ETH zürich

ETH Library

Fragmente von "New Foundations" und Typentheorie

Doctoral Thesis

Author(s):
Oswald, Urs

Publication date:
1976

Permanent link:
https://doi.org/https://doi.org/10.3929/ethz-a-000077097

Rights / license:
In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

This page was generated automatically upon download from the ETH Zurich Research Collection.
For more information, please consult the Terms of use.

Diss. E T H
Diss. Nr. 5666 A

12. NOV 1976

FRAGMENTE VON "NEW FOUNDATIONS" UND TYPENTHEORIE

A B H A N D L U N G

zur Erlangung
des Titels eines Doktors der Mathematik
der

E I D G E N ö S S I S C H E N T E C H N I S C H E N
H O C H S C H U L E Z ü R I C H

ETH-BIBLIOTHEK ZÜRICH
Ser. Cat.

vorgelegt von

U R S O S W A L D
Dipl. Math. ETH
geboren am 5. Januar 1940
von Winterthur (Kt. Zürich)

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. E. P. Specker, Referent
Prof. Dr. H. Läuchli, Korreferent

ETHICS ETH-BIB
00100000349090

1976

§ 8. DAS STANDARDMODELL VON NF_2

Wir erweitern die Sprache L durch die Hinzunahme der Funktionszeichen f, $g^0, g^1, g^2, \ldots$ zur Sprache L^+, wobei f einstellig, g^n n-stellig sein soll. Gleichzeitig erweitern wir die Theorie NF_2 durch Hinzufügen der Axiome

$$x \in fu \longleftrightarrow x \notin u,$$
$$x \notin g^0,$$
$$x \in g^n u_1 \ldots u_n \longleftrightarrow x=u_1 \vee \ldots \vee x=u_n \qquad (n=1,2,\ldots).$$

zur Theorie NF_2^+. Diese ist eine konservative Erweiterung von NF_2, also lässt sich jedes Modell $\mathfrak{A}$ von NF_2 auf eindeutige Weise zu einem Modell von NF_2^+ verdichten ("expandieren"). Dieses bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}^+$. Demnach $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^+/L$ für jedes Modell $\mathfrak{A}$ von NF_2.

Ist $\mathfrak{A}$ ein Modell von NF_2^+, so ergeben die neu hinzugefügten Axiome

(1) $$(f_{\mathfrak{A}}(a))_R = A \setminus a_R,$$

(2) $$(g^0)_R = \emptyset,$$

(3) $$(g^n(a_1,\ldots,a_n))_R = \{a_1,\ldots,a_n\}. \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Die Schreibweise "$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$" soll bedeuten, dass $\mathfrak{A}$ eine Substruktur von $\mathfrak{B}$ ist.

8.1 LEMMA *a) $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien zwei unendliche Strukturen für L (oder L^+), wobei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Ist dann a aus A endlich (ko-endlich) bezüglich $\mathfrak{B}$, so ist es auch endlich (ko-endlich) bezüglich $\mathfrak{A}$.*

b) Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Modelle von NF_2, wobei $\mathfrak{A}^+ \subseteq \mathfrak{B}^+$, so $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, und für jedes a aus A gilt:

(i) $a_S \subseteq A$ falls a endlich bezüglich $\mathfrak{A}$,
(ii) $B \setminus a_S \subseteq A$ falls a ko-endlich bezüglich $\mathfrak{A}$.

Beweis: a) Aus den Voraussetzungen $A \subseteq B$, $\overline{\overline{a_S}} < \aleph_0$, ($\overline{\overline{A \setminus a_S}} < \aleph_0$) ergeben sich die Behauptungen auf Grund der Formeln $a_R = A \cap a_S$, $A \setminus a_R = A \cap (B \setminus a_S)$.

b) Die Behauptungen (i) und (ii) ergeben sich ohne Schwierigkeiten aus den Formeln (1), (2) und (3), wobei die vier Fälle $\overline{\overline{a_R}}=0$, $0 < \overline{\overline{a_R}} < \aleph_0$, $\overline{\overline{A \setminus a_R}}=0$, $0 < \overline{\overline{A \setminus a_R}} < \aleph_0$ zu unterscheiden sind. Im letzten Fall lautet der Beweis zum Beispiel:

Nach der Voraussetzung $0 < \overline{\overline{A \setminus a_R}} < \aleph_0$ gibt es $a_1,\ldots,a_n$ aus A, sodass $A \setminus a_R = \{a_1,\ldots,a_n\}$. Nach (1) gilt dabei $A \setminus a_R = (f_{\mathfrak{A}^+}(a))_R$, nach (3): $\{a_1,\ldots,a_n\} = (g^n_{\mathfrak{A}^+}(a_1,\ldots,a_n))_R$. Also $(f_{\mathfrak{A}^+}(a))_R = (g^n_{\mathfrak{A}^+}(a_1,\ldots,a_n))$ und (Extensionalität) $f_{\mathfrak{A}^+}(a))_R = g^n_{\mathfrak{A}^+}(a_1,\ldots,a_n)$. Die Voraussetzung $\mathfrak{A}^+ \subseteq \mathfrak{B}^+$ liefert daraus $f_{\mathfrak{B}^+}(a) = g^n_{\mathfrak{B}^+}(a_1,\ldots,a_n)$. Indem man wiederum die Formeln (1) und (3) anwendet, diesmal im umgekehrten Sinne, erhält man $B \setminus a_S = \{a_1,\ldots,a_n\}$, also $B \setminus a_S = A \setminus a_R \subseteq A$.

8.2 LEMMA *a) Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Modelle von NF_2 und ist ϕ ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$, so ist ϕ zugleich ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}^+$ nach $\mathfrak{B}^+$.*

b) Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Modelle von NF_2^+, wobei $\mathcal{A} = \mathfrak{Z}(A)$, $\mathcal{B} = \mathfrak{Z}(B)$, und ist ϕ eine Bijektion von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ mit den Eigenschaften

(i) $\phi(f_{\mathfrak{A}}(a)) = f_{\mathfrak{B}}(\phi(a))$,

(ii) $\phi(g^0_{\mathfrak{A}}) = g^0_{\mathfrak{B}}$,

(iii) $\phi(g^n_{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n)) = g^n_{\mathfrak{B}}(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n))$, $(n=1,2,\ldots)$

so ist ϕ ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}/L$ nach $\mathfrak{B}/L$.

Beweis: a) Da $x \varepsilon fu \longleftrightarrow x \not\varepsilon u$ ein Axiom von NF_2^+ ist und $\mathfrak{A}^+, \mathfrak{B}^+$ Modelle von NF_2^+ sind, gilt für alle a,b aus A

$$\begin{aligned} S(\phi(b),\phi(f_{\mathfrak{A}}(a))) &\Longleftrightarrow R(b,f_{\mathfrak{A}}(a)) \\ &\Longleftrightarrow \neg R(b,a) \\ &\Longleftrightarrow \neg S(\phi(b),\phi(a)) \\ &\Longleftrightarrow S(\phi(b),f_{\mathfrak{B}}(\phi(a))). \end{aligned}$$

ϕ ist surjektiv; also folgt $(\phi(f_{\mathfrak{A}}(a)))_S = (f_{\mathfrak{B}}(\phi(a)))_S$ und wegen der Extensionalität von $\mathfrak{B}^+$

(4) $$\phi(f_{\mathfrak{A}}(a)) = f_{\mathfrak{B}}(\phi(a)). \qquad (a \in A)$$

Ebenso folgt aus $\neg R(a,g^0_{\mathfrak{A}})$ (für alle a aus A) $\neg S(\phi(a),\phi(g^0_{\mathfrak{A}}))$ und daraus

(5) $$\phi(g^0_{\mathfrak{A}}) = g^0_{\mathfrak{B}}.$$

Schliesslich gilt für $a,a_1,\ldots,a_n$ aus A

$$\begin{aligned} S(\phi(a),\phi(g^n_{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n))) &\Longleftrightarrow R(a,g^n_{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n)) \\ &\Longleftrightarrow a \in \{a_1,\ldots,a_n\} \\ &\Longleftrightarrow \phi(a) \in \{\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n)\} \\ &\Longleftrightarrow S(\phi(a),g^n_{\mathfrak{B}}(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n))), \end{aligned}$$

und also

(6) $$\phi(g^n_{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n))=g^n_{\mathfrak{B}}(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n)). \qquad (n=1,2,\ldots)$$

(4), (5) und (6) machen die Behauptung aus.

b) Zu zeigen ist, dass für alle a,b aus A: $R(b,a)\Longleftrightarrow S(\phi(b),\phi(a))$. a ist von einer der drei Formen $g^0_{\mathfrak{A}}$, $g^n_{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n)$, $f_{\mathfrak{A}}(g^n_{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n))$. Im letzten Fall hat man zum Beispiel

$$\begin{aligned} S(\phi(b),\phi(a)) &\Longleftrightarrow S(\phi(b),f_{\mathfrak{A}}(g^n_{\mathfrak{A}}(\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n)))) \\ &\Longleftrightarrow \phi(b)\notin\{\phi(a_1),\ldots,\phi(a_n)\} \\ &\Longleftrightarrow b\notin\{a_1,\ldots,a_n\} \\ &\Longleftrightarrow \neg R(b,g^n_{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n)) \\ &\Longleftrightarrow R(b,a). \end{aligned}$$

In den beiden ersten Fällen verlaufen die Beweise ähnlich. Damit ist 8.2 bewiesen.

Einfache Strukturen

Eine Struktur $\mathfrak{A}$ für L (oder L^+) nennen wir *einfach*, wenn sie die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1. $\mathfrak{A}$ ist extensional.
2. $\mathcal{A}=\mathcal{Z}(A)$.
3. A besitzt eine Aufzählung $\langle a_i : i<\omega\rangle$ mit der Eigenschaft

$$\begin{cases} R(a_i,a_j)\Longrightarrow i<j & \text{falls } a_j \text{ endlich,} \\ \neg R(a_i,a_j)\Longrightarrow i<j & \text{falls } a_j \text{ ko-endlich.} \end{cases}$$

Offensichtlich ist jede einfache Struktur ein abzählbares Modell von NF_2 (bezw. NF_2^+) mit der Reflexivitätscharakteristik

$$\chi_{\mathfrak{A}}(m)=0 \text{ für } m\in\tilde{\mathbb{Z}}.$$

Ist $\mathfrak{A}$ eine einfache Struktur für L, so ist $\mathfrak{A}^+$ eine einfache Struktur für L^+, und umgekehrt.

Auf $\mathbb{N}_0$ definieren die Bedingungen

$$R_{\mathfrak{A}}(m,2p)\Longleftrightarrow\begin{cases}\text{Es gibt Zahlen } m_0,\ldots,m_{p'-1}, \text{ sodass } p=\sum_{i<p'}2^{m_i}, \\ m_0<\ldots<m_{p'-1} \quad\text{und}\quad m\in\{m_0,\ldots,m_{p'-1}\}\end{cases}$$

und $$R_{\mathfrak{N}}(m,2p+1) \Longleftrightarrow \neg R_{\mathfrak{N}}(m,2p)$$

eine zweistellige Relation $R_{\mathfrak{N}}$. Wir setzen

$$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}_0, R_{\mathfrak{N}} \rangle .$$

$\mathfrak{N}$ ist einfach. Denn die Bedingung 2. ist offensichtlich, die Bedingung 1. deshalb erfüllt, weil voneinander verschiedene Zahlen ungleiche Dualdarstellungen haben; 3. ergibt sich daraus, dass die geraden Zahlen die endlichen, die ungeraden die ko-endlichen Elemente sind und

$$\begin{cases} R_{\mathfrak{N}}(m,2p) \Longrightarrow m < 2p, \\ \neg R_{\mathfrak{N}}(m,2p+1) \Longrightarrow m < 2p+1. \end{cases}$$

Somit hat die natürliche Aufzählung 0,1,... von $\mathbb{N}_0$ gerade die unter 3. verlangte Eigenschaft.

8.3 SATZ *Zu zwei einfachen Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ für L (oder L^+) gibt es genau einen Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$.*

Beweis: Nach 8.2 ist, für Modelle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ von NF_2, jeder Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ zugleich ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}^+$ nach $\mathfrak{B}^+$, und umgekehrt. Es genügt deshalb, den Satz für den Fall L^+ zu beweisen.

Es seien $\langle a_i : i < \omega \rangle$, $\langle b_i : i < \omega \rangle$ Aufzählungen von A und B, welche der Bedingung 3. der einfachen Strukturen genügen. Wir setzen noch voraus, die Aufzählungen seien wiederholungsfrei. Dadurch wird die Allgemeinheit nicht beschränkt. Die Einfachheit von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ hat nun zur Folge, dass die Bedingung

$$(7) \qquad \phi(a_n) = \begin{cases} g^0_{\mathfrak{B}} & \text{falls } a_n = g^0_{\mathfrak{A}}, \\ f_{\mathfrak{B}}(g^0_{\mathfrak{B}}) & \text{falls } a_n = f_{\mathfrak{A}}(g^0_{\mathfrak{A}}), \\ g^p_{\mathfrak{B}}(\phi(a_{i_1}),\ldots,\phi(a_{i_p})) & \text{falls } a_n = g^p_{\mathfrak{A}}(a_{i_1},\ldots,a_{i_p}), i_1 < \ldots < i_p, \\ f_{\mathfrak{B}}(g^q_{\mathfrak{B}}(\phi(a_{i_1}),\ldots,\phi(a_{i_q})) & \text{falls } a_n = f_{\mathfrak{A}}(g^q_{\mathfrak{A}}(a_{i_1},\ldots,a_{i_q})) \text{ und } i_1 < \ldots < i_q, \end{cases}$$

induktiv nach n eine Abbildung von A nach B definiert. Von dieser Abbildung ϕ zeigen wir, dass sie ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ist. Mehr ist nicht zu beweisen, da jeder Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ die Bedingung (7) erfüllen muss.

Um zu zeigen, dass ϕ surjektiv ist, beweisen wir mit Induktion nach m, dass zu jedem m ein n existiert, sodass $\phi(a_n)=b_m$. b_m hat eine der Formen $g^0_{\mathfrak{B}}$, $f_{\mathfrak{B}}(g^0_{\mathfrak{B}})$, $g^p_{\mathfrak{B}}(b_{i_1},\ldots,b_{i_p})$ mit $i_1<i_2<\ldots<i_p$, $f_{\mathfrak{B}}(g^p_{\mathfrak{B}}(b_{i_1},\ldots,b_{i_p}))$ mit $i_1<i_2<\ldots<i_p$. In den ersten beiden Fällen wählt man für a_n $g^0_{\mathfrak{A}}$ bezw. $f_{\mathfrak{A}}(g^0_{\mathfrak{A}})$. Im dritten Fall gibt es gemäss Induktionsvoraussetzung Zahlen $j_1,\ldots,j_p$, sodass $\phi(a_{j_\alpha})=b_{i_\alpha}$ für $\alpha=1,\ldots,p$ und $j_1<\ldots<j_p$. Nach (7) ist dann $\phi(g^p_{\mathfrak{A}}(a_{j_1},\ldots,a_{j_p}))=b_m$. Ganz analog verfährt man im vierten Fall. Ohne jede Schwierigkeit zeigt man auch induktiv nach max(m,n), dass $\phi(a_m)\neq\phi(a_n)$, falls $m\neq n$. Nach 8.2b bleibt nur noch zu zeigen:

(8) $$\phi(g^p_{\mathfrak{A}}(a_{i_1},\ldots,a_{i_p}))=g^p_{\mathfrak{B}}(\phi(a_{i_1}),\ldots,\phi(a_{i_p})),$$

(9) $$\phi(f_{\mathfrak{A}}(a_n))=f_{\mathfrak{B}}(\phi(a_n)).$$

Um (8) zu beweisen, beachten wir, dass es unter den Indizes $i_1,\ldots,i_p$ Zahlen $i_{j_1},\ldots,i_{j_p}$ gibt $(0<q\leq p)$, sodass $i_{j_1}<\ldots<i_{j_p}$ und $g^p_{\mathfrak{A}}(a_{i_1},\ldots,a_{i_p})=g^q_{\mathfrak{A}}(a_{i_{j_1}},\ldots,a_{i_{j_q}})$. Dann gilt auch: $g^p_{\mathfrak{B}}(\phi(a_{i_1}),\ldots,\phi(a_{i_p}))=g^q_{\mathfrak{B}}(\phi(a_{i_{j_1}}),\ldots,\phi(a_{i_{j_q}}))$ und, nach (7), $\phi(g^q_{\mathfrak{A}}(a_{i_{j_1}},\ldots,a_{i_{j_q}}))=g^q_{\mathfrak{B}}(\phi(a_{i_{j_1}}),\ldots,\phi(a_{i_{j_q}}))$. Daraus ergibt sich (8). Mit gleichartigen Ueberlegungen beweist man auch (9). Dann ist 8.3 bewiesen.

8.4 KOROLLAR *Einfache Strukturen haben nur den trivialen Automorphismus.*

Einbettungen von $\mathfrak{N}^+$

Ist $\mathfrak{A}$ ein Modell von NF_2^+, a ein Individuum von $\mathfrak{A}$, so bezeichnen wir mit $Ab_{\mathfrak{A}}(a)$ den Abschluss der Menge $\{a\}$ unter den Operationen $f_{\mathfrak{A}}, g^1_{\mathfrak{A}}, g^2_{\mathfrak{A}}\ldots$ (ohne $g^0_{\mathfrak{A}}$).

8.5 LEMMA *$Ab_{\mathfrak{A}}(a)$ ist unendlich.*

Beweis: Die Elemente $a_0,a_1,\ldots$, induktiv definiert durch die Bedingungen

$$a_0=g^1_{\mathfrak{A}}(a),\ a_1=g^1_{\mathfrak{A}}(f_{\mathfrak{A}}(a)),\ a_{n+2}=g^{n+2}_{\mathfrak{A}}(a_0,\ldots,a_{n+1}),$$

sind offensichtlich in $Ab_{\mathfrak{A}}(a)$ enthalten. Mit Induktion nach n bestätigt man ohne Schwierigkeit, dass

$$\overline{\overline{(a_{n+1})_R}}=n+1;\ \text{und}\ a_i\neq a_j\ \text{für}\ i<j<n+2.$$

Damit ist 8.5 bewiesen.

Induktiv definieren wir die Mengen $A_n(a)$:

$$A_0(a)=\{a\},$$
$$A_{2p+1}(a)=A_{2p}(a)\cup\{f_{\mathfrak{A}}(a)/a\in A_{2p}(a)\},$$
$$A_{2p+2}(a)=A_{2p+1}(a)\cup\{g^q_{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_q)/0<q;a_1,\ldots,a_q\in A_{2p+1}(a)\}.$$

Offensichtlich gilt:

(10) $$A_0(a)\subseteq A_1(a)\subseteq A_2(a)\subseteq\ldots$$

Weiter definieren wir:

$$\tilde{A}_n(a)=\begin{cases}A_n(a) & \text{falls } n=0,\\ A_n(a)\setminus A_{n-1}(a) & \text{falls } n>0.\end{cases}$$

Dann

(11) $$\tilde{A}_n(a)\subseteq A_n(a),$$

(12) $$\tilde{A}_m(a)\cap\tilde{A}_n(a)=\emptyset,\ \text{falls } m\neq n.$$

8.6 LEMMA *a)* $Ab_{\mathfrak{A}}(a)=\bigcup_{n<\omega}\tilde{A}_n(a)$.

b) $\overline{\overline{A_n(a)}}<\aleph_0$.

c) $\begin{cases} b\in\tilde{A}_{2p+2}(a)\Longrightarrow b_R\subseteq A_{2p+1},\\ b\in\tilde{A}_{2p+3}(a)\Longrightarrow (A\setminus b_R)\subseteq A_{2p+2}.\end{cases}$

Beweis: c) folgt aus der Definition von $A_n(a)$. b) beweist man ohne Schwierigkeit mit Induktion nach n, ebenso

(13) $$A_n(a)\subseteq Ab_{\mathfrak{A}}(a).$$

Aus (13) folgt $\bigcup_{n<\omega}A_n(a)\subseteq Ab_{\mathfrak{A}}(a)$. Da $\bigcup_{n<\omega}A_n(a)$ gegenüber $f_{\mathfrak{A}},g^1_{\mathfrak{A}},g^2_{\mathfrak{A}},\ldots$ abgeschlossen ist, gilt auch $Ab_{\mathfrak{A}}(a)\subseteq\bigcup_{n<\omega}A_n(a)$, somit $Ab_{\mathfrak{A}}(a)=\bigcup_{n<\omega}A_n(a)$. a) folgt nun wegen $\bigcup_{n<\omega}A_n(a)=\bigcup_{n<\omega}\tilde{A}_n(a)$. Damit ist 8.6 bewiesen.

Wir bezeichnen die Einschränkungen von $R_{\mathfrak{A}},f_{\mathfrak{A}},g^1_{\mathfrak{A}},g^2_{\mathfrak{A}}\ldots$ mit $R'_{\mathfrak{A}},f'_{\mathfrak{A}},g^{1\prime}_{\mathfrak{A}},g^{2\prime}_{\mathfrak{A}},\ldots$ und setzen

$$\mathfrak{A}(a)=\langle Ab_{\mathfrak{A}}(a),R'_{\mathfrak{A}},f'_{\mathfrak{A}},g^{1\prime}_{\mathfrak{A}},g^{2\prime}_{\mathfrak{A}},\ldots\rangle.$$

Wir nennen a *zyklisch*, wenn $a_R\cap Ab_{\mathfrak{A}}(a)\neq\emptyset$, *azyklisch* sonst.

8.7 LEMMA *Falls a azyklisch ist, so* $\mathfrak{A}(a)\cong\mathfrak{N}^+$.

Beweis: Nach 8.3 genügt es, zu zeigen, dass $\mathfrak{A}(a)$ einfach ist. Es sei dazu $\langle a_i : i < \omega \rangle$ eine Aufzählung von A, welche die Eigenschaft

$$(14) \qquad \left.\begin{array}{l} a_i \in \tilde{A}_m(a) \\ a_j \in \tilde{A}_n(a) \\ m < n \end{array}\right\} \Longrightarrow i < j$$

hat. Eine solche Aufzählung existiert nach 8.6a und 8.6b. Wegen 8.6c bleibt nur noch zu zeigen, dass alle a_i aus $A_1(a)$ die folgenden Bedingungen erfüllen:

(15) $\qquad a_i$ endlich oder ko-endlich bez. $Ab_{\alpha}(a)$,

$$(16) \qquad \begin{cases} R'_{\alpha}(a_j, a_i) \Longrightarrow j < i & \text{falls } a_i \text{ endlich,} \\ \neg R'_{\alpha}(a_j, a_i) \Longrightarrow j < i & \text{falls } a_i \text{ ko-endlich.} \end{cases}$$

Aus $A_1(a) = \{a, f_{\alpha}(a)\}$, $a_0 = a$, $a_1 = f_{\alpha}(a)$ und der Azyklizität von a folgt $(a_0)_{R'} = \emptyset$, $(a_1)_{R'} = Ab_{\alpha}(a)$. Also sind (15) und (16) trivialerweise erfüllt. Damit ist 8.7 bewiesen.

8.8 SATZ *$\mathfrak{N}$ kann in jedes Modell von NF_2 eingebettet werden, und $\mathfrak{N}$ ist bis auf Isomorphie das einzige Modell von NF_2 mit dieser Eigenschaft.*

Beweis: $\mathfrak{A}$ sei ein Modell von NF_2. Dann ist $g^0_{\alpha^+}$ azyklisch, und somit gibt es nach 8.7 einen Isomorphismus ϕ von $\mathfrak{N}^+$ nach $\mathfrak{A}^+(g^0_{\alpha^+})$. Dieser ist a fortiori ein Isomorphismus von $\mathfrak{N}$ nach $\langle Ab_{\alpha^+}(g^0_{\alpha^+}), R'_{\alpha} \rangle$.

Umgekehrt ist $\mathfrak{N}$ bis auf Isomorphie das einzige Modell von NF_2, das sich in alle Modelle von NF_2 einbetten lässt. Jedes solche Modell $\mathfrak{N}'$ ist nämlich auch in $\mathfrak{N}$ einbettbar und somit, wie aus der Definition der Einfachheit hervorgeht, auch einfach, also nach 8.3 zu $\mathfrak{N}$ isomorph.

Auf Grund von 8.8 nennen wir $\mathfrak{N}$ das *Standardmodell* von NF_2.

Eine zum Standardmodell isomorphe Struktur erhalten wir auf die folgende Weise. Wir definieren zunächst eine Menge T von Termen. T sei $\{t_0, t_1, \ldots\}$, wobei t_n induktiv durch die Bedingungen

t_0 ist Λ,
t_{2p+1} ist s^*, wenn t_{2p} der Term s ist,
t_{2p+2} ist $[t_{k_0}, \ldots, t_{k_{q-1}}]$, wenn $p+1 = \sum_{i<q} 2^{k_i}$ und $k_0 < \ldots < k_{q-1}$,

definiert ist. Man findet zum Beispiel:

t_0 ist $\wedge$,
t_1 ist $\wedge^*$,
t_2 ist $[\wedge]$,
t_3 ist $[\wedge]^*$,
t_{12} ist $[\wedge^*, [\wedge]]$,
t_{16} ist $[[\wedge]^*]$,
t_{100} ist $[\wedge^*, [\wedge^*], [\wedge^*]^*]$,
t_{1000} ist $[[\wedge], [\wedge^*], [\wedge^*]^*, [\wedge, \wedge^*], [\wedge, \wedge^*]^*, [[\wedge]]]$,
$t_{2^{100}}$ ist $[[[\wedge^*], [\wedge]^*, \wedge]]$.

Definiert man nun $R_{\mathcal{T}}$ auf T durch die Bedingungen

$$\neg R_{\mathcal{T}}(t, \wedge),$$
$$R_{\mathcal{T}}(s, t^*) \Longleftrightarrow \neg R_{\mathcal{T}}(s,t),$$
$$R_{\mathcal{T}}(s, [t_{i_1}, \ldots, t_{i_p}]) \Longleftrightarrow (s \text{ ist einer der Terme } t_{i_1}, \ldots, t_{i_p}),$$

so ist die Abbildung ϕ: $n \mapsto t_n$ offenbar ein Isomorphismus von $\mathfrak{N}$ nach $\langle T, R_{\mathcal{T}} \rangle$.

Reflexivitätscharakteristik und Einfachheit

Ist $\mathfrak{A}$ einfach, so gilt offensichtlich: $\chi_{\mathfrak{A}}(m)=0$ für alle m aus $\tilde{\mathbb{Z}}$. Die Umkehrung ist nicht richtig, wie der folgende Satz zeigt.

8.9 SATZ *Die Theorie NF_2 hat ein abzählbares Modell, welches die Reflexivitätscharakteristik des Standardmodells hat, aber nicht zu diesem isomorph ist.*

Beweis: Es seien A und A_0 abzählbare Mengen, wobei $A_0 \subseteq A$, $\overline{\overline{A_0}} = \overline{\overline{A \setminus A_0}}$. Für B aus $\mathcal{Z}(A)$ definieren wir

$$e(B) = \begin{cases} B & \text{falls } B \in \mathcal{E}(A), \\ A \setminus B & \text{falls } B \in \mathcal{K}(A). \end{cases}$$

Weiter setzen wir

$$\mathcal{Z}_0(A) = \{B / B \in \mathcal{Z}(A) \text{ und } e(B) \subseteq A_0\}.$$

Die Folgen $\langle a_i : i < \omega \rangle$ und $\langle B_i : i < \omega \rangle$ seien wiederholungsfreie Aufzählungen von A bezw. $\mathcal{Z}(A)$, und $\alpha_i = \{a_j / j < i\}$. Wir definieren induktiv nach i eine Abbildung g von A in $\mathcal{Z}(A)$:

$g(a_i)$ sei das erste B_j, für welches

(17) $$a_i \notin e(B_j)$$

und wobei

$$B_j \begin{cases} \mathfrak{Z}_0(A) \setminus g[\alpha_i] & \text{falls } a_i \in A_0, \\ (\mathfrak{Z}(A) \setminus \mathfrak{Z}_0(A)) \setminus g[\alpha_i] & \text{falls } a_i \in A \setminus A_0. \end{cases}$$

g ist eine Bijektion von A nach $\mathfrak{Z}(A)$. R_g sei die durch die Bedingung

$$R_g(a,b) \Longleftrightarrow a \in g(b)$$

definierte Relation auf A, und $\mathfrak{A}_g = \langle A, R_g \rangle$. Nach 7.3 ist g die repräsentative Abbildung von $\mathfrak{A}_g$. Da $g[A] = \mathfrak{Z}(A)$, ist $\mathfrak{A}_g$ nach 2.5 ein Modell von NF_2, und

(18) $$\chi_{\mathfrak{A}_g}(-\aleph_0) = \chi_{\mathfrak{A}_g}(\aleph_0) = 0.$$

Aus (17) folgt $a_i \notin e(g(a_i))$ für $i < \omega$, also $R_g(a_i, a_i) \Longleftrightarrow (a_i)_{R_g} \in \mathcal{K}(A)$. Daraus und mit (18) folgt

$$\chi_{\mathfrak{A}_g}(m) = 0, \text{ falls } m \in \tilde{\mathbb{Z}}.$$

Somit bleibt zu zeigen, dass $\mathfrak{A}_g \not\equiv \mathfrak{N}$. Nach 8.2a genügt es, zu zeigen, dass $\mathfrak{A}_g^+ \not\equiv \mathfrak{N}^+$. Dies ergibt sich daraus, dass

$$Ab_{\mathfrak{N}^+}(g^0_{\mathfrak{N}^+}) = \mathbb{N}_0,$$

während

$$Ab_{\mathfrak{A}_g^+}(g^0_{\mathfrak{A}_g^+}) \neq A,$$

da wegen der Abgeschlossenheit von A_0 $Ab_{\mathfrak{A}_g^+}(g^0_{\mathfrak{A}_g^+}) \subseteq A_0$.

* * *