lösungsäste von (3.19) treten erst bei viel grösseren Werten von $\rho$ in den instabilen Halbraum ein (Fig. 22, p. 52). Die Destabilisierung hängt nur schwach von $\gamma_1$ ab, für $\gamma_1 = 0.001$ beträgt die Knicklast $P = 10.95$, für $\gamma_1 = 0.0001$ ist sie $P = 10.91$. Das Modell mit zwei Freiheitsgraden verhält sich unter der Wirkung innerer Dämpfung gleich (Fig. 20, p. 47); der einzige Lösungsast hat qualitativ dasselbe Aussehen wie der unterste Ast des exakten Systems. (Eine anschauliche Darstellung des Astes des Modells findet man in [5].) Die äussere Dämpfung hat ebenfalls dieselbe Wirkung wie beim Modell: Die Frequenzkurven werden mehr oder weniger parallel in Richtung des stabilen Halbraumes verschoben, d.h. die durch die innere Dämpfung verursachte Destabilisierung wird zum Teil oder ganz wieder aufgehoben (Fig. 23, p. 52). Beim Modell ist diese Verschiebung konstant gleich $-i\beta\cdot\frac{1}{2}$ (3.18). Die Destabilisierung hängt stark vom Verhältnis der beiden Dämpfungsparameter ab. Im Ganzen gesehen gibt das Modell die Eigenschaften des exakten Systems zumindest qualitativ richtig wieder.

Alle geschwindigkeitsabhängigen Störungen üben bei nichtkonservativen Systemen einen wesentlichen Einfluss auf das Stabilitätsverhalten aus, es dürfen also keine solchen Kräfte vernachlässigt werden. Im Gegensatz zu konservativen Systemen kann aus der Definitheit der Rayleigh'schen Funktion, falls eine solche existiert, nicht auf die Wirkung der damit beschriebenen Kräfte geschlossen werden.

Real- und Imaginärteile der beiden tiefsten Eigenfrequenzen

des Beck'schen Knickstabes bei innerer Dämpfung ( $\gamma_1 = 10^{-3}$, $\gamma_2 = 0$)

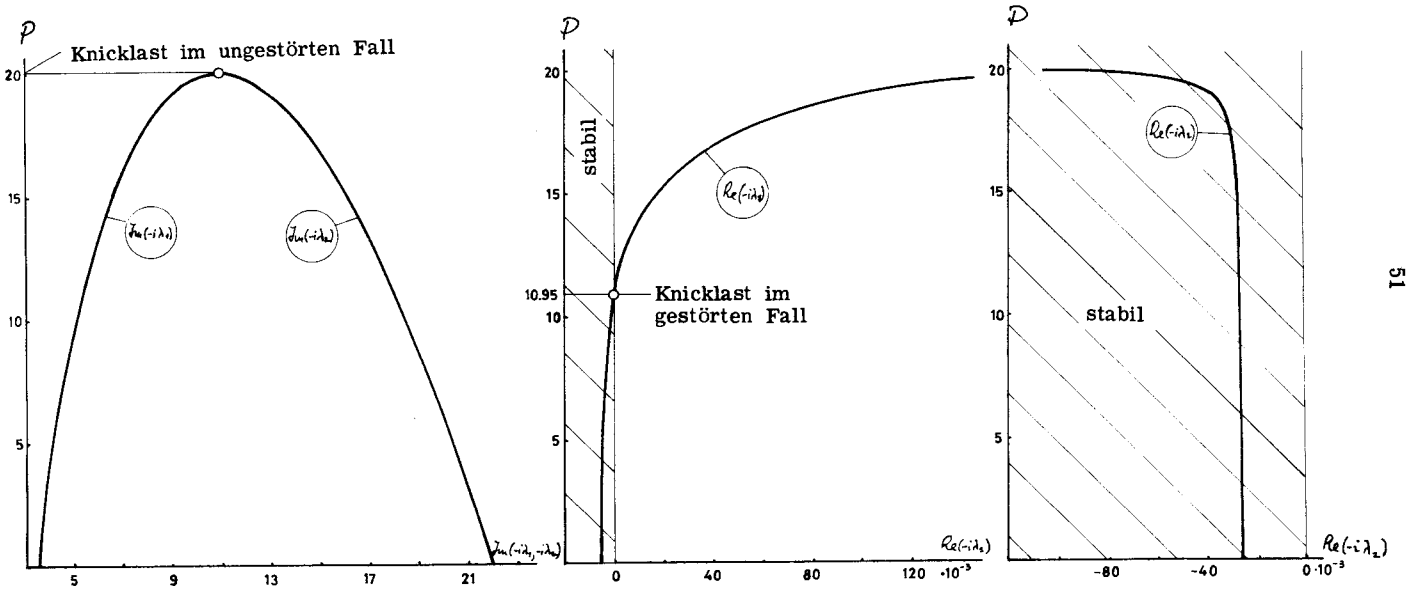
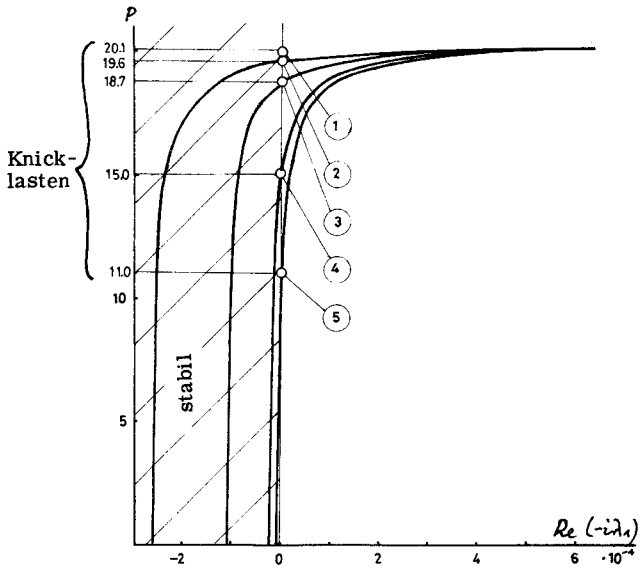



Fig. 21

Knicklasten des Beck'schen Knickstabes

bei innerer und äusserer Dämpfung




① $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$

② $\gamma_1 = 0.0001$, $\gamma_2 = 0.05$

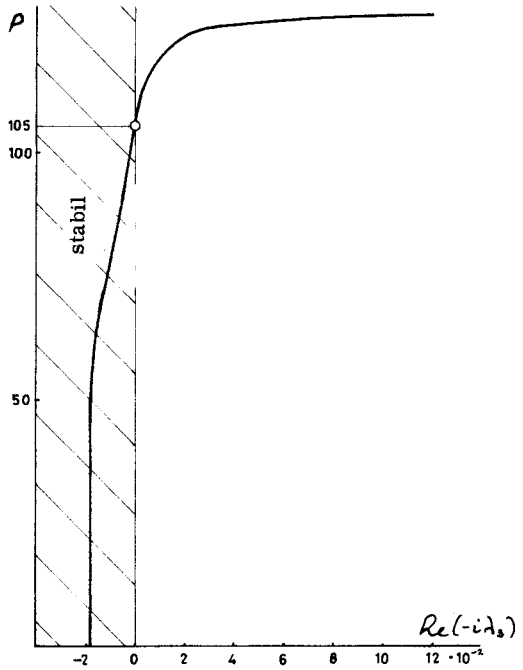
③ $\gamma_1 = 0.0001$, $\gamma_2 = 0.01$

④ $\gamma_1 = 0.0001$, $\gamma_2 = 0.001$

⑤ $\gamma_1 = 0.0001$, $\gamma_2 = 0$

Fig. 23

Realteil der dritten Eigenfrequenz ( $\gamma_1 = 10^{-4}$, $\gamma_2 = 0$ )




$-i\lambda_4$, $-i\lambda_6$ etc. liegen immer im stabilen Gebiet. $-i\lambda_5$ wechselt bei $P \approx 280$ das Vorzeichen, $-i\lambda_7$ bei $P \approx 600$.

Fig. 22

## 3.4. Zusammenfassung

Die Ergebnisse dieses Kapitels können in zwei weiteren Regeln zusammengefasst werden. Sie gelten für Systeme, bei denen im ungestörten Zustand alle Kräfte geschwindigkeitsunabhängig sind.

REGEL VII : Zusätzliche geschwindigkeitsunabhängige Störungen können vernachlässigt werden.

REGEL VIII : Kleine geschwindigkeitsabhängige Kräfte müssen bei nichtkonservativen Systemen immer berücksichtigt werden. Bei konservativen Systemen kann bei Kräften, die ein Rayleigh'sches Potential haben, aus der Definitheit direkt auf die Wirkung geschlossen werden ; gyroskopische Störungen darf man weglassen.

Nichtkonservative elektrische Systeme ohne Ohm'sche Widerstände kommen bei der von uns getroffenen Auswahl nicht vor. Deshalb ist auf Grund der letzten Eigenschaft diese Untersuchung für elektrische Systeme nicht relevant.

## SCHLUSSBEMERKUNGEN

Wir haben acht Regeln aufgestellt, die bei der Auswahl von Modellen beachtet werden müssen, wenn diese das Stabilitätsverhalten eines komplizierteren Systems befriedigend wiedergeben sollen. Die ersten vier Regeln beziehen sich auf Modelle für Systeme mit endlichem Freiheitsgrad, die nächsten zwei auf die Approximation von Systemen mit unendlich vielen Freiheitsgraden durch solche mit endlich vielen. Die beiden letzten Regeln schliesslich geben Aufschluss über die Art von Störungen, die mitberücksichtigt werden müssen. Im Folgenden sollen die wichtigsten Ergebnisse ganz kurz zusammengefasst und kommentiert werden.

1. Die kinetische Energie, resp. der entsprechende Ausdruck bei elektrischen Systemen muss positiv definit sein.

2. Die Entscheidung über die Annehmbarkeit kann in den folgenden Fällen allgemein getroffen werden:
   a) Systeme mit endlichem Freiheitsgrad, bei denen alle Kräfte aus Funktionen $\mathcal{T}$, $\mathcal{V}$ und $\mathcal{D}$ folgen. Es genügt, wenn die Modelle die in den Regeln II und III zusammengestellten Eigenschaften haben.
   b) Systeme mit unendlichem Freiheitsgrad, bei denen alle Kräfte aus Funktionalen $\mathcal{T}$ und $\mathcal{V}$ herleitbar sind. Das Modell muss die Forderung in Regel V erfüllen. Falls das gegebene System zusätzlich noch ein Funktional $\mathcal{D}$ hat, genügt die Konvergenz von $\mathcal{T}$, $\mathcal{V}$ und $\mathcal{D}$ der Modelle nicht.

   In allen anderen Fällen kommt man um die wohl meistens nur numerisch zu bewältigende Berechnung der Eigenfrequenzen nicht herum.

3. Für nichtkonservative Systeme mit unendlichem Freiheitsgrad führt eine Störungsrechnung, wie sie im dritten Kapitel durchgeführt wurde, wegen der Nichtorthogonalität der Eigenfunktionen zu keinen Resultaten. Es ist hier also besonders wichtig, annehmbare Modelle mit endlich vielen Freiheitsgraden zu kennen.

4. Bei konservativen Systemen, die im ungestörten Zustand nur geschwindigkeitsunabhängige Kräfte haben, kann im Gegensatz zu nichtkonservativen die Wirkung kleiner Störungen vorausgesagt werden. In den Beispielen von 3.3 haben die Frequenzkurven in Abhängigkeit der Last $P$ bei bestimmten Störungen schleifende Schnitte mit der $(P, \mathrm{Re}\,\lambda)$ - Ebene. Deshalb kann eine kleine Verschiebung der Kurve eine grosse Wirkung auf die Knicklast ausüben. Auf Grund der Kenntnis solcher Kurven kann man schon ohne Rechnung feststellen, wenn ein System besonders anfällig auf Störungen ist. Die Routh - Hurwitz - Kriterien geben insofern einen unvollkommenen Einblick, als die "Stärke" der Stabilität oder Instabilität nicht zum Ausdruck kommt.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Lord Kelvin and Tait. Treatise on Natural Philosophy, Part I. Cambridge 1879.

[2] H. Ziegler. Principles of Structural Stability. Blaisdell 1968.

[3] V.V. Bolotin. Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability. Pergamon Press, 1963.

[4] H. Ziegler. Ing. - Arch. 20, 1952, 49 - 56.

[5] G. Herrmann, J.C. Jong. J. appl. mech. 32, Trans. ASME 87, 1965, 592 - 597, series E.
J. appl. mech. march 1966, 125 - 133.

[6] S. Nemat - Nasser, G. Herrmann. ZAMP 17, 1966, 305 - 313.

[7] H. Leipholz. Ing. - Arch. 33, 1964, 308.

[8] H. Ziegler. Trace Effects in Stability. IUTAM Symposium Herrenalb 1969. Springer Berlin, 1971.

[9] P. Grassmann, H. Ziegler. Chemie - Ingenieur - Technik 16, 1969, 908 - 915.

[10] S. Seshu, N. Balabanian. Linear Network Analysis. J. Wiley & Sons, N.Y. 1959.

[11] J.G. Malkin. Theorie der Stabilität einer Bewegung. Akademie - Verlag Berlin, 1959.

[12] R. Zurmühl. Matrizen und ihre technischen Anwendungen. Springer Berlin 1964.

[13] K. Magnus. ZAMP 21, 1970, 523 - 533.

[14] R. Courant, D. Hilbert. Methods of Mathematical Physics. Interscience Publishers, Inc. N.Y., 1953.

[15] H. Leipholz. Stabilitätstheorie. Teubner Stuttgart, 1968.

[16] K. Marguerre. Festigkeitsprobleme. Springer Berlin, 1950.

[17] M. Beck. ZAMP 3, 1952, 225 - 228.

[18] N.I. Achieser, I.M. Glasmann. Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum. Akademie - Verlag Berlin, 1965.

[19] I.A. Ljusternik, W.I. Sobolew. Elemente der Funktionalanalysis. Akademie - Verlag Berlin, 1965.

## LEBENSLAUF

Ich wurde am 1. Mai 1941 in Kreuzlingen (Thurgau) geboren. In Zürich besuchte ich von 1948 bis 1954 die Primarschule. Danach durchlief ich das Gymnasium Freudenberg in Zürich, wo ich im Herbst 1960 die Maturität Typ B erlangte. Anschliessend immatrikulierte ich mich an der Philosophischen Fakultät II der Universität Zürich. Im Sommer 1967 erwarb ich dort das Diplom in theoretischer Physik. Für kurze Zeit war ich darauf am Institut für theoretische Physik an der Universität Zürich als Halbassistent angestellt. Seit dem Herbst 1967 bin ich bei der Fachgruppe für Mechanik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich als Assistent tätig.

Die vorliegende Arbeit entstand aufgrund einer Anregung von Herrn Prof. Dr. H. Ziegler. Für seine Unterstützung möchte ich an dieser Stelle herzlich danken. Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr. Ch. Wehrli für die Uebernahme des Korreferates.

Zürich, im Januar 1972

Seite Leer /
Blank leaf