ETH zürich

ETH Library

Verallgemeinerte kanonische Transformationen zur Abbildung von Keplerbewegungen auf harmonische Oszillatoren und zugehörige Störungstheorie

Doctoral Thesis

Author(s):
Scheifele, Gerhard

Publication date:
1968

Permanent link:
https://doi.org/https://doi.org/10.3929/ethz-a-000105261

Rights / license:
In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

This page was generated automatically upon download from the ETH Zurich Research Collection.
For more information, please consult the Terms of use.

Diss. Nr. 4212

Verallgemeinerte kanonische Transformationen zur Abbildung von Keplerbewegungen auf harmonische Oszillatoren und zugehörige Störungstheorie

ABHANDLUNG

zur Erlangung
der Würde eines Doktors der Naturwissenschaften
der
Eidgenössischen Technischen Hochschule
Zürich

vorgelegt von

GERHARD SCHEIFELE
dipl. Physiker ETH

geboren am 26. Juli 1940
von Zürich und Kilchberg (Kt. Zürich)

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. E. Stiefel, Referent
Prof. Dr. Ch. Wehrli, Korreferent

Juris Druck + Verlag Zürich
1968

EINLEITUNG

Die von Levi-Cività [3] erfundene Regularisierung der e b e n e n Bewegung eines Mobils, das einer zentralen Gravitationskraft und eventuell Störungskräften unterworfen ist, wurde vor einigen Jahren in [1] auf r ä u m l i c h e Bewegungen verallgemeinert, wobei anstelle der d r e i kartesischen Koordinaten v i e r Lagekoordinaten u_1, u_2, u_3, u_4 benutzt wurden. Diese Regularisierungen bewirken nicht nur, dass das nichtlineare und im Zentrum singuläre System der Newton'schen Bewegungsdifferentialgleichungen in ein durchwegs reguläres System transformiert wird, sondern dass im Falle der reinen Keplerbewegung die Bildbewegung im u_j-Raum einfach eine harmonische Schwingung ist.

Von diesen Beziehungen zwischen Himmelsmechanik und Schwingungstheorie wurde in verschiedenen Publikationen [4],[8],[9],[10] Gebrauch gemacht. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die genannte Verwandtschaft mit dem tiefere Einsicht vermittelnden Instrument der Hamilton'schen kanonischen Theorie zu untersuchen. Dabei stand zunächst hindernd im Wege, dass diese Theorie für dimensionserhöhende Transformationen (Abbildung des dreidimensionalen physikalischen Raumes in den vierdimensionalen u_j-Raum) nicht zur Verfügung stand. Ausserdem ist es eine wesentliche Eigenschaft der Levi-Cività-Transformation und ihrer Verallgemeinerung, dass anstelle der physikalischen Zeit t eine neue unabhängige Variable s (im wesentlichen die exzentrische Anomalie) benutzt werden muss. Damit erscheint t als eine weitere Koordinate, womit die Dimension noch einmal erhöht wird und ferner ein zu t konjugierter Impuls eingeführt werden muss. Letzterer ist das Frequenzquadrat der oben genannten entstehenden harmonischen Schwingung.

Im Teil I wird als Grundlage eine Verallgemeinerung der Hamilton'schen Mechanik geschaffen, die den eben genannten Umständen Rechnung trägt; es sind darin auch Kräfte ohne Potential einbegriffen.

Der Teil II gipfelt in der Formulierung der verallgemeinerten Levi-Cività-Transformation (auch KS-Transformation genannt) als verallgemeinerte kanonische Transformation. Das zugehörige kanonische Differentialgleichungssystem besteht aus 10 Differentialgleichungen 1. Ordnung für die vier Variabeln u_j und die vier zugehörigen Impulse p_j sowie

für $u_5 = t/2$ und das Frequenzquadrat p_5 als letztes konjugiertes Paar. Störkräfte ohne Potential sind einbegriffen und die kanonische Differentialgleichung für p_5 ist mit dem Energiesatz im physikalischen Raum äquivalent. Diejenige für u_5 bedeutet die Poincaré'sche Transformation $\frac{dt}{ds} = r$.

Nun ist im Teil III der Weg offen zur Anwendung der Jacobi'schen Theorie in diesem 10-dimensionalen Phasenraum. Dies führt auf ein System von 10 Elementen. Die ersten vier Elementenpaare können als Amplituden und Phasen der gestörten harmonischen Schwingung aufgefasst werden. Das eine Element des letzten Paares ist ein Element für die Zeitkoordinate t. Weitere kanonische Transformationen adaptieren diese Elemente an die speziellen Bedürfnisse der numerischen oder analytischen Integration.

Der Teil IV soll belegen, dass unsere kanonische Formulierung sich auch als Ausgangspunkt für analytische Störungstheorien eignen kann.

Infolge des Einsatzes der Hamilton'schen Mechanik erscheinen einige der bisher publizierten Methoden als Spezialfälle einer einheitlichen Theorie, und manche bisher ad hoc erfundene Massnahmen ergeben sich zwangsläufig, wie z.B.: Das Einführen des Zeitelementes, Methoden zur Konstanthaltung der Frequenz eines gestörten Schwingers, Vermeidung gemischt-säkularer Glieder und die Einführung Stumpff'scher c-Funktionen, was in dieser Theorie schon in [10] und [15] geschah.

Die vielen Anregungen und die wertvolle Kritik von Herrn Prof.Dr. E. Stiefel waren entscheidend für das Zustandekommen dieser Arbeit. Ich möchte Herrn Prof. Stiefel an dieser Stelle dafür danken.

Dem Korreferenten Herrn Prof. Dr. Ch. Wehrli danke ich für das Interesse das er dieser Dissertation entgegengebracht hat.