ETH zürich

ETH Library

La Détermination purement optique des constantes E, nü, G des matières isotropes transparentes

Doctoral Thesis

Author(s):
Martinola, Marzio

Publication date:
1959

Permanent link:
https://doi.org/https://doi.org/10.3929/ethz-a-000107760

Rights / license:
In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

This page was generated automatically upon download from the ETH Zurich Research Collection.
For more information, please consult the Terms of use.

Prom. No 2863

La détermination purement optique des constantes E, ν, G des matières isotropes transparentes

Contribution à l'étude des plaques minces fléchies d'épaisseur brusquement variable

THÈSE

PRÉSENTÉE

À L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE, ZURICH

POUR L'OBTENTION DU

GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES TECHNIQUES

PAR

Marzio Martinola

Ing. civ. dipl. E.P.F.

de Malvaglia (Tessin)

Rapporteur: M. le Prof. Dr. H. Favre

Corapporteur: M. le Prof. Ed. Amstutz

Zurich 1959 Imprimerie Leemann S. A.

Paraît également comme N° 7 des «Publications du Laboratoire de Photoélasticité
de l'École polytechnique fédérale, Zurich»
Prof. Dr. Henry Favre

Éditions Leemann Zurich

Préface

La présente étude comprend deux parties. La première est consacrée à la détermination, par des méthodes purement optiques, des constantes E, ν, G des matières isotropes transparentes. La deuxième partie est une contribution à l'étude des plaques minces d'épaisseur brusquement variable. Ce travail, avant tout expérimental, a été fait au Laboratoire de Photoélasticité annexé à la Chaire de Mécanique en langue française de l'Ecole polytechnique fédérale.

Nous désirons exprimer ici nos très sincères remerciements à M. le Prof. Dr *H. Favre*, pour ses précieux conseils et l'intérêt bienveillant qu'il n'a cessé de nous témoigner au cours de ces recherches. Notre reconnaissance s'adresse également à M. le Dr *W. Schumann*, collaborateur scientifique du Laboratoire, pour les très utiles conseils qu'il nous a donnés.

Nous tenons enfin à remercier MM. les Prof. *P. Lardy*, et *Ed. Amstutz*, qui ont bien voulu s'intéresser au développement de nos recherches et à leurs résultats.

Zurich, le 10 octobre 1958.

Leer - Vide - Empty

Table des matières

Première Partie

La détermination purement optique des constantes E, ν, G des matières isotropes transparentes 7

Introduction 7

Chapitre I: Principales méthodes connues pour les mesures du module d'élasticité E et du coefficient de Poisson ν des matières isotropes transparentes 7

Chapitre II: Méthode de mesure du rapport du coefficient de Poisson ν au module d'élasticité E des matières isotropes transparentes 10

Chapitre III: Méthode purement optique pour la mesure des modules d'élasticité E et de cisaillement G des corps isotropes transparents 14

§ 1. Principe de la méthode 14

§ 2. Détermination du module d'élasticité E 16

§ 3. Elimination des principales erreurs systématiques 18

§ 4. Mesure purement optique du module de cisaillement G 19

§ 5. Calcul des valeurs les plus probables de E, ν et G 21

Chapitre IV: Etude des variations de E, ν et G dans une plaque d'allite CR 39, en fonction de la position du domaine considéré 22

§ 1. Introduction 22

§ 2. Mesure du rapport ν/E 23

§ 3. Mesure du module d'élasticité E 26

§ 4. Mesure du module de cisaillement G 31

§ 5. Calcul des valeurs les plus probables de E, ν et G 33

Chapitre V: Etude des variations de E, ν et G dans une plaque d'araldite B, en fonction de la position du domaine considéré 34

§ 1. Fabrication des éprouvettes 34

§ 2. Mesure du coefficient ν/E 36

§ 3. Mesure du module d'élasticité E 37

§ 4. Mesure du module de cisaillement G 38

§ 5. Calcul des valeurs les plus probables de E, ν et G 38

Seconde Partie

Contribution à l'étude des plaques minces fléchies d'épaisseur brusquement variable . . 39

Introduction 39

Chapitre I: Etude théorique des plaques circulaires homogènes où l'épaisseur subit une variation brusque entraînant une discontinuité du feuillet moyen et où la surcharge accuse une symétrie de révolution par rapport à l'axe 41

§ 1. Introduction 41

§ 2. Détermination des forces intérieures agissant dans la section $r=b$ de la plaque 43

§ 3. Applications 47

Chapitre II: Etude expérimentale de la répartition des moments dans les plaques circulaires fléchies présentant une discontinuité dans l'épaisseur engendrant une discontinuité du feuillet moyen 53

§ 1. Introduction 53

§ 2. Mesure des tensions dues à N, dans une plaque circulaire homogène, présentant une discontinuité de l'épaisseur entraînant une discontinuité du feuillet moyen 54

§ 3. Mesure des moments dans une plaque circulaire présentant une discontinuité de l'épaisseur entraînant une discontinuité du feuillet moyen 56

§ 4. Etude expérimentale de la répartition des moments dans une plaque circulaire présentant une discontinuité de l'épaisseur n'entraînant pas une discontinuité du feuillet moyen 61

Chapitre III: Etude expérimentale de la répartition des moments dans une plaque carrée présentant une discontinuité de l'épaisseur n'entraînant pas de discontinuité du feuillet moyen 63

§ 1. Introduction 63

§ 2. Description du modèle, état de charge, choix des points de détermination des moments 64

§ 3. Mesures, calculs, épures 65

§ 4. Discussion des résultats 67

PREMIÈRE PARTIE

La détermination purement optique des constantes E, ν, G des matières isotropes transparentes

Introduction

Les constantes qui caractérisent la matière au point de vue des déformations, dans le domaine élastique, sont le *module d'élasticité* E et le *coefficient de Poisson* ν. Or si la détermination de E n'offre pas de difficulté, il n'en est pas de même de la mesure de ν, qui s'est révélée beaucoup plus délicate.

L'objet de la présente étude est avant tout de *développer une méthode précise, permettant de déterminer le coefficient ν des matières isotropes transparentes.* Ce procédé consiste à mesurer optiquement, d'abord le rapport ν/E et ensuite le module E, d'où la valeur de ν. La mesure supplémentaire, également par un procédé optique, du module de cisaillement G, nous a permis en outre de vérifier les résultats en utilisant la relation $G=\frac{E}{2(1+\nu)}$ et de calculer ensuite les valeurs les plus probables de E, ν et G en appliquant la théorie des erreurs de *Gauss* (méthode des moindres carrés). Ce mémoire présente donc, en définitive, *un ensemble de procédés purement optiques pour la détermination des constantes E, ν, G des matières isotropes transparentes.*

Dans un premier chapitre, nous exposons brièvement les principales méthodes connues pour la détermination de E et ν des matières transparentes. La méthode de mesure du rapport ν/E est présentée dans le chapitre II, tandis que la mesure de E et G fait l'objet du chapitre III. Enfin, dans les chapitres IV et V, les méthodes proposées sont appliquées à la détermination des constantes élastiques de l'*allite CR 39* et de l'*araldite B*.

CHAPITRE I

Principales méthodes connues pour les mesures du module d'élasticité E et du coefficient de Poisson ν des matières isotropes transparentes

Les mesures de E et de ν peuvent se faire soit par des *méthodes statiques*, soit par des *méthodes dynamiques;* elles ne sont correctes que si les déformations

qui interviennent sont très petites. Passons d'abord en revue *les principales méthodes statiques* connues; examinons pour commencer celles qui permettent de déterminer le *module* E.

a) *Méthode de A. König*[1]). Elle consiste à déterminer E en mesurant, au moyen d'un système de miroirs fixés sur l'éprouvette étudiée, l'angle de rotation aux appuis, d'une poutre soumise à la flexion. Cette méthode fut employée par *Winkelmann* et *Schott* dans un étude systématique des propriétés du verre[2]).
b) *Méthode de O. Graf*[3]). Opérant également par flexion, cette méthode cherche à éliminer l'influence de la déformation des appuis en mesurant les ordonnées de la ligne élastique en trois de ses points.
c) *Méthodes basées sur la mesure de l'allongement spécifique* ϵ_l *d'une éprouvette soumise à la traction ou à la compression.* Il en existe un grand nombre[4]).

Passant maintenant à la détermination statique du *coefficient* ν, nous citons les procédés suivants:

a) *Méthode de Kirchhoff*[5]), qui consiste à déterminer ν en utilisant la formule $\nu = \frac{E}{2G} - 1$[6]). Le rapport E/G est lui-même obtenu en mesurant le déplacement latéral d'un faisceau de lumière réfléchi sur un miroir fixé à l'extrémité libre d'une éprouvette (poutre console), soumise simultanément à la torsion et à la flexion[7]).
b) *Méthode de Cornu*[8]). L'auteur utilise la méthode de *Fizeau*, basée sur l'emploi des franges d'interférence d'une lame d'air, pour la mesure des petites dilatations. On sait que, dans le cas de la flexion pure, l'axe d'un prisme de section rectangulaire se courbe suivant un arc de cercle; les faces normales au plan de flexion se transforment en surfaces gauches. Dans le cas où les dimensions transversales du prisme sont petites par rapport à la distance des appuis, le rapport des deux courbures principales est, en chaque point de ces surfaces, indépendant des dimensions du prisme et de la grandeur du moment fléchissant; ce rapport est précisément égal au

---

1) *A. König:* Wied. Ann., 28, 1886, p. 108.

2) *Winkelmann* et *Schott:* Wied. Ann., 51, 1894, p. 697.

3) *O. Graf:* Glastechnische Berichte. 3, 1925/26, p. 153 et suiv.

4) Citons celles utilisant les *franges d'une lame d'air*, celles basées sur l'emploi d'un tensomètre ou d'un strain gage et celles procédant à l'aide de photographies.

5) *G. Kirchhoff:* Pogg. Ann., 108, 1859, p. 369.

6) Les premières recherches dans la voie suivie par *Kirchhoff* sont dues à *Wertheim* et *Chevandier*. Voir Comptes rendus, 20, 1845, p. 1637.

7) Pour une application de cette méthode, voir: *D. Everett*, Phil. Trans. 157, 1867, p. 139.

8) *A. Cornu:* Comptes rendus, 69, 1869, p. 333.

coefficient ν. Les courbes de niveau relatives à un plan tangent à la surface déformée constituent deux systèmes d'hyperboles conjuguées ayant des asymptotes communes. La tangente de l'angle α^* fait par chacune des deux asymptotes avec la direction de l'axe du prisme est égale à l'inverse de la racine carrée du coefficient ν. Or ces courbes de niveau peuvent être réalisées par des franges d'interférence, qui permettent d'évaluer l'angle α^*, d'où l'on déduit ν. *Straubel* a employé cette méthode dans des essais systématiques sur le verre [9]).

c) *Méthode d'Amagat* [10]), qui consiste à mesurer la variation du volume intérieur d'un tube due à une pression extérieure et à une traction axiale connues.

D'autres méthodes permettent de déterminer ν, en mesurant directement d'allongement spécifique ϵ_l et la contraction transversale spécifique ϵ_q d'une éprouvette soumise à la traction (ou à la compression). On a en effet: $\nu = -\frac{\epsilon_q}{\epsilon_l}$. Il existe différents procédés permettant de déterminer ϵ_l et ϵ_q [4]).

Passons maintenant aux *méthodes dynamiques de mesure*. Rappelons avant tout les méthodes classiques de mesure de E et G (donc de ν), qui se basent: pour le module E, sur la mesure de la vitesse de propagation des vibrations longitudinales dans les prismes (connaissant la masse spécifique de la matière), et pour G, sur l'observation des oscillations d'un corps suspendu à un cylindre mince tordu. Les méthodes les plus modernes utilisent les découvertes de *Debye, Sears, Lucas* et *Biquard* dans le domaine des ondes de haute fréquence.

Parmi ces méthodes modernes, citons les principales.

a) *Méthode de Bär et Walti* [11]), qui consiste à déterminer E et ν en mesurant la longueur d'onde des vibrations ultra-sonores transversales et longitudinales, provoquées dans un coin fait avec la matière étudiée, plongé dans un liquide. Une méthode analogue est celle de *Benz-Bardili* [12]), qui détermine l'angle de réflection totale pour les ondes longitudinales et transversales sur les deux faces de l'éprouvette, d'où l'on tire les valeurs de E et ν.

b) *Méthode de Schäfer et Bergmann* [13]). Elle consiste à utiliser les diagrammes de réfraction (de *Laue*) obtenus en plaçant une éprouvette vibrant à grande fréquence dans un faisceau de lumière parallèle [14]).

---

[9]) *R. Straubel:* Wied. Ann., 68, 1899, p. 369.

[10]) *Amagat:* Comptes rendus, 107, 1888, p. 618.

[11]) *R. Bär* et *E. Walti:* Helv. Phys. Acta, 7, 1934, p. 658.

[12]) *Benz-Bardili:* Z. f. Phys., 96, 1935, p. 761.

[13]) *Ch. Schäfer* et *L. Bergmann:* Sitz.-Ber. Berl. Akad., 1934, p. 192.

[14]) Pour un exposé de la théorie, illustré d'un étude systématique sur le verre, voir: *Ch. Schäfer, L. Bergmann* et *J. H. Goelich:* Bestimmung der elastischen Konstanten optischer Gläser aus der Lichtbeugung an Ultraschallen. Glastechnische Berichte XV, 1937, p. 447 et suiv.

Il existe évidemment encore de nombreuses variantes des méthodes citées, fondées sur les mêmes principes, mais faisant appel à d'autres dispositifs.

Pour terminer, observons encore que si, d'une part, les méthodes dynamiques offrent par rapport aux statiques l'avantage d'être peu sensibles au phénomène de l'hystérésis observé chez un grand nombre de matières plastiques transparentes (celluloid, bakélite, allite, araldite *D*, . . .)[15], ces méthodes nécessitent d'autre part un dispositif de mesure en général beaucoup plus compliqué de celui des procédés statiques. En outre, dans bien des cas, ce sont les constantes élastiques déterminées par des mesures statiques qui nous intéressent directement. Si la matière présente le phénomène de l'hystérésis, il faudra en tenir compte en entroduisant le temps de charge *t*, et donner les valeurs des constantes en fonction de cette grandeur; c'est ce que nous ferons dans le chapitre IV, en étudiant l'allite.

CHAPITRE II

Méthode de mesure du rapport du coefficient de Poisson ν au module d'élasticité E des matières isotropes transparentes[16])

Considérons une éprouvette prismatique, de section rectangulaire, faite d'une matière transparente, homogène et isotrope, placée d'abord dans l'air. Désignons par *1* la direction des arêtes latérales et par *2* et *3* les directions des

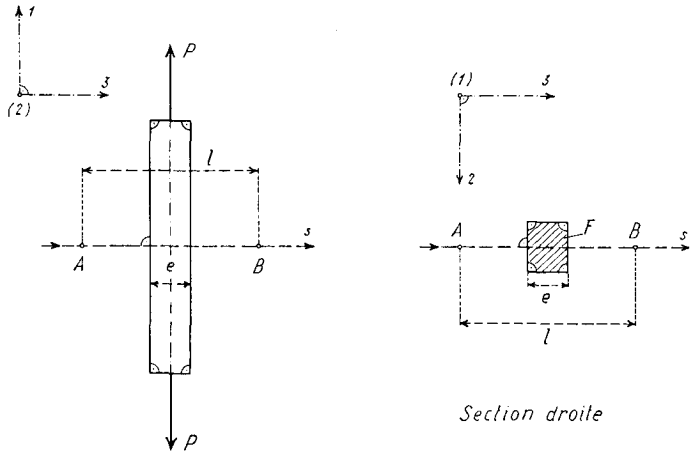


Fig. 1.

[15]) Voir p. ex.: *L. N. G. Filon:* Manuel de Photoélasticité à l'usage des ingénieurs. Traduction de l'anglais par *L. A. de Dardel*, Edition Dunod, Paris 1942, p. 98 et suiv.

[16]) Le principe de cette méthode a déjà fait l'objet d'une note de *H. Favre* et *M. Martinola* (Comptes rendus, T. 246, 1958, p. 50).

arêtes des bases (fig. 1). Soit encore F l'aire de la section droite, e l'épaisseur traversée, normalement à deux faces latérales, par un rayon lumineux monochromatique polarisé s, vibrant parallèlement à la direction 1. Si nous appliquons sur les bases du prisme deux forces axiales P, égales mais de sens contraires, les tensions principales en un point quelconque de l'éprouvette sont: $\sigma_1 = P/F$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

Considérons maintenant deux points fixes A et B situés de part et d'autre de l'éprouvette, sur le support du rayon lumineux s. Soit l la distance de ces deux points. Avant l'application des forces P, le chemin optique L du rayon s, relatif au segment $\overline{AB} = l$, est donné par la formule:

$$L = l + (n-1)e, \tag{1}$$

n désignant l'indice de réfraction de l'éprouvette. Pour calculer la variation dL de ce chemin optique par suite de la mise en charge, nous devons différencier l'équation (1), en remarquant que seuls n et e varient, d'où:

$$dL = (n-1)de + e\,dn,$$

et la variation absolue de marche du rayon émergent sera:

$$\delta_1 = -dL = -[(n-1)de + e\,dn]. \tag{2}$$

Plaçons maintenant l'*éprouvette dans un liquide d'indice* n'. Le chemin optique initial relatif au même segment $\overline{AB}$, aura la valeur:

$$L' = n'l + (n-n')e,$$

et la variation absolue de marche produite par l'application des mêmes forces P sera:

$$\delta_1' = -dL' = -[(n-n')de + e\,dn], \tag{3}$$

(d'une façon générale nous affecterons de l'indice $'$ toute grandeur se rapportant au cas où l'éprouvette est placée dans le liquide d'indice n').

En soustrayant (2) de (3) et en remarquant que $de = -\nu\frac{\sigma_1 e}{E}$, en obtient:

$$\delta_1' - \delta_1 = (n'-1)de = -(n'-1)\sigma_1 e\frac{\nu}{E},$$

d'où

$$\frac{\nu}{E} = \frac{\delta_1 - \delta_1'}{(n'-1)e\sigma_1}. \tag{4}$$

La mesure du rapport ν/E est ainsi ramenée à celle des grandeurs e, $\sigma_1 = P/F$, n', δ_1 et δ_1'. Or e, F, P, n' peuvent être évaluées sans difficulté à $^1/_{1000}$ près, à l'aide de méthodes courantes[17]). Un interféromètre (de *Jamin*, de *Michelson*

[17]) Voir Ch. IV.

ou de *Mach-Zehnder*) permettra de déterminer δ_1 et δ_1' à 1% près environ. Comme le numérateur de la formule (4) est la différence de ces deux dernières grandeurs, on obtiendra en définitive ν/E avec une précision de l'ordre de 1 à 2%.

Pour obtenir une plus grande précision, on pourra utiliser le procédé suivant, qui s'est révélé commode. Revenons à l'éprouvette, désignons par δ_2, δ_2' les variations absolues de marche mesurées dans les mêmes conditions, mais en utilisant un rayon monochromatique polarisé *s vibrant parallèlement à la direction 2.*

Comme précédemment, nous pouvons écrire:

$$\frac{\nu}{E} = \frac{\delta_2 - \delta_2'}{(n'-1)\, e\, \sigma_1}. \tag{5}$$

En posant:

$$\frac{\delta_1}{e\sigma_1} = a, \qquad \frac{\delta_2}{e\sigma_1} = b, \qquad \frac{\delta_1'}{e\sigma_1} = a', \qquad \frac{\delta_2'}{e\sigma_1} = b', \tag{6}$$

et en introduisant ces quantités dans les formules (4) et (5), nous obtenons:

$$\boxed{\frac{\nu}{E} = \frac{a-a'}{n'-1} = \frac{b-b'}{n'-1}.} \tag{7}$$

Or a, b ne sont pas autre chose que les coefficients qui figurent dans les deux premières équations du système sur lequel est fondée la méthode purement optique utilisée en photoélasticité bidimensionelle[18]):

$$\delta_1 = a\, e\, \sigma_1 + b\, e\, \sigma_2, \qquad \delta_2 = b\, e\, \sigma_1 + a\, e\, \sigma_2, \qquad \delta_3 = c\, e\, (\sigma_1 - \sigma_2), \tag{8}$$

où δ_3 désigne la variation relative de marche des deux rayons considérés plus haut. En effet, en posant $\sigma_2 = 0$ dans les deux premières équations (8) on retrouve bien les expressions (6) de a et b. Les coefficients a', b' ont des significations analogues, comme on le reconnaît en écrivant les équations, de formes identiques à celles du système (8), mais relatives au cas où l'éprouvette est placée dans un liquide d'indice n'. Ainsi, grâce aux formules (7), la détermination du rapport ν/E — l'indice n' étant supposé connu — est en définitive ramenée à celle des coefficients a, b des deux premières équations de la méthode purement optique utilisée en photoélasticité bidimensionnelle et à celle des deux coefficients analogues a', b', que l'on devrait introduire si l'on appliquait cette méthode au cas d'une éprouvette placée dans un liquide d'indice n'. Or a, b, a', b' — ainsi que les coefficients c et c' — peuvent être déterminés très exactement à l'aide de l'éprouvette prismatique dont il est question ici. Il suffira, pour cela:

---

[18]) Voir *H. Favre:* Schweiz. Bauzeitung des 3 et 10 déc. 1927 et Revue d'Optique théorique et instrumentale, mai, juin, juillet et août 1929.

1. de faire avec un *interféromètre* les mesures de δ_1, δ_2, δ_1', δ_2' pour un certain nombre N (pratiquement 8 à 10) de valeurs σ_1, réparties entre zéro et la limite de proportionnalité (à la traction ou à la compression) de la matière;
2. de faire les mesures complémentaires des variations relatives de marche δ_3, δ_3' à l'aide d'un compensateur de précision, un *Bravais* par exemple;
3. d'appliquer ensuite la *méthode des moindres carrés de Gauss*, en s'appuyant sur les relations connues[18]):

$$a - b = c \quad \text{et} \quad a' - b' = c'. \tag{9}$$

Esquissons les opérations que nécessite l'emploi de la méthode, en indiquant également les principales formules. — Des mesures de $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_3'$ on déduit des *valeurs de première approximation* $\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{c}'$ pour les coefficients $a, b, \ldots, c'$, ainsi que les erreurs moyennes $m_{\bar{a}}, m_{\bar{b}}, \ldots, m_{\bar{c}'}$ et leurs poids $p_{\bar{a}}, p_{\bar{b}}, \ldots, p_{\bar{c}'}$. On a par exemple:

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= \frac{[\sigma_1 \delta_1]}{e\,[\sigma_1^2]}, & m_{\bar{a}} &= \pm \frac{1}{e\,[\sigma_1^2]} \sqrt{\frac{[\sigma_1^2]\,[\delta_1^2] - [\sigma_1 \delta_1]^2}{N-1}}, & p_{\bar{a}} &= \frac{1}{m_{\bar{a}}^2}, \\
\bar{b} &= \frac{[\sigma_1 \delta_2]}{e\,[\sigma_1^2]}, & m_{\bar{b}} &= \pm \frac{1}{e\,[\sigma_1^2]} \sqrt{\frac{[\sigma_1^2]\,[\delta_2^2] - [\sigma_1 \delta_2]^2}{N-1}}, & p_{\bar{b}} &= \frac{1}{m_{\bar{b}}^2}, \\
\bar{c} &= \frac{[\sigma_1 \delta_3]}{e\,[\sigma_1^2]}, & m_{\bar{c}} &= \pm \frac{1}{e\,[\sigma_1^2]} \sqrt{\frac{[\sigma_1^2]\,[\delta_3^2] - [\sigma_1 \delta_3]^2}{N-1}}, & p_{\bar{c}} &= \frac{1}{m_{\bar{c}}^2},
\end{aligned} \tag{10}$$

et trois groupes de formules analogues pour a', b', c' (les parenthèses [ ] désignent ici les sommes des quantités placées entre les crochets).

En utilisant les relations (9), nous pouvons ensuite calculer des *valeurs de seconde approximation* pour les coefficients cherchés. Pour le calcul de a, b, c par exemple, on pose $\bar{a} - \bar{b} - \bar{c} = w$ (la quantité w serait nulle, en vertu de la première condition (9), si $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ n'étaient pas affectés d'erreurs). Les valeurs de seconde approximation de a, b, c, ainsi que les erreurs moyennes et les poids correspondants, sont alors:

$$\begin{gathered}
a = \bar{a} - \frac{\frac{1}{p_{\bar{a}}}}{\left[\frac{1}{p}\right]} w, \qquad b = \bar{b} + \frac{\frac{1}{p_{\bar{b}}}}{\left[\frac{1}{p}\right]} w, \qquad c = \bar{c} + \frac{\frac{1}{p_{\bar{c}}}}{\left[\frac{1}{p}\right]} w, \\
m_a = \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{p_{\bar{a}}}\left(\frac{1}{p_{\bar{b}}} + \frac{1}{p_{\bar{c}}}\right)}}{\left[\frac{1}{p}\right]} w, \ \ldots, \ \ldots, \ p_a = \frac{1}{m_a^2}, \ \ldots, \ \ldots;
\end{gathered} \tag{11}$$

celles relatives à a', b', c' sont données par des formules analogues. En posant ensuite $\Delta a = a - a'$, $\Delta b = b - b'$, on aura:

$$m_{\Delta a} = \pm \sqrt{m_a^2 + m_{a'}^2}, \quad m_{\Delta b} = \pm \sqrt{m_b^2 + m_{b'}^2}, \quad p_{\Delta a} = \frac{1}{m_{\Delta a}^2}, \quad p_{\Delta b} = \frac{1}{m_{\Delta b}^2}, \tag{12}$$

et la valeur moyenne N_u des numérateurs des formules (7) et son erreur moyenne seront:

$$N_u = \frac{p_{\Delta a}\Delta a + p_{\Delta b}\Delta b}{p_{\Delta a} + p_{\Delta b}}, \qquad m_{Nu} = \pm\frac{\Delta a - \Delta b}{p_{\Delta a} + p_{\Delta b}}\sqrt{p_{\Delta a}\, p_{\Delta b}}. \tag{13}$$

D'où finalement, pour la valeur la plus probable du rapport ν/E, son erreur moyenne et le poids correspondant:

$$\frac{\nu}{E} = \frac{N_u}{n'-1}, \qquad m_{\nu/E} = \pm\frac{1}{n'-1}\sqrt{m_{N_u}^2 + \left(\frac{\nu}{E}\right)^2 m_{n'}^2}, \qquad p_{\nu/E} = \frac{1}{m_{\nu/E}^2}, \tag{14}$$

où $m_{n'}$ est l'erreur moyenne de la valeur utilisée pour l'indice de réfraction du liquide n' [19]).

Nous montrerons plus loin, à l'aide d'exemples, que la méthode ainsi conçue permet d'obtenir le rapport ν/E *à quelques millièmes près* [19]).

CHAPITRE III

Méthode purement optique pour la mesure des modules d'élasticité E et de cisaillement G des corps isotropes transparents

§ 1. Principe de la méthode

Considérons une lame plan parallèle, faite d'une matière transparente, d'indice de réfraction n [20]), placée dans l'air. Soit e l'épaisseur traversée, normalement à deux faces latérales parallèles, par un rayon lumineux monochromatique polarisé s (fig. 2a), vibrant perpendiculairement au plan de la figure. Soient A, B deux points de ce rayon, situés de part et d'autre de la lame. Nous avons vu (Chap. II) que le chemin optique relatif au segment $\overline{AB} = l$ est $L = l + (n-1)e$. Proposons-nous maintenant de calculer la variation de ce chemin optique due à une rotation α de la lame autour d'un axe perpendiculaire au plan de la figure et passant par exemple par le point O. Le rayon s décrit, après la rotation, la ligne brisée A, O, O', B' (fig. 2b). Entre l'angle d'incidence α et l'angle de réfraction β existe la relation $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$. A la sortie de la lame, le support de s a subi le déplacement latéral $\overline{BB'} = \overline{O''O'} = \frac{e\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}$; nous verrons dans la suite quelle est la conséquence de ce déplacement.

---

[19]) Ch. IV.

[20]) Par rapport à l'air et pour la lumière monochromatique utilisée.

La somme $\overline{AO} + \overline{O'B'}$ des deux segments extérieurs $\overline{AO}$, $\overline{O'B'}$ est, avant la rotation, égale à $l - e$; cette somme devient après celle-ci:

$$l - \overline{OO''} = l - \frac{e \cos(\alpha - \beta)}{\cos \beta};$$

sa variation est donc égale à

$$e \left[1 - \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \beta} \right]. \tag{15}$$

La modification du chemin optique à l'intérieur de la lame est d'autre part égale à:

$$n e \left(\frac{1}{\cos \beta} - 1 \right). \tag{16}$$

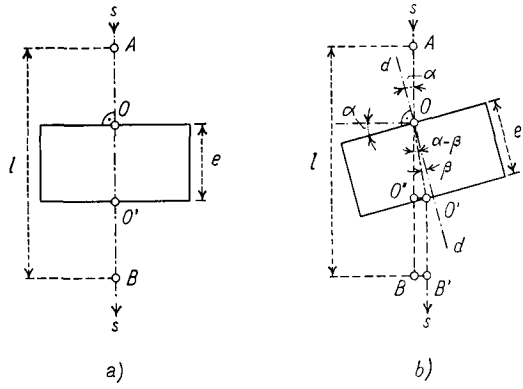


Fig. 2.

La variation totale Δ du chemin optique est dès lors:

$$\Delta = \left\{ \frac{1}{\cos \beta} [n - \cos(\alpha - \beta)] - n + 1 \right\} e. \tag{17}$$

En éliminant β entre la relation $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ et l'équation (17) et en résolvant la relation ainsi obtenue par rapport à α, on obtient après quelques transformations:

$$\boxed{\cos \alpha = 1 - \frac{\Delta \left(n + \frac{\Delta}{2e} \right)}{e(n-1) + \Delta}.} \tag{18}$$

Cette formule nous permet donc de calculer l'angle de rotation α de la lame si nous avons mesuré les grandeurs e, n et Δ [21]). C'est en utilisant ce principe

[21]) On mesure e au moyen d'un *comparateur* de précision, n à l'aide d'un *réfractomètre*, Δ à l'aide d'un *interféromètre* (la variation absolue de marche δ du rayon s que permet de mesurer ce dernier appareil est égale à $-\Delta$).

que nous allons pouvoir déterminer les modules d'élasticité E et de cisaillement G des matières transparentes.

§ 2. *Détermination du module d'élasticité E*

Considérons une éprouvette prismatique disposée horizontalement, perpendiculairement au rayon lumineux s qui la traverse au point Q (fig. 3). Introduisons le système d'axes indiqué dans la figure. Désignons par E le module d'élasticité et par J le moment d'inertie de la section droite par rapport à l'axe y passant par le centre de gravité de la section. Appliquons aux extrémitées

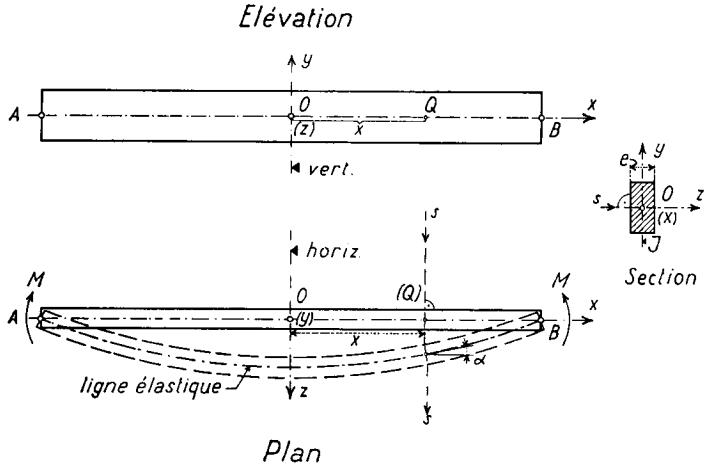


Fig. 3.

A et B de l'éprouvette, dans le plan $x\,0\,z$, deux couples égaux et opposés M; la courbure de la ligne élastique engendrée par la flexion est constante et l'équation différentielle de cette ligne est $\frac{d^2 z}{d x^2} = -\frac{M}{EJ}$. Chaque section tourne d'un angle $\alpha = \left|\frac{d z}{d x}\right| = \frac{M\,|x|}{EJ}$. Or cet angle peut être déterminé comme nous l'avons dit à la fin du paragraphe précédent [22]). La formule (18) peut ici être simplifiée en observant que, α étant petit, nous pouvons poser $\cos\alpha \cong 1 - \frac{\alpha^2}{2}$. On obtient ainsi:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2\Delta\left(n + \frac{\Delta}{2e}\right)}{e\,(n-1) + \Delta}}, \tag{19}$$

[22]) C'est seulement la rotation des différents profils de l'éprouvette qui engendre le changement du chemin optique Δ mesuré par l'interféromètre; la biréfringence accidentelle due au moment M n'a pas d'influence sur le chemin optique.

et en remplaçant α par $\frac{M|x|}{EJ}$, on tire de l'équation obtenue la valeur du module d'élasticité:

$$\boxed{E = \frac{M|x|}{J}\sqrt{\frac{e(n-1)+\Delta}{2\Delta\left(n+\frac{\Delta}{2e}\right)}}.} \tag{20}$$

Remarquons encore que dans les applications nous pouvons presque toujours négliger dans l'expression (20) les termes Δ et $\frac{\Delta}{2e}$, nous obtenons ainsi la formule approchée plus simple:

$$\underline{E = \frac{1}{J}\sqrt{\frac{e(n-1)}{2n}}\,\frac{M|x|}{\sqrt{\Delta}}}. \tag{20'}$$

En définitive la mesure de E est ramenée à celle des grandeurs M, J, x, n, e et Δ. Or M, J et x peuvent être facilement déterminés à quelques millièmes près, e et n à moins de $1\,^0/_{00}$, tandis que Δ peut être mesuré à 1% près environ. Mais comme dans la formule (20) Δ apparaît sous une racine carrée, ce qui augmente la précision de la méthode, l'erreur moyenne relative de la valeur de E, obtenue par une seule observation est en définitive d'environ 1%.

On peut obtenir une plus grande précision en faisant les mesures pour diverses valeurs du moment de flexion M (en restant toujours dans le domaine élastique) et dans différentes sections x. La valeur la plus probable de E, son erreur moyenne m_E et le poids correspondant p_E sont donnés par les formules suivantes, établies par la méthode des moindres carrés de *Gauss:*

$$\underline{E = k\xi}, \tag{21}$$

où
$$k = \frac{1}{J}\sqrt{\frac{e(n-1)}{2n}}, \qquad \xi = \frac{[M^2x^2]}{[\sqrt{\Delta}\,M|x|]},$$

et
$$\underline{m_E = \pm\sqrt{\xi^2 m_k^2 + k^2 m_\xi^2}, \qquad p_E = \frac{1}{m_E^2}}, \tag{22}$$

où
$$m_k^2 = \frac{1}{J^4}\,\frac{e(n-1)}{2n}\,m_J^2 \quad \text{et} \quad m_\xi^2 = \left\{\frac{[M^2x^2][\Delta]-[\sqrt{\Delta}\,M|x|]^2}{(N-1)[M^2x^2]^2}\right\}\xi^4,$$

N désignant le nombre total des mesures de Δ [23]).

Remarque: Les formules (18) à (20') supposent essentiellement deux choses: 1. que, dans la position initiale de l'éprouvette, le rayon lumineux s la traverse perpendiculairement à deux faces, 2. que les deux faces traversées soient bien planes et parallèles. Or dans la pratique, si l'on peut en général assez

[23]) Dans ces formules, J désigne la moyenne arithmétique des valeurs du moment d'inertie, mesurées aux différentes sections, et m_J, l'erreur moyenne de ces valeurs.

bien satisfaire à la première condition (en utilisant par exemple une lunette autocollimatrice), il est plus difficile de satisfaire à la seconde, les faces traversées accusant presque toujours des défauts. Dans le § suivant, nous présentons un procédé de mesure qui permet d'éliminer une bonne partie des erreurs systématiques qu'entraîne pour la mesure de Δ la réalisation imparfaite des deux conditions ci-dessus.

§ 3. Elimination des principales erreurs systématiques[24])

Supposons d'abord que le rayon lumineux s soit situé dans le plan xOz (fig. 3) et que l'axe des z forme avec s un petit angle ϵ_1 (fig. 4). Appliquons aux extrémités de l'éprouvette les deux couples M. Les inclinaisons des plans tangents à la surface élastique en deux points Q et Q' symétriques par rapport au milieu O, sont alors respectivement égales à $\alpha+\epsilon_1$ et $\alpha-\epsilon_1$. Proposons nous de calculer la valeur Δ_Q de Δ au point Q, valeur que mesure l'interféromètre. A cet effet résolvons l'équation (19) par rapport à Δ, en négligeant les termes Δ et $\frac{\Delta}{2e}$ qui figurent respectivement au dénominateur et au numérateur; on obtient:

$$\Delta = C\alpha^2 \quad \text{où} \quad C = \frac{e(n-1)}{2n}. \tag{23}$$

L'inclinaison initiale ϵ_1 engendre au point Q une variation du chemin optique égale à $\Delta_{\epsilon_1} = C\epsilon_1^2$, tandis que l'inclinaison finale $\alpha+\epsilon_1$ nous donne la variation $\Delta_{\alpha+\epsilon_1} = C(\alpha+\epsilon_1)^2$. Le déplacement des franges mesuré par l'interféromètre pendant la déformation de l'éprouvette est ainsi, au point Q:

$$\Delta_Q = \Delta_{\alpha+\epsilon_1} - \Delta_{\epsilon_1} = C(\alpha^2 + 2\alpha\epsilon_1), \tag{24}$$

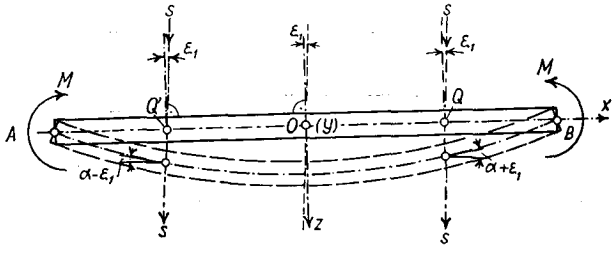


Fig. 4.

---

[24]) Voir aussi: *B. Gilg:* Experimentelle und theoretische Untersuchungen an dünnen Platten, Publication No 5 du Laboratoire de Photoélasticité de l'Ecole polytechnique fédérale. Editions Leemann, Zurich, 1952, p. 30 et suiv.

W. Schumann: Theoretische und experimentelle Untersuchungen über das de Saint-Venantsche Prinzip speziell mit Anwendungen auf die Plattentheorie. Publication No 6 du Laboratoire de Photoélasticité de l'Ecole polytechnique fédérale. Editions Leemann, Zurich, 1955, p. 52 et suiv.

tandis qu'au point symétrique Q', le déplacement analogue est

$$\Delta_{Q'} = \Delta_{\alpha-\epsilon_1} - \Delta_{\epsilon_1} = C(\alpha^2 - 2\alpha\epsilon_1). \tag{25}$$

En prenant la moyenne arithmétique des expressions (24) et (25), on obtient: $\frac{\Delta_Q + \Delta_{Q'}}{2} = C\alpha^2$, ce qui n'est autre que la valeur exacte de Δ pour $\epsilon_1 = 0$. *L'erreur due à une inclinaison initiale ϵ_1 du rayon s sur la normale aux faces de l'éprouvette peut donc être éliminée en mesurant Δ en des sections symétriques et en prenant la moyenne arithmétique des deux valeurs obtenues*[25]).

Si maintenant le rayon lumineux s est situé dans un plan parallèle au plan $z\,0\,y$ et forme un petit angle ϵ_2 avec l'axe des z, l'erreur Δ_{ϵ_2} due à cette légère inclinaison ϵ_2 de s est négligeable, pourvu que l'épaisseur de l'éprouvette soit sensiblement constante et que ϵ_2 reste constant pendant la mise en charge.

Pour éliminer l'erreur systématique due à une petite variation linéaire de l'épaisseur de l'éprouvette, il suffit de faire en chaque section deux mesures correspondant aux positions I et II, symétriques par rapport à l'axe des x, obtenues en changeant les sens des couples M (fig. 5). Enfin, remarquons que

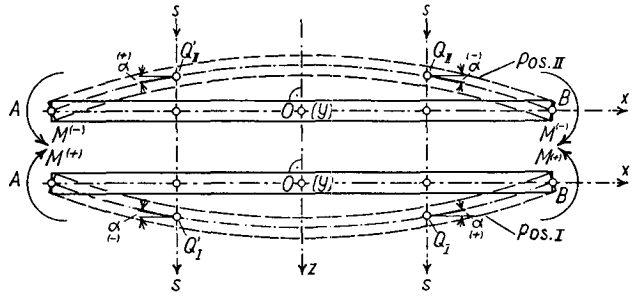


Fig. 5.

le procédé de mesure en des sections symétriques par rapport à l'axe z permet aussi d'éliminer une dernière cause d'erreur, celle due au fait que la rotation de l'éprouvette engendre non seulement une variation du chemin optique, mais encore un déplacement latéral du rayon lumineux s (fig. 2b). Ce déplacement entraîne un changement dans la distance des franges d'interférence pendant la déformation du modèle.

§ 4. Mesure purement optique du module de cisaillement G

La mesure directe du module de cisaillement G sera utile puisqu'elle permettra de contrôler les deux grandeurs ν/E et E obtenues à l'aide des méthodes que nous venons d'exposer.

[25]) Cette propriété nous sera également très utile dans les applications, pour contrôler la position du modèle.

Considérons une éprouvette prismatique rectangulaire, faite d'une matière transparente, placée dans l'air, encastrée à une de ses extrémités (fig. 6). Introduisons le système d'axes x, y, z indiqué dans la figure. Soit Q un point de l'axe des x, d'abscisse x_Q. Désignons par l la longueur de l'éprouvette, par e l'épaisseur traversée normalement à deux faces parallèles, par un rayon lumineux monochromatique polarisé s, passant par Q et vibrant à 45° des directions x et y, par h la largeur de l'éprouvette, et par n son indice de réfraction par

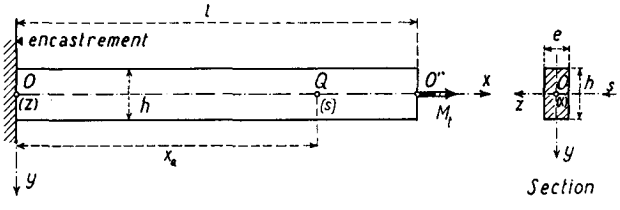


Fig. 6.

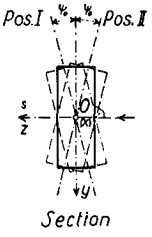


Fig. 7.

rapport à l'air et pour la longueur d'onde utilisée. Appliquons à l'extrémité libre de l'éprouvette un couple de torsion M_t; chaque section tourne sous l'action de M_t autour de son centre de gravité, l'axe des x par raison de symétrie n'est pas déformé et reste rectiligne. L'angle de torsion ψ_0 de la section droite passant par Q est donné par la formule[26])

$$\psi_0 = \frac{k_2 M_t}{12 J G} x_Q, \tag{26}$$

où
$$J = \frac{h e^3}{12}, \qquad k_2 = \frac{3}{1 - \frac{192}{\pi^5} \sum\limits_{m=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^5} th\left(\frac{m \pi h}{2 e}\right)}.$$

On tire de (26):

$$G = \frac{k_2 M_t}{12 J \psi_0} x_Q. \tag{27}$$

Remplaçons encore l'angle ψ_0 par sa valeur (19), ce qui donne[27]):

$$\boxed{G = \frac{k_2 M_t x_Q}{12 J} \sqrt{\frac{e(n-1)+\Delta}{2\Delta\left(n + \frac{\Delta}{2e}\right)}}.} \tag{28}$$

---

[26]) Voir p. ex. *H. Favre*, Cours de Mécanique, T. I, Leemann, Zurich, 1953, p. 342 et suiv.

[27]) Les tensions dues au moment M_t n'engendrent aucun effet optique résultant, seul le changement du chemin optique dû à la rotation de l'éprouvette est mesuré.

Dans les applications, nous pouvons en général négliger les termes $\frac{\Delta}{2e}$ et Δ sous la racine carrée, et utiliser la formule approchée plus simple:

$$\underline{G = \frac{k_2}{12\,J}\sqrt{\frac{e\,(n-1)}{2\,n}}\,\frac{M_t\,x_Q}{\sqrt{\Delta}}}. \tag{28'}$$

La mesure de G est ainsi ramenée à celle des grandeurs n, e, h, x_Q, M_t et Δ, par des méthodes connues ou déjà décrites. Si l'on se contente de ne mesurer qu'une fois chacune des grandeurs nécessaires, on pourra déterminer G à 1% près environ. Si l'on veut obtenir une plus grande précision, on fera un certain nombre N de mesures pour différentes valeurs de M_t et de x_Q. Les formules qui, dans ce cas, nous donnent la valeur la plus probable de G, ainsi que l'erreur moyenne m_G et le poids p_G de cette valeur, sont[28]):

$$\underline{G = k\,\eta, \qquad m_G = \pm\sqrt{k^2 m_\eta^2 + \eta^2 m_k^2}, \qquad p_G = \frac{1}{m_G^2},} \tag{29}$$

où $$k = \frac{12\,k_2}{J}\sqrt{\frac{e\,(n-1)}{2\,n}}, \qquad \eta = \frac{[M_t^2\,x_Q^2]}{[\sqrt{\Delta}\,M_t\,x]},$$

$$m_k^2 = \left(\frac{12\,k_2}{J^2}\right)^2 \frac{e\,(n-1)}{2\,n}\,m_J^2, \qquad m_\eta^2 = \left\{\frac{[M_t^2\,x^2]\,[\Delta] - [M_t\,x_Q\sqrt{\Delta}]^2}{(N-1)\,[M_t^2\,x_Q^2]^2}\right\}\eta^4.$$

Remarque: Les erreurs systématiques provenant d'une position imparfaite de l'éprouvette par rapport au rayon lumineux s, d'une variation d'épaisseur du modèle ou encore du déplacement latéral du rayon (voir § 3), peuvent être éliminées facilement en faisant en chaque point deux mesures correspondant aux positions I et II de l'éprouvette (fig. 7). Ajoutons que le schéma expérimental utilisé sera décrit Ch. IV.

§ 5. Calcul des valeurs les plus probables de E, ν et G

Supposons avoir déterminé, pour une certaine matière, par les méthodes des paragraphes précédents, un système de valeurs pour ν/E, E et G, ainsi que les erreurs moyennes $m_{\nu/E}$, m_E, m_G et les poids $p_{\nu/E}$, p_E et p_G correspondants[29]). Ces valeurs étant affectées d'erreurs, ne vérifieront en général pas rigoureusement la relation:

$$\frac{\nu}{E} + \frac{1}{E} - \frac{1}{2\,G} = 0, \tag{30}$$

---

[28]) Voir la note [23]).

[29]) Voir formules (14), (21), (22) et (29).

tirée de la formule connue $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$. Nous poserons donc, en désignant par $(\nu/E)'$, E', G' les valeurs mesurées

$$\left(\frac{\nu}{E}\right)' + \frac{1}{E'} - \frac{1}{2G'} = w. \tag{31}$$

En utilisant la condition (30), la théorie des erreurs de *Gauss* nous permet de calculer des *valeurs améliorées* pour ν/E, E et G, ainsi que les erreurs moyennes et les poids correspondants. On obtient:

$$\begin{aligned}
\frac{\nu}{E} &= \left(\frac{\nu}{E}\right)' - \frac{\frac{1}{p_{(\nu/E)'}}}{\left[\frac{1}{p}\right]} w, & M_{\nu/E} &= \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{p_{(\nu/E)'}}\left(\frac{1}{p_{1/2G'}} + \frac{1}{p_{1/E'}}\right)}}{\left[\frac{1}{p}\right]} w, \\
E &= \frac{1}{\frac{1}{E'} - \frac{1/p_{1/E'}}{[1/p]} w}, & M_E &= \pm E^2 \frac{\sqrt{\frac{1}{p_{1/E'}}\left(\frac{1}{p_{1/2G'}} + \frac{1}{p_{(\nu/E)'}}\right)}}{\left[\frac{1}{p}\right]} w, \\
G &= \frac{1}{2\left(\frac{1}{2G'} + \frac{1/p_{1/2G'}}{[1/p]}\right) w}, & M_G &= \pm 2G^2 \frac{\sqrt{\frac{1}{p_{1/2G'}}\left(\frac{1}{p_{(\nu/E)'}} + \frac{1}{p_{1/E'}}\right)}}{\left[\frac{1}{p}\right]} w,
\end{aligned} \tag{32}$$

où $\frac{1}{p_{(\nu/E)'}} = m^2_{(\nu/E)'}$, $\frac{1}{p_{1/E'}} = \frac{m^2_{E'}}{E^4}$, $\frac{1}{p_{1/2G'}} = \frac{m^2_{G'}}{4G^4}$.

Enfin, connaissant le rapport $\nu/E = \chi$ et le module E, on aura finalement la valeur du coefficient de Poisson et son erreur moyenne:

$$\underline{\nu = \chi E, \qquad M_\nu = \pm\sqrt{E^2 M_\chi^2 + \chi^2 M_E^2}}. \tag{33}$$

Passons maintenant aux applications.

CHAPITRE IV

Etude des variations de E, ν et G dans une plaque d'allite CR 39, en fonction de la position du domaine considéré

§ 1. Introduction

L'allite CR 39 est une résine artificielle, livrée en plaques plan-parallèles soigneusement polies, par l'*Homalite Corporation;* cette matière se prête donc aux mesures interférométriques. Malheureusement, elle présente une tendance à l'hystérésis. Nous avons donc déterminé les constantes E, ν, G en effectuant

les mesures à une époque précise t (choisie égale à 10 sec) après la mise en charge; pour une certaine éprouvette, nous avons aussi étudié la variation de ces constantes en fonction de t. Dans la suite, cet intervalle de temps sera souvent appelé «temps de charge».

Les propriétés mécaniques et optiques de l'allite ont déjà fait l'objet de diverses publications[30]).

Dans la figure 8 nous avons représenté la plaque d'allite examinée et la position des éprouvettes choisies pour la mesure de E, ν et G.

§ 2. *Mesure du rapport ν/E*

La méthode pour la mesure de ν/E a été exposée dans le Chapitre II.

a) Description des éprouvettes

Dans une plaque d'allite d'environ 6 mm d'épaisseur, nous avons découpé quatre petites éprouvettes prismatiques, de 35 mm de longueur, numérotées de 1 à 4 (fig. 8a et 8c). Les dimensions exactes de la section droite S contenant

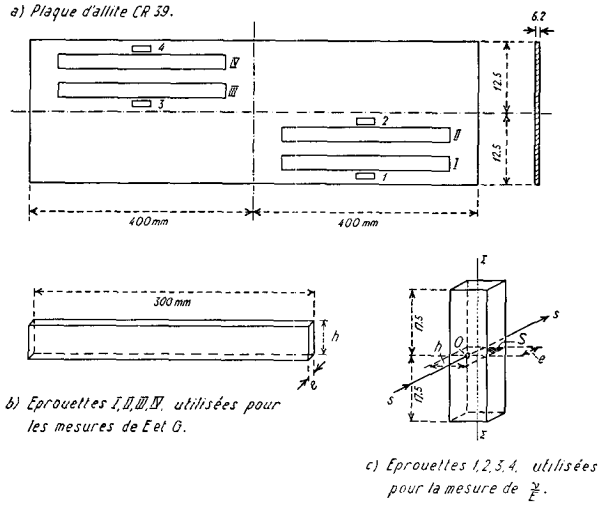


Fig. 8. Eprouvettes prélevées dans une plaque d'allite CR 39.

---

30) Citons principalement: *D. J. Coolidge.* An investigation of the mechanical and stress-optical properties of Columbia resin CR 39. Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis, Vol. VI, No 1, 1948, p. 74 et suiv.

C. Mylonas. Investigations in Photoelasticity. Thesis for the degree of doctor of philosophy (Engineering) submitted to the University of London, Part III, 1949.

Homalite CR 39 I: Bulletin 51, August 1, 1956.

le rayon lumineux utilisé, sont indiquées pour chacune des éprouvettes dans le tableau I. Les longueurs e et h ont été mesurées en utilisant un comparateur de précision. Les erreurs moyennes absolues de ces deux grandeurs, étant inférieures à $1\,^0/_{00}$, peuvent être négligées.

b) Etats de charge, mesure de ν/E

Pour la détermination des constantes a, b et c (voir Ch. II), nous avons soumis les éprouvettes, placées dans l'air, à des compressions uniformes. Les grandeurs δ_1, δ_2 et δ_3 ont été mesurées pour huit valeurs de σ_1, réparties entre $-0{,}22$ kg/mm² et $-0{,}53$ kg/mm². Les formules (10) et (11) ont été ensuite appliquées[31]). Les formules (11), qui donnent les erreurs moyennes m_a, m_b et m_c, supposent tacitement que l'erreur du produit $\sigma_1 e$ soit négligeable par rapport aux erreurs des grandeurs δ_1, δ_2, δ_3. Or nous avons déjà remarqué que m_e et m_h étaient négligeables; quant à la force de compression P, le cadre dynamomètre utilisé nous a donné cette grandeur à quelques dix-millièmes près, de sorte que l'erreur du produit $\sigma_1 e$ est bien négligeable.

Pour les mesures de δ_1', δ_2' et δ_3', on a adopté le dispositif indiqué dans la figure 9. Comme liquide bien transparent et ne détériorant pas les faces des éprouvettes, nous avons pris de l'huile *Silicone DC 7*[32]). Son indice de réfraction n', pour la lumière verte émise par l'arc du mercure ($\lambda = 0{,}5461\,\mu$) et pour la température de 20° C, a été mesuré à quelques dix-millièmes près en utilisant un *réfractomètre d'Abbe*[33]). On a obtenu $n' = 1{,}4377 \pm 0{,}0003$. Dans le calcul de l'erreur moyenne de ν/E, nous avons donc pu négliger le terme $m_{n'}$ sous le radical (voir Ch. II, form. 14). Ajoutons qu'entre 18° et 21° C, la dérivée de l'indice n' par rapport à la température T, a été trouvée égale à $-0{,}0003$; l'effet d'une variation de température sur les mesures était donc très faible.

Remarquons que, pendant la mise en charge de l'éprouvette, il était nécessaire que la cuve contenant le liquide, ainsi que l'éprouvette elle-même, restent absolument immobiles, le moindre déplacement de ces objets pouvant engendrer des erreurs du même ordre de grandeur que les valeurs mesurées.

Nous avons ainsi obtenu a', b', c' et $m_{a'}$, $m_{b'}$ et $m_{c'}$ à l'aide de formules analogues aux systèmes (10) et (11). Dans le tableau I, nous donnons les va-

---

[31]) L'interféromètre à l'aide duquel les variations absolues de marche δ_1, δ_2 ont été mesurées est l'appareil de *Mach-Zehnder*, du Laboratoire de Photoélasticité de l'E. P. F., utilisant la raie verte de l'arc de mercure ($\lambda = 0{,}5461\,\mu$). La variation relative de marche δ_3 a été mesurée à l'aide d'un compensateur de *Bravais*. Pour la description de ces deux appareils, voir par ex. la seconde des deux publications de *H. Favre* citée dans la note (18). Les valeurs moyennes des constantes a, b et c des quatre éprouvettes ont été les suivantes: $a = 1{,}711\,\lambda$ mm/kg, $b = 2{,}262\,\lambda$ mm/kg et $c = -0{,}551\,\lambda$ mm/kg.

[32]) Livré par la maison *T. Christ*, à Bâle.

[33]) Construit par la maison *Carl Zeiss* à Oberkochen.

Tableau I. Valeurs mesurées de ν/E pour l'allite $CR\,39$ ($t = 10$ sec)

Eprouvette No	Dimensions		ν/E mm²/kg	$m_{\nu/E}$
	e_{mm}	h_{mm}		
1	6,310	9,800	$1{,}602 \cdot 10^{-3}$	$\pm 0{,}005 \cdot 10^{-3}$
2	6,330	10,270	$1{,}605 \cdot 10^{-3}$	$\pm 0{,}002 \cdot 10^{-3}$
3	6,090	10,010	$1{,}600 \cdot 10^{-3}$	$\pm 0{,}002 \cdot 10^{-3}$
4	6,130	9,990	$1{,}618 \cdot 10^{-3}$	$\pm 0{,}005 \cdot 10^{-3}$

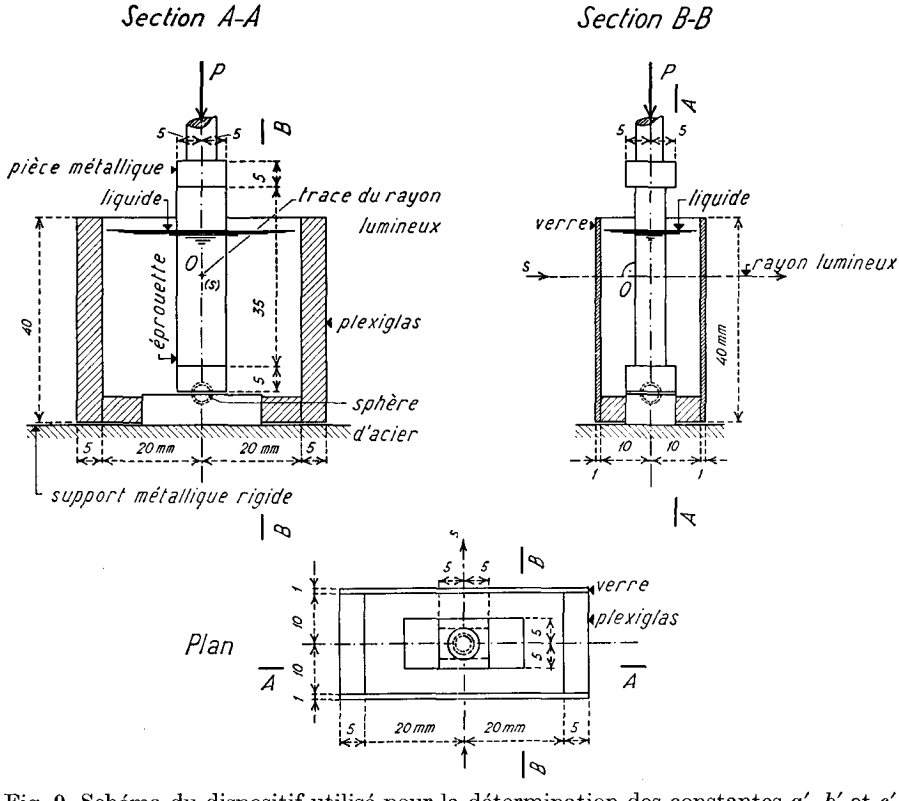


Fig. 9. Schéma du dispositif utilisé pour la détermination des constantes a', b' et c'.

leurs du rapport ν/E et celles des erreurs moyenne $m_{\nu/E}$, pour les quatre éprouvettes examinées et pour un temps de charge t de 10 secondes. Ce tableau montre que le rapport ν/E a été obtenu en moyenne à 2,5 ‰ près. Il montre aussi que les variations de ν/E d'un point à une autre d'une même plaque est de l'ordre de 0,5%[34]).

[34]) La valeur du rapport ν/E varie sensiblement d'une plaque d'allite à une autre; cette variation semble surtout due à celle du module E.

§ 3. *Mesure du module d'élasticité E*

La méthode purement optique pour la mesure de E a été exposée dans le chapitre III.

a) Description des éprouvettes

La position des quatre éprouvettes I, II, III, IV utilisées, découpées dans la plaque d'allite CR 39, est précisée dans la figure 8a. Ces éprouvettes avaient toutes la même longueur $l = 300$ mm. Dans le tableau II, nous donnons les dimensions exactes des sections droites (fig. 8b).

Tableau II. Valeurs mesurées de E et G pour l'allite *CR 39* ($t = 10$ sec)

Eprouvette No	Dimensions		$J = \frac{h e^3}{12}$ mm^4	E kg/mm^2	G kg/mm^2
	e_{mm}	h_{mm}			
I	6,306	25,109	$524{,}7 \pm 0{,}3$	$248{,}0 \pm 2{,}5$	$89{,}2 \pm 0{,}5$
II	6,321	25,013	$526{,}4 \pm 0{,}7$	$247{,}6 \pm 2{,}5$	$88{,}8 \pm 0{,}5$
III	6,071	26,889	$501{,}4 \pm 0{,}5$	$251{,}5 \pm 2{,}5$	$89{,}1 \pm 0{,}5$
IV	6,118	26,050	$497{,}1 \pm 0{,}3$	$250{,}3 \pm 2{,}5$	$88{,}6 \pm 0{,}5$

b) Mesure de l'indice de réfraction n

La mesure, pour $\lambda = 0{,}5461\,\mu$, de l'indice de réfraction n de l'allite, qui intervient dans la formule (20′), a été effectuée de deux façons différentes, afin de pouvoir aussi vérifier expérimentalement la formule (23):

$$\Delta = C\alpha^2 \quad \text{où} \quad C = \frac{e(n-1)}{2n}.$$

Nous avons tout d'abord fixé sur la partie supérieure mobile d'un théodolite *Wild DKM 2*, une des éprouvettes prismatiques 1 à 4 utilisées précédemment (fig. 8c), de façon que son axe Σ coïncide, à quelques dixièmes de mm près, avec l'axe vertical de rotation du théodolite. Nous avons ensuite placé deux faces parallèles de l'éprouvette perpendiculairement à l'un des deux rayons lumineux (vibrant verticalement) de l'interféromètre, puis nous avons mesuré les variations absolues Δ du chemin optique, engendrées par les rotations α de l'éprouvette autour de son axe vertical. Les rotations elles-mêmes ont été évaluées très exactement à l'aide du cercle horizontal du théodolite.

Dans la figure 10, nous avons représenté la courbe moyenne $\Delta = C\alpha^2$, obtenue par la méthode des moindres carrés, en partant des valeurs mesurées. Les points représentant ces valeurs étant sensiblement sur la courbe, la formule (23) est donc vérifiée. Cette courbe correspond à la valeur $C = \frac{e(n-1)}{2n} = 1{,}022$ mm

du coefficient de α^2. En résolvant cette dernière équation par rapport à n, on obtient la valeur moyenne: $n = 1{,}505 \pm 0{,}003$ [34']

Nous avons ensuite obtenu une seconde valeur pour l'indice n, en faisant appel au réfractomètre d'*Abbe* et en utilisant la même éprouvette; voici le résultat: $n = 1{,}5020 \pm 0{,}0003$. La coïncidence entre les deux valeurs est bonne, pour le calcul de E nous avons pris $n = 1{,}5020$ ($T = 20°$ C).

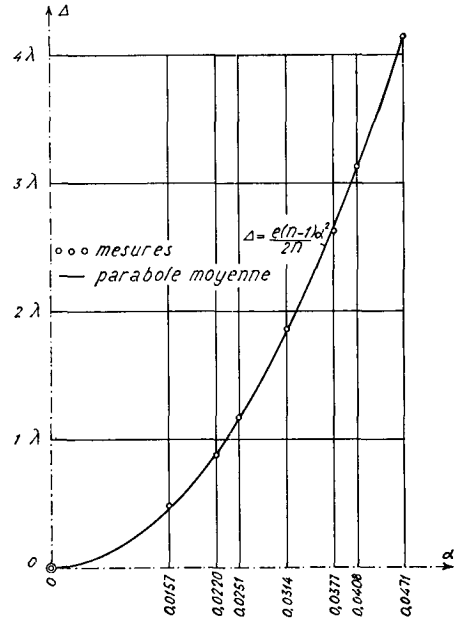


Fig. 10. Détermination de l'indice de réfraction n pour l'allite CR 39 (éprouvette No 3). Valeurs mesurées de Δ en fonction de α.

c) Etats de charge, mesure de E

Pour réaliser l'état de charge dont on a parlé au Chapitre III (fig. 3), nous avons successivement appliqué sur les éprouvettes I, II, III et IV, à la même distance (55 mm) des appuis, deux forces P égales, comme l'indique la figure 11a. L'appui A était fixe, l'éprouvette y reposait sur deux couteaux par l'intermédiaire d'une pièce métallique; en B était un appui à réaction normale (fig. 11b).

On a effectué les mesures en dix points, situés entre les sections A' et B' où étaient appliquées les deux forces P. Ces dix points étaient répartis symé-

[34']) Des mesures de n basées sur le même principe ont déjà été faites à l'aide d'un interféromètre de *Michelson* (voir par ex. *H. Bouasse*. Interférences. Delagrave, Paris, 1923, § 185, 1°).

triquement de part et d'autre de l'axe y passant par le milieu O. En choisissant $P = 1{,}254$ kg, le moment de flexion M dans la partie comprise entre A' et B' était égal à 68,97 kgmm.

Pour fixer la position de chaque point, nous avons percé dans un diaphragme de papier collé sur chaque modèle, des trous circulaires d'environ 0,8 mm de diamètre.

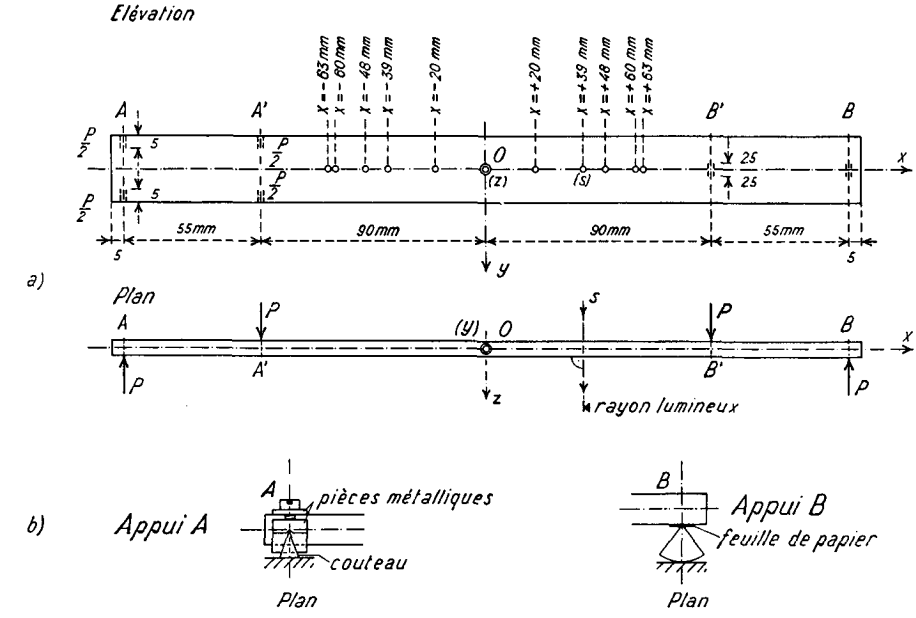


Fig. 11. Schéma du dispositif pour la mesure du module E.

Le parallélisme des faces des éprouvettes utilisées était très bon[35]), ce qui nous a permis de ne faire les mesures que dans une seule position (fig. 5) et de négliger ainsi l'erreur due à la variation de l'épaisseur (voir Chap. III, § 3).

La figure 12 représente un diagramme obtenu en prenant comme abscisses d'un système cartésien les distances x des sections et comme ordonnées les valeurs correspondantes de $\sqrt{\Delta}$; les points ainsi obtenus se trouvent bien sur une droite, ce qui confirme la théorie[36]).

Dans le tableau II nous donnons les valeurs du module E, déduites des mesures en utilisant la formule (21), ainsi que l'erreur moyenne (form. 22),

---

[35]) Cette propriété est facile à contrôler à l'aide de l'interféromètre.

[36]) En effet, entre les profils A' et B' de l'éprouvette, α varie linéairement (légère courbure constante) en fonction de x, mais d'autre part $\alpha \sim \sqrt{\Delta}$, donc $\sqrt{\Delta} \sim x$.

qui est assez exactement de 1%[37]). Ces valeurs correspondent à un temps de charge de dix secondes. Enfin, dans la figure 13, nous avons représenté graphiquement la variation du module E en fonction du temps de charge t pour l'éprouvette No IV.

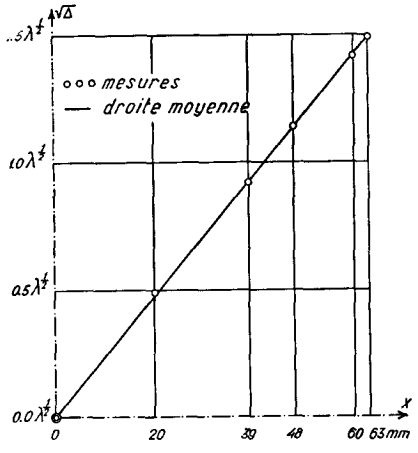


Fig. 12. Détermination du module E pour l'allite CR 39 (éprouvette No III). Valeurs mesurées de $\sqrt{\Delta}$ en fonction de x.

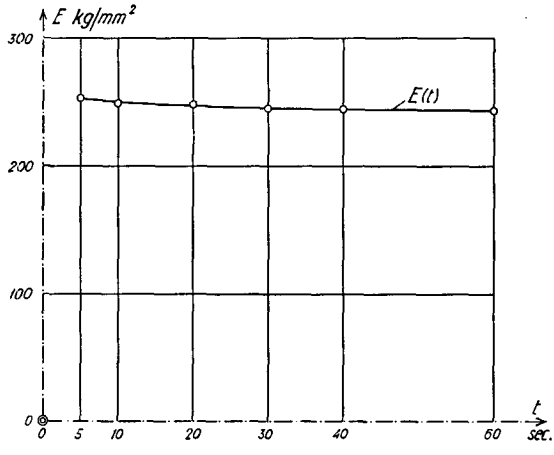


Fig. 13. Valeurs mesurées de E en fonction du temps de charge t pour l'allite CR 39 (éprouvette No IV).

Remarque

Dans le Chapitre III, nous avons indiqué une méthode permettant d'éliminer un certain nombre d'erreurs systématiques (§ 3). Nous allons revenir sur ce point, en indiquant une autre source d'erreurs qui s'est révélée dans le cas du système particulier d'appuis utilisé. Quand l'éprouvette fléchit sous l'action du moment M, l'extrémité en A reste fixe tandis que l'éxtrémité B subit un petit déplacement vers A (fig. 11). Dans la figure 14a, nous avons représenté, en exagérant les déformations, l'axe de l'éprouvette avant et après la flexion. Le point B se déplace en $\bar{B}$; posons $\overline{B\bar{B}} = u_B$. La courbe qui représente les déplacements u, parallèles à l'axe x, des différents points du modèle, peut être assimilée en première approximation à une courbe du troisième degré qui passe par A (où $u_A = 0$, fig. 14b), comme on le verrait facilement. Cette courbe a un point d'inflection pour $x = 0$. On comprend dès lors que si l'épaisseur de la pièce n'est pas rigoureusement constante, les déplacements u engendreront des erreurs dans les mesures, erreurs que nous allons chercher à éliminer.

Nous distinguerons deux cas:

[37]) Nous n'avons pas pu obtenir une plus grande précision, à cause du fluage de l'allite.

1. *L'épaisseur de l'éprouvette varie linéairement en fonction de x*[38]). Le déplacement u_B en fonction de la flèche f en 0 est donné par la formule approchée: $u_B \cong -\frac{4}{3}\frac{f^2}{l}$[39]), où l désigne la portée[40]). En 0, nous aurons donc $u_0 \cong -\frac{2}{3}\frac{f^2}{l}$.

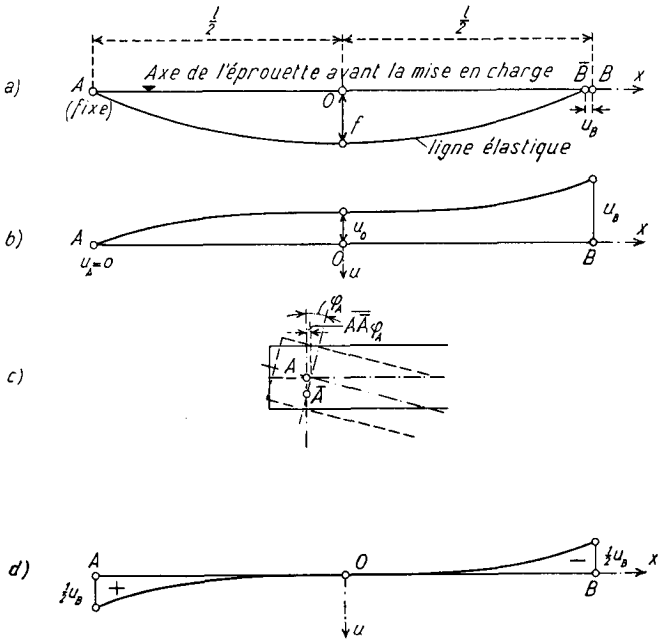


Fig. 14.

Cherchons maintenant à neutraliser u_0 en lui superposant un déplacement $u_0' = -u_0$, qui peut-être facilement réalisé en déplaçant de A en $\bar{A}$ l'axe de rotation du profil de l'éprouvette situé sur l'appui (fig. 14c). Si nous choisissons $\overline{A\bar{A}} = f/6$ et remarquons que $\varphi_A \cong 4\frac{f}{l}$, nous aurons bien

$$u_0' \cong \overline{A\bar{A}}\,\varphi_A \cong \frac{2}{3}\frac{f^2}{l} \cong -u_0.$$

Nous pouvons réaliser facilement cette dernière condition au moyen d'une simple pièce métallique. Le diagramme $u(x)$ est alors symétrique par rapport au point 0 (fig. 14d). La moyenne arithmétique des mesures en deux points

---

38) C'est le cas par exemple de l'allite et du plexiglas.

39) Le signe – indique qu'il s'agit d'un déplacement dans le sens des x négatifs.

40) Cette formule suppose que le moment de flexion ait une valeur constante tout le long de la pièce, alors que la surface M est en réalité un trapèze.

équidistants de 0, ne sera donc pas affectée de l'erreur due à une variation linéaire de l'épaisseur de l'éprouvette.

2. *L'épaisseur du modèle ne varie pas linéairement en fonction de x.* Dans ce cas il est indiqué de faire les opérations suivantes:

a) détermination, au voisinage des points de mesure, de la variation de l'épaisseur en fonction de x, en examinant à l'aide de l'interféromètre l'éprouvette déchargée;
b) mesure de la flèche f en 0 et calcul des déplacements u en chaque point de mesure;
c) calcul des variations Δu du chemin optique, dues aux déplacements u;
d) correction des mesures en tenant compte des variations Δu.

§ 4. *Mesure du module de cisaillement G*

Pour la détermination de G par la méthode purement optique indiquée Ch. III, § 4, nous avons employé les mêmes éprouvettes déjà utilisées pour la mesure du module E (fig. 8a et 8b).

Dans la figure 15, nous donnons le schéma du dispositif adopté pour la réalisation de l'état de torsion pure utilisé pour la mesure de G. L'encastrement total de l'éprouvette en 0 a été obtenu en serrant cette dernière au moyen de deux boulons entre deux pièces métalliques rigides et planes; les mesures ont confirmé que l'encastrement était parfait (fig. 16).

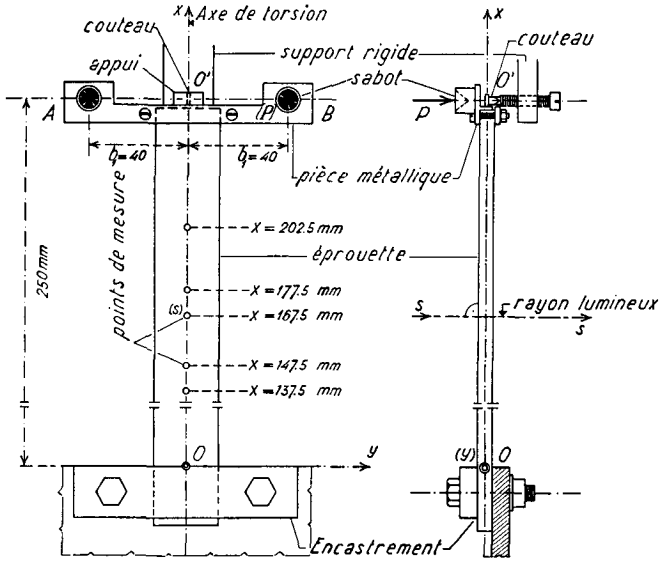


Fig. 15. Dispositif pour la réalisation de l'état de pure torsion.

L'application du moment de torsion $M_t = P \cdot b_1$ a été obtenu au moyen d'une pièce métallique sur laquelle étaient attachés deux sabots A et B, qui permettaient de réaliser les deux états de torsion symétriques nécessaires, indiqués dans la figure 7. La force P était appliquée tantôt en A, tantôt en B. En réduisant P en $0'$, on obtient un couple de torsion et une force de cisaillement, égale à P, qui fléchirait l'éprouvette si l'extrémité libre de cette dernière ne reposait pas sur un couteau, par l'intermediaire d'une pièce métallique présentant une rainure.

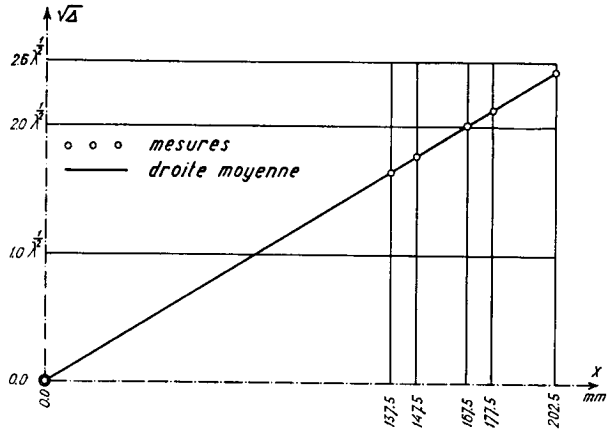


Fig. 16. Détermination du module G pour l'allite CR 39 (éprouvette No II). Valeurs mesurées de $\sqrt{\Delta}$ en fonction de x.

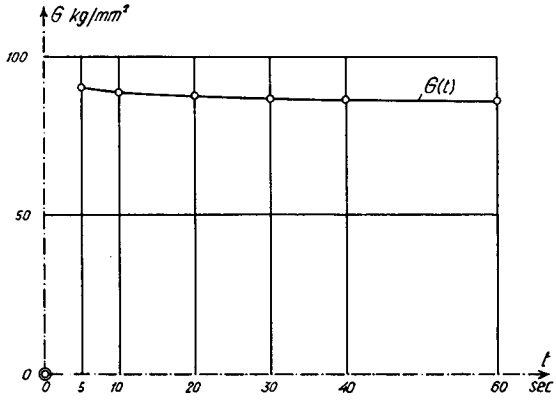


Fig. 17. Valeurs mesurées de G en fonction du temps de charge t pour l'allite CR 39 (éprouvette No IV).

Toutes les éprouvettes ont été soumises à un moment de torsion $M_t = 99{,}76$ kg mm. Les mesures ont été faites dix secondes après l'application de M_t. Dans la figure 16, nous donnons pour l'éprouvette No II les valeurs mesurées de

$\sqrt{\Delta}$ en fonction de x. Les points obtenus se trouvent bien sur une droite passant par l'origine des axes, ce qui confirme la théorie, car l'angle de torsion est proportionnel à la distance x séparant la section considérée de l'extrémité encastrée. Les valeurs du module de cisaillement G, déduites des mesures à l'aide de la formule (29), sont données dans le tableau II. L'erreur moyenne relative est d'environ 6 ‰ [41]). Enfin, la figure 17 montre la variation de G en fonction du temps de charge t, pour des valeurs de t comprises entre 0 et 60 secondes.

§ 5. Calcul des valeurs les plus probables de E, ν et G

En appliquant les formules (32) et (33) du chapitre III, nous avons obtenu les valeurs relatives aux domaines (I, 1), (II, 2), (III, 3), (IV, 4) de la plaque étudiée (pour simplifier, nous les désignerons respectivement par les indices 1, 2, 3, 4). Ces valeurs sont données dans le tableau III.

Tableau III. Valeurs améliorées de E, ν et G pour l'allite CR 39 ($t = 10$ sec)

$E_1 = 248{,}9 \pm 0{,}9$ kg/mm²	$\nu_1 = 0{,}3985 \pm 0{,}0015$	$G_1 = 89{,}0 \pm 0{,}2$ kg/mm²
$E_2 = 248{,}0 \pm 0{,}4$ kg/mm²	$\nu_2 = 0{,}3980 \pm 0{,}0007$	$G_2 = 88{,}7 \pm 0{,}1$ kg/mm²
$E_3 = 250{,}4 \pm 1{,}2$ kg/mm²	$\nu_3 = 0{,}4005 \pm 0{,}0019$	$G_3 = 89{,}4 \pm 0{,}3$ kg/mm²
$E_4 = 249{,}5 \pm 0{,}9$ kg/mm²	$\nu_4 = 0{,}4033 \pm 0{,}0016$	$G_4 = 88{,}9 \pm 0{,}2$ kg/mm²

Ces valeurs diffèrent assez peu les unes des autres, ce qui prouve l'homogénéité de la plaque d'allite examinée. En prenant les moyennes arithmétiques des valeurs obtenues, on obtient pour les valeurs moyennes des constantes

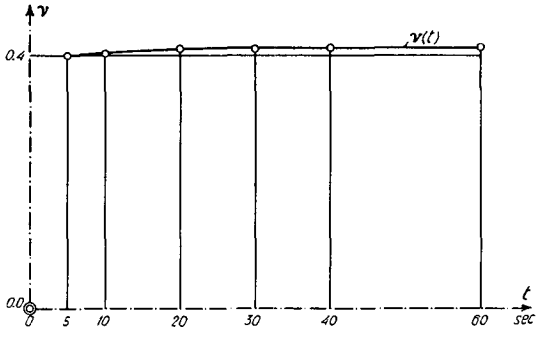


Fig. 18. Valeurs mesurées de ν en fonction du temps de charge t pour l'allite CR 39 (éprouvettes No 4 et IV).

[41]) Cette erreur moyenne tient compte de l'erreur due au fluage de l'éprouvette pendant la période de charge.

élastiques de la plaque d'allite CR 39 étudiée, ou plus exactement des domaines où ont été prélevées les éprouvettes (temps de charge de 10 secondes):

$$\boxed{\begin{aligned} E &= 248{,}5 \pm 0{,}4 \text{ kg/mm}^2, \\ \nu &= 0{,}399 \pm 0{,}001, \\ G &= 88{,}8 \pm 0{,}1 \text{ kg/mm}^2. \end{aligned}}$$

Dans un dernier diagramme, nous avons représenté la variation de ν en fonction du temps de charge t (fig. 18); on remarque qu'à partir de $t = 20''$, ν reste pratiquement constant.

CHAPITRE V

Etude des variations de E, ν et G dans une plaque d'araldite B, en fonction de la position du domaine considéré

§ 1. *Fabrication des éprouvettes*

L'*araldite B* est une résine artificielle, appartenant au groupe des Aethoxylinharze. Elle nous a été livrée par la maison *Ciba S.A.* à Bâle[42]).

Grâce à ses remarquables qualités: façonnage aisé, haute sensibilité optique, faible hystérésis, possibilité de réduire la biréfringence initiale en chauffant la matière, enfin bonne transparence, elle est souvent employée en photoélasticité. Ses qualités élastiques et optiques ont déjà fait l'objet de diverses publications[43]).

Au point de vue de nos essais, l'araldite *B* présente l'inconvénient qu'il est assez difficile d'obtenir avec cette matière des éprouvettes à faces parallèles bien planes et surtout transparentes, conditions essentielles pour les mesures interférométriques. L'aspect légèrement opaque des surfaces est dû au fait qu'en cours de fabrication, de l'huile de Silicone doit être utilisée pour pouvoir détacher l'araldite des moules dans lesquels elle a été coulée.

Pour remplir les deux conditions en question, on peut faire polir les faces des éprouvettes par une maison spécialisée ou chercher à utiliser soi-même un

---

[42]) Nous tenons à remercier ici cette maison d'avoir bien voulu nous livrer gratuitement l'araldite B pour nos essais.

[43]) Citons: *J. D'Agostino, D. C. Drucker, C. K. Lin* and *C. Mylonas.* Epoxy adhesives and casting resins as photoelastic plastics. Proceedings of the Society for Experimental Stress Analysis, Vol. XII, No 2, 1955.

M. M. Leven and *R. C. Sampson.* Large Epoxy resin casting for three-dimensional photoelastic tests. Westinghouse Research Laboratories, Report 60-94459-2-R 3, 1956.

procédé adéquat. La première solution s'étant révélée assez coûteuse, nous avons choisi la seconde.

Le principe de la méthode que nous avons utilisée consiste à couler l'araldite *B* sur une surface de mercure. Nous avons placé ce dernier dans une cuve circulaire de verre de 23 cm de diamètre et de 8 cm de hauteur (fig. 19); l'épaisseur de la couche de mercure était d'environ 4 mm. Un anneau de carton

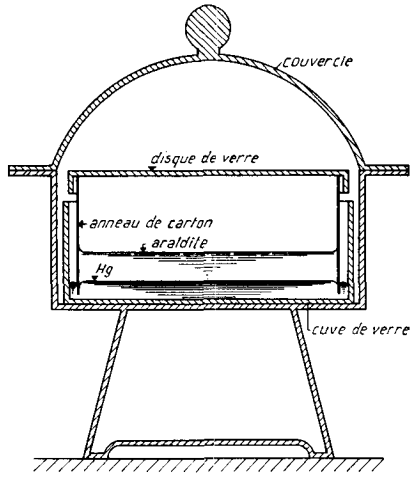


Fig. 19. Coupe méridienne du dispositif employé pour couler l'araldite B sur le mercure.

mince de 22 cm de diamètre, chargé par un disque de verre qui l'enfonçait dans le liquide, empêchait le contact de l'araldite avec les parois de verre. Nous avons ensuite enfermé la cuve dans un récipient de verre, afin d'éviter le dégagement des vapeurs de mercure, assez dangereuses. Le tout a été placé dans un thermostat et chauffé à une température de 135° C.

En même temps, nous avons préparé l'araldite *B* suivant les indications de la *S. A. Ciba.* Résine et «Durcisseur 901» fondus ont été mélangés soigneusement pendant dix minutes à la température de 130° C, afin d'obtenir un liquide bien homogène. A ce moment, on a coulé l'araldite *B* sur le mercure. Après environ 20 heures, on a laissé l'araldite se refroidir jusqu'à la température normale de 20° C. Les deux faces de la plaque circulaire obtenue, celle en contact avec le mercure et celle en contact avec l'atmosphère, étaient bien transparentes et la plaque était suffisamment plan parallèle. En outre, comme tout retrait de la matière pendant la période de durcissement était possible symétriquement par rapport au centre de la plaque et pouvait se faire librement, cette dernière ne présentait que de faibles tensions latentes, qu'on a pu ultérieurement réduire en chauffant à nouveau la plaque à la température de 140° C.

Dans la figure 20a nous représentons la plaque ainsi obtenue, en indiquant la position des éprouvettes découpées pour l'étude de la variation de E, ν et G.

§ 2. *Mesure du coefficient ν/E*

a) Description des éprouvettes

Pour la mesure de ν/E, nous avons utilisé les 4 petites éprouvettes prismatiques: *1*, *1'*, *2* et *2'* indiquées dans la figure 20a.

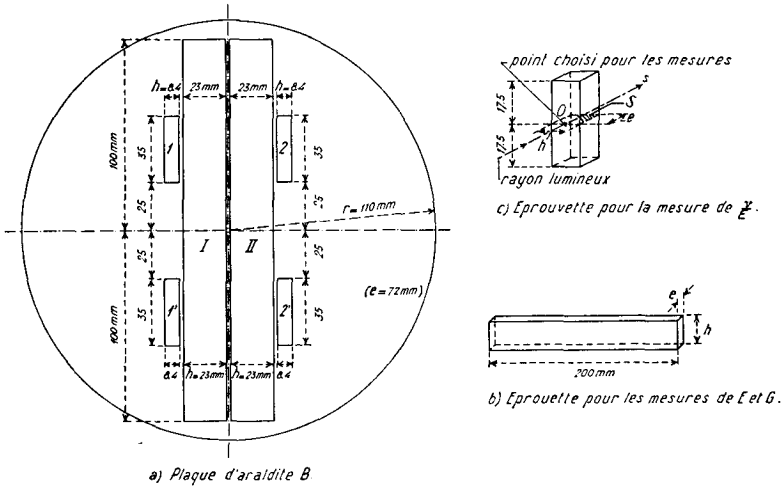


Fig. 20. Eprouvettes prélevées dans une plaque d'araldite B.

Les dimensions exactes de ces éprouvettes relatives à la section S contenant le rayon lumineux utilisé pour les mesures, sont indiquées dans le tableau IV (fig. 20c).

Tableau IV. Valeurs mesurées de E pour l'araldite B

Eprouvette No	Dimensions		ν/E mm²/kg	$m_{\nu/E}$
	e_{mm}	h_{mm}		
1	7,240	8,430	$1{,}204 \cdot 10^{-3}$	$\pm 0{,}002 \cdot 10^{-3}$
1'	7,260	8,430	$1{,}184 \cdot 10^{-3}$	$\pm 0{,}002 \cdot 10^{-3}$
2	7,270	8,430	$1{,}208 \cdot 10^{-3}$	$\pm 0{,}002 \cdot 10^{-3}$
2'	7,270	8,450	$1{,}212 \cdot 10^{-3}$	$\pm 0{,}002 \cdot 10^{-3}$

b) Etats de charge, mesure de ν/E

Nous avons commencé par déterminer les constantes optiques a, b et c. Les éprouvettes ont été successivement soumises à 8 compressions axiales, correspondant à des valeurs de σ_1, réparties entre $-0{,}14$ kg/mm² et $-0{,}56$ kg/mm²[44]).

Le dispositif représenté figure 9 a été employé pour la mesure de δ_1', δ_2' et δ_3'. Le liquide utilisé était l'huile *Silicone G. E. SF 96/40*, son indice de réfraction correspondant à la lumière verte de l'arc de mercure ($\lambda = 0{,}5461\,\mu$) et pour une température de 20° C, a été mesuré avec le réfractomètre d'*Abbe*. Il a été trouvé égal à: $n' = 1{,}4061 \pm 0{,}0003$.

Les valeurs de ν/E obtenues, ainsi que leurs erreurs moyennes (form. 14), sont indiquées dans le tableau IV. On voit que le rapport ν/E a été déterminé à moins de 2 ‰ près.

§ 3. *Mesure du module d'élasticité E*

a) Description des éprouvettes

Pour la détermination de E, on a découpé au milieu de la plaque circulaire deux éprouvettes prismatiques d'environ 20 cm de longueur (fig. 20a et b). Leurs dimensions moyennes e et h, ainsi que les valeurs moyennes du moment d'inertie $J = \frac{e^3 h}{12}$, figurent dans le tableau V.

Tableau V. Valeurs mesurées de E et G pour l'araldite B

Eprouvette No	Dimensions		$J = \frac{h e^3}{12}$	E kg/mm²	G kg/mm²
	e_{mm}	h_{mm}			
I	7,256	23,151	737 ± 1	$324{,}5 \pm 2{,}6$	$117{,}2 \pm 0{,}4$
II	7,264	23,137	739 ± 1	$323{,}1 \pm 2{,}6$	$115{,}9 \pm 0{,}4$

b) Etats de charge, mesure de E

On a procédé de la même façon que pour l'allite. Le dispositif de charge a déjà été décrit dans le chapitre IV (§ 3). Nous avons fait les mesures en dix points situés symétriquement de part et d'autre du centre de l'éprouvette. Le moment de flexion avait, entre les deux forces P appliquées, la valeur constante $M = 155{,}64$ kg mm.

---

[44]) Les valeurs moyennes des constantes a, b, c pour les 4 éprouvettes ont été les suivantes: $a = 1{,}347\ \lambda$ mm/kg, $b = 2{,}342\ \lambda$ mm/kg, $c = -0{,}995\ \lambda$ mm/kg.

L'indice de réfraction n de l'araldite B correspondant à la lumière verte de l'arc de mercure ($\lambda = 0{,}5461\,\mu$) et pour une température de 20° C est: $n = 1{,}5980 \pm 0{,}0003$.

Les valeurs de E (form. 21), ainsi que les erreurs moyennes (form. 22), sont indiquées dans le tableau V, l'erreur moyenne relative est d'environ $8\,^0/_{00}$.

§ 4. *Mesure du module de cisaillement G*

Les mêmes éprouvettes utilisées pour déterminer E ont été soumises à la torsion pure, afin de mesurer le module de cisaillement G. Le dispositif de charge est celui de la fig. 15. Le moment de torsion appliqué aux extrémités des éprouvettes était égal à 99,76 kg mm.

Dans le tableau V, nous donnons les valeurs trouvées pour G (voir form. 28′). L'erreur moyenne relative m_G/G est environ de $3{,}5\,^0/_{00}$.

§ 5. *Calcul des valeurs les plus probables de E, ν et G*

L'application des formules (32) et (33) du chapitre III nous a donné les valeurs indiquées dans le tableau VI, où l'on a désigné par l'indice 1 le domaine 1, 1′, I, et par l'indice 2, le domaine 2, 2′, II.

Tableau VI. Valeurs améliorées de E, ν et G pour l'araldite B

$E_1 = 324{,}7 \pm 0{,}4$ kg/mm²	$\nu_1 = 0{,}3877 \pm 0{,}0007$	$G_1 = 117{,}0 \pm 0{,}1$ kg/mm²
$E_2 = 322{,}9 \pm 0{,}4$ kg/mm²	$\nu_2 = 0{,}3907 \pm 0{,}0006$	$G_2 = 116{,}1 \pm 0{,}1$ kg/mm²

Ces résultats montrent que les constantes E, ν et G varient relativement peu d'un domaine à l'autre de la plaque. En prenant les moyennes arithmétiques, on obtient pour les valeurs moyennes des constantes E, ν et G de la plaque d'araldite B étudiée ou plus exactement, du domaine, voisin d'un diamètre, où ont été prélevées les éprouvettes:

$$\boxed{\begin{gathered} E = 323{,}8 \pm 0{,}3 \text{ kg/mm}^2, \quad \nu = 0{,}3892 \pm 0{,}0005, \\ G = 116{,}6 \pm 0{,}1 \text{ kg/mm}^2. \end{gathered}}$$

SECONDE PARTIE

Contribution à l'étude des plaques minces fléchies d'épaisseur brusquement variable

Introduction

Le Laboratoire de Photoélasticité de l'Ecole polytechnique fédérale a mis au point, il y a près de dix ans, une méthode purement optique permettant de déterminer les moments dans les plaques minces fléchies [1]).

Cette méthode, qui utilise des modèles de plaques formés de deux couches adhérentes de matières différentes, n'a été appliquée, jusqu'à présent, qu'à l'étude de plaques minces d'épaisseur constante. Ces applications et les différents perfectionnements apportés successivement à la technique utilisée ont fait l'objet de diverses publications [2]). Nous rappellerons plus loin le principe de la méthode en question. Pour une description détaillée des appareils qu'elle nécessite, nous renvoyons le lecteur aux publications citées et à d'autres communications du Laboratoire.

Le principal objet de ce travail est de mettre au point l'application de cette même méthode à l'étude des plaques circulaires, d'épaisseur brusquement variable. Dans un premier essai, nous avons d'abord examiné, à l'aide de la

---

[1]) *H. Favre* et *B. Gilg:* Sur une méthode purement optique pour la mesure directe des moments dans les plaques minces fléchies. Schweizerische Bauzeitung, 13 et 20 mai 1950.

[2]) *B. Gilg:* Experimentelle und theoretische Untersuchungen an dünnen Platten, Publication No. 5 du Laboratoire de Photoélasticité de l'Ecole polytechnique fédérale. Editions Leemann, Zurich, 1952.

H. Favre et *W. Schumann:* Etude expérimentale de la répartition des moments dans une plaque oblique fléchie en fonction de l'angle formé par les côtés. Bulletin de la Société française des mécaniciens, No 9, 1953.

H. Favre et *W. Schumann:* Quelques applications récentes de la méthode purement optique à l'étude des plaques fléchies: Bulletin technique de la Suisse Romande, No 20, 2 octobre 1954.

W. Schumann: Theoretische und experimentelle Untersuchungen über das de Saint-Venantsche Prinzip speziell mit Anwendungen auf die Plattentheorie. Publication No. 6 du Laboratoire de Photoélasticité de l'E.P.F. Editions Leemann, Zurich, 1955.

technique utilisée précédemment, une plaque circulaire d'épaisseur brusquement variable, chargée par une force P appliquée au centre et simplement appuyée le long du contour (fig. 15, p. 58). Nous avons alors constaté des différences de 10 à 20% entre les valeurs mesurées des moments, représentées par des croix dans la figure 16, p. 59, et celles données par la théorie classique de *Kirchhoff*, représentées par les courbes à trait continu de cette figure. La perturbation locale des tensions intérieures due à la discontinuité de l'épaisseur de la plaque ne pouvant expliquer seule cette anomalie, nous en avons cherché les causes ailleurs, ce qui nous a conduit à entreprendre successivement les trois études suivantes:

1. *Une étude théorique des plaques circulaires, où l'épaisseur subit une variation brusque entraînant une discontinuité du feuillet moyen et où la surcharge accuse une symétrie de révolution par rapport à l'axe.* Dans les calculs, nous avons tenu compte des forces N engendrées dans le feuillet moyen par cette discontinuité, forces qui entraînent une correction des valeurs des moments données par la théorie classique de *Kirchhoff*. Cette étude est décrite dans le *Chapitre I*. Elle fait éloquemment ressortir l'influence sur les valeurs des moments et des tensions d'une *discontinuité du feuillet moyen*, influence que les ingénieurs négligent habituellement.

2. *Une étude expérimentale*, qui a consisté tout d'abord à chercher à *adapter la méthode purement optique au cas étudié*, puis à *vérifier la théorie développée au chapitre I*. Ces derniers essais ont montré une bonne coïncidence entre les moments mesurés et les moments calculés (fig. 16). C'est donc, d'une part en modifiant la théorie classique, d'autre part en adaptant la méthode purement optique, que cette coïncidence a été obtenue. Dans le cas où la variation brusque de l'épaisseur n'entraîne pas une discontinuité du feuillet moyen, la théorie classique redevient applicable. Il en est de même de la méthode purement optique utilisée jusqu'à présent pour les plaques d'épaisseur constante. Nous le montrerons à l'aide d'un exemple.

Cette étude expérimentale fait l'objet du *Chapitre II*.

3. Pour compléter, nous avons mesuré par la méthode purement optique la répartition des moments dans une *plaque carrée, simplement appuyée le long de deux côtés opposés, au centre de laquelle est appliquée une force perpendiculaire aux faces*. L'épaisseur de la plaque en question subit une discontinuité n'entraînant pas de discontinuité du feuillet moyen. Les résultats de ces expériences, comparés à ceux relatifs à une plaque carrée d'épaisseur constante, étudiée précédemment, ont permis de *reconnaître l'influence sur la répartition des moments de la discontinuité de l'épaisseur*.

Cette dernière étude fait l'objet du *Chapitre III*.

CHAPITRE I

Etude théorique des plaques circulaires homogènes où l'épaisseur subit une variation brusque entraînant une discontinuité du feuillet moyen et où la surcharge accuse une symétrie de révolution par rapport à l'axe

§ 1. *Introduction*

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier la flexion de plaques circulaires minces, faites d'une matière homogène et isotrope, chargées perpendiculairement à leurs faces et présentant, le long d'une circonférence, une discontinuité de l'épaisseur entraînant une discontinuité du feuillet moyen[3]). Nous supposerons que les déformations soient petites et que les hypothèses placées à la base de la théorie de *Kirchhoff* soient valables[4]).

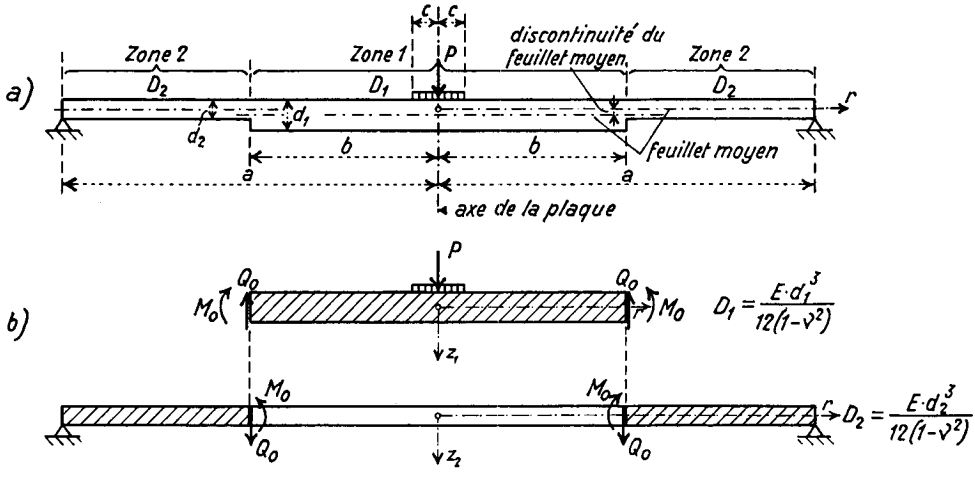


Fig. 1. Coupe axiale d'une plaque circulaire présentant une discontinuité de l'épaisseur entraînant une discontinuité du feuillet moyen.

Considérons, pour fixer les idées, la plaque circulaire dont la coupe axiale est représentée figure 1 a[5]). Cette plaque, qui est un corps de révolution, repose

---

[3]) Par «feuillet moyen» d'une plaque homogène, nous entendons la surface qui, avant la déformation, a ses points équidistants des deux faces de la plaque.

[4]) Voir p. ex. *H. Favre*, Cours de Mécanique, T. III, Leemann, Zurich, 1949, p. 103 et suiv.

[5]) La variation brusque de l'épaisseur est ici engendrée par une discontinuité de la face inférieure de la plaque; nous dirons plus loin ce que deviennent les formules dans le cas où la variation de l'épaisseur est engendrée par une discontinuité de la face supérieure.

le long du contour et supporte une force P appliquée au centre. Elle est formée de deux zones distinctes:

1ère zone: $0 \leqq r \leqq b$, d'épaisseur constante d_1 et chargée par la force P, que nous admettrons uniformément répartie dans un petit cercle de rayon c [6]).

2ème zone: $b \leqq r \leqq a$, d'épaisseur constante d_2.

Désignons respectivement par D_1 et D_2 les valeurs de la rigidité à la flexion correspondant aux domaines 1 et 2. Considérons ces deux domaines séparément (fig. 1b). Nous devons alors introduire, par unité de longueur, un couple de flexion M_0 constant, convenablement choisi (voir plus loin), et un effort tranchant constant $Q_0 = \frac{P}{2\pi b}$, appliqués le long de la circonférence $r = b$.

Chaque partie se déformera séparément sous l'action des forces P, Q_0 et du moment M_0. Si maintenant nous cherchons à reconstituer la plaque, nous constatons que les sections $r = b$ des deux parties ne coïncident pas (fig. 2) [7]).

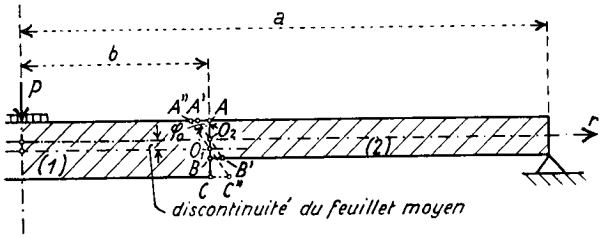


Fig. 2.

En voici la raison. Le segment de droite primitivement vertical AB, considéré comme appartenant à la zone 2, a tourné, par suite de la déformation, d'un petit angle φ_0 autour de 0_2 et s'est déplacé en $A'B'$; de même, le segment primitivement vertical AC, appartenant à la zone 1, a tourné du même angle φ_0 [8]) autour de 0_1 et s'est déplacé en $A''C''$; 0_1 ne coïncidant pas avec 0_2, $A'B'$ et $A''C''$ ne peuvent avoir le même support.

Ainsi, à cause de la discontinuité du feuillet moyen, les deux segments de droite AB et AC qui coïncidaient avant la déformation, sont maintenant séparés. En réalité ce phénomène ne peut pas se produire à cause de la con-

---

[6]) Les considérations qui suivent sont valables pour d'autres états de charge, comme nous le remarquerons aussi plus loin.

[7]) Pour la clarté de l'exposé nous avons exagéré les déformations.

[8]) Nous supposons donc que M_0 soit choisi de façon que $A'B'$ soit parallèle $A''C''$, conformément à la théorie classique de *Kirchhoff*.

tinuité de la matière; il faut donc *faire intervenir des forces intérieures nouvelles* que ne considère pas la théorie classique et qui rétabliront la continuité dans la section $r=b$ de la plaque.

§ 2. *Détermination des forces intérieures agissant dans la section $r=b$ de la plaque*

Considérons séparément les zones 1, 2 et désignons par η la distance des feuillets moyens des deux parties de la plaque (fig. 3a). Introduisons N comme une force intérieure inconnue, agissant à une hauteur $z_2=t$ au-dessous du feuillet moyen de la zone 2, dans la section $r=b$ (N est une traction et s'entend par unité de longueur de la circonférence de rayon $r=b$). Réduisons cette force intérieure aux points 0_1 et 0_2 des feuillets moyens des deux zones (fig. 3b); nous obtenons ainsi les moments,

$$\text{pour la zone 1: } \underline{M_{\mathrm{I}} = -N(\eta - t)}, \quad \text{pour la zone 2: } \underline{M_{\mathrm{II}} = Nt} \tag{1}$$

(les signes de ces moments correspondent à la convention habituelle des moments de flexion des plaques).

Pour pouvoir déterminer N et t, il faut connaître les déplacements des sections $r=b$ des deux parties de la plaque, dues aux forces P, N et aux moments M_{I} et M_{II}.

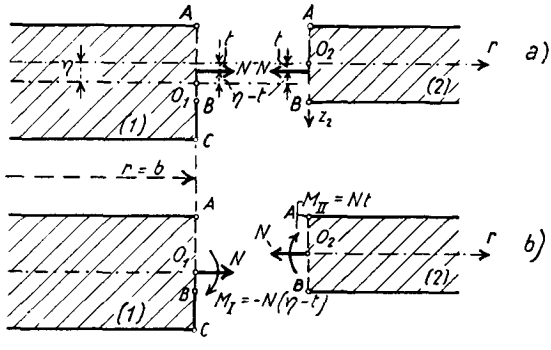


Fig. 3.

1. *Déformations dues a la force P* (calculées d'après la théorie classique)

Considérons d'abord séparément les parties 1 et 2 de la plaque et désignons comme précédemment par M_0, dans la section $r=b$, la valeur du moment M_r dû à la force P (fig. 4a). Si nous faisons coïncider avant la déformation le segment AB avec la droite AC, la discontinuité du feuillet moyen engendrera un éloignement partiel des deux zones l'une par rapport à l'autre, comme nous

l'avons déjà remarqué (fig. 4b). En particulier le point O_1 de AB (zone 2) s'éloignera de AC de

$$\overline{O_1 O_1'} = u_0 = \eta \varphi_0 \text{[9]}.$$

[Les déplacements u_0 seront comptés à partir du point O_1 (zone 1) positivement dans le sens des r croissants.]

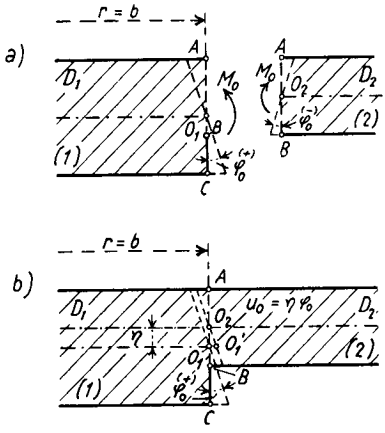


Fig. 4.

2. *Déformations dues aux moments M_{I} et M_{II}*

Désignons par $\varphi_{M_{\mathrm{I}}}$ l'angle de rotation, du profil AC de la zone 1, dû à M_{I} (fig. 5a) et par $\varphi_{M_{\mathrm{II}}}$ l'angle de rotation, du profil AB de la zone 2, dû à M_{II} (fig. 5b).

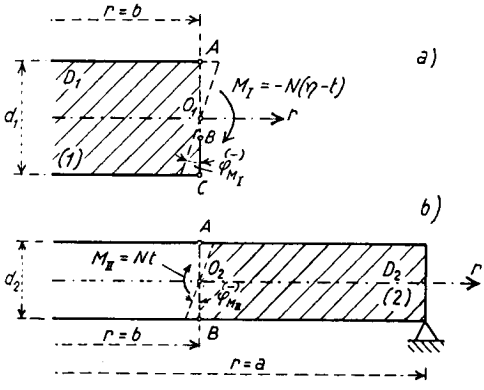


Fig. 5.

[9]) Tous les angles tels que φ_0 seront, dans la suite, comptés positivement dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre.

Les expressions de ces grandeurs sont les suivantes[10]):

$$\varphi_{M_{\mathrm{I}}} = \gamma M_{\mathrm{I}} = -\gamma(\eta - t)N, \qquad \varphi_{M_{\mathrm{II}}} = -\delta M_{\mathrm{II}} = -\delta N t, \tag{2}$$

où

$$\gamma = \frac{b}{D_1(1+\nu)}, \qquad \delta = \frac{a^2 b^2}{D_2(a^2-b^2)(1-\nu)}\left(\frac{1}{b} + \frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{b}{a^2}\right),$$
$$D_1 = \frac{E J_1}{1-\nu^2}, \qquad D_2 = \frac{E J_2}{1-\nu^2}. \tag{3}$$

3. Déformations dues aux forces axiales N

Dans la figure 6, nous avons indiqué les forces N agissant sur les zones 1 et 2 de la plaque. Cherchons les déplacements radiaux u des sections AB et AC. Nous compterons les u, à partie du point $0'$, positivement dans le sens des r croissants. Pour u_1 et u_2 nous avons les valeurs suivantes[11]):

$$u_1 = \alpha \frac{b}{E}\frac{N}{d_1}, \qquad u_2 = -\beta \frac{b}{E}\frac{N}{d_2},$$

où

$$\alpha = 1-\nu \quad \text{et} \quad \beta = \frac{b^2}{a^2-b^2}\left[1-\nu+\frac{a^2}{b^2}(1+\nu)\right]; \tag{4}$$

le déplacement relatif d'une section par rapport à l'autre sera donc:

$$\Delta u = u_2 - u_1 = -\frac{b}{E} N \left(\frac{\alpha}{d_1} + \frac{\beta}{d_2}\right). \tag{5}$$

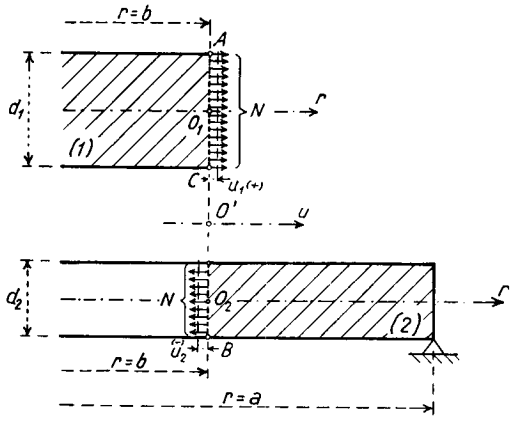


Fig. 6.

---

[10]) Voir p. ex. *S. Timoshenko:* Plates and Shells, McGraw-Hill Book Company, New-York and London, 1940, p. 63 et suiv.

[11]) Voir p. ex. *H. Favre:* Cours de Mécanique, Leemann, Zurich, 1949, T. III, p. 55 et suiv.

4. Calcul de t

Pour déterminer t, nous utilisons le fait que les profils AC et AB (fig. 5) doivent tourner d'un même angle sous l'action des moments de flexion M_{I} et M_{II}, d'où:

$$\varphi_{M_{\mathrm{I}}} = \varphi_{M_{\mathrm{II}}}, \tag{5'}$$

et en tenant compte des formules (2), on déduit de cette relation:

$$\boxed{t = \bar{k}\eta}, \quad \text{où} \quad \bar{k} = \frac{1}{\frac{\delta}{\gamma}+1} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{d_1 - d_2}{2}. \tag{6}$$

En remplaçant δ et γ par les expressions données plus haut, on trouve après simplifications:

$$\bar{k} = \frac{k(1-\nu)(\rho^2-1)}{(1+\nu)\rho^2 + (1-\nu)[1+k(\rho^2-1)]},$$

où $k = D_2/D_1$, $\rho = a/b$ et où ν désigne le coefficient de Poisson.

5. Calcul de N

En superposant les déformations dues à la force P (théorie classique) et celles dues aux moments M_{I} et M_{II} et aux forces N, on obtient la condition:

$$(\varphi_0 + \varphi_{M_{\mathrm{II}}})\,\eta + \Delta u = 0.$$

En résolvant cette équation par rapport à N, compte tenu de (2) et (5), nous obtenons finalement:

$$\boxed{N = \frac{\eta\,\varphi_0}{\frac{b}{E}\left(\frac{\alpha}{d_1} + \frac{\beta}{d_2}\right) + \delta\,\bar{k}\,\eta^2}.} \tag{7}$$

Les formules (6) et (7) nous permettent de calculer les inconnues t et N, donc M_{I} et M_{II}.

Remarque I. Nous avons supposé, pour fixer les idées, qu'une force P était appliquée au centre de la plaque. Il est clair que les relations établies — principalement les formules (6) et (7) — sont valables dans d'autres cas de charge, pourvu que les surcharges dépendent uniquement de r.

Remarque II. Si la discontinuité de l'épaisseur est engendrée par une discontinuité de la face supérieure de la plaque sur laquelle agit la force P (fig. 7) les quantités η et t changent de signe, la force N change également de signe et devient une compression, tandis que les moments M_{I} et M_{II} restent les mêmes. Donc, que la discontinuité de l'épaisseur provienne de la face supérieure ou de la face inférieure de la plaque, les moments de flexion ne changent pas; les deux cas en question se distinguent seulement par le fait que les ten-

sions dues à la force N ont les mêmes valeurs absolues mais sont de signes contraires.

Etudions maintenant quelques cas de charge particuliers.

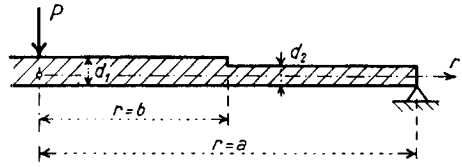


Fig. 7.

§ 3. *Applications*

1. *Plaque circulaire chargée au centre par une force P répartie sur une surface circulaire de rayon $r=c$ (fig. 1)*

Cherchons tout d'abord à déterminer M_0. Considérons le domaine $0 \leqq r \leqq b$ (fig. 1 b). Cette partie de la plaque est sollicitée par les forces connues P et Q_0 et par un couple de flexion inconnu M_0. Calculons, à l'aide de la théorie classique, l'inclinaison $(\varphi_1)_{r=b}$ du plan tangent à la surface élastique le long de la circonférence $r=b$. Nous obtenons pour cet angle la valeur:

$$(\varphi_1)_{r=b} = \frac{P}{8\pi b D_1(1+\nu)}(2b^2-c^2) + \frac{M_0 b}{D_1(1+\nu)}. \tag{8}$$

Passons à la zone $b \leqq r \leqq a$. Sur cette partie de la plaque agissent l'effort tranchant Q_0 et le moment M_0. Un calcul analogue à celui de l'angle $(\varphi_1)_{r=b}$, donne pour l'inclinaison $(\varphi_2)_{r=b}$ du plan tangent à la surface élastique le long du contour $r=b$:

$$\begin{aligned}(\varphi_2)_{r=b} = {} & \frac{Pb}{4\pi D_2}\left[\lg\left(\frac{a}{b}\right) + \frac{1}{1+\nu} + \frac{b^2}{a^2-b^2}\lg\left(\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{a^2}{b^2}\frac{1+\nu}{1-\nu}\right)\right] - \\ & - \frac{a^2 b^2 M_0}{D_2(1-\nu)(a^2-b^2)}\left(\frac{1}{b}+\frac{1-\nu}{1+\nu}\frac{b}{a^2}\right).\end{aligned} \tag{9}$$

Les formules (8) et (9) contiennent le moment inconnu M_0. La condition de continuité entre les deux domaines considérés nous permet de déterminer M_0. On a en effet l'équation:

$$(\varphi_1)_{r=b} = (\varphi_2)_{r=b},$$

d'où l'on tire, en remplaçant $(\varphi_1)_{r=b}$ et $(\varphi_2)_{r=b}$ par leurs valeurs (8) et (9):

$$\underline{M_0 = \frac{P}{8\pi}\epsilon}. \tag{10}$$

en posant

$$\epsilon = \frac{4\lg(\rho)(1+\nu)\rho^2 + (1-\nu)(\rho^2-1)[2(1-k)+k\bar{\rho}^2]}{(\rho^2-1)[k(1-\nu)+\nu]+\rho^2+1},$$

où $\rho = a/b$, $\bar{\rho} = c/b$, $k = D_2/D_1$ et où ν désigne le coefficient de Poisson. En intro-

duisant la valeur (10) de M_0 dans l'une des formules (8) ou (9), on obtient alors $\varphi_0 = (\varphi_1)_{r=b} = (\varphi_2)_{r=b}$.

En remplaçant enfin dans la formule (7) les quantités α, β, δ, $\bar{k}$, η et φ_0 par les expressions trouvées plus haut, on obtient après simplifications:

$$\underline{N = \frac{3}{4}\frac{P}{\pi d_2}\Phi}, \tag{11}$$

en posant:

$$\Phi = \frac{(\lambda-1)(1-\nu)(2-\bar{\rho}^2+\epsilon)(\rho^2-1)}{\lambda^2[(1-\nu)(\rho^2-1+\lambda)+\rho^2(1+\nu)\lambda]+\dfrac{3(\rho^2-1)(\lambda-1)^2(1-\nu)[\rho^2(1+\nu)+1-\nu]}{\rho^2[1+\nu+k(1-\nu)]+(1-\nu)(1-k)}},$$

où

$$\lambda = \frac{d_1}{d_2}.$$

Pour la quantité t nous obtenons, à l'aide de la formule (6) et en remplaçant encore γ et δ par leurs valeurs (3):

$$t = \frac{d_2}{2}\frac{k(\lambda-1)(1-\nu)(\rho^2-1)}{(1+\nu)\rho^2+(1-\nu)[1+k(\rho^2-1)]}. \tag{12}$$

En superposant alors les moments de flexion provenant respectivement de M_{I} et M_{II}, c'est-à-dire en définitive de la force N (donc de la discontinuité), aux moments donnés par la théorie classique, nous obtenons pour les moments résultants M_r et M_t les valeurs suivantes:

Domaine $c \leqq r \leqq b$ de la zone 1:

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\lg\left(\frac{b}{r}\right)+\frac{1-\nu}{4}\left(\frac{c^2}{r^2}-\bar{\rho}^2\right)+\frac{\epsilon}{2}\right]-N(\eta-t), \\ M_t &= \frac{P}{4\pi}\left\{\left[(1+\nu)\lg\left(\frac{b}{r}\right)+(1-\nu)\right]-\frac{1-\nu}{4}\left(\frac{c^2}{r^2}+\bar{\rho}^2\right)+\frac{\epsilon}{2}\right\}-N(\eta-t). \end{aligned} \tag{13}$$

Le moment maximum au centre de la zone 1, c'est-à-dire au centre de la plaque, se calcule sans difficulté. On obtient:

$$M_{max} = \frac{P}{4\pi}\left[(1+\nu)\lg\left(\frac{b}{c}\right)+1-\frac{1-\nu}{4}\bar{\rho}^2+\frac{\epsilon}{2}\right]-N(\eta-t). \tag{14}$$

Zone 2 $(b \leqq r \leqq a)$:

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{P}{4\pi}\left\{(1+\nu)\left[\lg\left(\frac{a}{r}\right)+\frac{\lg(\rho)}{\rho^2-1}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\right]+\frac{\epsilon}{2(\rho^2-1)}\left(\frac{a^2}{r^2}-1\right)\right\}+ \\ &\quad +\frac{Nt}{\rho^2-1}\left(\frac{a^2}{r^2}-1\right), \\ M_t &= \frac{P}{4\pi}\left\{(1+\nu)\left[\lg\left(\frac{a}{r}\right)+\frac{1-\nu}{1+\nu}+\frac{\lg(\rho)}{\rho^2-1}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\right]-\frac{\epsilon}{2(\rho^2-1)}\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)\right\}- \\ &\quad -\frac{Nt}{\rho^2-1}\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Dans chacune des formules (13), (14) et (15), le dernier terme représente l'influence de la discontinuité du feuillet moyen.

Pour les valeurs M_{I}, M_{II} des moments de flexion dans la section $r=b$ provenant de la discontinuité, nous obtenons à l'aide de (1), (6) et (7) les formules:

$$M_{\mathrm{I}} = -\frac{3}{8}\frac{P}{\pi}\psi_1, \qquad M_{\mathrm{II}} = +\frac{3}{8}\frac{P}{\pi}\psi_2, \tag{16}$$

en posant:

$$\psi_1 = \frac{(\lambda-1)^2(2-\bar{\rho}^2+\epsilon)(\rho^2-1)[\rho^2(1+\nu)+1-\nu](1-\nu)}{\left\{\lambda^2[(1-\nu)(\rho^2-1+\lambda)+\rho^2(1+\nu)\lambda]+\frac{3(\lambda-1)^2(1-\nu)(\rho^2-1)[\rho^2(1+\nu)+1-\nu]}{\rho^2[1+\nu+k(1-\nu)]+(1-\nu)(1-k)}\right\}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\{(1-\nu)[1+k(\rho^2-1)]+\rho^2(1+\nu)\}},$$

et

$$\psi_2 = \psi_1\frac{k(1-\nu)(\rho^2-1)}{\rho^2(1+\nu)+1-\nu}.$$

Les tensions résultantes σ_r et σ_t ont les valeurs[11']):

Domaine $c \leqq r \leqq b$ de la Zone 1:

$$\sigma_r = \frac{12}{d_1^3}M_r z_1 + \frac{N}{d_1}, \qquad \sigma_t = \frac{12}{d_1^3}M_t z_1 + \frac{N}{d_1}. \tag{17}$$

Centre de la plaque ($r=0$):

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{12}{d_1^3}M_{max} z_1 + \frac{N}{d_1}. \tag{17'}$$

Zone 2 ($b \leqq r \leqq a$):

$$\sigma_r = \frac{12}{d_2^3}M_r z_2 + \frac{N}{d_2}\frac{\left(\frac{a^2}{r^2}-1\right)}{\rho^2-1}, \qquad \sigma_t = \frac{12}{d_2^3}M_t z_2 - \frac{N}{d_2}\frac{\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)}{\rho^2-1}. \tag{18}$$

Dans les applications, il est parfois intéressant de connaître la flèche maximum au milieu de la plaque; on trouve pour cette grandeur:

$$\begin{aligned}(w)_{r=0} = \frac{P b^2}{16\pi D_1}\Bigg\{&\frac{3+\nu+\epsilon_1}{1+\nu}+\bar{\rho}^2\left[\lg(\bar{\rho})-\frac{7+3\nu}{4(1+\nu)}\right]+\\ &+\frac{1}{k}\left[\frac{(3+\nu)(\rho^2-1)-\epsilon_2}{1+\nu}+\frac{2\rho^2}{(1-\nu)(\rho^2-1)}\lg(\rho)[2(1+\nu)\lg(\rho)-\epsilon_2]\right]\Bigg\}.\end{aligned} \tag{19}$$

où

$$\epsilon_1 = \epsilon - 3\psi_1, \qquad \epsilon_2 = \epsilon + 3\psi_2.$$

Une application numérique de ces formules sera donnée au Chap. II.

11') Les axes z_1 et z_2 sont définis dans la fig. 1b.

2. *Plaque supportant une surcharge P uniformément répartie sur la surface circulaire de rayon $r=b$ (fig. 8)*

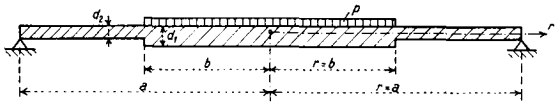


Fig. 8.

En désignant par $p=\frac{P}{\pi b^2}$ la charge par unité de surface, on obtient les formules suivantes:

Coefficients des formules (10), (11) et (16):

$$\epsilon = \frac{4\rho^2(1+\nu)\lg(\rho)+(1-\nu)(\rho^2-1)(2-k)}{(\rho^2-1)[k+\nu(1-k)]+\rho^2+1},$$

$$\Phi = \frac{(\lambda-1)(1-\nu)(1+\epsilon)(\rho^2-1)}{\lambda^2[(1-\nu)(\rho^2-1+\lambda)+\rho^2(1+\nu)\lambda]+\frac{3(\rho^2-1)(\lambda-1)^2(1-\nu)[\rho^2(1+\nu)+1-\nu]}{\rho^2[1+\nu+k(1-\nu)]+(1-\nu)(1-k)}},$$

$$\psi_1 = \frac{(\lambda-1)^2(1+\epsilon)(\rho^2-1)[\rho^2(1+\nu)+1-\nu](1-\nu)}{\left\{\lambda^2[(1-\nu)(\rho^2-1+\lambda)+\rho^2(1+\nu)\lambda]+\frac{3(\lambda-1)^2(1-\nu)(\rho^2-1)[\rho^2(1+\nu)+1-\nu]}{\rho^2[1+\nu+k(1-\nu)]+(1-\nu)(1-k)}\right\}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\{[1+k(\rho^2-1)](1-\nu)+\rho^2(1+\nu)\}}, \tag{20}$$

$$\psi_2 = \psi_1\frac{k(1-\nu)(\rho^2-1)}{\rho^2(1+\nu)+1-\nu}.$$

Valeurs des moments:

Zone 1 ($0 \leqq r \leqq b$):

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{pb^2}{16}\left[(3+\nu)\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)+2\epsilon\right]-N(\eta-t), \\ M_t &= \frac{pb^2}{16}\left[(3+\nu)-\frac{r^2}{b^2}(1+3\nu)+2\epsilon\right]-N(\eta-t). \end{aligned} \tag{21}$$

Zone 2 ($b \leqq r \leqq a$):

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{pb^2}{4}\left\{(1+\nu)\left[\lg\left(\frac{a}{r}\right)+\frac{\lg(\rho)}{\rho^2-1}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\right]+\frac{\epsilon\left(\frac{a^2}{r^2}-1\right)}{2(\rho^2-1)}\right\}+\frac{Nt}{\rho^2-1}\left(\frac{a^2}{r^2}-1\right), \\ M_t &= \frac{pb^2}{4}\left\{(1+\nu)\left[\lg\left(\frac{a}{r}\right)+\frac{\lg(\rho)}{\rho^2-1}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{1-\nu}{1+\nu}\right]-\frac{\epsilon\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)}{2(\rho^2-1)}\right\}-\frac{Nt}{\rho^2-1}\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Les tensions se calculent à l'aide des formules (17) et (18). La valeur de la flèche au centre de la plaque est:

$$(w)_{r=0} = \frac{p b^4}{16 D_1}\left\{\frac{5+\nu+4\epsilon_1}{4(1+\nu)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{k}\left[\frac{(3+\nu)(\rho^2-1)-\epsilon_2}{1+\nu} + \frac{2\rho^2 \lg(\rho)}{(1-\nu)(\rho^2-1)}[2\lg(\rho)(1+\nu)-\epsilon_2]\right]\right\}, \tag{23}$$

où $\epsilon_1 = \epsilon - 3\psi_1, \qquad \epsilon_2 = \epsilon + 3\psi_2.$

3. *Plaque circulaire sollicitée par une surcharge uniformément répartie sur toute sa surface (fig. 9)*

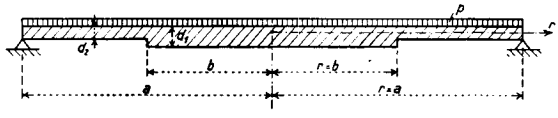


Fig. 9.

On obtient, dans ce cas:

$$\underline{M_0 = \frac{p b^2}{8}\epsilon}, \quad \text{où} \quad \epsilon = \frac{[(1-\nu)(1-k)+\rho^2(3+\nu)](\rho^2-1)}{(1-\nu)[k(\rho^2-1)+1]+\rho^2(1+\nu)}.$$

Les expressions de Φ, Ψ_1 et Ψ_2 coïncident avec celles de l'exemple précédent. Pour les moments nous obtenons les formules:

Zone 1 $(0 \leqq r \leqq b)$:

$$M_r = \frac{p b^2}{16}\left[(3+\nu)\left(1-\frac{r^2}{b^2}\right)+2\epsilon\right] - N(\eta - t),$$
$$M_t = \frac{p b^2}{16}\left[(3+\nu)-\frac{r^2}{b^2}(1+3\nu)+2\epsilon\right] - N(\eta - t). \tag{24}$$

Zone 2 $(b \leqq r \leqq a)$:

$$M_r = \frac{p a^2}{16}\left[(3+\nu)\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right) - \left(3+\nu-\frac{2\epsilon}{\rho^2-1}\right)\left(\frac{a^2}{r^2}-1\right)\frac{1}{\rho^2}\right] + \frac{N t}{\rho^2-1}\left(\frac{a^2}{r^2}-1\right),$$
$$M_t = \frac{p a^2}{16}\left[3+\nu-\frac{r^2}{a^2}(1+3\nu)+\left(3+\nu-\frac{2\epsilon}{\rho^2-1}\right)\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right)\frac{1}{\rho^2}\right] - \frac{N t}{\rho^2-1}\left(\frac{a^2}{r^2}+1\right). \tag{25}$$

Les tensions se calculent à l'aide des formules (17) et (18). La valeur de la flèche au centre de la plaque est:

$$(w)_{r=0} = \frac{p b^4}{16 D_1}\left\{\frac{5+\nu+4\epsilon_1}{4(1+\nu)} - \left[\frac{2\epsilon_2-(3+\nu)(\rho^2-1)}{(\rho^2-1)k}\right]\left[\frac{\rho^2-1}{2(1+\nu)}+\frac{\rho^2\lg(\rho)}{1-\nu}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\rho^2-1}{4k}\left(\frac{5+\nu}{1+\nu}\rho^2-1\right)\right\}, \tag{26}$$

où $\epsilon_1 = \epsilon - 3\psi_1, \qquad \epsilon_2 = \epsilon + 3\psi_2.$

4. *Applications numériques*

Considérons les plaques des figures 8 et 9. En prenant:

$$\rho = \frac{a}{b} = 2, \quad k = \frac{D_2}{D_1} = 0{,}25 \quad \text{et} \quad \nu = 0{,}25,$$

les formules obtenues donnent pour N, t, M_{I} et M_{II} les valeurs:

1er cas (fig. 8):

$$N = 0{,}1229\frac{pb^2}{d_2}, \quad t = 0{,}02615\,d_2, \quad M_{\mathrm{I}} = -0{,}03288\,pb^2 \quad \text{et} \quad M_{\mathrm{II}} = 0{,}00321\,pb^2.$$

2ème cas (fig. 9):

$$N = 0{,}2397\frac{pb^2}{d_2}, \quad t = 0{,}02615\,d_2, \quad M_{\mathrm{I}} = -0{,}06412\,pb^2 \quad \text{et} \quad M_{\mathrm{II}} = 0{,}00627\,pb^2.$$

Les fig. 10, a, b et 11, a, b représentent les diagrammes des moments M_r, M_t et des tensions maxima et minima obtenus d'une part d'après la théorie classique et d'autre part en tenant compte de la force intérieure N. En ce qui concerne les valeurs des moments, nous remarquons que c'est dans la partie centrale renforcée de la plaque que l'influence de la force N est la plus sensible (max. $\sim 9\%$).

Quant aux tensions, on constate que dans la partie centrale de la plaque, l'existence de l'effort N réduit les valeurs absolues des maxima et des minima

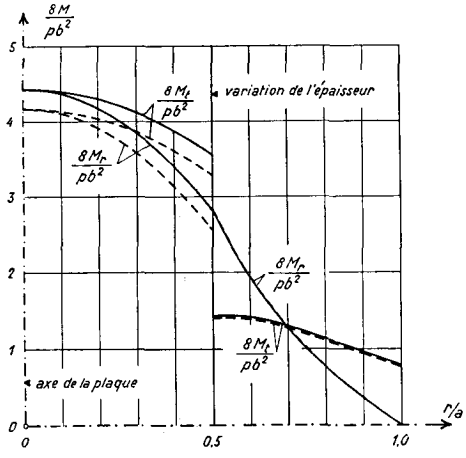


Fig. 10a. Diagrammes des moments M_r et M_t sollicitant la plaque de la fig. 8.

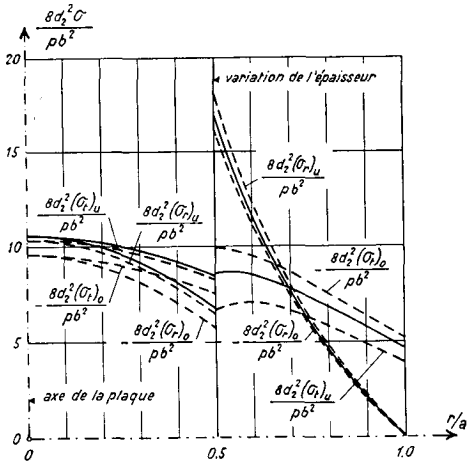
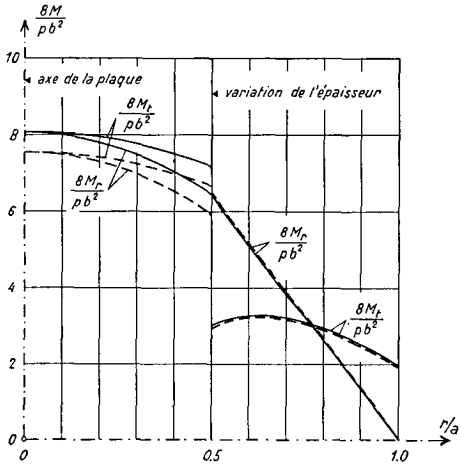
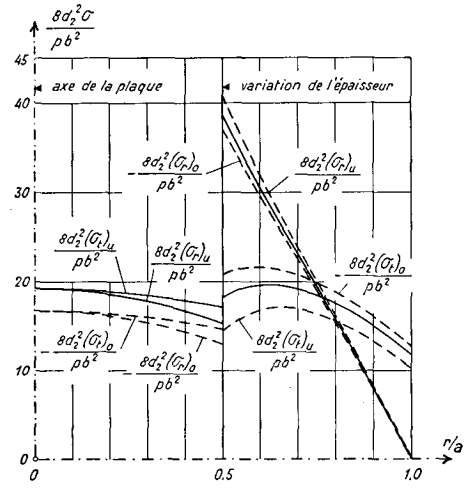


Fig. 10b. Diagrammes des tensions $(\sigma_r)_o$, $(\sigma_t)_o$ et $(\sigma_r)_u$, $(\sigma_t)_u$ au voisinage des faces supérieure et inférieure de la plaque de la fig. 8.

——— **Théorie classique.** - - - **Théorie classique corrigée en tenant compte de N.**

des tensions. (Dans le cas de la fig. 9, les valeurs des tractions $(\sigma_r)_u$ et $(\sigma_t)_u$ restent cependant inchangées dans ce domaine.) Dans la zone extérieure, par contre, la présence de N entraîne pour les σ_t une diminution sensible des tractions $(\sigma_t)_u$ et une augmentation correspondante des valeurs absolues des compressions $(\sigma_t)_0$, tandis que pour les σ_r, on a une petite diminution des valeurs absolues des compressions $(\sigma_r)_0$ et une petite augmentation des tractions $(\sigma_r)_u$. Comme conclusion de ce premier chapitre, nous pouvons affirmer que, pour le type de plaque étudié, il est absolument indispensable de tenir compte de l'effort N, si l'on veut avoir une image exacte des tensions.





——— Théorie classique. - - - Théorie classique corrigée en tenant compte de N.

Fig. 11 a. Diagrammes des moments M_r et M_t sollicitant la plaque de la fig. 9.

Fig. 11 b. Diagrammes des tensions $(\sigma_r)_0$, $(\sigma_t)_0$ et $(\sigma_r)_u$, $(\sigma_t)_u$ au voisinage des faces supérieure et inférieure de la plaque de la fig. 9.

CHAPITRE II

Etude expérimentale de la répartition des moments dans les plaques circulaires fléchies présentant une discontinuité dans l'épaisseur engendrant une discontinuité du feuillet moyen

§ 1. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons avant tout de vérifier la théorie développée dans le Chapitre I, en adaptant la méthode purement optique au cas étudié. Dans ce but, nous montrerons comment il est possible de mesurer isolément les tensions dues aux forces N agissant dans le plan moyen (§ 2).

La connaissance de ces tensions nous permettra alors de corriger les valeurs M_r, M_t déterminées à l'aide d'un modèle bicouche. Nous déterminerons ensuite expérimentalement l'influence, sur la répartition des moments M_r et M_t, des discontinuités de l'épaisseur et du feuillet moyen de la plaque (§ 3)[12]. Dans le § 4, nous étudierons le cas où la plaque circulaire ne présente qu'une discontinuité de l'épaisseur sans discontinuité du feuillet moyen.

§ 2. Mesure des tensions dues à N, dans une plaque circulaire homogène, présentant une discontinuité de l'épaisseur entraînant une discontinuité du feuillet moyen

Pour isoler l'effet optique dû à la force N, nous avons utilisé une plaque circulaire *homogène*, d'allite CR 39[13]), ayant une discontinuité de l'épaisseur et du feuillet moyen, chargée au centre par une force P (fig. 12). Dans une telle plaque, l'effet optique dû aux moments de flexion est en effet nul, car les trajectoires des tensions principales dues à la force N coïncident avec celles

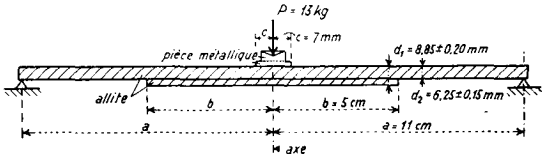


Fig. 12. Plaque circulaire homogène présentant une discontinuité de l'épaisseur entraînant une discontinuité du feuillet moyen.

---

[12]) Rappelons que la méthode purement optique en question consiste à utiliser des modèles de plaques formés de deux couches de matières différentes et à mesurer point par point les quatre grandeurs α (azimut de la direction d'un des moments principaux), δ_3 (différence relative de marche des deux rayons polarisés traversant orthogonalement la plaque) et δ_1, δ_2 (variations absolues de marche, produites par la mise en charge, de ces deux rayons). L'angle α est mesuré à l'aide de deux nicols croisés, δ_3, à l'aide d'un compensateur, et δ_1, δ_2 le sont à l'aide d'un interféromètre de Mach-Zehnder.

Grâce aux relations (voir notes 1 et 2):

$$\delta_1 = A M_1 + B M_2, \quad \delta_2 = B M_1 + A M_2, \quad \delta_3 = C (M_1 - M_2), \quad (\text{où } A - B = C)$$

il est possible, en appliquant la méthode des moindres carrés de Gauss, de déduire des mesures de δ_1, δ_2 et δ_3, non seulement les valeurs des moments principaux M_1, M_2, mais encore les erreurs moyennes μ_{M_1}, μ_{M_2} de ces valeurs. Voici les formules auxquelles on est conduit:

$$M_1 = R_{11}\,\delta_1 + R_{21}\,\delta_2 + R_{31}\,\delta_3, \quad M_2 = R_{12}\,\delta_1 + R_{22}\,\delta_2 + R_{32}\,\delta_3,$$
$$\mu_{M_1} = \pm\,\Theta_1 (\delta_1 - \delta_2 - \delta_3), \qquad \mu_{M_2} = \pm\,\Theta_2 (\delta_1 - \delta_2 - \delta_3).$$

Dans ces formules, $R_{11}, R_{21}, \ldots, \Theta_1, \Theta_2$ sont des coefficients qui sont uniquement fonction des trois constantes A, B, C et des «poids» p_1, p_2, p_3 attribués aux mesures de δ_1, δ_2, δ_3. Ces coefficients se calculent une fois pour toutes pour une plaque donnée.

[13]) Résine artificielle, livrée en lames à faces parallèles et polies, par l'Homalite Company, à Wilmington (Delaware, U.S.A.).

des moments principaux, et les tensions provenant de la flexion ont la même valeur, au signe près, en deux points symétriques par rapport au feuillet moyen.

La plaque était constituée de deux lames d'allite à faces parallèles, collées entre elles. Une bonne adhérence des deux parties a été obtenue en utilisant une colle de résine artificielle[14]). Les dimensions exactes du modèle, ainsi que les caractéristiques de la force P, sont indiquées dans la fig. 12.

Un étalonnage préliminaire nous a donné pour les constantes optiques, a_a, b_a, c_a de l'allite *en élasticité bidimensionelle,* les valeurs suivantes:

$$a_a = +1{,}765\ \lambda\ \text{mm/kg}, \quad b_a = +2{,}318\ \lambda\ \text{mm/kg}, \quad c_a = -0{,}553\ \lambda\ \text{mm/kg}.$$

Ayant mesuré δ_1, δ_2 et δ_3, nous avons obtenu les tensions cherchées σ_r et σ_t, en appliquant les formules de la méthode purement optique relative à l'élasticité bidimensionelle[15]). D'autre part, il est facile de calculer la valeur de N à l'aide de la formule (7), puis la répartition des tensions dans les deux parties de la plaque sous l'action de la force N agissant dans le feuillet moyen.

Les valeurs des tensions mesurées et calculées sont représentées dans la fig. 13; puisqu'il s'agit d'un effet secondaire, la coïncidence des résultats peut

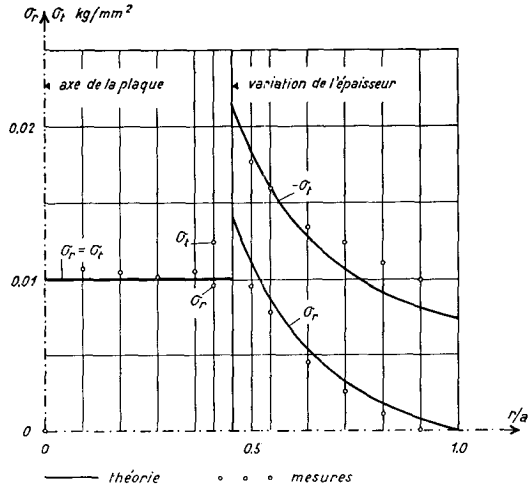


Fig. 13. Plaque circulaire homogène de la fig. 12: Diagrammes des tensions σ_r et σ_t dues à N.

[14]) Markon. 7. L.V.

[15]) La mesure de δ_1 et δ_2 à l'interféromètre a été faite d'abord en appliquant la force P conformément à la fig. 12, puis en appliquant cette force sur la face opposée. La force N change donc simplement de sens lorsqu'on passe du premier au second cas. En prenant les moyennes arithmétiques des deux valeurs obtenues pour chacune des grandeurs $|\delta_1|$, $|\delta_2|$, on élimine ainsi les erreurs dues à la déformation du modèle (voir *B. Gilg,* loc. cit. p. 30 et suiv.).

être considérée comme satisfaisante. *La formule (7) est donc expérimentalement vérifiée.*

En plein accord avec la théorie développée dans le Chapitre I, nous pouvons donc affirmer qu'une plaque mince présentant une discontinuité de l'épaisseur entraînant une discontinuité du feuillet moyen et chargée perpendiculairement à ses faces, est non seulement sollicitée à la flexion pure, mais est en outre soumise à un état de tension bidimensionel. Les corrections que doivent subir les tensions données par la théorie classique sont loin d'être négligeables, comme nous l'avons vu au Chapitre I et comme les mesures le confirment. Lorsqu'on a mesuré les tensions dues aux forces N, agissant dans le plan moyen, on est alors à même de corriger les valeurs des moments M_r, M_t déterminées à l'aide d'une plaque bicouche, comme l'exemple traité dans le paragraphe suivant le fera ressortir. C'est en ceci que consiste l'adaptation dont nous avons parlé de la méthode purement optique.

§ 3. Mesure des moments dans une plaque circulaire présentant une discontinuité de l'épaisseur entraînant une discontinuité du feuillet moyen

Dans une autre série d'essais, nous avons déterminé expérimentalement l'influence des discontinuités de l'épaisseur et du feuillet moyen sur la répartition des moments résultants M_r et M_t.

1. Choix des épaisseurs, description du modèle, état de charge

a) Choix des épaisseurs

Nous avons cherché à utiliser pour ces essais un modèle formé de deux couches de matières différentes, le verre[16]) et l'allite CR-39. L'épaisseur de l'allite que nous avions à disposition était d'environ 6 mm, l'épaisseur minimum du verre de la qualité requise, d'environ 1 mm. Pour déterminer l'agrégat verre-allite le plus favorable, c'est-à-dire celui dont les constantes optiques sont les plus grandes possibles, les déformations de la plaque restant admissibles dans le cadre de la théorie de *Kirchhoff*, nous avons calculé, pour l'état «standard» de flexion ($M_1 = 1$ kg, $M_2 = 0$), les constantes optiques A, B, C correspondant à 5 combinaisons différentes verre-allite[17]).

Les diagrammes de la fig. 14a montrent la répartition théorique des ten-

---

[16]) Découpé dans une glace de très bonne qualité.

[17]) Dans ce cas particulier, on a: $\delta_1 = A$, $\delta_2 = B$, $\delta_3 = C$,

avec: $A = a_v \int\limits_{(d_v)} \sigma_1 \, dz + a_a \int\limits_{(d_a)} \sigma_1 \, dz$, $B = b_v \int\limits_{(d_v)} \sigma_1 \, dz + b_a \int\limits_{(d_a)} \sigma_1 \, dz$, $C = c_v \int\limits_{(d_v)} \sigma_1 \, dz + c_a \int\limits_{(d_a)} \sigma_1 \, dz$,

où a_v, a_a, b_v, b_a et c_v, c_a sont les constantes optiques respectives du verre et de l'allite en élasticité bidimensionelle, et d_v et d_a les épaisseurs des couches de verre et d'allite.

sions dans le verre et l'allite; la fig. 14b donne les valeurs des constantes, divisées par la tension maximum σ_1 sollicitant la couche de verre, en fonction de l'épaisseur d_v de cette couche (σ_1 est la tension la plus dangereuse de l'agrégat).

On voit ainsi que c'est la combinaison I ($d_v = 1$ mm, $d_a = 6$ mm) qui est la plus favorable au point de vue de l'effet optique. Pour des raisons pratiques (légère difficulté d'obtenir un verre de 1 mm de la qualité requise, haut danger de rupture) nous avons choisi la combinaison II ($d_v = 2$ mm, $d_a = 6$ mm) pour la zone extérieure 2 et IV ($d_v = 4$ mm, $d_a = 6$ mm) pour la zone intérieure 1.

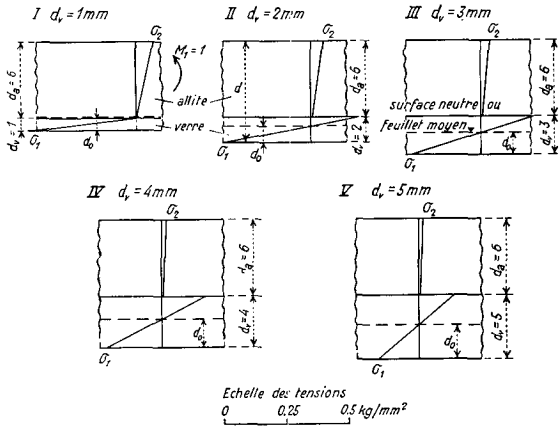


Fig. 14a. Répartition des tensions calculées dans le verre et l'allite, pour l'état de charge $M_1 = 1$ kg, $M_2 = 0$.

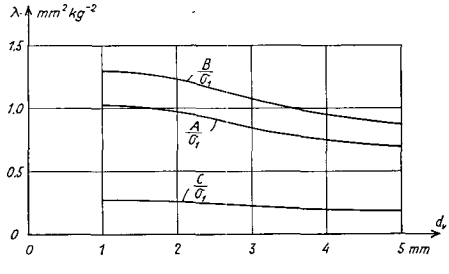


Fig. 14b. Diagrammes des constantes optiques A, B, C divisées par σ_1, en fonction de d_v.

b) Description du modèle

Pour réaliser les deux parties bicouches de la plaque, nous avons utilisé trois lames à faces parallèles collées entre elles, deux de verre d'environ 2 mm d'épaisseur et une d'allite d'environ 6 mm (fig. 15). La zone centrale était donc en réalité formée de deux couches de verre et d'une d'allite. L'épaisseur

des couches de colle a été d'un vingtième de millimètre environ. La biréfringence latente était de l'ordre de quelques centièmes de longueur d'onde seulement. Les dimensions exactes des lames et les constantes A, B et C[18]) des deux zones du modèle sont indiquées dans la figure 15.

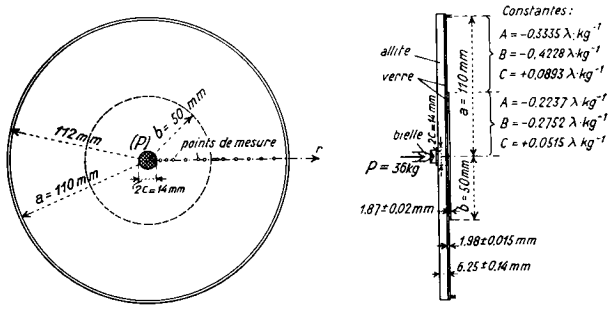


Fig. 15. Plaque circulaire hétérogène présentant une discontinuité de l'épaisseur entraînant une discontinuité du feuillet moyen.

c) Etat de charge

Nous avons appliqué au centre, perpendiculairement aux faces de la plaque, une force $P = 36$ kg. Cette force n'était pas rigoureusement concentrée en un point, mais répartie sur une petite surface circulaire de 7 mm de rayon, à l'aide d'une pièce métallique et d'une feuille de papier de 0,2 mm d'épaisseur. Le centre de cette surface coïncidait avec celui de la plaque. Pour la détermination des moments de flexion M_r et M_t, nous avons choisi 13 points de mesure (fig. 15).

2. Mesures, épures

La détermination des directions 1 et 2 des moments principaux M_1 et M_2 et les mesures de δ_1, δ_2 et δ_3 ont été faites selon la technique indiquée par *B. Gilg*[19]), permettant d'éliminer les erreurs systématiques dues à la biréfringence latente et à la déformation de la plaque. Les résultats sont représentés par les croix isolées de la figure 16, intitulées «Mesures sans corrections».

3. Calcul théorique des moments M_r et M_t

Dans le chapitre I, nous avons donné les formules des moments de flexion M_r et M_t pour la plaque circulaire homogène, supportant au centre une force P, répartie sur une surface circulaire de rayon $r = c$. Nous savons qu'une plaque bicouche peut être traitée, pour l'étude des moments et des défor-

---

[18]) Déterminées d'après la méthode indiquée par *B. Gilg*, voir loc. cit., p. 40.

[19]) Voir *B. Gilg:* loc. cit., p. 22 et suiv.

mations, comme une plaque homogène, en entroduisant pour la rigidité à la flexion et pour le coefficient de Poisson des valeurs idéales D_{id} et ν_{id}[20]. *Nous admettrons dans la suite que les valeurs de ν pour le verre et l'allite ne s'écartent pas trop de cette valeur idéale ν_{id}*[21] (cette condition ne joue d'ailleurs qu'un rôle tout à fait secondaire, car les tensions intérieures dépendent très peu de ν). Il existe alors dans la plaque bicouche une *surface neutre* qui est le plan où σ_x, σ_y et τ_{xy} sont nuls[22]. Par analogie avec le cas de la plaque homogène, nous appellerons aussi ce plan: *feuillet moyen.*

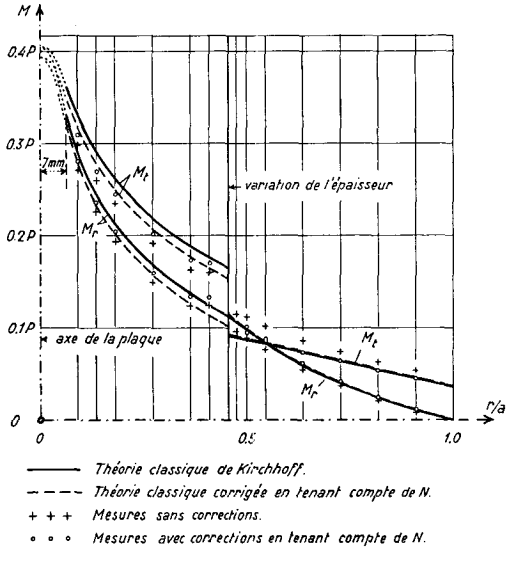


Fig. 16. Plaque circulaire de la fig. 15. Diagrammes des moments M_r et M_t.

Le feuillet moyen jouit d'une propriété importante, qu'il est facile de démontrer: une force telle que N agissant dans cette surface, n'engendre pas de rotation des sections. Cette position de N pour la plaque hétérogène correspond au cas d'une force agissant dans le feuillet moyen d'une plaque homogène (fig. 6). Les formules (2) et (4) conservent donc leur validité et la formule (7) nous donnera la valeur de N[23]. Pour le calcul des moments nous ferons

---

[20]) Voir *B. Gilg:* loc. cit., p. 19 et suiv.

[21]) En réalité nous avons: $\nu_{verre} \cong 0{,}22$, $\nu_{allite} \cong 0{,}4$, $\nu_{id} \cong 0{,}34$.

[22]) Voir *H. Favre* et *B. Gilg*, loc. cit.

[23]) Dans les formules (2) et (4), E est à remplacer par E_a; J_1, J_2 et d_1, d_2 sont à remplacer respectivement par les valeurs idéales $(J_1)_{id}$, $(J_2)_{id}$ (form. 28) et $(d_1)_{id} = d_{1a} + m\, d_{1v}$, $(d_2)_{id} = d_{2a} + m\, d_{2v}$, d_{1a}, d_{1v}, d_{2a}, d_{2v} désignant les épaisseurs des couches d'allite et de verre correspondant aux zones 1 et 2 respectivement, m étant le rapport E_v/E_a des modules d'élasticité du verre et de l'allite.

appel aux formules (13), (14) et (15). Pour déterminer les valeurs des tensions dans les couches de verre et d'allite, considérons la figure 14a. Désignons par d_0 la distance de la surface neutre à la face de la plaque limitant d'un côté la couche d'épaisseur d_v. Un calcul simple donne:

$$d_0 = \frac{m\,d_v^2 + d_a\,(d + d_v)}{2\,(m\,d_v + d_a)}, \quad \text{où} \quad m = \frac{E_v}{E_a}, \quad d = d_v + d_a. \tag{27}$$

Le moment d'inertie idéal du profil hétérogène, par unité de longueur, calculé par rapport à l'allite, est [22])

$$J_{id} = \tfrac{1}{3}\{[(d-d_0)^3 - (d_v - d_0)^3] + m\,[(d_v - d_0)^3 + d_0^3]\}. \tag{28}$$

Les tensions dans la plaque hétérogène se calculeront à l'aide des formules [23']):

Domaine $c \leqq r \leqq b$ de la zone 1:

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_r)_a &= \frac{M_r}{(J_1)_{id}} z_1 + \frac{N}{(d_1)_{id}}, \\ (\sigma_t)_a &= \frac{M_t}{(J_1)_{id}} z_1 + \frac{N}{(d_1)_{id}}, \end{aligned}\right\} \text{pour l'allite}$$

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_r)_v &= m\left[\frac{M_r}{(J_1)_{id}} z_1 + \frac{N}{(d_1)_{id}}\right], \\ (\sigma_t)_v &= m\left[\frac{M_t}{(J_1)_{id}} z_1 + \frac{N}{(d_1)_{id}}\right]. \end{aligned}\right\} \text{pour le verre} \tag{17*}$$

Centre de la plaque ($r = 0$):

$$(\sigma_r)_a = (\sigma_t)_a = \frac{M_{max}}{(J_1)_{id}} z_1 + \frac{N}{(d_1)_{id}}, \qquad (\sigma_r)_v = (\sigma_t)_v = m\left[\frac{M_{max}}{(J_1)_{id}} z_1 + \frac{N}{(d_1)_{id}}\right]. \tag{17'*}$$

Zone 2 ($b \leqq r \leqq a$):

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_r)_a &= \frac{M_r}{(J_2)_{id}} z_2 + \frac{N\left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right)}{(d_2)_{id}\,(\rho^2 - 1)}, \\ (\sigma_t)_a &= \frac{M_t}{(J_2)_{id}} z_2 - \frac{N\left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right)}{(d_2)_{id}\,(\rho^2 - 1)}, \end{aligned}\right\} \text{pour l'allite}$$

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_r)_v &= m\left[\frac{M_r}{(J_2)_{id}} z_2 + \frac{N\left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right)}{(d_2)_{id}\,(\rho^2 - 1)}\right], \\ (\sigma_t)_v &= m\left[\frac{M_t}{(J_2)_{id}} z_2 - \frac{N\left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right)}{(d_2)_{id}\,(\rho^2 - 1)}\right], \end{aligned}\right\} \text{pour le verre} \tag{18*}$$

[23']) L'origine des axes z_1, z_2 est situé dans la surface neutre (feuillet moyen) de la zone correspondante (voir aussi fig. 1b).

où $(J_1)_{id}$ et $(J_2)_{id}$ désignent les moments d'inertie idéaux des zones 1 et 2 de la plaque et $m = \frac{E_v}{E_a}$.

Dans les calculs nous avons posé: $m = \frac{E_v}{E_a} = 35$ [24]). Nous donnons, dans la figure 16, à côté des résultats des mesures sans corrections:

1. Les valeurs des moments de flexion M_r et M_t donnés par la théorie classique.
2. Les valeurs des moments corrigés, obtenus en ajoutant aux moments donnés par la théorie classique, ceux provenant de l'existence des forces N calculées.
3. Les valeurs des moments données par les mesures, corrigées en tenant compte de l'existence des forces N mesurées.

La bonne coïncidence des points «mesures avec corrections» et des courbes «théorie classique corrigée» confirme d'une part l'exactitude des calculs développés, et d'autre part celle de la méthode purement optique modifiée. Nous voyons que, dans le cas de charge considéré, une discontinuité du feuillet moyen réduit sensiblement (de 5 à 15%) les valeurs des moments dans toute la partie centrale de la plaque. Dans le domaine extérieur par contre $(r > b)$, cette discontinuité n'a qu'une faible influence sur les moments (voir également les figures 10a et 11a). Notons que l'influence locale de la variation brusque de l'épaisseur sur les valeurs mesurées des moments de flexion est limitée à un domaine dont l'extension radiale est de l'ordre de l'épaisseur de la plaque. Dans ce domaine, les tensions en un point ne varient plus linéairement en fonction de la distance au feuillet moyen. Ni la théorie classique, même corrigée, ni la méthode purement optique n'y sont donc applicables.

§ 4. Etude expérimentale de la répartition des moments dans une plaque circulaire présentant une discontinuité de l'épaisseur n'entraînant pas une discontinuité du feuillet moyen

1. Introduction

Nous avons également déterminé expérimentalement la répartition des moments de flexion et des tensions dans une plaque circulaire présentant seulement une discontinuité de l'épaisseur, les feuillets moyens des deux parties étant situés dans un même plan. Dans ce cas, η étant égal à zéro (Chap. I, § 2), on doit avoir $N \equiv 0$; la théorie classique, comme la méthode purement optique, doivent être applicables sans corrections, ce que l'expérience confirme, comme nous le verrons.

---

[24]) Voir *Homalite CR-39-I*, Bulletin 51, August 1, 1956, p. 4.

2. Description du modèle, état de charge

La plaque était constituée de 4 lames à faces parallèles, collées entre elles, deux de verre et deux d'allite. On a choisi les épaisseurs de ces lames de façon à faire coïncider autant que possible les plans des surfaces neutres ou feuillets moyens des deux parties de la plaque (fig. 17). Pour les constantes A, B, C, l'étalonnage de deux éprouvettes nous a donné les valeurs suivantes:

a) Zone 1 $(0 \leqq r \leqq b)$:

$$A = -0{,}2671\,\lambda\,\mathrm{kg}^{-1}, \quad B = -0{,}3400\,\lambda\,\mathrm{kg}^{-1}, \quad C = +0{,}0729\,\lambda\,\mathrm{kg}^{-1},$$

b) Zone 2 $(b \leqq r \leqq a)$:

$$A = -0{,}5352\,\lambda\,\mathrm{kg}^{-1}, \quad B = -0{,}6792\,\lambda\,\mathrm{kg}^{-1}, \quad C = +0{,}1440\,\lambda\,\mathrm{kg}^{-1}.$$

La plaque a été chargée au milieu par une force $P = 18$ kg, répartie sur une surface circulaire de 7 mm de rayon.

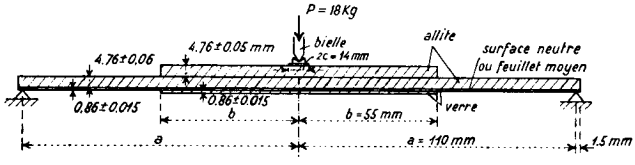


Fig. 17. Plaque circulaire hétérogène présentant une discontinuité de l'épaisseur n'entraînant pas une discontinuité du feuillet moyen.

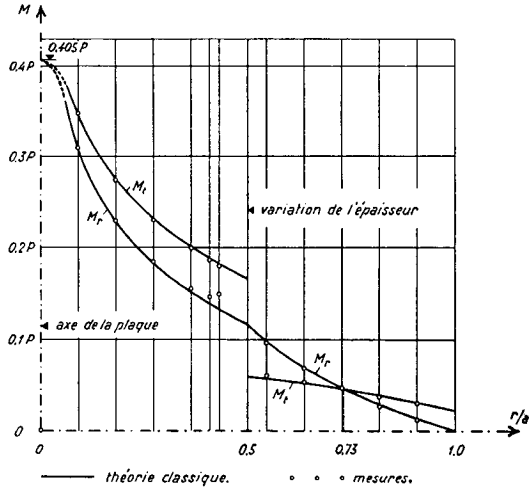


Fig. 18. Plaque circulaire de la fig. 17: Diagrammes des moments M_r et M_t.

3. *Mesures, calculs, épures*

Nous avons mesuré les moments en 11 points situés sur un rayon. Les résultats des expériences, ainsi que les valeurs données par les formules classiques, sont représentés dans la figure 18.

La coïncidence des valeurs mesurées et calculées est très bonne. Nous pouvons donc affirmer que, pour ce genre de plaque, on a bien $N \equiv 0$. En outre, l'influence locale de la variation brusque de l'épaisseur sur la valeur des moments de flexion est limitée à une zone dont l'extension est de l'ordre de l'épaisseur de la plaque. Il est intéressant de noter qu'il existe dans la plaque un cercle ($r/a = 0{,}73$) formé de points singuliers, où $M_r = M_t$[25]). En outre, la discontinuité de l'épaisseur de la plaque entraîne une augmentation des valeurs maxima des moments au centre. On vérifie en effet que:

$$M_{max} = (M_r)_{r=0} = (M_t)_{r=0} = 0{,}405\,P,$$

tandis que, dans la plaque analogue mais d'épaisseur constante, on aurait

$$M_{max} = 0{,}373\,P.$$

CHAPITRE III

Etude expérimentale de la répartition des moments dans une plaque carrée présentant une discontinuité de l'épaisseur n'entraînant pas de discontinuité du feuillet moyen

§ 1. *Introduction*

Le but de cet essai a été d'examiner, dans le cas d'une plaque carrée. l'influence d'une variation brusque de l'épaisseur sur les valeurs des moments de flexion, et de comparer ces valeurs à celles relatives à la même plaque, mais d'épaisseur constante. La discontinuité en question n'entraînait pas de discontinuité du feuillet moyen. La méthode purement optique était donc applicable sans corrections, la force N étant identiquement nulle[26]).

---

[25]) $\delta_3 = 0$ en tous les points de ce cercle.

[26]) Il serait très difficile de mesurer les moments si la force N n'était pas nulle, car les trajectoires des tensions principales dues à cette force ne coïncideraient pas avec les trajectoires des moments principaux. Ce cas se présente d'ailleurs dès que la symétrie de rotation n'existe pas.

§ 2. *Description du modèle, état de charge, choix des points de détermination des moments*

La plaque étudiée est d'une constitution analogue à celle du modèle de plaque circulaire traité Chap. II, § 4. Les dimensions caractéristiques exactes, ainsi que la position des points choisis pour les mesures, sont indiquées dans la figure 19.

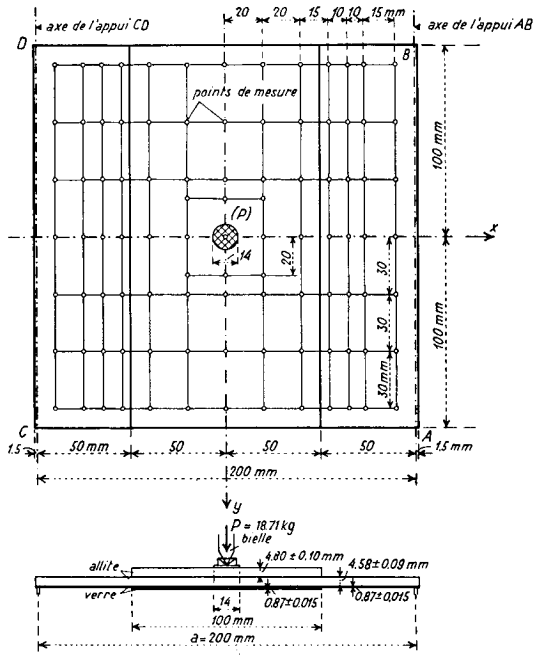


Fig. 19. Plan et élévation précisant les dimensions de la plaque carrée étudiée et les positions des points où ont été faites les mesures.

Des mesures sur des éprouvettes ont donné pour les constantes optiques les valeurs:

a) zone mince:

$$A = -0{,}5426\,\lambda\,\mathrm{kg}^{-1}, \quad B = -0{,}6935\,\lambda\,\mathrm{kg}^{-1}, \quad C = +0{,}1509\,\lambda\,\mathrm{kg}^{-1},$$

b) zone renforcée:

$$A = -0{,}2739\,\lambda\,\mathrm{kg}^{-1}, \quad B = -0{,}3492\,\lambda\,\mathrm{kg}^{-1}, \quad C = +0{,}0753\,\lambda\,\mathrm{kg}^{-1}.$$

Nous avons étudié la répartition des moments dans le cas où la plaque est appuyée le long de deux côtés opposés AB, CD et supporte une force $P =$ 18,71 kg appliquée au centre, perpendiculairement aux faces. Les deux autres côtés AC et BC étaient libres. Les lignes d'appuis ne coïncidaient pas exacte-

ment avec les côtés. La réaction de chaque appui était répartie le long d'une petite surface rectangulaire, de 1 mm de largeur, dont l'axe était parallèle au côté correspondant de la plaque et distant de 1,5 mm de ce dernier[27]). La portée était ainsi de 200 mm. La force P était répartie sur une petite surface circulaire de 7 mm de rayon, au moyen d'une pièce métallique et d'une feuille de papier. Par raison de symétrie il a suffi de mesurer les tensions en 29 points.

§ 3. *Mesures, calculs, épures*

Tous les résultats obtenus ont été représentés graphiquement.

Les lignes continues de la fig. 20 représentent les trajectoires des moments principaux. Ces courbes sont régulières dans presque tout le domaine de la plaque. C'est uniquement dans une zone très voisine des appuis que les tra-

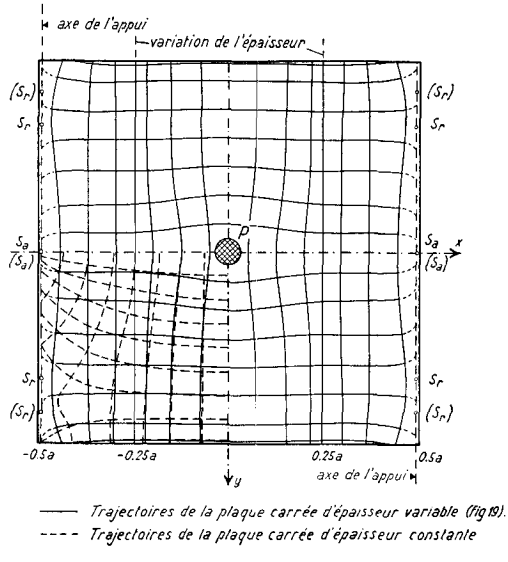


Fig. 20. Plaque carrée. Trajectoires des moments principaux.

jectoires accusent une courbure prononcée, afin d'aboutir aux côtés appuyés sous des angles voisins de $\pm 45°$. Le long des appuis, on a en effet $M_x = M_y = 0$, tandis que le moment de torsion M_{xy} est en général différent de zéro[28]). En outre, les trajectoires accusent sur chaque côté appuyé un point singulier

---

[27]) Pour une description détaillée des appuis, voir la première des deux publications de *H. Favre* et *W. Schumann* citées dans la note 2 (p. 44).

[28]) On suppose ici que la ligne d'appui soit confondue avec le côté correspondant (fig. 19).

attractif S_a, situé sur l'axe des x et deux points singuliers répulsifs S_r, symétriques par rapport à cet axe. Il n'y a pas de point singulier le long des côtés libres.

Dans la figure 21, nous donnons les diagrammes des moments principaux M_1 et M_2. Les grandeurs et les directions de ces moments sont représentées, pour chaque point, par deux vecteurs de longueur proportionnelle à M_1 ou M_2. Leurs directions et leurs sens sont ceux des tensions principales σ_1 et σ_2 relatives aux points de la face de la plaque, reposant sur les appuis. La moitié de gauche de la figure se rapporte à des sections parallèles à l'axe x, la moitié de droite, à des sections parallèles à y. Les moments principaux passent par un maximum au voisinage du centre. L'extrapolation des mesures nous a donné[29])

$$(M_1)_{max} = 0{,}428\,P, \quad (M_2)_{max} = 0{,}323\,P.$$

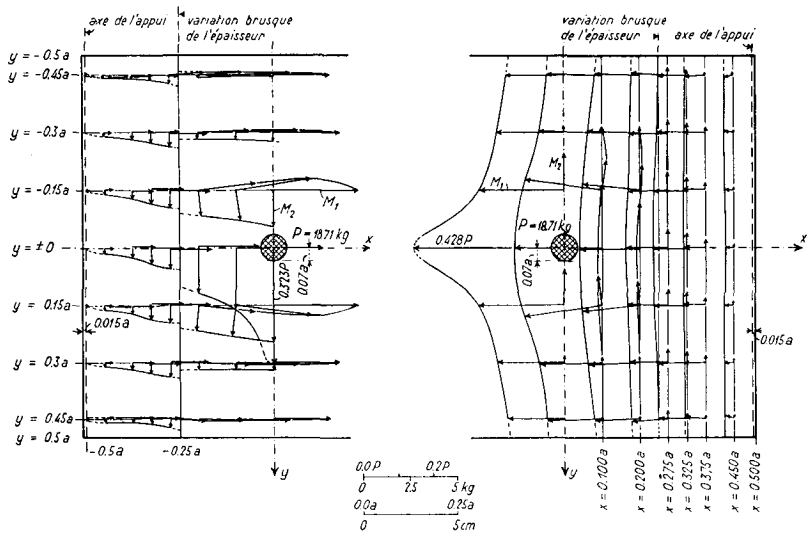


Fig. 21. Plaque carrée d'épaisseur variable de la fig. 19 (a = 20 cm, P = 18,71 kg). Diagrammes des moments principaux M_1 et M_2.

Nous avons ensuite calculé, en partant de M_1, M_2 et α, les valeurs des moments de flexion M_x, M_y et de torsion M_{xy} à l'aide des formules élémentaires, pour des sections parallèles aux axes x et y.

Les diagrammes de la figure 22 représentent les valeurs des moments de flexion M_x et M_y et de torsion M_{xy} relatives à des sections parallèles à l'axe des y. Pour ces sections, nous avons pu comparer les valeurs des intégrales $\int M_x dy$, déterminées en planimétrant les aires définies par les courbes M_x, aux

[29]) La méthode employée ne permet pas de mesurer les moments dans la petite surface sur laquelle est répartie la force P.

valeurs M_{xtot}, obtenues directement en multipliant la grandeur $P/2$ de la réaction résultante d'un appui par la distance de cet appui à la section considérée. La comparaison des valeurs indiquées à côtés des diagrammes en question, est satisfaisante.

Enfin la figure 23 donne les diagrammes des moments M_x, M_y et M_{xy} relatifs à des sections parallèles à l'axe x.

§ 4. *Discussion des résultats*

Pour faire ressortir l'influence de la variation de l'épaisseur sur les valeurs des moments, nous avons comparé les résultats obtenus à ceux relatifs à la plaque carrée d'épaisseur constante, déjà étudiée expérimentalement par le

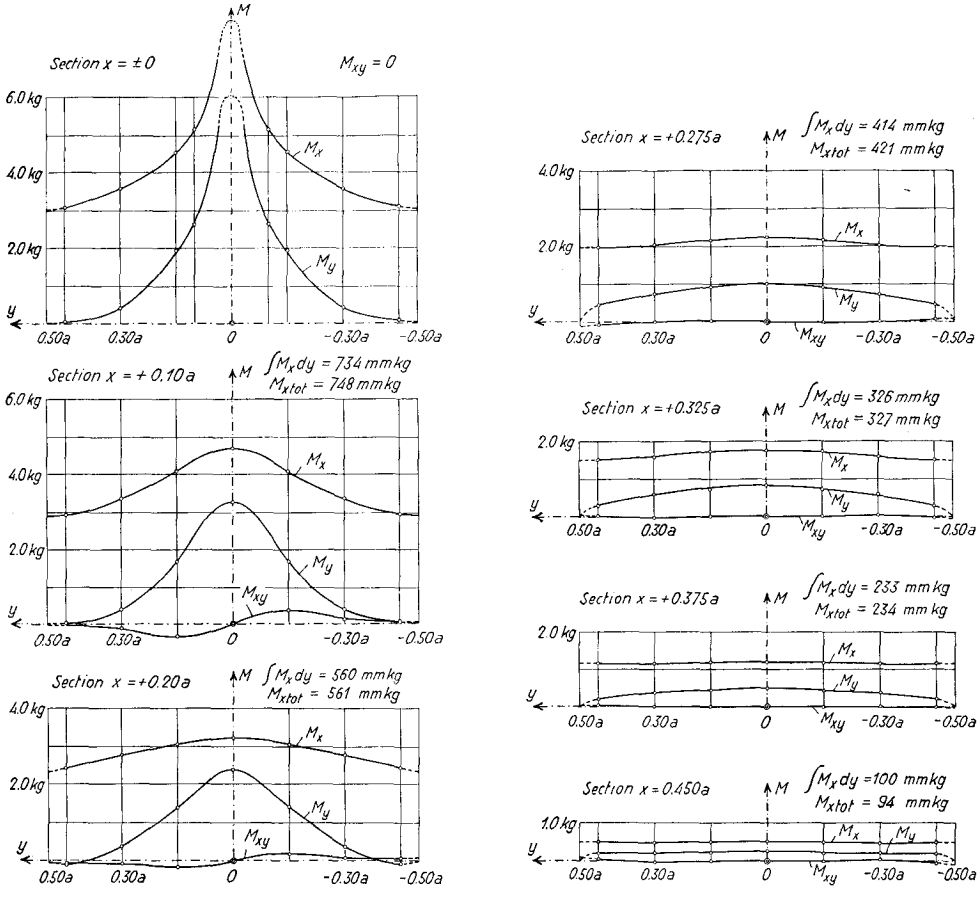


Fig. 22. Plaque carrée de la fig. 19. Diagrammes des moments M_x, M_y et M_{xy} relatifs à des sections parallèles à l'axe y.

Laboratoire[30]). Dans la figure 20, nous avons dessiné, à côté des trajectoires déjà mentionnées, celles des moments principaux relatives à la dernière plaque en question. Nous reconnaissons dans celle-ci la présence d'un point singulier attractif (S_a), coïncidant avec celui S_a de la première plaque, et la présence de deux points singuliers répulsifs (S_r). Dans la zone centrale, les trajectoires des deux plaques coïncident sensiblement, tandis qu'au voisinage des appuis, les différences sont sensibles.

Il est intéressant de remarquer que dans le cas de la plaque d'épaisseur variable, les trajectoires des moments principaux coupent la ligne de discontinuité de l'épaisseur sous un angle droit. Pour expliquer cette propriété, nous allons examiner les relations existant entre les moments M_n, M_t, M_{nt} et les courbures C_n, C_t et la torsion C_{nt} de la surface élastique, en un point P appartenant à une telle ligne de discontinuité F (fig. 24)[31]).

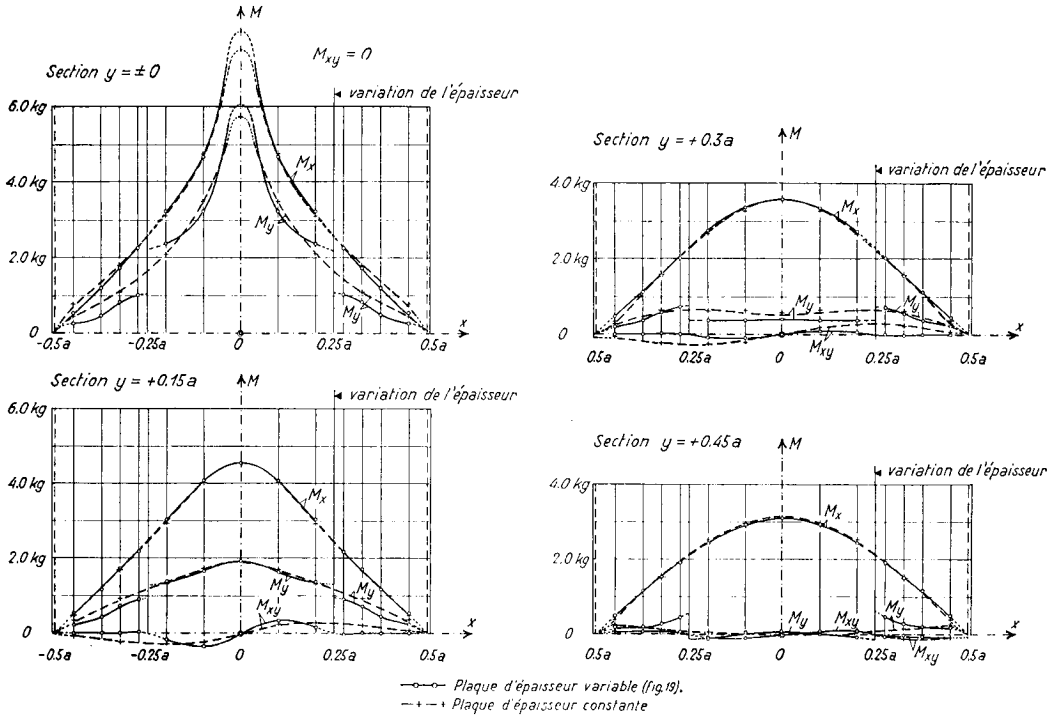


Fig. 23. Plaque carrée de la fig. 19. Diagrammes des moments M_x, M_y et M_{xy} relatifs à des sections parallèles à l'axe des x.

---

[30]) Voir la première des deux publications de *H. Favre* et *W. Schumann* citées dans la note 2, p. 41 et suiv.

[31]) Cette question a été traité dans un cas analogue par *W. Prager* (voir: Discontinuous fields of plastic stress and flow, Proceedings of the second National Congress of Applied Mechanics, June 14—18, 1954).

Pour que la loi d'égalité de l'action et de la réaction soit satisfaite au point P, il faut que:

$$(M_n)_1 = (M_n)_2, \tag{29}$$

$$(M_{nt})_1 = (M_{nt})_2, \tag{30}$$

tandis qu'en général on a

$$(M_t)_1 \neq (M_t)_2 \tag{31}$$

(les indices 1 et 2 se rapportent respectivement aux deux zones définies par la discontinuité). Entre les courbures et la torsion au point P, nous avons les relations:

$$(C_t)_1 = (C_t)_2, \tag{32}$$

$$(C_{nt})_1 = (C_{nt})_2, \tag{33}$$

tandis qu'en général

$$(C_n)_1 \neq (C_n)_2. \tag{34}$$

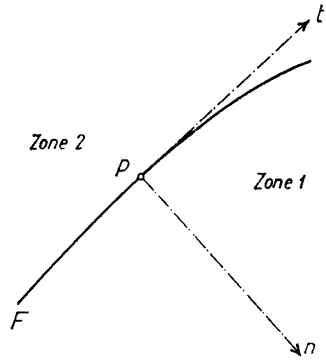


Fig. 24.

Or, pour chacune des deux parties, on a:

$$C_n = -\frac{1}{D(1-\nu^2)}(M_n - \nu M_t), \tag{35}$$

$$C_t = -\frac{1}{D(1-\nu^2)}(M_t - \nu M_n), \tag{36}$$

$$C_{nt} = -\frac{1}{D(1-\nu)} M_{nt}. \tag{37}$$

D_1 étant différent de D_2, on déduit facilement de (30), (33) et (37) que

$$\underline{M_{nt} = 0}. \tag{38}$$

Les trajectoires des moments principaux coupent donc F à angle droit. Enfin des expressions (29), (32) et (36), on tire:

$$\underline{(M_t)_2 - k(M_t)_1 = \nu M_n(1-k)}, \tag{39}$$

où $k = D_2/D_1$. Dans le tableau suivant, nous donnons les valeurs des deux membres de l'expression (39), obtenues par extrapolation des mesures. La concordance des résultats est satisfaisante[32]).

Section $y =$	0	$0{,}15\,a$	$0{,}3\,a$	$0{,}45\,a$
$(M_t)_2 - k\,(M_t)_1$ kg	0,81	0,79	0,70	0,64
$\nu M_n\,(1-k)$ kg	0,81	0,78	0,72	0,67

La figure 23 donne, dans les deux cas, les diagrammes des moments M_x, M_y et M_{xy} relatifs aux sections parallèles à x. Nous voyons ainsi qu'une discontinuité de l'épaisseur engendre une légère augmentation des moments maxima au voisinage du centre de la plaque (propriété déjà rencontrée dans l'étude des plaques circulaires). Cette discontinuité a de moins en moins d'influence sur la répartition des moments M_x à mesure qu'on s'éloigne du centre. On observe par contre dans les diagrammes des moments M_y et M_{xy}, des différences beaucoup plus grandes entre les valeurs relatives aux deux cas examinés. Remarquons encore les discontinuités des moments M_y engendrées par les variations de l'épaisseur et signalons le fait que les moments M_{xy} ont, pour la zone non renforcée, des valeurs relativement faibles.

Pour terminer, ajoutons que les angles de la plaque d'épaisseur variable étudiée n'ont eu aucune tendance à se soulever et à quitter les appuis, lorsqu'on appliquait la force P au centre. Cette dernière propriété a déjà été rencontrée dans le cas de la plaque carrée d'épaisseur constante.

---

[32]) La relation (39) n'est plus valable pour les points situés sur le contour de la plaque.

Curriculum vitae

Né le 21 décembre 1930 à Malvaglia (Tessin), j'ai fréquenté l'école primaire de ce village, puis le Gymnase cantonal de Biasca, enfin le Lycée cantonal de Lugano.

En 1951, je suis entré à l'Ecole polytechnique fédérale, dans la Section du Génie civil. J'ai obtenu en janvier 1956 le diplôme d'ingénieur.

Depuis le 3 janvier 1956, je suis assistant de la Chaire de Mécanique en langue française de l'E.P.F. (Prof. Dr H. Favre), où je collabore d'une part à l'enseignement et d'autre part aux recherches faites dans le Laboratoire de Photoélasticité rattaché à cette chaire.