ETH zürich

ETH Library

Phantomabbildungen und klassifizierende Räume

Doctoral Thesis

Author(s):
Meier, Willi

Publication date:
1975

Permanent link:
https://doi.org/https://doi.org/10.3929/ethz-a-000084951

Rights / license:
In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

This page was generated automatically upon download from the ETH Zurich Research Collection.
For more information, please consult the Terms of use.

Diss.ETH 5412

Phantomabbildungen und klassifizierende Räume

ABHANDLUNG

zur Erlangung

des Titels eines Doktors der Mathematik

der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von

WILLI MEIER

Dipl. Math. ETH Zürich

geboren am 20. April 1948

von Hundwil (Kt. Appenzell AR)

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. B. Eckmann, Referent

Prof. Dr. G.Mislin, Korreferent

aku-Fotodruck

Zürich

1975

Kapitel IV ANWENDUNGEN UND BEISPIELE

In diesem letzten Teil wenden wir unsere Resultate auf einige konkrete Probleme an. Damit erhalten wir Beispiele von Phantomabbildungen, die zum Teil neu sind und teils auf ganz anderem Wege hergeleitet worden sind.
Wir beweisen dazu eine Proposition, mit der wir die Rangbedingung verifizieren können, wie sie im dritten Kapitel eingeführt worden ist.
Die Proposition dient dann zur Verallgemeinerung einer Methode von Gray, die auf Cohomologieoperationen beruht.

Proposition 7

Sei X ein CW-Komplex mit endlichen Gerüsten und Y ein zusammenhängender homotopieassoziativer H-Raum von endlichem Typ. Weiter sei

$$\varphi_Y^n : [X/X^{n-1}, Y] \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^n(Y), H^n(X/X^{n-1}))$$

die natürliche Abbildung, die einer Klasse $[f] \in [X/X^{n-1}, Y]$ das Element $H^n(f)$ zuordnet, (11,A.4) wobei die Koeffizienten von H^n in $\pi_n(Y) \otimes \mathbb{Q}$ liegen.

Dann gilt:

1) φ_Y^n ist ein Homomorphismus von Gruppen.

2) Die Bilder von $i^*: [X/X^{n-1}, Y] \longrightarrow [X^n/X^{n-1}, Y]$ und
$\varphi_Y^n : [X/X^{n-1}, Y] \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^n(Y), H^n(X/X^{n-1}))$ haben denselben Rang.

Beweis
Unter Verwendung der Beziehung $[Y_0, W_0] \cong [Y, W_0]$ für einen zusammenhängenden Raum W, (6,Kp.V,§3) faktorisieren wir φ_Y^n in $\varphi_{Y_0}^n e_{0*}$ und betrachten das Diagramm F)

$$\text{F)} \qquad \begin{tikzcd}
{[X/X^{n-1}, Y]} \arrow[r, "e_{0*}"] \arrow[d, "i^*"] & {[X/X^{n-1}, Y_0]} \arrow[r, "\varphi_{Y_0}^n"] \arrow[d, "i_0^*"] & \mathrm{Hom}(H^n(Y), H^n(X/X^{n-1})) \arrow[d, "H^n(i)_*"] \\
{[\vee S^n, Y]} \arrow[r, "e_{0*}"] & {[\vee S^n, Y_0]} \arrow[r, "\varphi_{Y_0}^n"] & \mathrm{Hom}(H^n(Y), H^n(\vee S^n))
\end{tikzcd}$$

Mit derselben Ueberlegung, wie sie im Beweis von Satz 5 für χ^p durchgeführt worden ist, kann man zeigen, dass φ_Y^n ein Homomorphismus ist.

Für die zweite Behauptung verwenden wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [Y_0\ ,\ Y_0] \cong [Y\ ,\ Y_0] & \xrightarrow{\mathcal{E}^n} & H^n(Y, \pi_n(Y_0)) \\ \downarrow g^* & & \downarrow H^n(g) \\ [VS^n,\ Y_0] & \longrightarrow & H^n(VS^n, \pi_n(Y_0)) \end{array}$$

Daraus ersehen wir, dass eine Abbildung $g\colon VS^n \longrightarrow Y$, die in H^n die Null-Abbildung induziert, auch in $t = [-\ ,\ Y_0]$ die triviale Abbildung induziert. Daraus folgt, dass $\varphi^n_{Y_0}\colon [VS^n,\ Y_0] \longrightarrow \mathrm{Hom}(H^n(Y),\ H^n(VS^n))$ injektiv ist. Wegen Diagramm F) ergibt sich somit die zweite Behauptung.

In den folgenden Propositionen 8 und 9 bestimmen wir nun den Rang des Bildes von φ^n_Y mit Cohomologieoperationen. Damit können wir in konkreten Fällen zeigen, dass Phantomabbildungen existieren.

<u>Proposition 8</u>

Vom unendlichen komplex projektiven Raum $\mathbb{C}P^\infty$ in die 3-Sphäre S^3 existieren Phantomabbildungen.

Dieses Resultat stammt von Gray. Er hat in (17) einen Beweis skizziert, der auf den Steenrod-Potenzen P^1 beruht.
Wir geben hier einen andern Beweis, der die unterschiedlichen Strukturen der Cohomologieringe $H^*(\mathbb{C}P^\infty,\mathbb{Z})$ und $H^*(\Omega S^3,\mathbb{Z})$ verwendet:
Nach Satz 3A beweisen wir, dass

$$\mathrm{Rang}\ \{\mathrm{im}([\mathbb{C}P^\infty,\Omega S^3] \longrightarrow [S^2,\Omega S^3])\} < \mathrm{Rang}\ \{\mathrm{im}([\mathbb{C}P^n,\Omega S^3] \longrightarrow [S^2,\Omega S^3])\}$$

für jedes $n > 1$.

Der Rang auf der rechten Seite ist gleich 1. Dies zeigt man mithilfe des Charakters von $t = [-\ ,\Omega S^3]$ oder mit Hindernistheorie.
Aufgrund von Proposition 7 wollen wir nachweisen, dass jede Abbildung $f\colon \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow \Omega S^3$ in $H^2(-,\mathbb{Q})$ die triviale Abbildung induziert.
Dies ist sicher dann der Fall, wenn jede solche Abbildung in $H^2(-,\mathbb{Z})$ die triviale Abbildung induziert.
Nun ist $H^*(\mathbb{C}P^\infty,\mathbb{Z})$ ein Polynomring auf dem einzigen Erzeugenden $u_2 \in H^2(\mathbb{C}P^\infty,\mathbb{Z})$.
$H^*(\Omega S^3,\mathbb{Z})$ hingegen ist ein Ring auf den Erzeugenden $\{\bar{u}_1,\ \bar{u}_2,\ldots\}$, wobei der Grad von $\bar{u}_i = 2i$ und $\bar{u}_p \smile \bar{u}_q = [(p+q)!/p!q!]\cdot \bar{u}_{p+q}$. (21, p.514).
Daraus folgt insbesondere , dass $\Theta_p(\bar{u}_1) = \bar{u}_1^p = p!\cdot\bar{u}_p$.

Sei $f\colon \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow \Omega S^3$ eine beliebige Abbildung. Dann ist $H^2(f)(\bar{u}_1) = mu_2$ für eine gewisse ganze Zahl m und für jede natürliche Zahl p existiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^2(\Omega S^3,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{H^2(f)} & H^2(\mathbb{C}P^\infty,\mathbb{Z}) \\ \downarrow \theta_p & & \downarrow \theta_p \\ H^{2p}(\Omega S^3,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{H^{2p}(f)} & H^{2p}(\mathbb{C}P^\infty,\mathbb{Z}) \end{array}$$

Es gilt also für alle p

$$\theta_p H^2(f)(\bar{u}_1) = H^{2p}(f)\theta_p(\bar{u}_1)$$

das heisst

$$m^p \cdot u_2^p = p! \cdot H^{2p}(f)(\bar{u}_p)$$

Dies ist aber nur möglich für m = 0.

Die folgende Proposition 9 ist eine Verallgemeinerung eines Resultates, das Anderson und Hodgkin (2) sowie Buhstaber und Miscenko (8) mit weitreichenden Methoden der homologischen Algebra unabhängig voneinander erhalten haben.

<u>Proposition 9</u>

a) Sei G eine unendliche abelsche Gruppe von endlichem Typ und $n \geq 2$ ungerade [gerade].
Dann existieren Phantomabbildungen von K(G,n) in BU(m) [U(m)] für $m \geq (n+1)/2$.

b) (2), (8) Sei G eine unendliche abelsche Gruppe von endlichem Typ und sei $n \geq 3$ ungerade [gerade].
Dann existieren Phantomabbildungen von K(G,n) in BU [U].

c) Sei G von endlichem Typ und sei entweder n gerade [ungerade] oder G endlich.
Dann existieren von K(G,n) in BU [U] keine Phantomabbildungen.

Beweis

Sei $G = \mathbb{Z}$ und n ungerade.

a) Wir zeigen, dass

$$\text{Rang}\left\{\text{im}([\mathbb{Z}K(\mathbb{Z},n)\ ,\ BU(m)] \longrightarrow [S^{n+1},\ BU(m)])\right\} =$$
$$\text{Rang}\left\{\text{im}([K(\mathbb{Z},n)\ ,\ U(m)] \longrightarrow [S^n,\ U(m)])\right\} = 0,$$

indem wir nachweisen, dass jede Abbildung $f\colon K(\mathbb{Z},n) \longrightarrow U(m)$ in der

n-ten Cohomologiegruppe die Nullabbildung induziert.
Dies folgt aus der bekannten Tatsache, dass $H^*(K(\mathbb{Z},n),\mathbb{Z}_p)$ für alle Primzahlen p eine freie kommutative Algebra auf den Erzeugenden $St^I\xi_n$ ist, wobei ξ_n die Fundamentalklasse von $K(\mathbb{Z},n)$ und I eine zugelassene Folge erster Art ist. (siehe (9)).
Analog wie in Proposition 8 betrachten wir ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^n(U(m),\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{H^n(f)} & H^n(K(\mathbb{Z},n),\mathbb{Z}_p) \\ \downarrow{\scriptstyle St^I} & & \downarrow{\scriptstyle St^I} \\ H^{n+q}(U(m),\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{H^{n+q}(f)} & H^{n+q}(K(\mathbb{Z},n),\mathbb{Z}_p) \end{array}$$

wobei q der Grad der Steenrod-Operation St^I ist. Da aber
$St^I\colon H^n(U(m),\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{n+q}(U(m),\mathbb{Z}_p)$ trivial wird für $q > m^2$, können wir schliessen, dass $H^n(f,\mathbb{Z}_p)$ für alle Primzahlen p der Nullhomomorphismus ist. Daraus folgt, dass auch $H^n(f,\mathbb{Z})$, respektive $H^n(f,\mathbb{Q})$, triviale Abbildungen sind.
Andererseits ist Rang $\{\mathrm{im}([K(\mathbb{Z},n)\ ,\ U(m)] \longrightarrow [S^n,\ U(m)])\} = 1$ für $m \geq (n+1)/2$. Damit ist die Rangbedingung erfüllt.

b) Wir zeigen analog, dass
Rang $\{\mathrm{im}([K(\mathbb{Z},n)\ ,\ U] \longrightarrow [S^n,\ U])\} = 0$.
Dazu betrachten wir wieder ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^n(U,\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{H^n(f)} & H^n(K(\mathbb{Z},n),\mathbb{Z}_p) \\ \downarrow{\scriptstyle St^I} & & \downarrow{\scriptstyle St^I} \\ H^{n+q}(U,\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{H^{n+q}(f)} & H^{n+q}(K(\mathbb{Z},n),\mathbb{Z}_p) \end{array}$$

mit dem wir zeigen wollen, dass $H^n(f,\mathbb{Z}_p) = 0$ für alle p.
Wir verifizieren nun, dass für jedes ungerade $n \geq 3$ und für jede Primzahl p nichttriviale Cohomologieoperationen $St^I\colon H^n(K(\mathbb{Z},n),\mathbb{Z}_p) \longrightarrow H^{n+q}(K(\mathbb{Z},n),\mathbb{Z}_p)$ von ungeradem Grad q existieren. Dies bedarf einer genaueren Untersuchung dieser Operationen für den Eilenberg-MacLane-Raum $K(\mathbb{Z},n)$:
Eine zugelassene Folge $I = (a_1,\dots,a_i,\dots,a_k)$ erster Art wird durch die folgenden vier Eigenschaften charakterisiert:

1) $a_i = 2\lambda_i(p-1)+\varepsilon_i,\ \ \varepsilon_i = 0,\ 1$
2) $a_i \geq pa_{i+1}$ für alle $i = 1, 2,\dots, k-1$
3) $pa_1 < (p-1)(n+q)$
4) $a_k > 1$

Zusätzlich soll für unser Problem $q = \sum_{i=1}^{k} a_i$ eine ungerade Zahl sein.

1. Fall: $p > 2$

Wir wählen $I = (2p(p-1)+1,\ 2(p-1))$

Durch einfache Verifikation der Bedingungen 1) bis 4) zeigt man, dass I eine zugelassene Folge erster Art ist, falls die Zahlen n und p grösser als 2 sind.

2. Fall: $p = 2$

Sei $n = 3$

Da $H^*(K(\mathbb{Z},3),\mathbb{Z}_2)$ eine Polynomalgebra ist, folgt, dass $Sq^3 : \xi_3 \longrightarrow \xi_3^2$ nichttrivial ist. (Für $n = 3$, $p = 2$ existieren für q ungerade keine Folgen erster Art.)

Sei $n > 3$

Wir wählen $I = (5,\ 2)$

Analog zum ersten Fall zeigt man, dass I eine zugelassene Folge erster Art ist.

Damit ist Proposition 9a und 9b für $G = \mathbb{Z}$ und n ungerade gezeigt. Der Beweis für gerade Zahlen n kann in gleicher Weise geführt werden.

Man betrachtet jedoch zur Verifikation der Rangbedingung in Proposition 9a das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^{n+1}(U(m),\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "H^{n+1}(f)"] \arrow[d, "St^I"] & H^{n+1}(\Sigma K(\mathbb{Z},n),\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "s^*"] \arrow[d, "St^I"] & H^n(K(\mathbb{Z},n),\mathbb{Z}_p) \arrow[d, "St^I"] \\
H^{n+q+1}(U(m),\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "H^{n+q+1}(f)"] & H^{n+q+1}(\Sigma K(\mathbb{Z},n),\mathbb{Z}_p) \arrow[r, "s^*"] & H^{n+q}(K(\mathbb{Z},n),\mathbb{Z}_p)
\end{tikzcd}$$

wobei s^* die Suspensionsabbildung bedeutet.

Der rechte Teil des Diagramms ist kommutativ [antikommutativ] , falls die Anzahl der Bockstein-Homomorphismen in St^I gerade [ungerade] ist.

Der Fall $n = 2$ muss zudem gesondert behandelt werden, da für $n = 2$ keine zugelassenen Folgen I existieren. $H^*(K(\mathbb{Z},2),\mathbb{Z}_p)$ ist aber für alle Primzahlen p eine Polynomalgebra auf einem Erzeugenden der Dimension 2. Die Potenzen St^I für $I = (2p^k(p-1),\ 2p^{k-1}(p-1),\ldots 2p(p-1),\ 2(p-1))$ sind daher für jede natürliche Zahl k stabile Operationen.

Wenn G eine beliebige unendliche Gruppe von endlichem Typ ist, verwenden wir für eine Zerlegung von G in eine direkte Summe $\oplus G_i$ die Beziehung $K(G_1 \oplus G_2, n) \sim K(G_1,n) \times K(G_2,n)$ und die zerfallende exakte Folge (11,§8)

$$* \longrightarrow [K(G_1,n)^{n+i} \wedge K(G_2,n)^{n+i}, B] \longrightarrow [K(G_1,n)^{n+i} \times K(G_2,n)^{n+i}, B] \longrightarrow$$
$$\longrightarrow [K(G_1,n)^{n+i} \vee K(G_2,n)^{n+i}, B] \longrightarrow *$$

für $B = U(m)$, respektive U.
Sei $G_1 = \mathbb{Z}$. Dann ist mit $\varprojlim_i{}^1 [K(G_1,n)^{n+i}, B]$ auch $\varprojlim_i{}^1 [K(G_1 \oplus G_2,n)^{n+i}, B] \neq 0$. Folglich existieren Phantomabbildungen von $K(G_1 \oplus G_2,n)$ in $BU(m)$, beziehungsweise in BU.
Die Behauptung c) von Proposition 9 lässt sich mit Proposition 5 und dem Künneth-Theorem für die gewöhnliche Cohomologie beweisen.

Bemerkung

Proposition 9a zeigt, dass von $K(\mathbb{Z},2)$ in $U(m)$ für alle $m \geq 2$ Phantomabbildungen existieren. Von $K(\mathbb{Z},2)$ in U sind jedoch alle Abbildungen nullhomotop, wie man mit der Atiyah-Hirzebruch-Spektralreihe zeigen kann.

Wir können Proposition 9a folgendermassen verallgemeinern:

Proposition 10

a) Sei G eine unendliche abelsche Gruppe von endlichem Typ und $n \geq 2$ ungerade [gerade]. Weiter sei H eine zusammenhängende kompakte Lie-Gruppe. Dann existieren Phantomabbildungen von $K(G,n)$ in B_H [H], falls $\pi_n(H)$ [$\pi_{n+1}(H)$] unendlich ist.

b) Sei G eine unendliche abelsche Gruppe von endlichem Typ und $n \geq 2$ gerade. Weiter sei Y ein quasi-endlicher zusammenhängender H-Raum, das heisst, ein H-Raum von endlichem Typ mit verschwindender Homologie für genügend hohe Dimension. Dann existieren von $K(G,n)$ in Y Phantomabbildungen, falls $\pi_{n+1}(Y) \otimes \mathbb{Q}$ ungleich null ist.

Zum Beweis verwenden wir die Tatsache, dass für einen quasi-endlichen H-Raum gilt: $\pi_i(Y) \otimes \mathbb{Q} \cong \pi_i(S^{n_1} \times \ldots \times S^{n_k}) \otimes \mathbb{Q}$ für ungerade Zahlen $n_1, \ldots, n_k$. Damit können wir den Beweis von Proposition 9a wörtlich auf den allgemeineren Fall übertragen.