ETH zürich

ETH Library

Einige differentialgeometrische Kongruenzsätze für geschlossene Flächen und Hyperflächen

Doctoral Thesis

Author(s):
Voss, Konrad

Publication date:
1956

Permanent link:
https://doi.org/https://doi.org/10.3929/ethz-a-000113894

Rights / license:
In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

This page was generated automatically upon download from the ETH Zurich Research Collection.
For more information, please consult the Terms of use.

Prom. Nr. 2526

Einige differentialgeometrische Kongruenzsätze für geschlossene Flächen und Hyperflächen

Von der

Eidgenössischen Technischen Hochschule
in Zürich

zur Erlangung der Würde eines Doktors der Mathematik
genehmigte

Promotionsarbeit

Vorgelegt von

KONRAD VOSS
deutscher Staatsangehöriger

Referent: Herr Prof. Dr. H. HOPF
Korreferent: Herr Prof. Dr. A. PFLUGER

BRÜHLSCHE UNIVERSITÄTSDRUCKEREI GIESSEN
1956

Einleitung

In dieser Arbeit werden n-dimensionale Flächen im $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raum untersucht. Die Flächen sollen mehrmals differenzierbar und regulär im Sinne der Differentialgeometrie sein. Es wird sich besonders darum handeln, Aussagen über geschlossene Flächen zu gewinnen. Zum Teil wird nur der Fall $n = 2$ durchgeführt werden, jedoch lassen sich die Ergebnisse ausnahmslos auf beliebige Dimensionen verallgemeinern.

1. Den Ausgangspunkt unserer Untersuchung bildet die Frage, ob zwischen den Hauptkrümmungen k_1, k_2 einer geschlossenen (2-dimensionalen) Fläche eine monoton abnehmende Relation $k_2 = f(k_1)$ bestehen kann. Dies ist ein Teil der allgemeineren Frage nach geschlossenen Flächen mit einer Relation

$$W(k_1, k_2) = 0\,,$$

zwischen den Hauptkrümmungen, die von H. Hopf [1][1]) untersucht worden ist. Wir erwähnen in diesem Zusammenhang zunächst folgenden Satz:

Satz A. *Zwischen den Hauptkrümmungen einer Eifläche kann keine monoton abnehmende Relation $k_2 = f(k_1)$ bestehen, es sei denn, die Fläche ist eine Kugel.*

Darin sind z. B. die bekannten — zuerst von H. Liebmann bewiesenen — Spezialfälle $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = c$ und $K = k_1 k_2 = c$ enthalten.

Der Satz A folgt aus einem allgemeineren Satze von A. D. Alexandrov [2], auf den wir noch zurückkommen werden[2]). Unabhängig davon ist der Satz A von S. S. Chern [5] in der obenstehenden Form ausgesprochen worden. Der Beweis wird mit der gleichen Methode geführt, wie sie Hilbert für den Fall $K = c$ angegeben hat, etwa in der Fassung, die in dem Lehrbuch von W. Blaschke [6] dargestellt ist[3]). Diese Methode besteht darin, daß man denjenigen Punkt der Fläche betrachtet, in dem die größere Hauptkrümmung ihr Maximum erreicht. Dann ist der Satz A ein Korollar des folgenden lokalen Satzes:

Satz B. *Auf einem positiv gekrümmten Flächenstück, welches nicht Teil einer Kugel ist, kann nicht in einem Punkt die größere Hauptkrümmung ein Maximum und gleichzeitig die kleinere ein Minimum haben.*

---

[1]) Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

[2]) Man vgl. auch die Arbeiten von Pogorelov [3] und Hartman und Wintner [4], wo die Voraussetzung der Analytizität in [2] wesentlich abgeschwächt wird.

[3]) Vgl. die Ausführungen in [1], Einleitung, Nr. 5.

Dieser Satz hat wesentlich allgemeineren Charakter als der Satz A, da jetzt von einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen nicht die Rede ist.

Der Beweis des Satzes B sei hier im Anschluß an BLASCHKE kurz wiedergegeben[4]): Wir betrachten ein beliebig gekrümmtes Flächenstück, auf dem die größere Hauptkrümmung in einem Punkte o ein Maximum und die kleinere ein Minimum erreicht. Dann wird behauptet: *Entweder ist die Fläche ein Kugelstück, oder die Gaußsche Krümmung in o ist nicht positiv.* Falls o ein Nabelpunkt ist, so sind wir fertig, denn dann stimmt das Maximum der größeren Hauptkrümmung mit dem Minimum der kleineren überein, und somit sind die Hauptkrümmungen überall gleich, und die Fläche ist Teil einer Kugel oder Ebene. Sei also o kein Nabelpunkt. Dann lassen sich in der Umgebung von o Krümmungslinien-Parameter u, v so einführen, daß auf den beiden Krümmungslinien durch o außerdem noch u bzw. v die Bogenlänge ist. Die ersten Fundamentalgrößen seien mit $E, F, G\,(F = 0)$ und die zu den u- bzw. v-Linien gehörigen Hauptkrümmungen mit k' bzw. k'' bezeichnet. Drückt man nun in der Gleichung des Gaußschen theorema egregium die Ableitungen E_v, E_{vv}, G_u, G_{uu} auf Grund der Codazzischen Gleichungen durch k', k'' und ihre Ableitungen aus und beachtet noch, daß in o $E = G = 1$ ist, so erhält man für die Gaußsche Krümmung im Punkte o einen Ausdruck der Form

$$K = \frac{k'_{vv} - k''_{uu}}{k' - k''} + A\,k'_v + B\,k''_u.$$

Haben nun k' und k'' in o die vorausgesetzte Extremaleigenschaft, so liest man ab: in o ist $K \leqq 0$, q.e.d. Übrigens sieht man an Beispielen, daß diese Situation tatsächlich vorkommt.

Man könnte nun vermuten, daß auf nicht-konvexen geschlossenen Flächen — etwa vom Geschlecht 0 — monoton abnehmende Relationen möglich sind. Dies ist jedoch nicht der Fall. Beschränken wir uns auf differenzierbare Funktionen $f(k_1)$ mit negativer Ableitung. Dann folgt aus Sätzen von H. HOPF:

Satz C. *Zwischen den Hauptkrümmungen einer analytischen geschlossenen Fläche vom Geschlecht 0 kann keine monoton abnehmende Relation $k_2 = f(k_1)$ bestehen, es sei denn, die Fläche ist eine Kugel*[5]).

Damit ist unsere Frage (unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen) für Flächen vom Geschlecht 0 beantwortet; dagegen ist — soviel ich weiß — die Frage offen, ob es Flächen vom Geschlecht $g \geqq 1$ mit einer Relation der genannten Art gibt. Einzig für die spezielle Relation $H = c$ existieren Teilergebnisse, denen zufolge es unter allen geschlossenen Flächen mit $g \geqq 1$ einer gewissen Flächenklasse keine Flächen mit $H = c$ gibt. Diese noch zu erläuternden Sätze, die sich auch auf nicht-konstantes H beziehen, sind in einer

[4]) W. BLASCHKE [6], S. 195—197. Übrigens ist das am Schluß des dortigen § 91 formulierte Ergebnis falsch: Z. B. auf den bekannten Rotationsflächen mit $K = 1$ werden die Hauptkrümmungen in den Punkten des größten Parallelkreises extremal, ohne daß diese Punkte Nabelpunkte sind (die größere Hauptkrümmung hat ein Minimum).

[5]) Vgl. [1], S. 237, Satz B'. Dort braucht die Relation nur in der Umgebung der Nabelpunkte zu existieren und monoton zu sein. Vgl. auch den Satz C auf S. 238 und dazu die Bemerkung in [7], S. 53, über die Voraussetzung der Analytizität.

gemeinsamen Note von H. Hopf und mir [8] dargestellt worden. (Vgl. auch den Vortrag [7], wo die Anwendung auf Flächen mit konstantem H ausführlich diskutiert wird.)

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht in einer Ausarbeitung und Erweiterung der Ideen von [8]. Erstens werden den in [8] abgeleiteten Integralformeln für H, aus denen sich die dortigen Sätze ergeben, Integralformeln und Sätze für K — allgemeiner: für die elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen einer n-dimensionalen Fläche — an die Seite gestellt. Zweitens wird noch eine andersartige Methode entwickelt, mit deren Hilfe sich die entsprechenden Sätze folgern lassen, wenn man H bzw. K durch eine symmetrische Funktion $W(k_1, k_2)$ ersetzt, die in beiden Variablen monoton ist, und zwar *gleichsinnig monoton*, d. h. etwa monoton wachsend in beiden Variablen; dies wird allerdings nur unter Beschränkung auf analytische Flächen geschehen. Wir werden beweisen (Sätze IV und IV'):

Auf einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht $g \geqq 1$ mit „genügend vielen" Konvexitätsrichtungen (in einem noch zu präzisierenden Sinne) *kann keine monoton abnehmende Relation $k_2 = f(k_1)$ bestehen* (insbesondere keine derartige symmetrische Relation $W(k_1, k_2) = 0$)[6].

Dabei heiße die geschlossene Fläche F konvex in einer Richtung, wenn jede Gerade dieser Richtung höchstens zwei Punkte mit F gemeinsam hat (genaue Definition im § 2). Eine Eifläche ist in jeder Richtung konvex; aber es gibt auch nicht-konvexe Flächen von beliebigem Geschlecht, welche Konvexitätsrichtungen besitzen. Zum Beispiel ist die gewöhnliche Torusfläche in der Richtung der Rotationsachse und in allen benachbarten Richtungen konvex.

Beim obenstehenden Satz sind also nur Flächen von verhältnismäßig einfacher Gestalt zugelassen, und die Frage bleibt offen, wie die Verhältnisse für beliebige geschlossene Flächen sind.

2. Die in Nr. 1 angedeuteten Sätze IV und IV' werden sich aus einem allgemeineren Satze ergeben, den wir den *Symmetriesatz* nennen (Satz II; genaue Formulierung im § 5):

F sei eine in der Richtung $\mathfrak{c}$ konvexe Fläche und $W(k_1, k_2)$ eine symmetrische Funktion, die in beiden Variablen gleichsinnig monoton ist. Falls dann für jede Schnittgerade der Richtung $\mathfrak{c}$ die Funktion W in den beiden Schnittpunkten den gleichen Wert hat, so besitzt F eine Symmetrieebene senkrecht zu $\mathfrak{c}$.

Von der Funktion W wird hier nicht vorausgesetzt, daß sie auf F konstant sei; ist dies aber der Fall, so folgt, daß es zu jeder Konvexitätsrichtung eine Symmetrieebene gibt. Eine Fläche mit genügend vielen Symmetrieebenen muß aber eine Kugel sein.

3. Um den Symmetriesatz zu beweisen, leiten wir folgenden allgemeineren Satz her, den wir den *Translationssatz* nennen wollen (Satz I):

Zwischen den Flächen F und $\bar{F}$ bestehe eine „Parallelabbildung", d. h. eine Abbildung, bei der die Verbindungsgeraden von Punkt und Bildpunkt eine feste

[6]) Für die Relation $H = c$ siehe [7], Satz II.

Richtung haben. Wir setzen voraus, *eine Funktion $W(k_1, k_2)$ der in Nr. 2 betrachteten Art habe in einander entsprechenden Punkten von F und $\overline{F}$ den gleichen Wert,* und zeigen: *dann ist die Abbildung eine Translation.*

Daraus, daß die beiden Flächen die Funktion W im Sinne der Parallelabbildung gemeinsam haben, folgt also ihre Kongruenz.

Man kann den Translationssatz mit dem Satz von ALEXANDROV [2] vergleichen, der im Zusammenhang mit dem Satz A genannt wurde: Dort werden zwei Eiflächen betrachtet, die so aufeinander abgebildet sind, daß die Normalen parallel und eine gleichsinnig monotone Funktion der Hauptkrümmungen invariant ist. Daraus folgt, daß die Abbildung eine Translation ist. Unserm Symmetriesatz entspricht folgendes Korollar aus dem ALEXANDROVschen Satze: *Die Eifläche F habe die Eigenschaft, daß in antipodischen Punktepaaren, d. h. in Punkten mit parallelen Tangentialebenen, eine gleichsinnig monotone Funktion der Hauptkrümmungen den gleichen Wert hat. Dann ist F zentralsymmetrisch.*

4. Die Paragraphen 1—4 haben vorbereitenden Charakter. Im § 1 sind Bezeichnungen und Formeln der Flächentheorie zusammengestellt. Im § 2 werden die Parallelabbildungen definiert und ihre Eigenschaften diskutiert. § 3 enthält Hilfssätze über symmetrische Funktionen von zwei Variablen, § 4 Formeln für die Variation der elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen einer n-dimensionalen Fläche. Anschließend werden in § 5 und 6 die Sätze I und II bewiesen und im § 7 auf Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen angewandt.

Das beim Translationssatz vorliegende Problem läßt sich, wie sich zeigen wird, durch eine Funktion charakterisieren, welche einer *elliptischen Differentialgleichung* genügt. Daher kann man das Maximumprinzip anwenden. Jedoch erfordern gewisse Punkte, in denen die Differentialgleichung ausartet, eine besondere Betrachtung. Diese *Verfeinerung des Maximumprinzips* wird im § 5 geliefert (Satz 1), und zwar für analytische Flächen.

Untersucht man, wann die erwähnte Differentialgleichung selbstadjungiert ist, so zeigt sich, daß dies (bei 2-dimensionalen Flächen) für die Funktionen $W = H$ und $W = K$ zutrifft, und in gewissem Sinne nur für diese Funktionen. In diesen beiden Fällen werden im § 8 die angekündigten Integralformeln hergeleitet, aus denen sich der Translationssatz unter den üblichen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ergibt. Zur Herleitung der Integralformeln wird ein besonderer Kalkül verwendet, der sich auch sonst als nützlich erweist. Übrigens sind die Integralformeln vom gleichen Typus wie die Greensche Formel, mit der man zeigt, daß die einzigen harmonischen Funktionen auf einer geschlossenen Fläche die Konstanten sind.

Anschließend werden die Integralformeln im § 9 auf n-dimensionale Flächen im R_{n+1} mit beliebigem n verallgemeinert. Man erhält Kongruenzsätze von folgender Art (Sätze V und VI): *Wenn bei einer Parallelabbildung einer geschlossenen Fläche auf eine andere eine der elementarsymmetrischen Funktionen der n Hauptkrümmungen k_i invariant ist, so sind die Flächen kongruent.* Daraus ergibt sich dann: *Falls in je zwei Punkten, in denen eine Eifläche von den*

Geraden einer Parallelenschar getroffen wird, eine der obigen Krümmungsfunktionen den gleichen Wert hat, so ist die Fläche symmetrisch. Dies ist eine Verschärfung der Sätze von W. Süss [9], daß die Kugel die einzige Eifläche ist, auf der eine der genannten Krümmungsfunktionen konstant ist[7]). Übrigens läßt sich dieser Satz auf Linearkombinationen der Krümmungsfunktionen mit positiven Koeffizienten erweitern (Satz VII).

Die Tatsache, daß eine gewisse Differentialgleichung selbstadjungiert ist, hängt mit Variationsproblemen zusammen. Um den Integralformeln — und damit auch den Kongruenzsätzen — eine entsprechende Deutung zu geben, werden im § 10 die *Flächenintegrale der elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen* betrachtet[8]). Dann zeigt sich, daß diese Krümmungsintegrale *bei einer linearen Parallelvariation* (Variation in konstanter Richtung) *konvexe Funktionen des Variationsparameters* sind (Satz IX). Im Falle des Symmetriesatzes liefert der betrachtete Variationsprozeß die *Steinersche Symmetrisierung* an einer Ebene und damit die Tatsache, daß die *Krümmungsintegrale monoton abnehmen*, es sei denn, die Fläche ist bereits symmetrisch (Satz X). Während diese Tatsache für die Oberfläche wohlbekannt ist, scheint sie für den allgemeinen Fall noch nicht bewiesen worden zu sein[9]).

Schließlich werden im § 11 berandete Flächen betrachtet, denen an Stelle der Bedingung der Geschlossenheit geeignete Randbedingungen auferlegt werden. Dann gelten zum Translationssatz analoge Kongruenzsätze. Nimmt man speziell etwa 2-dimensionale Flächen, die sich eineindeutig in die x, y-Ebene projizieren lassen, so erhält man Einzigkeitssätze für die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, die sich z. T. mit bekannten Sätzen überdecken, z. B. (im Falle der Gaußschen Krümmung K) mit einem Satz von F. Rellich [11] über das erste Randwertproblem bei Monge-Ampèreschen Differentialgleichungen. (Außer dem ersten Randwertproblem wird im § 11 noch eine andersartige Randwertaufgabe vorkommen [Randbedingung (11.2)], bei der die ersten Ableitungen am Rande gegen ∞ gehen.) Unsere Methode ergibt somit für gewisse spezielle Differentialgleichungen neuartige Beweise von Unitätssätzen mit Hilfe von Integralformeln.

Zum Schluß wird im § 12 mit der Methode des § 5 ein allgemeiner Einzigkeitssatz für elliptische Differentialgleichungen bewiesen, der den zitierten Satz von Rellich umfaßt: Die Differentialgleichung

$$\Phi(x, y, p, q, r, s, t) = 0,$$

wo p, q und r, s, t erste bzw. zweite Ableitungen einer Funktion sind, enthalte die unbekannte Funktion $u(x, y)$ nicht. Dann wird unter gewissen Annahmen über die Konvexität der beiden Gebiete, in denen der Differentialausdruck Φ positiv bzw. negativ elliptisch ist, bewiesen (Satz XI):

---

[7]) In [9] wird der Satz gleich für die relativgeometrischen Krümmungsfunktionen bewiesen.

[8]) Bei konvexen Flächen sind diese bis auf einen Faktor gleich Quermaßintegralen.

[9]) Pólya und Szegö [10], S. 168—170, zeigen, daß das $(n-1)$-te Krümmungsintegral für die symmetrisierte Fläche nicht größer ist als für die Ausgangsfläche.

Das erste Randwertproblem der Differentialgleichung $\Phi = 0$ besitzt höchstens zwei Lösungen, für welche Φ elliptisch ist, und zwar höchstens je eine positiv bzw. negativ elliptische Lösung.

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Professor H. Hopf. Ihm, meinem verehrten Lehrer, sei an dieser Stelle mein herzlichster Dank zum Ausdruck gebracht.

§ 1. Bezeichnungen und Formeln

Die n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ sei h-mal stetig differenzierbar ($h \geqq 2$) oder auch analytisch, d. h. die beim Übergang von einem lokalen Parametersystem $u^1, \ldots, u^n$ zu einem anderen entstehenden Parametertransformationen werden durch h-mal stetig differenzierbare bzw. reell analytische Funktionen mit positiver Funktionaldeterminante vermittelt. Wir nennen $\mathfrak{F}$ die Parameterfläche.

Eine n-dimensionale Fläche F im euklidischen Raum R_{n+1} ist gegeben durch eine Vektorfunktion $\mathfrak{x}(p)$, $p \in \mathfrak{F}$, wobei $\mathfrak{x}$ als Funktion lokaler Parameter h-mal stetig differenzierbar bzw. analytisch sein soll. Partielle Ableitung nach u^i sei durch Anhängen des Index u^i angedeutet. Wir setzen voraus, daß die Vektoren $\mathfrak{x}_{u^i} = \mathfrak{x}_i$ linear unabhängig sind. Demzufolge ist die Abbildung von $\mathfrak{F}$ in den Raum lokal eineindeutig; dagegen kann F Selbstdurchdringungen haben, d. h. es können mehrere Punkte p von $\mathfrak{F}$ auf einen Punkt des Raumes abgebildet werden. Die Punkte von F (also Punkte des Raumes) werden wir ebenfalls mit p bezeichnen; unter einer Umgebung eines Flächenpunktes ist dann das Bild einer Umgebung auf $\mathfrak{F}$ zu verstehen.

Sei $g_{ij} = \mathfrak{x}_i \mathfrak{x}_j$ der metrische Fundamentaltensor der Fläche F, $|g_{ij}| = g$ seine Determinante, g^{ij} der zu g_{ij} inverse Tensor und $dA = \sqrt{g}\, du^1 \ldots du^n$ das Flächenelement von F. Wir benutzen die Schreibweise der Tensorrechnung, wobei mit Hilfe der g^{ij} bzw. g_{ij} Indizes herauf- und heruntergezogen werden. Die zu den g_{ij} gehörigen Christoffelschen Symbole werden mit Γ_{ij}^k bezeichnet, die kovarianten Ableitungen einer Funktion f bezüglich der Γ durch Anhängen eines Index, insbesondere also

$$f_i = f_{u^i}, \quad f_{ij} = f_{u^i u^j} - \Gamma_{ij}^k f_k .$$

Die aus $n+1$ räumlichen Vektoren $\mathfrak{a}_\nu$ gebildete Determinante bezeichnen wir mit $(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{n+1})$. Da F orientiert ist und die $\mathfrak{x}_i$ linear unabhängig sind, läßt sich der Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ der Flächennormalen eindeutig definieren durch die Forderungen

$$\mathfrak{n}\, \mathfrak{x}_i = 0, \quad (\mathfrak{n}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n) = +\sqrt{g}.$$

Weiter setzen wir

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = \sqrt{g}\, \operatorname{sgn}(i_1 \ldots i_n)\,, \tag{1.1}$$

wobei unter $\operatorname{sgn}(i_1 \ldots i_n)$ das Signum der Indexpermutation $i_1 \ldots i_n$ zu verstehen ist bzw. die Zahl 0, falls zwei Indizes gleich sind. ε ist ein Tensor bei Beschränkung auf Parametertransformationen mit positiver Funktional-