ETH zürich

ETH Library

Some representation problems in combinatory logic

Doctoral Thesis

Author(s):
Weibel, Trudy

Publication date:
1989

Permanent link:
https://doi.org/https://doi.org/10.3929/ethz-a-000518475

Rights / license:
In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

This page was generated automatically upon download from the ETH Zurich Research Collection.
For more information, please consult the Terms of use.

Diss. ETH Nr. 8903

Some Representation Problems in Combinatory Logic

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZÜRICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
TRUDY WEIBEL
Dipl. Math. ETH
born September 17, 1957
citizen of Malters/LU

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. E. Engeler, examiner
Prof. Dr. H. Läuchli, co-examiner

1989

Abstract

The graph model, $\underline{D}_A$, introduced by Engeler [Eng81], is well known to be a convenient model of combinatory logic that allows simple computations of the application within the model.

In this thesis, it is shown that $\underline{D}_A$ also contains a very rich structure: any universal or algorithmic class is combinatorially representable by the elementary means of equations. More precisely, given a universal class (or algorithmic class, respectively) there is a set of equations, Δ', such that each solution of Δ' in $\underline{D}_A$ determines an inner model of $\underline{D}_A$, isomorphic to the completion of some model of the given class. The converse is also true: for each model of the given class, there is a solution of Δ' in $\underline{D}_A$ that produces an inner model of $\underline{D}_A$, isomorphic to the completion of the given model. The main ideas of this representation property of the graph model were already presented in [Eng88a], where an algebraic version was proved. The first part of this work is concerned with the extension to the relational case, namely to relational structures belonging respectively, to universal and algorithmic classes. For this, the notion of relations and their boolean compositions are defined within $\underline{D}_A$. The concept of an algorithmic class is developed, which is then directly available for general use within combinatory logic, independent of the graph model. The chief ingredients of the above representation theorem are the equations Δ' that have to be found according to the underlying class of structures.

In the second part of this thesis we reveal, by means of combinatory logic, those inherent basic properties of the graph model that are responsible for its richness. Semi-universal combinatory models are introduced as first order definable structures. Once more, suitable equations, Δ', are found in which the first part of the representation theorem holds over equational, universal and algorithmic classes. For any of these classes, there is a set of equations Δ', such that each solution of Δ', in the semi-universal combinatory model, determines an inner model isomorphic to the completion of some structure belonging to the given class. By satisfying additional second order axioms, these universal combinatory models also ensure the second part: Therefore, when given an arbitrary structure of the class under consideration (either equational, universal or algorithmic), the second order axioms furnish a solution of the equations Δ' in the universal combinatory model, such that its corresponding inner model is isomorphic to the completion of that previously given structure.

Kurzfassung

Im ausgehenden letzten Jahrhundert wurde der Begriff der Funktion mengentheoretisch aufgefaßt, ganz im Zeichen der gängigen Strömungen jener Zeit. Funktionen wurden als Graphen dargestellt, das heißt als Menge von Paaren von Argument und Funktionswert. Wie wichtig der Beitrag dieser Begriffsbildung in der Mathematik ist, zeigt sich sehr deutlich an ihrer noch heute weitverbreiteten Auffassung unter Mathematikern.

Unter dem starken Einfluß der Informatik auf die Mathematik nimmt das Interesse zu, die Funktion als Algorithmus aufzufassen. Dieses Konzept geht zurück auf Ideen von Schönfinkel, Curry und Church in den zwanziger und dreißiger Jahren. Sie faßten Funktionen wieder auf als uneingeschränkte Operationen oder Regeln, so daß Funktionen auf beliebige Argumente angewandt werden können ($f(x)$ für beliebiges x). So kann man Funktionen verstehen als Programme, die auf anderen Programmen operieren, insbesondere auch auf sich selbst ($f(f)$).

Curry entwickelte in [Cur30] eine Theorie der kombinatorischen Logik, eine typenfreie Theorie, deren Objekte—die Kombinatoren—gleichzeitig als Funktionen und als Argumente behandelt werden. Diese Theorie basiert auf dem Prinzip der ***kombinatorischen Vollständigkeit***: Jeder applikative Ausdruck, aufgebaut aus Funktionen, kann nicht nur wiederum als Funktion aufgefaßt, sondern ebenfalls durch einen Kombinator dargestellt werden. Zum Beispiel sei f die dreistellige Funktion $f(x,y,z) := x(z)$. Kombinatorische Vollständigkeit gewährleistet nun die Existenz eines Kombinators F, der f darstellt im Sinne von: $f(x,y,z) = ((F(x))(y))(z)$.

Modelle dieser Theorie heißen ***kombinatorische Algebren***, Strukturen der Form $\langle A, \circ \rangle$, wobei $\circ$ eine zweistellige Operation ist und die kombinatorische Vollständigkeit gilt.

Zunächst konzentrierte sich die Entwicklung auf den Ausbau der Theorie. Erst in den späten sechziger Jahren stellte Scott in [Sco69] bzw. [Sco72] eine erste Konstruktion von Modellen der kombinatorischen Logik vor, die D_∞. Zu Beginn der nächsten Dekade entwickelten Scott und Plotkin dann einfachere Konstruktionen, bekannt als $P\omega$.

In [Eng81] hat Engeler ein weiteres Modell, das Graphenmodell $\underline{D}_A$, vorgestellt, das durch seine Einfachheit und gleichzeitig große Flexibilität besticht. Auch sind darin die beiden Sichtweisen von Funktionen verwoben: Im Graphenmodell wird die Applikation $\circ$ so realisiert, daß Funktionen als Algorithmen erscheinen, während andererseits Funktionen derart als Objekte in $\underline{D}_A$ dargestellt sind, daß ihre Verwandtschaft zu ihren Graphen augenfällig ist.

Als ich die Forschung unter der Betreuung von Prof. Engeler begann, sind gerade seine Resultate über Darstellungen in dem Graphenmodell entstanden ([Eng88a]). Die dortige Charakterisierung von Varietäten in dem explizit gegebenen Modell $\underline{D}_A$ löste die Frage nach Verallgemeinerungen auf zwei Ebenen aus.

Als erstes werden in der vorliegenden Arbeit die Klassen von Strukturen, die dargestellt werden, erweitert von Varietäten auf universelle und algorithmische Klassen. Es wird gezeigt, daß die Methoden aus [Eng88a] für algebraische Strukturen und algebraische

Klassen (Varietäten) erweitert werden können auf relationale Strukturen und ihre Klassen. Genauer: zu einer vorgegebenen universellen Klasse gibt es eine Menge Δ' von Gleichungen derart, daß jede Lösung von Δ' in $\underline{D}_A$ ein inneres Modell von $\underline{D}_A$ bestimmt, das isomorph zu der Vervollständigung einer Struktur der gegebenen universellen Klasse ist, und umgekehrt, daß jede Struktur der universellen Klasse eine Lösung von Δ' in $\underline{D}_A$ erzeugt, deren zugehöriges inneres Modell von $\underline{D}_A$ isomorph zur Vervollständigung der Ausgangsstruktur ist. Zu diesem Zweck werden in $\underline{D}_A$ der Begriff der Relation und ihre Booleschen Kompositionen definiert, womit die Axiomatisierung mit universellen Formeln eingefangen ist. Analog dazu werden die algorithmischen Klassen behandelt, welche aufgrund ihrer Definition auch außerhalb des Graphenmodells in der kombinatorischen Logik direkte Verwendung finden. Im wesentlichen bilden diese Resultate zum relationalen Fall konservative Erweiterungen der algebraischen Situation.

Auf einer zweiten Ebene sollte eine Abstraktion der Methoden bei den Konstruktionen im obigem Darstellungssatz erreicht werden. In dieser Dissertation werden alsdann die inhärenten Grundeigenschaften des Graphenmodells mit den Hilfsmitteln der kombinatorischen Logik aufgedeckt und die spezifischen Lösungen innerhalb des Potenzmengenmodells $\underline{D}_A$ axiomatisiert. Zunächst werden semi-universelle kombinatorische Modelle eingeführt, definiert als Strukturen über der Logik erster Stufe. Diese nehmen wie folgt den Platz des Graphenmodells in dem Darstellungssatz ein: Für Gleichungs - , universelle und algorithmische Klassen werden je geeignete Gleichungen Δ' gefunden, so daß die erste Richtung des Theorems in irgendeinem semi-universellen kombinatorischen Modell gilt; das heißt, jede Lösung von Δ' im semi-universellen kombinatorischen Modell erzeugt ein inneres Modell, das isomorph ist zur Vervollständigung einer Struktur der Ausgangsklasse. Zusätzliche Axiome der Logik zweiter Stufe lassen nun diese universellen kombinatorischen Modelle auch die umgekehrte Richtung des Darstellungssatzes erfüllen: Zu einer Struktur aus der vorgegebenen Klasse liefern die zusätzlichen Axiome zweiter Stufe eine Lösung der Gleichungen Δ' im universellen kombinatorischen Modell, die die gewünschten Eigenschaften besitzt.