ETH zürich

ETH Library

Das günstigste Verfahren der gegenseitigen Orientierung

Working Paper

Author(s):
Zeller, M.; Brandenberger, Arthur

Publication date:
1948

Permanent link:
https://doi.org/https://doi.org/10.3929/ethz-a-000736697

Rights / license:
In Copyright - Non-Commercial Use Permitted

Originally published in:
Mitteilungen aus dem Geodätischen Institut an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich 4

This page was generated automatically upon download from the ETH Zurich Research Collection.
For more information, please consult the Terms of use.

MITTEILUNGEN AUS DEM GEODÄTISCHEN INSTITUT
AN DER EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN ZÜRICH
HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. F. BAESCHLIN

Nr. 4

PROF. DR. M. ZELLER

Das günstigste Verfahren der gegenseitigen Orientierung

PROF. DR. M. ZELLER und DR. A. BRANDENBERGER

Beispiel für die Ausgleichung eines Doppelstreifens mit Statoskopangaben

DR. A. BRANDENBERGER

Der Einfluss der Autographenfehler auf die gegenseitige Orientierung bei senkrechten Aufnahmen

VERLAG LEEMANN AG. ZÜRICH

Das günstigste Verfahren der gegenseitigen Orientierung.

Von *Max Zeller*, Zürich.

Im „Lehrbuch der Photogrammetrie" [5] hat der Verfasser die Orientierungsverfahren dargelegt, die nach der erstmals von Prof. *v. Gruber* angegebenen Methode zu einer guten Näherung der gegenseitigen Orientierung führen. Dabei wurde darauf hingewiesen, daß die mit diesem Näherungsverfahren erreichte Genauigkeit noch wesentlich erhöht werden kann, wenn zur Bestimmung der einzelnen Orientierungselemente die in *allen* Punkten auftretenden Höhenparallaxen verwendet werden. Diese Methode, welche in der Schweiz seit ca. 1937 bekannt ist, wurde erstmals von *A. Brandenberger* mathematisch begründet [2] und dabei nachgewiesen, daß sie mit dem numerischen Verfahren identisch ist und somit zu einer optimalen Genauigkeit der gegenseitigen Orientierung führt.

In der französischen, englischen und polnischen Übersetzung des eingangs genannten Lehrbuches wird dieses günstigste Verfahren der gegenseitigen Orientierung eingehend beschrieben. Es mag daher angezeigt sein, diese Methode den Lesern der deutschen Originalausgabe ebenfalls zu vermitteln.

Zum besseren Verständnis dieser Methode sei das *numerische Verfahren* kurz erläutert: Für die Höhenparallaxe erhält man bei Annahme von Senkrechtaufnahmen mit der Fliegerkammer Wild und Zuorientierung der linken zur rechten Kammer, unter Weglassung der Nullstellungsfehler, nach der Formel (54) auf S. 226 des erwähnten Lehrbuches [5] die Gleichung:

$$p v' = \frac{2}{7}\frac{f}{b}\, d\, by + \frac{1}{12}\frac{fY}{b^2}\, d\, bz - f\left(1 + \frac{1}{12}\frac{Y^2}{b^2}\right) d\,\Delta\omega$$
$$- \frac{1}{12} f \frac{XY}{b^2}\, d\gamma - \frac{2}{7}\frac{fX}{b}\, d\,\Delta\varkappa\,. \qquad (1)$$

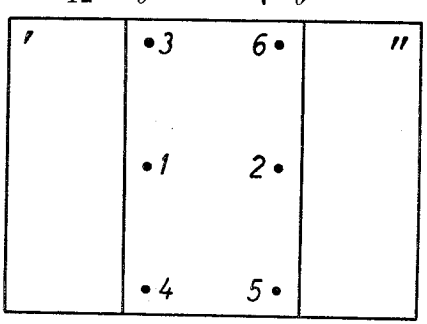


Fig. 1

Mißt man nun in den Punkten 1—6 (Fig. 1) die Höhenparallaxen, so ergeben sich aus diesen 6 Höhenparallaxen durch Einsetzen der entsprechenden Koordinaten 6 solche Gleichungen.

Dieses Gleichungssystem enthält eine überschüssige Gleichung und ist daher mittels der Methode der kleinsten Quadrate zu lösen, wodurch man die Unbekannten dby, dbz, $d\Delta\omega$, $d\gamma$ und $d\Delta\varkappa$ erhält.

Da dieses numerische Verfahren jedoch ziemlich kompliziert ist und relativ große Rechenarbeit erfordert, wird es in der Praxis nicht angewendet. An dessen Stelle trat bis vor etwa 10 Jahren das bereits erwähnte *v. Gruber'sche Näherungsverfahren*, bei welchem die Orientierungsunbekannten jedoch nicht aus den Höhenparallaxen aller Punkte bestimmt werden, in denen jene Höhenparallaxe erzeugen. Ferner erfolgt beim numerischen Verfahren die Bestimmung der Orientierungsunbekannten in einem Guß, während bei den optisch-mechanischen Methoden nach v. Gruber die Orientierungsunbekannten schrittweise bestimmt werden. Letzteres hat den Nachteil, daß nach der Bestimmung einer der Orientierungsunbekannten durch Wegstellen der Höhenparallaxe in einem Punkt, die Bestimmung der noch verbleibenden Orientierungsunbekannten aus Höhenparallaxen erfolgt, die auch noch die Einflüsse der Fehler der vorher bestimmten Orientierungselemente enthalten. Die mit diesen optisch-mechanischen Verfahren nach v. Gruber erhaltenen Werte für die Orientierungselemente stimmen daher mit den numerisch berechneten im allgemeinen nicht überein.

Auf diesen Widerspruch haben schon *R. Finsterwalder* und auch *W. Schermerhorn* hingewiesen. Fehlertheoretisch ist das Problem jedoch erst von *W. K. Bachmann* 1943 in seiner Dissertation [1] behandelt worden, indem er für die nach einem bestimmten optisch-mechanischen Verfahren gemäß v. Gruber resultierenden Restparallaxen die Gewichte berechnet und festgestellt hat, daß diese, bzw. die mittleren Restparallaxen und auch die Korrelationskoeffizienten für verschiedene optisch-mechanische Näherungsverfahren verschieden sind. In der „Schweizerischen Zeitschrift für Vermessung und Kulturtechnik" Nr. 6/1947 hat dann *H. Kasper* eine bedeutend einfachere Berechnung der Restfehler der gegenseitigen Orientierung nach v. Gruber veröffentlicht [4].

In der Praxis wurden die Nachteile dieses Näherungsverfahrens jedoch viel früher erkannt und durch die Verwendung der in *allen* Punkten beobachteten Höhenparallaxe behoben.

Zur Erklärung dieser, *von den Näherungsverfahren nach v. Gruber prinzipiell abweichenden Methode*, greifen wir auf die Fig. 184 bis 187 und Fig. 189 von [5] zurück, wobei für Senkrechtaufnahmen von den erstgenannten 4 Figuren nur die rechte Hälfte maßgebend ist und die Koeffizienten entsprechend Formel (1) zu ändern sind.

Die in den Punkten 1—6 von Fig. 1 nach genäherter gegenseitiger Orientierung noch auftretenden Höhenparallaxen setzen sich aus den in den oben genannten Figuren dargestellten partiellen Höhenparallaxen zusammen. Demgemäß erhält man für diese effektiven Höhenparallaxen die folgenden mathematischen Ausdrücke:

$$pv'_3 = \frac{2}{7}\frac{f}{b}dby - \frac{1}{12}\frac{f}{b}dbz - \frac{13}{12}fd\Delta\omega\,, \qquad pv'_6 = \frac{2}{7}\frac{f}{b}dby - \frac{1}{12}\frac{f}{b}dbz - \frac{13}{12}fd\Delta\omega + \frac{1}{12}fd\gamma - \frac{2}{7}fd\Delta\varkappa\,,$$

$$pv'_1 = \frac{2}{7}\frac{f}{b}dby - fd\Delta\omega\,, \qquad pv'_2 = \frac{2}{7}\frac{f}{b}dby - fd\Delta\omega - \frac{2}{7}fd\Delta\varkappa\,, \tag{2}$$

$$pv' = \frac{2}{7}\frac{f}{b}dby + \frac{1}{12}\frac{f}{b}dbz - \frac{13}{12}fd\Delta\omega\,, \qquad pv'_5 = \frac{2}{7}\frac{f}{b}dby + \frac{1}{12}\frac{f}{b}dbz - \frac{13}{12}fd\Delta\omega - \frac{1}{12}fd\gamma - \frac{2}{7}fd\Delta\varkappa\,.$$

Es ist nun einleuchtend, daß die Bestimmung der Orientierungsunbekannten dby, dbz, $d\Delta\omega$, $d\gamma$ und $d\Delta\varkappa$ am genauesten würde, wenn wir die Höhenparallaxen in allen (∞ vielen) Punkten des Modells beobachten könnten, in denen die Orientierungsunbekannten Höhenparallaxe verursachen. Da dies praktisch unmöglich ist, beschränkt man sich darauf, bei Senkrechtaufnahmen die Höhenparallaxe in den 6 in Fig. 1 bezeichneten Punkten und deren nächster Umgebung zu beobachten. Zeigen sich in diesen Zonen Differenzen, z. B. infolge Überstrahlung im einen Bild oder anderer Bildfehler, so ist ein Mittelwert der beobachteten Höhenparallaxen zu wählen, wodurch der Einfluß von Instrumenten- und Bildfehlern auf die gegenseitige Orientierung reduziert wird.

Unter diesen Voraussetzungen läßt sich *das günstigste Verfahren der gegenseitigen Orientierung* sofort aus den modifizierten Fig. 184 bis 187, der Fig. 189 von [5] und dem oben aufgestellten Formelsystem ableiten durch Bildung derjenigen Differenzen oder Summen, die die einzelnen Orientierungsunbekannten aus möglichst vielen Punkten explizit ergeben. So erhält man z. B.:

$$\frac{pv'_1 + pv'_3 + pv'_4}{3} - \frac{pv'_2 + pv'_5 + pv'_6}{3} = \frac{2}{7}fd\Delta\varkappa$$

und daraus

$$\underline{d\Delta\varkappa = \frac{7}{6}\cdot\frac{1}{f}\Big[(pv'_1 + pv'_3 + pv'_4) - (pv'_2 + pv'_5 + pv'_6)\Big]\,.} \tag{3a}$$

Analog ergeben sich die Werte für $d\gamma$, $d\Delta\omega$, dbz und dby wie folgt:

$$\frac{pv'_4 - pv'_3}{2} - \frac{pv'_5 - pv'_6}{2} = \frac{1}{12}fd\gamma\,,$$

$$\underline{d\gamma = \frac{6}{f}\Big[(pv'_4 - pv'_3) - (pv'_5 - pv'_6)\Big]\,;} \tag{3b}$$

$$\frac{pv'_3+pv'_4+pv'_5+pv'_6}{4}-\frac{pv'_1+pv'_2}{2}=-\frac{f}{12}\,d\Delta\omega\ ,$$

$$d\Delta\omega=\frac{12}{f}\left(\frac{pv'_1+pv'_2}{2}-\frac{pv'_3+pv'_4+pv'_5+pv'_6}{4}\right)\ ; \tag{3c}$$

$$pv'_4-pv'_3=\frac{1}{6}\cdot\frac{f}{b}\,dbz\ ,$$

$$dbz=6\frac{b}{f}(pv'_4-pv'_3)\ ; \tag{3d}$$

$$pv'_1+pv'_2+pv'_3+pv'_4+pv'_5+pv'_6=\frac{12}{7}\frac{f}{b}\,dby-\frac{19}{3}f\,d\Delta\omega-\frac{6}{7}f\,d\Delta\varkappa\ .$$

Unter Berücksichtigung von (3a) und (3c) erhält man daraus:

$$dby=\frac{7}{12}\cdot\frac{b}{f}\left[2(20pv'_1+19pv'_2)-17(pv'_3+pv'_4)-19(pv'_5+pv'_6)\right]\ . \tag{3e}$$

Bestimmt man nun an Hand der Formeln (3) und der beobachteten Höhenparallaxen die Orientierungsunbekannten *dby*, *dbz*, $d\Delta\omega$, $d\gamma$, $d\Delta\varkappa$ und führt deren *entgegengesetzt gleiche Werte als Verbesserungen* der Elemente *by*, *bz*, $\Delta\omega$, γ und $\Delta\varkappa$ der gegenseitigen Orientierung am Autographen ein, so muß theoretisch ein höhenparallaxfreies Modell entstehen. Da die Beobachtung der Höhenparallaxen $pv'_1 \ldots pv'_6$ jedoch nicht fehlerlos erfolgen kann, bleiben in den Punkten 1—6 *Restparallaxen* $pv^*_1 \ldots pv^*_6$ zurück. Diese lassen sich leicht berechnen, indem man in den Parallaxgleichungen (2) die Werte der Orientierungsunbekannten entsprechend den Formeln (3) einsetzt und die so erhaltenen Höhenparallaxen von den ursprünglichen Höhenparallaxen subtrahiert. Damit erhält man für die Restparallaxen die folgenden Ausdrücke:

$$pv^*_1=\frac{2\,(pv'_1-pv'_2)-(pv'_3+pv'_4)+(pv'_5+pv'_6)}{6}\ ,$$

$$pv^*_2=-pv^*_1\ ,\quad pv^*_3=pv^*_4=-\frac{1}{2}pv^*_1\ ,\quad pv^*_5=pv^*_6=+\frac{1}{2}pv^*_1\ . \tag{4}$$

Aus diesen Restparallaxen lassen sich nun auch die *mittleren Restparallaxen* nach dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnen. Bezeichnet man den *mittleren Fehler einer Höhenparallaxmessung* mit μ_0, so erhält man:

$$m_{pv^*_1}=m_{pv^*_2}=\pm\frac{\mu_0}{\sqrt{3}}\ ,$$

$$m_{pv^*_3}=m_{pv^*_4}=m_{pv^*_5}=m_{pv^*_6}=\pm\frac{1}{2}\frac{\mu_0}{\sqrt{3}}\ . \tag{5}$$

Demnach sind die mittleren Restparallaxen $m_{v_3^*} \ldots m_{pv_6^*}$ in den äußern Punkten nur halb so groß wie diejenigen der innern Punkte 1 und 2; ferner sind alle mittleren Restparallaxen wesentlich kleiner als μ_0. Der mittlere Fehler für alle 6 Punkte ist $M = \pm \frac{\mu_0}{3}$.

Daß die Bestimmung der Orientierungsunbekannten dby, dbz, $d\Delta\omega$, $d\gamma$ und $d\Delta\varkappa$ nach den Formeln (3) zu einer optimalen Genauigkeit der gegenseitigen Orientierung führt, läßt sich auch dadurch nachweisen, daß man die Gleichungen (2) nach der Methode der kleinsten Quadrate (vermittelnde oder bedingte Ausgleichung) rein formal auflöst. Diese Berechnungsart hat z. B. *B. Hallert* in [3] angewendet. — Man erhält dabei für die Orientierungsunbekannten dieselben Ausdrücke, wie sie durch die Formeln (3) gegeben sind, die durch einfache geometrische und mathematische Überlegungen gewonnen wurden. Desgleichen ergibt die Ausgleichung dieselben Restparallaxen, wie sie in (4) und (5) dargestellt sind.

Die vorstehend beschriebene Methode der gegenseitigen Orientierung läßt sich in der Praxis in sehr einfacher Weise durchführen, indem die Formeln (3) nach ihrer geometrischen Bedeutung interpretiert werden. Dadurch erreicht der geübte Praktiker in kurzer Zeit eine Genauigkeit der gegenseitigen Orientierung, die derjenigen nach dem v. Gruber'schen Verfahren weit überlegen ist.

Wie aus den Formeln (3a) bis (3d) erkennbar ist, lassen sich bei gegebener Bildweite alle Verbesserungen pro Einheit *im voraus* berechnen. Beträgt z. B. die Bildweite $f = 165$ mm und der Markendurchmesser (in der Bildebene gemessen) 0,04 mm, so ist

a) bei $+1$ Markendurchmesser Höhenparallaxe für die Differenz zwischen der Summe der Höhenparallaxen der 3 Punkte rechts und der Summe der Höhenparallaxen der 3 Punkte links, die *Differenzkantung* $\Delta\varkappa$ d. h. $\varkappa'$ um $+ 2^c$ zu ändern;

b) bei $+1$ Markendurchmesser Höhenparallaxe für die Differenz der Höhenparallaxe rechts vorne und rechts hinten minus die Differenz der Höhenparallaxe in der Konvergenzvertikalen, d. h. links vorne und links hinten, die *Konvergenz* γ d. h. $-\varphi'$ um $+ 9^c$ zu ändern;

c) bei $+1$ Markendurchmesser Höhenparallaxe für die Differenz zwischen dem Mittel der Höhenparallaxen der 4 äußern Punkte und dem Mittel der Höhenparallaxen der 2 innern Punkte, die *Differenzkippung* $\Delta\omega$ d. h. ω' um $+ 19^c$ zu ändern;

d) bei $+1$ Markendurchmesser Höhenparallaxe für die Differenz zwischen der Höhenparallaxe im vordern und hintern Punkt links, die Basiskomponente bz bzw. bz' um $-1{,}5\,^0/_{00}$ von b zu ändern, wobei b die eingeführte Basis in mm bedeutet.

Die zu bildenden Differenzen und die einem Markendurchmesser entsprechenden Zahlwerte für die Korrekturen sind dem Praktiker

geläufig, so daß es ihm vollständig genügt, die 6 Höhenparallaxen aufzuzeichnen, um dann sofort die entsprechenden Korrekturen ausrechnen zu können. In vielen Fällen wird dabei die Höhenparallaxe in einzelnen Punkten bereits gleich Null sein, so daß die übrigen Höhenparallaxen auch leicht im Kopf zu behalten sind. Die Berechnung des *dby* nach Formel (3e) *erübrigt* sich, indem nach erfolgter Korrektur der übrigen Einstellelemente die noch verbleibende Höhenparallaxe in den Punkten 1—6 gemittelt und mit *by* weggestellt werden kann, was nachweisbar fehlertheoretisch richtig ist.

Nachdem also nach dem v. Gruber'schen Verfahren eine gute Näherung erreicht worden ist und die noch verbleibenden Höhenparallaxen (in Kammer links) notiert sind, werden die unter a) bis d) angegebenen Differenzen gebildet, diese mit den entsprechenden Zahlwerten pro Einheit multipliziert und die so erhaltenen Korrekturen für $\varkappa'$, $-\varphi'$, ω' und bz' am Autographen eingeführt. Die Höhenparallaxen pv' sind dabei als positiv anzunehmen, wenn sie in $+y$-Richtung auftreten.

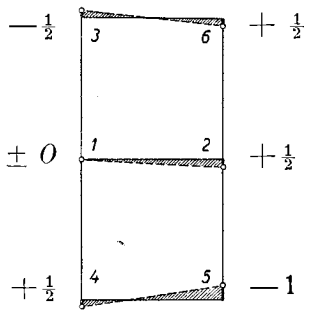


Fig. 2

In Fig. 2 z. B. ist die Summe der Höhenparallaxen der drei Punkte rechts gleich 0, diejenigen der drei Punkte links ebenfalls gleich 0, so daß die Differenzkantung $\Delta\varkappa$ d. h. $\varkappa'$ nicht zu ändern ist. In gleicher Weise ergibt sich $d\gamma = -d\varphi' = +9^c \cdot (-1\frac{1}{2} - 1) = -22^c$, $d\Delta\omega = d\omega' = +19^c \cdot (-\frac{1}{8} - \frac{1}{4}) = -7^c$ und $dbz' = -1{,}5 \cdot (+\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = -1{,}5\,‰$ von b. Rechnet man z. B. die Kantungskorrektur $d\Delta\varkappa$ nur aus den Punkten 1 und 2, so lautet die Formel (3a)

$$d\Delta\varkappa = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{f} (pv'_1 - pv'_2),$$

und man erhält für die *Verbesserung* $d\Delta\varkappa$: $+5^c \cdot (+\frac{1}{2}) = +2^c{,}5$, womit gezeigt ist, daß diese Bestimmung nach v. Gruber infolge der unvermeidlichen Beobachtungsfehler, namentlich aber wegen der nur teilweisen Berücksichtigung der Instrumenten- und Bildfehler wesentlich anders ausfällt.

Es ist noch zu erwähnen, daß die oben zahlenmäßig angegebenen Korrekturen pro Einheit nur dann gelten, wenn die zur Beobachtung der Höhenparallaxe gewählten Punkte tatsächlich so gelegen sind, wie dies für die Berechnung angenommen wurde und wenn das Gelände praktisch horizontal ist. Die berechneten Korrekturen entsprechen also im allgemeinen nur einer sehr guten Näherung, weshalb

meistens kleine Nachkorrekturen notwendig werden, deren Werte in genau derselben Weise zu bestimmen sind[1]). Man erkennt dabei sofort, wenn — infolge größerer Höhenunterschiede im Raummodell oder anormaler Punktlage — einzelne Zahlwerte zu groß oder zu klein sind. Deren Sollwerte lassen sich dann für das betreffende Modell und die gewählten Punkte leicht empirisch bestimmen. War in Fig. 2 z. B. die Konvergenzkorrektur erstmals -22^c, nach dieser ersten Verbesserung nochmals -5^c, so muß dann nicht um -5^c, sondern um -6^c korrigiert werden, indem der Zahlwert in diesem Falle nicht 9^c, vielmehr 11^c beträgt ($-11^c \cdot 2\frac{1}{2} = -28^c$).

Besonders hervorzuheben ist der Umstand, daß bei Anwendung des v. Gruber'schen Verfahrens die Höhenparallaxe in der untern oder obern Hälfte des Modells, d. h. in vier Punkten sehr rasch eindeutig zum Verschwinden gebracht werden kann. Dadurch beschränkt sich nachher die Beobachtung der Höhenparallaxe nur noch auf die zwei hintern (oder vordern) Punkte, so daß für die Korrekturen a) und b) nur noch die Differenz der Höhenparallaxen in diesen beiden Punkten, für c) das arithmetische Mittel und für d) die Höhenparallaxe im betreffenden Punkt der Konvergenzvertikalen zu berücksichtigen ist.

In ganz gleicher Weise lassen sich für normal-konvergente und für Weitwinkelaufnahmen die den Formeln (3) entsprechenden Ausdrücke, sowie auch die Restparallaxen ableiten.

Für normal-konvergente Aufnahmen müssen wir auf die allgemeinen Formeln (49 a und b) von [5] zurückgreifen, um die vollständigen Formeln (50) für relativ ebene Modelle zu erhalten. Diese lauten dann:

$$pv' = +\frac{f}{3b}\,dby + \frac{fY}{9b^2}\,dbz - f\left(1+\frac{Y^2}{9b^2}\right)d\Delta\omega - \frac{fXY}{9b^2}\,d\gamma^* - \frac{fX}{3b}\,d\Delta\varkappa\,,$$

---

[1]) Bei Zuordnung der rechten zur linken Kammer ist Formel (53a) auf Seite 226 von [5] maßgebend, aus welcher für $Z = \frac{1}{2}b$ und unter Weglassung der Nullstellungsfehler folgt:

$$pv'' = +\frac{2}{7}\frac{f}{b}\,dby + \frac{1}{12}\frac{fY}{b^2}\,dbz - f\left(1+\frac{1}{12}\frac{Y^2}{b^2}\right)d\Delta\omega + \frac{1}{12}\frac{f(X-b)Y}{b^2}\,d\gamma$$
$$-\frac{2}{7}\frac{f(X-b)}{b}\,d\Delta\varkappa\,. \qquad (1a)$$

Berechnet man nach dieser Formel wieder die $pv''_1 \ldots pv''_6$, so erkennt man, daß die unter a) und c) erwähnten Verbesserungen dieselben bleiben wie bei Zuorientierung der linken zur rechten Kammer, wogegen bei b) die Ausdrücke „links" und „rechts" vertauscht werden müssen. Ferner sind für die unter d) angegebenen Verbesserungen dbz'' die Punkte 5 und 6 maßgebend, weil die Konvergenzvertikale nunmehr rechts liegt. Weiter ist zu beachten, daß einem positiven $d\gamma$ ein positives $d\varphi''$ entspricht.

$$pv'' = + \frac{3f}{X-10b}\, dby + \frac{fY}{b(X-10b)}\, dbz - \frac{9fb}{X-10b}\left(1+\frac{Y^2}{9b^2}\right) d\Delta\omega$$

$$- \frac{f(X-b)\,Y}{b(X-10b)}\, d\gamma - \frac{3fX}{X-10b}\, d\Delta\varkappa\ .$$

Die Formel für pv' gilt unter der Voraussetzung, daß die Konvergenzkorrektur an der *linken* Kammer angebracht wird, d. h. mit φ' erfolgt. Der Faktor von $d\gamma^*$ entspricht daher demjenigen in Formel (51), der auch in Formel (49 a) verwendet werden muß, wenn der genannten Voraussetzung Rechnung getragen werden soll.

Die in den Punkten 1—7 von Fig. 3 nach genäherter gegenseitiger Orientierung noch auftretenden Höhenparallaxen $pv'_1 \ldots pv'_7$ im linken und $pv''_1 \ldots pv''_7$ im rechten Bild können nun ganz analog durch Einsetzen der betreffenden X- und Y-Werte für das quadratische Bildformat von 2b Seitenlänge gefunden werden, womit sich dann ohne weiteres auch die Verbesserungen der Elemente der gegenseitigen Orientierung ergeben. Es zeigt sich dabei, daß für normal-konvergente Aufnahmen die Formeln (3 a), (3 c) und (3 d) nur andere Koeffizienten erhalten.

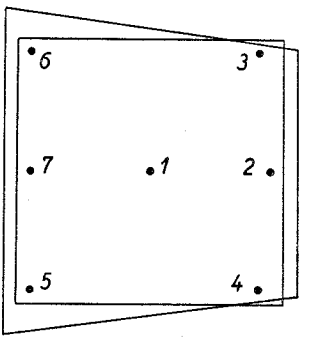


Fig. 3

Die Berechnung der Konvergenzkorrektur nach der Formel für pv' und derjenigen für pv'' zeigt, daß diese Verbesserung genauer wird, wenn sie an der senkrecht stehenden Kammer angebracht wird, also mit φ' erfolgt, im Gegensatz zum v. Gruber'schen Näherungsverfahren, bei welchem für die Konvergenzkorrektur zweckmäßiger das φ'' benützt wird. Die genaue Methode hat also den Vorteil, daß die Verbesserungen ausnahmslos an Kammer *links* anzubringen sind, womit auch die in [5] auf Seite 202/203 erwähnte Längsneigungsänderung des Modells dahinfällt.

Demgemäß gelten die unter a) bis d) angegebenen *Regeln* auch für *normal-konvergente Aufnahmen*, mit folgenden *Verbesserungen* pro Einheit von + 1 Markendurchmesser Höhenparallaxe (= 0,04 mm):

a) Differenzkantung $\Delta\varkappa$ bzw. $\varkappa'$: $+\frac{0{,}04}{2f}\cdot\rho^c = +1^c$.

b) Konvergenz γ^* bzw. $-\varphi'$: $+\frac{9\cdot 0{,}04}{4f}\cdot\rho^c = +3^c{,}5$.
(in Kammer links)

c) Differenzkippung $\Delta\omega$ bzw. ω' : $+\frac{9\cdot 0{,}04}{f}\cdot\rho^c = +14^c$.
(mit 3 innern Punkten)

d) Basiskomponente bz' : $-\frac{9\cdot 0{,}04}{2f}\cdot b \cong -1\,{}^0/_{00}$ von b.

Für die Restparallaxen erhält man:

$$
\begin{aligned}
pv_1^* &= \frac{2pv_1 - (pv_2 + pv_7)}{3} \\
pv_2 &= \frac{-2pv_1 + 3pv_2 + (pv_5 + pv_6) - (pv_3 + pv_4 + pv_7)}{6} \\
pv_3^* &= pv_4^* = -pv_5^* = -pv_6^* \\
&= \frac{-2(pv_2 - pv_7) + (pv_3 + pv_4) - (pv_5 + pv_6)}{12} \\
pv_7^* &= \frac{-2pv_1 + 3pv_7 + (pv_3 + pv_4) - (pv_2 + pv_5 + pv_6)}{6}
\end{aligned}
\tag{4a}
$$

Die mittleren Restparallaxen sind:

$$
m_{pv_1^*} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mu_0\,, \qquad m_{pv_2^*} = m_{pv_7^*} = \pm\frac{\mu_0}{\sqrt{2}}\,,
$$

$$
m_{pv_3^*} = m_{pv_4^*} = m_{pv_5^*} = m_{pv_6^*} = \pm\frac{1}{2}\frac{\mu_0}{\sqrt{3}}\,. \tag{5a}
$$

Der mittlere Fehler für alle 7 Punkte ist $M = 0{,}36\,\mu_0$, d. h. ca. $\pm\frac{\mu_0}{3}$.

Für *Senkrechtaufnahmen mit der Weitwinkelkammer* gilt Formel (55) in [5] für pv' (bei Zuorientierung der linken zur rechten Kammer), die bei Weglassung der Nullstellungsfehler lautet:

$$
\begin{aligned}
pv' = &+\frac{3}{5}\frac{f}{b}\,dby + \frac{9}{25}\frac{fY}{b^2}\,dbz - f\left(1 + \frac{9}{25}\frac{Y^2}{b^2}\right)d\Delta\omega \\
&- \frac{9}{25}\frac{fXY}{b^2}\,d\gamma - \frac{3}{5}\frac{fX}{b}\,d\Delta\varkappa\,.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Demgemäß erhalten die Formeln (2) und (3) nur andere Koeffizienten, und die Korrekturen pro Einheit von + 1 Markendurchmesser Höhenparallaxe (= 0,04 mm) betragen:

a) für $\varkappa'$: $\quad +\frac{5}{9}\frac{0{,}04}{f}\rho^c = +1^c$,

b) für $-\varphi'$: $\quad +\frac{25}{18}\frac{0{,}04}{f}\rho^c = +3^c$,

c) für ω': $\quad +\frac{25}{9}\frac{0{,}04}{f}\rho^c = +6^c$,

d) für bz': $\quad -\frac{25}{18}\frac{0{,}04}{f}b = -0{,}5\,^0/_{00}$ von b.

Da die Formeln (4) und (5) für Senkrechtaufnahmen unabhängig sind vom Bildwinkel und vom Basisverhältnis, gelten dieselben Restparallaxen pv^* und mittleren Restparallaxen m_{pv^*} auch für Aufnahmen mit der Weitwinkelkammer.

Zum Vergleich mit dem von *W. K. Bachmann* in [1] für Senkrechtaufnahmen behandelten Näherungsverfahren der gegenseitigen Orientierung nach v. Gruber genügt es darauf hinzuweisen, daß bei diesem die mittleren Restparallaxen der innern Punkte $\sqrt{3}$ mal, der äußern Punkte 6 mal größere Werte annehmen als bei der hier beschriebenen Methode. Damit ist die große Überlegenheit dieser Methode gegenüber dem frühern v. Gruber'schen Verfahren auch zahlenmäßig nachgewiesen.

Aus den Formeln (3) lassen sich für das hier dargelegte Verfahren der gegenseitigen Orientierung durch Anwendung des Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetzes auch *die mittleren Fehler der Orientierungselemente* berechnen. Hiebei kann der mittlere Beobachtungsfehler der Höhenparallaxe μ_0 in der Bildebene zu ca. $\pm$ 0.01 mm angenommen werden[1]).

Für *Senkrechtaufnahmen* mit der Fliegerkammer Wild von f = 165 mm (Basisverhältnis 2 : 7) erhält man bei einer mittleren Arbeitsdistanz Z = 400 mm folgende mittlere Fehler der Orientierungselemente:

$$m_{by} = \frac{7}{12}\sqrt{4344} \cdot \frac{b}{f}\mu_0 = \pm\, 0{,}27\,\text{mm}\ , \quad m_{bz} = 6\sqrt{2} \cdot \frac{b}{f}\mu_0 = \pm\, 0{,}06\,\text{mm}\ ,$$

$$m_{\Delta\omega} = 6\sqrt{3}\,\frac{\mu_0}{f}\,\rho^c = \pm\, 4^c{,}0\ , \quad m_\gamma = 12\,\frac{\mu_0}{f}\,\rho^c = \pm\, 4^c{,}6\ ,$$

$$m_{\Delta\varkappa} = \frac{7}{\sqrt{6}}\,\frac{\mu_0}{f}\,\rho^c = \pm\, 1^c{,}1\ .$$

Für *normal-konvergente Aufnahmen* mit derselben Kammer (Basisverhältnis 1 : 3, Z = 400 mm) erhält man:

$$m_{by} = \frac{\sqrt{1929}}{2} \cdot \frac{b}{f}\mu_0 = \pm\, 0{,}18\,\text{mm}\ , \quad m_{bz} = \frac{9}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b}{f}\mu_0 = \pm\, 0{,}05\,\text{mm}$$

$$m_{\Delta\omega} = \frac{\sqrt{189}}{2} \cdot \frac{\mu_0}{f}\,\rho^c = \pm\, 2^c{,}7\ , \quad m_\gamma^* = \frac{9}{2} \cdot \frac{\mu_0}{f}\,\rho^c = \pm\, 1^c{,}7\ ,$$

$$m_{\Delta\varkappa} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\mu_0}{f}\,\rho^c = \pm\, 0^c{,}5\ .$$

Der Vergleich dieser Zahlen mit denjenigen für Senkrechtaufnahmen zeigt, daß die Konvergenz, sowie die Kantungsdifferenz mit mehr als doppelter Genauigkeit bestimmt werden kann und daß die Fehler von $\Delta\omega$ und *by* ca. ⅔ derjenigen von Steilaufnahmen betragen. Nur die Genauigkeit von *bz* bleibt ungefähr dieselbe.

---

[1]) In der deutschen Ausgabe des Lehrbuches [5] wurde mit $\pm$ 0.015 mm gerechnet. Neuere Messungen haben jedoch gezeigt, daß die Annahme von nur $\pm$ 0.01 mm gerechtfertigt ist.

Für *Senkrechtaufnahmen mit der Weitwinkelkammer* von 120 mm Bildweite (Basisverhältnis 3 : 5) ist die Formel (6) maßgebend. Diese ergibt für $Z = 400$ mm:

$$m_{by} = \frac{5}{108}\sqrt{11964} \cdot \frac{b}{f}\mu_0 = \pm 0{,}10\,\text{mm}\,, \quad m_{bz} = \frac{25}{18}\sqrt{2} \cdot \frac{b}{f}\mu_0 = \pm 0{,}04\,\text{mm}\,,$$

$$m_{\Delta\omega} = \frac{25}{18}\sqrt{3} \cdot \frac{\mu_0}{f}\rho^c = \pm 1{,}^c3\,, \quad m_\gamma = \frac{25}{9} \cdot \frac{\mu_0}{f}\rho^c = \pm 1{,}^c5\,,$$

$$m_{\Delta\varkappa} = \frac{5}{9}\sqrt{6} \cdot \frac{\mu_0}{f}\rho^c = \pm 0{,}^c7\,.$$

Somit betragen die zufälligen Fehler von $\Delta\omega$, γ und by nur ca. ⅓ von den bei normalem Bildwinkel zu erwartenden mittleren Fehlern; für die Differenzkantung $\Delta\varkappa$ und für bz ist das Verhältnis der mittleren Fehler 2 : 3.

Wie in [5] bereits erwähnt ist, können die angegebenen Zahlen praktisch nur als *Vergleichswerte* für die betrachteten Aufnahmedispositionen und Kammern verwendet werden, da die instrumentellen Fehler der Auswertegeräte im mittleren Beobachtungsfehler der Höhenparallaxe von ± 0.01 mm nicht inbegriffen sind.

Literatur:

[1] *Bachmann, W. K.* „Théorie des erreurs de l'orientation relative", Dissertation, Lausanne 1943.

[2] *Brandenberger, A. Dr.* „Theorie und Praxis der gegenseitigen Orientierung von Steilaufnahmen", Schweiz. Zeitschrift für Vermessung u. Kulturtechnik 1947.

[3] *Hallert, B.* „Über die Herstellung photogrammetrischer Pläne", Dissertation, Stockholm 1944.

[4] *Kasper, H. Prof. Dr.* „Zur Fehlertheorie der gegenseitigen Orientierung", Schweiz. Zeitschrift für Vermessung und Kulturtechnik 1947.

[5] *Zeller, M.* „Lehrbuch der Photogrammetrie", Orell Füssli Verlag, Zürich 1947.

Beispiel für die Ausgleichung eines Doppelstreifens mit Statoskopangaben.

Von *M. Zeller* und *A. Brandenberger.*

Allgemeines.

Als Grundlage des nachfolgenden Zahlenbeispieles dienten die Autographenablesungen eines 100 km langen Streifens. Die 73 Senkrechtaufnahmen des Streifens sind mit der Fliegerkammer Wild ($f = 165$ mm) aus ca. 5000 m über Grund mit 60 % Längsüberdeckung exponiert worden.

Für die Ausgleichung kam die in [2] dargelegte Methode zur Anwendung, jedoch unter Verzicht auf die Berechnung der Restfehlerkurve, da sich gezeigt hatte, daß durch diese in vielen Fällen keine wesentliche Verbesserung der parabolisch ausgeglichenen Höhen erreicht wird. Außerdem konnte die Berechnung der definitiven Koordinaten und Höhen der Übergangspaßpunkte noch vereinfacht werden.

Die Statoskopangaben wurden, wie in [2] Seite 238 angegeben, zur Berechnung der Höhen der Luftstandpunkte verwendet. Die betreffenden Tageswerte waren: Luftdruck in Flughöhe: $B = 392$ mm, Lufttemperatur (Außentemperatur) in Flughöhe: $t = -5^0\,C$. Daraus ergibt sich die Statoskophöhenstufe zu

$$\left(0{,}15 + \frac{968}{392}\right) = 2{,}62.$$

Der Temperaturkoeffizient ist gleich $a = (1 + 0{,}0037\,t) = 0{,}9815$, somit nach der Formel auf Seite 238 in [2]:

$$\underline{\Delta H} = 0{,}9815 \cdot 2{,}62 \cdot h = \underline{2{,}57\ h}.$$

Da der Widerspruch in der Höhenberechnung der letzten Aufnahme (Neg.Nr. 1003) aus den Statoskopangaben des ganzen Streifens und aus der Einpassung des letzten Paares nur 0,2 m betragen hat, war eine Ausgleichung nicht notwendig. Bei ungünstigen Verhältnissen kann jedoch unter Umständen der lineare Ausgleich der Luftstandpunkthöhen unbefriedigend ausfallen. Es ist daher ratsam, auch das ungefähr in der Hälfte des Streifens aufgenommene Paar mittels der gegebenen Festpunkte einzupassen und dessen Flughöhe zu

bestimmen. Der Höhenausgleich der Luftstandpunkte wird dann nach der parabolischen Formel berechnet:

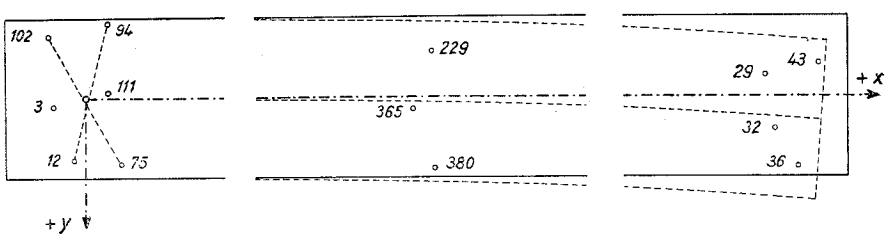
$$\underline{\Delta H = an + bn^2}, \quad \text{wobei}$$

$$a = \frac{n_2^2\,\Delta H_1 - n_1^2\,\Delta H_2}{n_1\,n_2\,(n_2 - n_1)}, \qquad b = \frac{n_1\,\Delta H_2 - n_2\,\Delta H_1}{n_1\,n_2\,(n_2 - n_1)}$$

und n_1 die Nummer des Luftstandpunktes in der Hälfte des Streifens und n_2 die Nummer des letzten Luftstandpunktes bedeutet. ΔH_1 und ΔH_2 sind die Höhenverbesserungen der betreffenden Luftstandpunkte.

Das Zahlenbeispiel ist von Dipl. Ing. *Th. Murányi* durchgerechnet worden, der auch die Schemas der für die Praxis sehr zweckmäßigen Maschinenrechnung aufgestellt hat.

Fig. 1 zeigt die Verteilung der zur Ausgleichung verwendeten Festpunkte, d. h. der Punktgruppen am Anfang, in der Mitte und am Ende des Streifens. Für die Umrechnung der Landeskoordination dieser Punkte in Streifenkoordinaten wurden, im Gegensatz zu der in [2] angegebenen Methode, die Azimute der Verbindungsgeraden 75—102 und 12—94 verwendet. Diese Berechnungsart ist einfacher, weil sich die vorgängige Reduktion der Streifenlänge auf deren Sollwert erübrigt; zudem stimmt in diesem Falle die berechnete x-Richtung mit der tatsächlichen x-Richtung am Autographen besser überein, indem dabei die Fortpflanzung der Richtungsfehler im Streifen bei der Azimutberechnung ohne Einfluß bleibt.



Der Maschinenmaßstab war 1 : 12 500; demnach ist für Maschinenkoordinaten in mm $k = 12{,}5$ und die reduzierten Landeskoordinaten sind $X^* = \frac{X}{12{,}5}$ und $Y^* = \frac{Y}{12{,}5}$.

Die Konstanten a und b der Transformationsformeln für die Umrechnung der Landeskoordinaten in Streifenkoordinaten ergeben sich als Mittel X_0^* bzw. Y_0^* der reduzierten Werte X^* bzw. Y^* der gegebenen Punkte am Anfang des Streifens.

Für die *Ausgleichung der x-Werte* lautet die Ausgleichsformel:

$$\Delta x = c_1 x + c_2 x^2, \quad \text{wobei}$$

$$c_1 = \frac{x_2^2\,\Delta x_1 - x_1^2\,\Delta x_2}{x_1\,x_2\,(x_2 - x_1)} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{x_1\,\Delta x_2 - x_2\,\Delta x_1}{x_1\,x_2\,(x_2 - x_1)}$$

zu setzen ist. Bei stark parabolischem Verlauf der y-Fehler beeinflussen diese jedoch auch die x-Fehler. Es zeigen sich dann relativ große systematische Differenzen in den x-Fehlern innerhalb der Punktgruppe in der Mitte und namentlich am Ende des Streifens. In diesem Falle ändern die Koeffizienten c_1 und c_2 mit y bzw. mit ihrem Abstand von der effektiven Streifenachse; sie müssen daher als Funktion von y berechnet werden. Hiezu werden zunächst aus den Punktgruppen in der Streifenhälfte und am Ende die Werte $\operatorname{tg} \zeta_1$ und $\operatorname{tg} \zeta_2$ aus den *Verbesserungen* Δx_a und Δx_b berechnet nach der allgemeinen Formel:

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{\Delta x_a - \Delta x_b}{y_a - y_b} .$$

Stehen mehr als zwei seitlich gelegene Punkte, z. B. a, b und c, d zur Verfügung, so ist der Mittelwert von $\operatorname{tg} \zeta$ mit Gewichten (z. B. p_1 und p_2) zu berechnen, wobei letztere proportional zu den Quadraten der y-Differenzen zwischen a und b bzw. c und d anzunehmen sind. Die Formel lautet in diesem Falle:

$$\operatorname{tg} \zeta = \frac{p_1 \operatorname{tg} \zeta_{ab} + p_2 \operatorname{tg} \zeta_{cd}}{p_1 + p_2} .$$

Nach dieser Formel ergeben sich somit $\operatorname{tg} \zeta_1$ für die Streifenhälfte und $\operatorname{tg} \zeta_2$ für Streifenende, und man kann nun die x-Verbesserungen der Schwerpunkte s_1 und s_2 umrechnen auf die x-Achse. Es ist:

$$\Delta x_1^* = \Delta x_{s_1} - y_{s_1} \operatorname{tg} \zeta_1 = c_1^* x_{s_1} + c_2^* x_{s_1}^2 ,$$
$$\Delta x_2^* = \Delta x_{s_2} - y_{s_2} \operatorname{tg} \zeta_2 = c_1^* x_{s_2} + c_2^* x_{s_2}^2 .$$

Die mittleren Werte von $\operatorname{tg} \zeta_1$ und $\operatorname{tg} \zeta_2$, sowie die auf die x-Achse reduzierten Verbesserungen Δx_1^* und Δx_2^* der Schwerpunkte können aber auch *graphisch* bestimmt werden durch Auftragen der Verbesserungen der einzelnen Punkte.

Aus den vorstehenden Gleichungen erhält man die Koeffizienten c_1^* und c_2^* zu:

$$c_1^* = \frac{x_{s_2}^2 \Delta x_1^* - x_{s_1}^2 \Delta x_2^*}{x_{s_1} x_{s_2} (x_{s_2} - x_{s_1})} , \qquad c_2^* = \frac{x_{s_1} \Delta x_2^* - x_{s_2} \Delta x_1^*}{x_{s_1} x_{s_2} (x_{s_2} - x_{s_1})} .$$

Für irgend einen Punkt der Schwerpunktordinaten gelten dann die Beziehungen:

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^* + y \operatorname{tg} \zeta_1 ,$$
$$\Delta x_2 = \Delta x_2^* + y \operatorname{tg} \zeta_2 .$$

Ferner ist:

$$\Delta x_1 = c_1 x_{s_1} + c_2 x_{s_1}^2 \,,$$
$$\Delta x_2 = c_1 x_{s_2} + c_2 x_{s_2}^2 \,,$$

woraus sich die entsprechenden c_1 und c_2 ergeben. Setzt man dann für Δx_1 und Δx_2 die entsprechenden Beziehungen ein, so erhält man

$$c_1 = c_1^* + y b_1 \quad \text{und} \quad c_2 = c_2^* + y b_2 \,, \quad \text{worin}$$

$$b_1 = \frac{x_{s_2}^2 \operatorname{tg} \zeta_1 - x_{s_1}^2 \operatorname{tg} \zeta_2}{x_{s_1} x_{s_2} (x_{s_2} - x_{s_1})} \quad \text{und} \quad b_2 = \frac{x_{s_1} \operatorname{tg} \zeta_2 - x_{s_2} \operatorname{tg} \zeta_1}{x_{s_1} x_{s_2} (x_{s_2} - x_{s_1})}$$

zu setzen ist.

Beim *Ausgleich der y-Fehler* treten hier im Gegensatz zu der in [2] angewendeten Berechnungsart auch am Ende des Streifens y-Fehler auf. Die Koeffizienten c_3 und c_4 der Ausgleichsformel

$$\Delta y = c_3 x + c_4 x^2 + f(x y)$$

sind daher nach denselben Formeln wie für den x-Ausgleich zu berechnen. An Stelle von Δx_1 und Δx_2 ist zu setzen Δy_1 und Δy_2.

Sofern auch in der Hälfte des Streifens seitlich gut verteilte Paßpunkte vorhanden sind (was unbedingt anzustreben ist), kann die Funktion $f(xy)$ genauer als in [2] angegeben bestimmt werden nach der Formel:

$$\delta y = (c_5' x + c_5'' x^2)\, dy$$

worin δy die Verbesserung der y-Differenzen dy bedeutet und $\frac{\delta y}{dy} = q$ der relative Querfehler ist. Die Koeffizienten c_5' und c_5'' sind dann wieder:

$$c_5' = \frac{x_2^2 q_1 - x_1^2 q_2}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)} \quad \text{und} \quad c_5'' = \frac{x_1 q_2 - x_2 q_1}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)} \,.$$

Die δy_1 und δy_2 werden aus den gegebenen Punktgruppen in der Hälfte und am Ende des Streifens aus mindestens je 2 y-Differenzen gemittelt, wobei die Quadrate der y-Differenzen dy als Gewichte einzuführen sind.

Trotzdem theoretisch die zufälligen und systematischen Maßstabfehler in y-Richtung linear verlaufen, können, wie übrigens auch bei der Verwindung, in längern Streifen doch streckenweise gewisse Anhäufungen einseitig wirkender zufälliger Fehler auftreten, so daß der parabolische Ausgleich i. a. bessere Resultate liefert.

Für den y-Ausgleich sind also zunächst die Autographen-Ordinaten der Schwerpunkte in Streifenhälfte und am Ende nach vorstehender Formel für δy zu verbessern, d. h. mit q_1 bzw. mit q_2 zu multiplizieren. Die y-Differenzen Δy^* zwischen den so erhaltenen

Schwerpunkten und den betreffenden Sollwerten ergeben die Ausbiegung des Streifens in y-Richtung und damit die Bestimmung der Koeffizienten c_3 und c_4. Die y-Korrektur der Übergangspaßpunkte erfolgt dann nach der Formel:

$$\Delta y = c_3 x + c_4 x^2 + (c_5' x + c_5'' x^2)\, y \,.$$

Die *Ausgleichung der Höhenfehler* kann mittels der in [2] angegebenen Restfehlerkurve durchgeführt werden, sofern die Orientierungsfehler genügend klein sind. Diese Bedingung scheint nun aber oft nicht erfüllt zu sein, weshalb in vielen Fällen der Höhenausgleich mittels der Restfehlerkurve gegenüber einer parabolischen Ausgleichung weniger günstig ausfällt. Es war daher angezeigt, die Konstruktion der Restfehlerkurve fallen zu lassen.

Dagegen ist der *parabolische* Ausgleich der systematischen Höhenfehler begründet, wenn in der mittleren Punktgruppe ebenfalls gegebene Höhen zur Verfügung stehen.

Es ist auch zweckmäßig, die Verwindung in gleicher Weise wie die δy parabolisch auszugleichen, indem der theoretisch zwar begründete lineare Verlauf der Verwindung (wie der Maßstabfehler in y-Richtung) in längern Streifen doch gewisse Unstetigkeiten, sog. pseudosystematische Fehler aufweisen kann.

Die Formel für den Höhenausgleich lautet demgemäß:

$$\Delta H = c_6 x + c_7 x^2 + (c_8' x + c_8'' x^2)\, y \,.$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten c_6 bis c_8 dieser Gleichung wird zunächst die Verwindung in der Hälfte des Streifens und an dessen Ende mit den seitlich gelegenen Paßpunkten a und b festgestellt und pro Einheit der Streifenbreite mit Gewichten berechnet nach der Formel:

$$\varepsilon = \frac{dH_a - dH_b}{y_a - y_b} \,.$$

Sind die Abszissen der Punkte a und b verschieden, so ist die Höhenverbesserung des einen auf den x-Wert des andern umzurechnen nach der Formel

$$dH_a = \frac{dH_a'}{x_a} x_b \,.$$

Für die Verwindung gilt nun: $H^* = H + dH$, wobei

$$dH = (c_8' x + c_8'' x^2)\, y \,,$$

und

$$c_8' = \frac{x_2^2\, \varepsilon_1 - x_1^2\, \varepsilon_2}{x_1\, x_2\, (x_2 - x_1)} \quad \text{und} \quad c_8'' = \frac{x_1\, \varepsilon_2 - x_2\, \varepsilon_1}{x_1\, x_2\, (x_2 - x_1)} \,.$$

Die Korrekturen dH sind an den Höhenablesungen der gegebenen Punkte anzubringen.

Die so erhaltenen Höhen H^* müssen nun noch nach der Formel

$$\Delta H^* = c_6 x + c_7 x^2$$

ausgeglichen werden, wobei

$$c_6 = \frac{x_2^2 \Delta H_1^* - x_1^2 \Delta H_2^*}{x_1 x_2 (x_1 - x_2)} \quad \text{und} \quad c_7 = \frac{x_1 \Delta H_2^* - x_2 \Delta H_1^*}{x_1 x_2 (x_2 - x_1)} \quad \text{zu setzen ist.}$$

Für ΔH_1^* bzw. ΔH_2^* ist der Mittelwert der Fehler der verbesserten Höhen H^*, für x_1 bzw. x_2 der mittlere x-Wert der betreffenden Punktgruppe maßgebend.

Für das *Maschinenrechnen* werden mit Vorteil etwas umgeformte Formeln verwendet. Wird z. B. der verbesserte x-Wert mit (x) bezeichnet, so gilt:

$$\begin{aligned}
(x_n) &= x_n + c_1 x_n + c_2 x_n^2 \\
(x_{n-1}) &= x_{n-1} + c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-1}^2 \\
\hline
(x_n) - (x_{n-1}) &= (x_n - x_{n-1}) + c_1 (x_n - x_{n-1}) + c_2 (x_n^2 - x_{n-1}^2), \quad \text{und} \\
(x_n) &= (x_{n-1}) + (1 + c_1)(x_n - x_{n-1}) + c_2 (x_n^2 - x_{n-1}^2).
\end{aligned}$$

Werden in gleicher Weise die verbesserten Werte aus den entsprechenden Formeln für y und H bestimmt, so erhält man beim Maschinenrechnen direkt die Resultate der ausgeglichenen Koordinaten (x), (y) und (H).

Eine weitere Vereinfachung läßt sich bei der Bestimmung der Luftstandpunkthöhen erreichen, wenn diese fortlaufend berechnet werden, weil für die Zahlwerte m_n und m_{n-1} gilt:

$$n_n - n_{n-1} = +1 \quad \text{und}$$
$$n_n^2 - n_{n-1}^2 = (n_n + n_{n-1})(n_n - n_{n-1}) = n_n + n_{n-1}.$$

Die allgemeine Formel:

$$H_n = H_{n-1} + (H'_n - H'_{n-1}) + a(n_n - n_{n-1}) + b(n_n^2 - n_{n-1}^2)$$

geht dann über in:

$$H_n = H_{n-1} + (H'_n - H'_{n-1}) + a + b(n_n + n_{n-1}).$$

(Im nachfolgenden Beispiel mußte die allgemeine Formel für H verwendet werden, weil in der Tabelle nur eine Auswahl der Luftstandpunkthöhen berechnet worden ist. — Für fortlaufende Berechnung ist die Kolonne für b mit $m_n + m_{n-1}$ zu bezeichnen.)

Ferner ist es angezeigt, die Koeffizienten stets am Einstellwerk (E) einzustellen, die Differenzen erhält man dann im Zählwerk (Z) und die Resultate im Resultatwerk (R), wobei negative Werte als dekadische Ergänzung erscheinen. (Für 999 823 147 z. B. ist zu schreiben — 176 853).

Zahlenbeispiel.

1. Ausgleich der Luftstandpunkthöhen.

In der folgenden Tabelle ist nur eine Auswahl der Luftstandpunkthöhen aus den Statoskopangaben berechnet worden. Die unausgeglichenen Resultate sind mit $\delta H'$, H', $H'_n - H'_{n-1}$ und b'_z bezeichnet. Wie bereits erwähnt, konnte die lineare Ausgleichung infolge des geringen Widerspruches von nur 0,2 m unterbleiben. (Die Sollhöhe von Aufnahme 1003 war 5837,2 m.)

Um auch den parabolischen Ausgleich in einem Zahlenbeispiel darzustellen, sind für die Aufnahmen Nr. 966 und 1001 die Sollhöhen 5833,2 bzw. 5834,5 *angenommen* worden. Diese Werte ergeben die Verbesserungen:

$$\Delta H_1 = 5833{,}2 - 5824{,}6 = +\,8{,}6 \text{ m}$$
$$\Delta H_2 = 5834{,}5 - 5829{,}3 = +\,5{,}2 \text{ m}$$

$$n_1 = 37\,, \quad n_2 = 70\,, \quad n_2 - n_1 = 33\,, \quad n_1\, n_2\, (n_2 - n_1) = 85\,470\,,$$
$$n_1^2 = 1369, \quad n_2^2 = 4900\,.$$

$$a = \frac{+\,4900 \cdot 8{,}6 - 1369 \cdot 5{,}2}{85\,470} = +\,\frac{35\,021}{85\,470} = +\,0{,}4098$$

$$b = \frac{+\,37 \cdot 5{,}2 - 70 \cdot 8{,}6}{85\,470} = -\,\frac{410}{85\,470} = -\,0{,}0048$$

Kontrolle: $\Delta H_1 = +\,0{,}4098 \cdot 37 - 0{,}0048 \cdot 1369 = +\,8{,}59$
$\Delta H_2 = +\,0{,}4098 \cdot 70 - 0{,}0048 \cdot 4900 = +\,5{,}17\,.$

Mit den so berechneten Koeffizienten a und b erhält man die in der folgenden Tabelle I eingeschriebenen H, δH und b_z nach der Formel:

$$H_n = H_{n-1} + (H'_n - H'_{n-1}) + a\,(n_n - n_{n-1}) + b\,(n_n^2 - n_{n-1}^2)\,.$$

Die Summenprobe $5837{,}0 + a \cdot 72 + b \cdot 5184 = 5841{,}6 = H_{72}$ zeigt, daß richtig gerechnet worden ist. — Ebenso muß die Summe der $H'_n - H'_{n-1}$ ($= 5853{,}3 - 16{,}3 = 5837{,}0$) die Höhe H'_{72} ergeben, was ebenfalls zutrifft.

Tabelle I: *Statoskopablesungen und Ausgleich der Standpunkthöhen.*

m	Film No.	Neg. No.	Stat.Abl.		Diff	$\delta H'$	H'	$H'_n - H'_{n-1}$		b'_z mm	$n_n - n_{n-1}$	$n_n^2 - n_{n-1}^2$	H	δH	b_z mm
			l	r	$r-l$	m	m	+	−	1:12 500			m	m	1:12 500
							Horizont 5 829,0	+ 1,0000			$a =$ +0,4098	$b =$ −0,0048	0,00		
0	2 191	919	2,0	2,7	+0,7	+1,8	**5 830,8**	5 830,8		−0 14	0	0	$H_{soll} =$ **5 830,8**	+ 1,8	−0,14
1	2 193	920	2,3	2,4	+0,1	+0,3	5 829,3		1,5	−0,02	1	1	5 829,7	+ 0,7	−0,06
2	2 194	921	3,8	0,8	−3,0	−7,7	5 821,3		8,0	+0,62	1	3	5 822,1	− 6,9	+0,55
3	2 195	922	3,1	1,6	−1,5	−3,9	5 825,1	3,8		+0,31	1	5	5 826,3	− 2,7	+0,22
36	2 239	965	2,1	2,4	+0,3	+0,8	5 829,8	4,7		−0,06	33	1 287	5 838,3	+ 9,3	−0,74
37	2 241	966	3,1	1,4	−1,7	−4,4	5 824,6		5,2	+0,35	1	73	$H_{soll} =$ **5 833,2**	+ 4,2	−0,34
38	2 242	967	2,8	1,8	−1,0	−2,6	5 826,4	1,8		+0,21	1	75	5 835,0	+ 6,0	−0,48
39	2 243	968	3,0	1,5	−1,5	−3,9	5 825,1		1,3	+0,31	1	77	5 833,8	+ 4,8	−0,38
69	2 286	1 000	2,5	2,0	−0,5	−1,3	5 827,7	2,6		+0,10	30	3 240	5 833,1	+ 4,1	−0,33
70	2 287	1 001	2,2	2,3	+0,1	+0,3	5 829,3	1,6		−0,02	1	139	$H_{soll} =$ **5 834,5**	+ 5,5	−0,44
71	2 289	1 002	2,2	2,2	±0,0	±0,0	5 829,0		0,3	± 0,00	1	141	5 833,9	+ 4,9	−0,39
72	2 290	1 003	0,7	3,8	+3,1	+8,0	5 837,0	8,0		−0,64	1	143	5 841,6	+12,6	−1,01
								5 853,3	16,3		72	5 184			

Koordinaten und Höhen der gegebenen Punkte, abgelesene Maschinenkoordinaten und die daraus berechneten Schwerpunkte.

Die Maschinenkoordinaten der Schwerpunkte ergeben sich als arithmetisches Mittel der Maschinenkoordinaten der betreffenden Punktgruppen.

Tabelle II: *Verzeichnis der Koordinaten und Höhen der gegebenen Punkte.*

Punkt	Landeskoordinaten		Höhen	abgelesene Maschinenkoordinaten			Maschinenkoordinaten der Schwerpunkte	
	Y_{soll}	X_{soll}	H_{soll}	x	y	z	x	y
102	+561 283,59	+184 931,43	453,80	− 75,13	−121 80	448,00	0,00	0,00
94	+562 283,70	+186 083,43	448,78	+ 44,73	−144,54	449,35		
3	+562 496,04	+183 645,42	549,33	− 62,36	+ 19,25	553 35		
111	+563 311,91	+184 759,52	475,45	+ 44,14	− 10,57	477,00		
12	+563 721 87	+182 921,29	635.79	− 21,01	+125,54	633 95		
75	+564 662 11	+183 555,99	645,07	+ 69,59	+132.11	646,70		
365	+603 343,21	+215 822,93	541,73	+4 084,04	+ 23,09	593,60	+4 112,81	+25,00
229	+602 843,82	+217 274,94	469,88	+4 124 53	− 91,77	523 70		
380	+604 739,43	+214 989,31	544,38	+4 129,87	+143,67	592,55		
32	+641 398,83	+245 403,66	381,14	+7 883,88	+ 62,69	494,35	+7 913,50	+24,16
29	+640 359,79	+246 298,33	384,51	+7 864,02	− 42 95	495,65		
36	+642 526,37	+245 027,24	443 94	+7 933,45	+140,92	552,95		
43	+641 274 57	+247 375 64	473,51	+7 972,67	− 64,00	589,65		

Berechnung des Winkels δ für die Transformation der Landeskoordinaten in Maschinenkoordinaten.

$$\begin{array}{rl} Y_{75} = & +564\,662{,}11 \\ Y_{102} = & +561\,283{,}59 \\ \hline & +\ \ 3\,378{,}52 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} X_{75} = & +183\,555{,}99 \\ X_{102} = & +184\,931{,}43 \\ \hline & -\ \ 1\,375{,}44 \end{array}$$

$$\alpha'_{102-75} = 124^g\,61^c\,32^{cc}$$

$$\begin{array}{rl} y_{75} = & +132{,}11 \\ y_{102} = & -121{,}80 \\ \hline & +253{,}91 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} x_{75} = & +\ \ 69{,}59 \\ x_{102} = & -\ \ 75{,}13 \\ \hline & +144{,}72 \end{array}$$

$$\alpha_{102-75} = 67^g\,02^c\,69^{cc}$$

$$\delta_1 = \alpha'_{102-75} - \alpha_{102-75} = 57^g\,58^c\,63^{cc}$$

$$Y_{12} = +\,563\,721{,}87 \qquad X_{12} = +\,182\,921{,}29$$
$$Y_{94} = +\,562\,283{,}70 \qquad X_{94} = +\,186\,083{,}43$$
$$+\;\;1\,438{,}17 \qquad -\;\;3\,162{,}14$$

$$\alpha'_{94-12} = 172^g\,82^c\,62^{cc}$$

$$y_{12} = +\,125{,}54 \qquad x_{12} = -\,21{,}01$$
$$y_{94} = -\,144{,}54 \qquad y_{94} = +\,44{,}73$$
$$+\,270{,}08 \qquad -\,65{,}74$$

$$\alpha_{94-12} = 115^g\,19^c\,98^{cc}$$

$$\delta_2 = \alpha'_{94-12} - \alpha_{94-12} = 57^g\,62^c\,64^{cc}$$

$$\delta = 57^g\,60^c\,64^{cc} \qquad \sin\delta = +\,0{,}786\,350 \qquad \cos\delta = +\,0{,}617\,781$$

Umrechnung der gegebenen Punkte in Maschinenkoordinaten.

In der folgenden Tabelle III ergeben sich die in der ersten Zeile eingesetzten reduzierten Landeskoordinaten X_0^* und Y_0^* des Nullpunktes 0 als arithmetisches Mittel der X^*- bzw. Y^*-Werte der Punktgruppe am Anfang des Streifens. — In gleicher Weise werden die Sollwerte in Maschinenkoordinaten der Schwerpunkte in der Hälfte und am Ende des Streifens aus den Sollwerten der betreffenden Punktgruppen gemittelt.

Berechnung der Koeffizienten c_1 und c_2 für die Ausgleichung der x-Fehler.

Im vorliegenden Beispiel zeigten sich ziemlich große systematische Differenzen der x-Fehler im Schwerpunkt und an den Rändern des Streifens, die allerdings durch zufällige Fehler infolge schlechter Identifikationsmöglichkeit teilweise etwas verwischt waren. Die x-Verbesserungen der einzelnen Punkte wurden daher graphisch aufgetragen und daraus die mittleren Neigungen ζ_1 und ζ_2 bestimmt zu:

$$\operatorname{tg}\zeta_1 = +\,0{,}00387\;, \qquad \operatorname{tg}\zeta_2 = +\,0{,}01739\;.$$

Aus den Tabellen II und III ergeben sich für die Schwerpunkte die x-Verbesserungen:

$$\Delta x_{s_1} = +\,13{,}76\ \text{mm} \quad \text{und} \quad \Delta x_{s_2} = +\,70{,}23\ \text{mm}\;,$$

somit nach den Ausführungen auf den Seiten 15 und 16

Tabelle III: *Umrechnung der gegebenen Punkte in Maschinenkoordinaten.*

Punkt	Red. Landeskoordinaten		$Y_n^* - Y_{n-1}^*$		$X_n^* - X_{n-1}^*$		Maschinenkoordinaten		Sollwerte der Schwerpunkte	
	Y^*	X^*	+	−	+	−	x_{soll}	y_{soll}	x_{soll}	y_{soll}
			sin δ +0,786350		cos δ +0,617781					
0	+45 036,79	+14 745,29	cos δ +0,617781		− sin δ −0,786350		± 0,00	± 0,00		
102	+44 902,69	+14 794,51		134,10	49,22		− 75,04	−121,55		
94	+44 982,70	+14 886,67	80,01		92,16		+ 44,81	−144 59		
3	+44 999,68	+14 691,63	16,98			195,04	− 62 33	+ 19,27	± 0,00	± 0,00
111	+45 064,95	+14 780,76	65,27		89,13		+ 44,06	− 10,50		
12	+45 097,75	+14 633,70	32,80			147,06	− 21,00	+125,41		
75	+45 172,97	+14 684,48	75,22		50,78		+ 69,52	+131,95		
365	+48 267,46	+17 265,83	3 094,49		2 581,35		+4 097,58	+ 13,82		
229	+48 227.50	+17 382.00		39,96	116,17		+4 137,92	−102,22	+4 126,57	+15,62
380	+48 379,15	+17 199,14	151,65			182.86	+4 144,20	+135,26		
32	+51 311,91	+19 632,29	2 932,76		2 433,15		+7 953,53	+ 33,76		
29	+51 228,78	+19 703,87		83,13	71,58		+7 932,38	− 73,89	+7 983,73	− 5,85
36	+51 402,11	+19 602,18	173,33			101,69	+8 005,86	+113,16		
43	+51 301,96	+19 790,05		100,15	187.87		+8 043,17	− 96,44		
43 − 0	+ 6 265,17	+ 5 044,76	+6 622,51 − 357,34	−357,34	+5 671,41 − 626,65	−626,65	+8 043,17	− 96 44		
			+6 265,17		+5 044,76					

$$\Delta x_1^* = +13{,}76 - 25{,}00 \cdot 0{,}00387 = \underline{+13{,}66}$$
$$\Delta x_2^* = +70{,}23 - 24{,}16 \cdot 0{,}01739 = \underline{+69{,}81}$$

$$c_1^* = \frac{62{,}63 \cdot 13{,}66 - 16{,}92 \cdot 69{,}81}{123{,}72} = -\frac{325{,}66}{123{,}72} = -2{,}632 \text{ (für } \Delta x^* \text{ in mm)}$$

$$c_2^* = \frac{4{,}11 \cdot 69{,}81 - 7{,}914 \cdot 13{,}66}{123{,}72} = +\frac{178{,}80}{123{,}72} = +1{,}445 \text{ (für } \Delta x^* \text{ in mm)}$$

$$b_1 = \frac{62{,}63 \cdot 0{,}00388 - 16{,}92 \cdot 0{,}0174}{123{,}72} = -\frac{0{,}0514}{123{,}72} = -0{,}000415$$

$$b_2 = \frac{4{,}113 \cdot 0{,}0174 - 7{,}914 \cdot 0{,}00388}{123{,}72} = +\frac{0{,}0409}{123{,}72} = +0{,}000330$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{c_1 = -0{,}002632 - 0{,}000415\, y}\ , \\ \underline{c_2 = +0{,}001445 + 0{,}000330\, y}\ . \end{aligned}\right\} \text{ für } \Delta x \text{ in m}\ .$$

Mit diesen Gleichungen sind für die Übergangspaßpunkte die Kolonnen 2 und 4 der Tabelle IV zu berechnen.

Sofern die Differenzen der x-Fehler in der mittleren Punktgruppe und am Ende des Streifens die Größenordnung der Beobachtungsfehler nicht überschreiten, können für die Ausgleichung die für die Schwerpunkte bestimmten Werte c_1 und c_2 verwendet werden.

Zur Vervollständigung des Beispieles seien daher auch noch die Werte für c_1 bzw. $(1 + c_1)$ und c_2 für die *Schwerpunkte* berechnet. Es ist:

$$c_1 = \frac{62{,}63 \cdot 13{,}76 - 16{,}92 \cdot 70{,}23}{123{,}72} = -\frac{326{,}503}{123{,}72} = -2{,}639$$

Für Δx in m ist $c_1 = -0{,}002639$ und $(1 + c_1) = +0{,}997361$.

$$c_2 = \frac{4{,}113 \cdot 70{,}23 - 7{,}914 \cdot 13{,}76}{123{,}72} = +\frac{179{,}959}{123{,}72} =$$
$$= +1{,}454 \quad \text{bzw.} = +0{,}001454 \quad \text{für } \Delta x \text{ in m.}$$

Kontrolle: $-2{,}639 \cdot 4{,}113 + 1{,}454 \cdot 16{,}92 = +13{,}76 = \Delta x_1$
$-2{,}639 \cdot 7{,}914 + 1{,}454 \cdot 62{,}63 = +70{,}23 = \Delta x_2$

Die Formel für den x-Ausgleich würde somit in diesem Falle, d. h. für praktisch konstante Δx_1 und Δx_2, für Maschinenrechnung lauten:

$$\underline{(x_n) = (x_{n-1}) + 0{,}997361\,(x_n - x_{n-1}) + 0{,}001454\,(x_n^2 - x_{n-1}^2)}\ .$$

Tabelle IV: *Ausgleich der Koordinaten und Höhen der Übergangspaßpunkte.*

(Gerechnet mit variablem c_1 u. c_2)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		11		12		13		14		15		16	17	18
No.	(c_1+1)	x m	c_2	x^2 m	y m	xy m	x^2y m	Ha m/1000	$x_n - x_{n-1}$ +	$x_n - x_{n-1}$ −	$x_n^2 - x_{n-1}^2$ +	$x_n^2 - x_{n-1}^2$ −	$x_n y_n - x_{n-1} y_{n-1}$ +	$x_n y_n - x_{n-1} y_{n-1}$ −	$x_n^2 y_n - x_{n-1}^2 y_{n-1}$ +	$x_n^2 y_n - x_{n-1}^2 y_{n-1}$ −	$y_n - y_{n-1}$ +	$y_n - y_{n-1}$ −	$Ha_n - Ha_{n-1}$ +	$Ha_n - Ha_{n-1}$ −	(x) mm	(y) mm	(H) m
									x $(1+c_1)=$ y $c_3=-0{,}000691$ H $c_6=-0{,}010818$		$c_2=$ $c_4=-0{,}000402$ $c_7=-0.000436$		— $c_5'=+0{,}001859$ $c_9'=+0{,}008699$		— $c_5''=+0{,}000188$ $c_8''=-0{,}000700$		— 1,000000 —		— — 1,000000				
0	—	—	—	—	—	—	—														0,00	0,00	0,00
410	+0,997414	+0,36030	+0,001408	0,13	−0,11082	−0,04	− 0,01	0,4967	0,36030		0,13			0,04		0,01		0,11082	0,4967		+359,55	−111,19	492,40
411	+0,997364	+0,35498	+0,001448	0,12	+0,01026	0	0	0,5431		0 00532		0,01	0,04		0,01		0,12108		0,0464		354,23	+ 9,97	539,21
412	+0,997318	+0,35852	+0.001485	0,13	+0,11998	+0,04	+ 0,02	0,5574	0,00354		0,01		0,04		0,02		0,10972		0,0143		357,78	+119,76	553,80
494	+0 997405	+3.54935	+0,001415	12,60	−0,09022	−0,32	− 1,13	0,5560	3,19083		12,47			0,36		1,15		0,21020		0,0014	3 557,97	− 98,45	510,12
495	+0,997357	+3,50662	+0,001454	12.30	+0,02598	+0,09	+ 0,25	0,5799		0,04273		0,30	0,41		1,38		0,11620		0,0239		3 514,92	+ 18,83	537,21
496	+0,997305	+3,50388	+0,001495	12,28	+0,15211	+0,53	+ 1.84	0,5685		0,00274		0,02	0,44		1,59		0,12613			0,0114	3 512,16	+146,08	528,56
605	+0,997392	+7.68108	+0,001426	51,32	−0,05862	−0,45	− 3,08	0 4944	4,17720		39,04			0,98		4,92		0,21073		0,0741	7 734,13	− 85,97	387,17
606	+0,997341	+7,69558	+0,001466	59.23	+0,06503	+0,50	+ 3,55	0,5068	0,01450		7,91		0,95		6,63		0,12365		0,0124		7 760,19	+ 37,50	399,59
607	+0.997282	+7,71712	+0,001513	59,55	+0,20634	+1,59	+12,50	0.6364	0,02154		0,32		1,09		8,95		0,14131		0,1296		7 782,16	+182,37	532,03
									(+7,76791) (−0,05079)	(−0,05079)	(+59,88) (− 0,33)	(−0,33)	(+2,97) (−1,38)	(−1.38)	(+18,58) (− 6,08)	(−6,08)	(+0,73809) (−0,53175)	(−0,53175)	(+0,7233) (−0,0869)	(−0,0869)			
									+7,71712		+59,55		+1,59		+12,50		+0.20634		+0,6364				

y-Kontrolle: $c_3 \cdot 7{,}71712 + c_4 \cdot 59{,}55 + c_5' \cdot 1{,}59 + c_5'' \cdot 12{,}50 + 0{,}20634 = +182{,}37 = y_{607}$.

H-Kontrolle: $c_6 \cdot 7{,}71712 + c_7 \cdot 59{,}55 + c_8' \cdot 1{,}59 + c_8'' \cdot 12{,}50 + 0\ 6364 = 532{,}03 = H_{607}$.

Berechnung der Koeffizienten für den Ausgleich der y-Fehler.

Gemäß den einleitend gemachten Feststellungen sind zunächst die Koeffizienten c_5' und c_5'' zu berechnen, dann die Ordinaten der Schwerpunkte entsprechend zu verbessern, worauf die Bestimmung der Koeffizienten c_3 und c_4 erfolgt.

In der Hälfte des Streifens stehen die Punkte 229, 365 und 380 zur Verfügung. Aus den Tabellen II und III ergibt sich:

$$\begin{aligned} y_{\text{soll } 380} - y_{\text{soll } 365} &= +\ 121{,}44 \text{ mm} \\ y_{380} \quad - y_{365} \quad &= +\ 120{,}58 \text{ mm} \\ \hline \delta y_1' &= +\ \ 0{,}86 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\text{soll } 365} - y_{\text{soll } 229} &= +\ 116{,}04 \text{ mm} \\ y_{365} \quad - y_{229} \quad &= +\ 114{,}86 \text{ mm} \\ \hline \delta y_1'' &= +\ \ 1{,}18 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\text{soll } 380} - y_{\text{soll } 229} &= +\ 237{,}48 \text{ mm} \\ y_{380} \quad - y_{229} \quad &= +\ 235{,}44 \text{ mm} \\ \hline \delta y_1''' &= +\ \ 2{,}04 \text{ mm}. \end{aligned}$$

e Gewichte sind:

$$\begin{aligned} p_1' &= 1{,}21^2 = 1{,}46 \quad \text{demnach} \quad +1{,}46 \cdot 0{,}86 = +\ 1{,}26 \\ p_1'' &= 1{,}16^2 = 1{,}35 \qquad\qquad\quad +1{,}35 \cdot 1{,}18 = +\ 1{,}59 \\ p_1''' &= 2{,}37^2 = 5{,}62 \qquad\qquad\quad +5{,}62 \cdot 2{,}04 = +\ 11{,}50 \\ \hline [p_1] &= 8{,}43 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +\ 14{,}53 \end{aligned}$$

$$\text{somit } \delta y_1 = +\frac{14{,}35}{8{,}43} = +1{,}70 \text{ mm}.$$

Dieser Fehler δy_1 bezieht sich auf die mittlere y-Differenz dy der zur Berechnung verwendeten Punkte, d. h.

$$dy_1 = \frac{120 + 115 + 235}{3} = \frac{470}{3} = 157 \text{ mm}.$$

Der relative Querfehler q_1 beträgt also:

$$q_1 = \frac{\delta y_1}{dy_1} = +\frac{1{,}70}{157} = +\,0{,}01083.$$

In derselben Weise erhält man für die y-Differenzen der Punkte 36 und 43, bzw. 32 und 29 am Streifenende:

$$\begin{aligned} \delta y_2' &= +\,4{,}68 \\ p_2' &= 2{,}10^2 = 4{,}41 \\ \delta y_2' p_2' &= +\,4{,}41 \cdot 4{,}68 = +\,20{,}60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta y_2'' &= +\,2{,}01 \\ p_2'' &= 1{,}08^2 = 1{,}17 \quad [p_2] = 5{,}58 \\ \delta y_2'' p_2'' &= +\,1{,}17 \cdot 2{,}01 = +\,2{,}35 \end{aligned}$$

somit

$$\delta y_2 = +\frac{22{,}95}{5{,}58} = +\,4{,}12 \text{ mm}.$$

Die mittlere y-Differenz der beiden Strecken beträgt

$$dy_2 = \frac{205 + 106}{2} = 155{,}5 \text{ mm}$$

und demnach der relative Querfehler q_2 am Streifenende:

$$q_2 = + \frac{4{,}12}{155{,}5} = + 0{,}0265 .$$

Die *Koeffizienten* c_5' *und* c_5'' sind nun:

$$c_5' = \frac{+62{,}6 \cdot 0{,}01083 - 16{,}92 \cdot 0{,}02650}{4{,}113 \cdot 7{,}914 \cdot 3{,}801} = + \frac{0{,}230}{123{,}72} = +0{,}001859 ,$$

$$c_5'' = \frac{+4{,}113 \cdot 0{,}0265 - 7{,}914 \cdot 0{,}01083}{123{,}72} = + \frac{0{,}0232}{123{,}72} = +0{,}000188 .$$

Kontrolle: $+ 0{,}001859 \cdot 4{,}113 + 0{,}000188 \cdot 16{,}92 = + 0{,}01083 = q_1$
$+ 0{,}001859 \cdot 7{,}914 + 0{,}000188 \cdot 62{,}6 = + 0{,}02650 = q_2 .$

Für die Verbesserung der Schwerpunktordinaten ist für dy der Maschinenwert $+25{,}00$ in der Hälfte, bzw. $+24{,}16$ am Ende des Streifens (aus Tabelle II) zu verwenden und mit q_1 bzw. q_2 zu multiplizieren. Man erhält:

	$y_1 = +25{,}00$ mm		$y_2 = +24{,}16$ mm
$\delta y_1 = +25{,}00 \cdot 0{,}01083 =$	$+\ 0{,}27$	$\delta y_2 = +24{,}16 \cdot 0{,}0265 =$	$+\ 0{,}64$ mm
	$y_1^* = +25{,}27$ mm		$y_2^* = +24{,}80$ mm
Sollwerte	$y_{1\,\text{soll}} = +15{,}62$ mm		$y_{2\,\text{soll}} = -\ 5{,}85$ mm
	$\Delta y_1^* = -\ 9{,}65$ mm		$\Delta y_2^* = -30{,}65$ mm

Aus der Formel $\Delta y^* = c_3\, x + c_4\, x^2$ ergeben sich schließlich die *Koeffizienten* c_3 und c_4 zu:

$$c_3 = \frac{-62{,}6 \cdot 9{,}65 + 16{,}92 \cdot 30{,}65}{123{,}72} = - \frac{85{,}49}{123{,}72} = -0{,}691 .$$

Für Δy^* in m ist $c_3 = -0{,}000691$.

$$c_4 = \frac{-4{,}113 \cdot 30{,}65 + 7{,}914 \cdot 9{,}65}{123{,}72} = - \frac{49{,}69}{123{,}72} =$$

$$= -0{,}402 \text{ bzw.} = -0{,}000402 \quad \text{für } \Delta y^* \text{ in m.}$$

Kontrolle: $-0{,}691 \cdot 4{,}113 - 0{,}402 \cdot 16{,}92 = -\ 9{,}644 = \Delta y_1^*$
$-0{,}691 \cdot 7{,}914 - 0{,}402 \cdot 62{,}6 = -30{,}634 = \Delta y_2^* .$

Im vorliegenden Beispiel lautet somit die Formel für den Ausgleich der y-Fehler bei Maschinenrechnung:

$$\underline{(y_n) = (y_{n-1}) - 0{,}000691\,(x_n - x_{n-1}) - 0{,}000402\,(x_n^2 - x_{n-1}^2)}$$
$$\underline{+\,0{,}001859\,(x_n\,y_n - x_{n-1}\,y_{n-1}) + 0{,}000188\,(x_n^2\,y_n - x_{n-1}^2\,y_{n-1})\,.}$$

Berechnung der Koeffizienten für den Höhenausgleich.

In der *Hälfte* des Streifens kann die *Verwindung* aus den Höhenfehlern der Paßpunkte 229 und 380, 229 und 365, und 365 und 380 bestimmt werden, wobei auch hier die Quadrate der y-Differenzen als Gewichte einzuführen sind. Es ist:

a) $H_{229\,\text{soll}} = 469{,}88$ $\quad H_{380\,\text{soll}} = 544{,}38$ $\quad x_{229} = +4124$ $\quad y_{229} = -\ 91{,}77$

$H_a = 523{,}70$ $\quad H_a = 592{,}55$ $\quad x_{380} = +4130$ $\quad y_{380} = +143{,}67$

$dH_{229} = -53{,}82$ $\quad dH_{380} = -48{,}17$ $\quad dy = 235{,}44$

$$dH'_{229} = -\frac{53{,}82}{4{,}130} \cdot 4{,}124 = -\,53{,}74\ \text{m}$$

$$\varepsilon'_1 = \frac{dH_{380} - dH'_{229}}{0{,}23544} = \frac{48{,}17 + 53{,}74}{0{,}23544} = +\,23{,}658 \qquad p'_1 = 2{,}35^2 = 5{,}52$$

b) $H_{365\,\text{soll}} = 541{,}73$ $\quad x_{229} = 4124$ $\quad y_{229} = -\ 91{,}77$

$H_a = 593{,}60$ $\quad x_{365} = 4084$ $\quad y_{365} = +\ 23{,}09$

$dH_{229} = -\,53{,}82$ $\quad dH_{365} = -51{,}87$ $\quad dy = 114{,}86$

$$dH'_{229} = -\frac{53{,}82}{4{,}124} \cdot 4{,}084 = -\,53{,}30$$

$$\varepsilon''_1 = \frac{dH_{365} = dH'_{229}}{0{,}11486} = +\frac{1{,}43}{0{,}11486} = +\,12{,}450 \qquad p''_1 = 1{,}15^2 = 1{,}32$$

c) $dH_{365} = -\,51{,}87$ $\quad dH_{380} = -\,48{,}17$ $\quad x_{365} = 4084$ $\quad y_{365} = +\ 23{,}09$

$x_{380} = 4130$ $\quad y_{380} = +\,143{,}67$

$dy = 120{,}58$

$$dH'_{365} = -\frac{51{,}87}{4{,}084} \cdot 4{,}130 = 52{,}46$$

$$\varepsilon'''_1 = \frac{dH_{380} - dH'_{365}}{0{,}12058} = +\frac{4{,}29}{0{,}12058} = +\,35{,}578 \qquad p'''_1 = 1{,}20^2 = 1{,}44$$

$$
\begin{aligned}
p_1' \, \varepsilon_1' &= 5{,}52 \cdot 23{,}658 = +\,130{,}592 \\
p_1'' \, \varepsilon_1'' &= 1{,}32 \cdot 12{,}450 = +\,16{,}434 \\
p_1''' \, \varepsilon_1''' &= 1{,}44 \cdot 35{,}578 = +\,51{,}232 \\
\hline
[p_1] &= 8{,}28 \qquad\qquad\quad + 198{,}258
\end{aligned}
$$

$$\varepsilon_1 = + \frac{198{,}258}{8{,}28} = + 23{,}944 \, .$$

In derselben Weise ist die Verwindung ε_2 am *Ende* des Streifens aus den Höhenfehlern der Paßpunkte 43 und 36 und der Paßpunkte 29 und 32 zu berechnen. Man erhält:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_2' &= +\,37{,}625 \qquad & p_2' &= 4{,}20 \qquad & p_2' \, \varepsilon_2' &= +\,158{,}025 \\
\varepsilon_2'' &= -\,22{,}245 \qquad & p_2'' &= 1{,}12 \qquad & p_2'' \, \varepsilon_2'' &= -\,24{,}914 \\
& & [p_2] &= 5{,}32 \qquad & [p_2 \, \varepsilon_2] &= +\,133{,}111
\end{aligned}
$$

$$\varepsilon_2 = + \frac{133{,}111}{5{,}32} = + 25{,}021 \, .$$

Für die Gleichung $dH = (c_8' x + c_8'' x^2) y$ ergeben sich dementsprechend die *Koeffizienten* c_8' *und* c_8'' *:*

$$c_8' = \frac{62{,}63 \cdot 23{,}944 - 16{,}92 \cdot 25{,}021}{123{,}72} = + \frac{1076{,}257}{123{,}72} =$$

$$= + 8{,}699 \, , \quad \text{bzw.} \quad c_8' = + 0{,}008699 \quad \text{für } dH \text{ in m.}$$

$$c_8'' = \frac{4{,}113 \cdot 25{,}021 - 7{,}914 \cdot 23{,}944}{123{,}72} = - \frac{86{,}581}{123{,}72} =$$

$$= - 0{,}700 \, , \quad \text{bzw.} \quad c_8'' = - 0{,}000700 \quad \text{für } dH \text{ in m.}$$

Kontrolle: $+ 8{,}699 \cdot 4{,}113 - 0{,}700 \cdot 16{,}92 = + 23{,}935 = \varepsilon_1$

$+ 8{,}699 \cdot 7{,}914 - 0{,}700 \cdot 62{,}63 = + 25{,}003 = \varepsilon_2$

Die Verwindungskorrekturen $dH_1 = \varepsilon_1 y_1$ bzw. $dH_2 = \varepsilon_2 y_2$ sind nun an den Höhen der gegebenen Punkte in Streifenhälfte und am Ende anzubringen. Statt dessen kann aber auch für die betreffenden Schwerpunkte das arithmetische Mittel der gegebenen Höhen berechnet und von diesem das um die Verwindung korrigierte arithmetische Mittel der Autographenhöhen subtrahiert werden. Die so errechneten Differenzen ΔH^* sind dann noch maßgebend für die Berechnung der Koeffizienten c_6 und c_7 in der Gleichung

$$\Delta H^* = c_6 x + c_7 x^2 \, .$$

Die Verwindungskorrektur in den Schwerpunkten ist:

$$dH_1 = \varepsilon_1 y_1 = +23{,}944 \cdot 0{,}025 = +0{,}60$$
$$dH_2 = \varepsilon_2 y_2 = +25{,}021 \cdot 0{,}024 = +0{,}60\,,$$

folglich

$$\Delta H_1^* = \frac{[H_{\text{soll}}]}{3} - \left(\frac{[H_a]}{3} + dH_1\right) = 518{,}66 - (569{,}95 + 0{,}60) = -51{,}89\,,$$

$$\Delta H_2^* = \frac{[H_{\text{soll}}]}{4} - \left(\frac{[H_a]}{4} + dH_2\right) = 420{,}78 - (533{,}15 + 0{,}60) = -112{,}97\,.$$

Somit erhält man für die *Koeffizienten* c_6 *und* c_7:

$$c_6 = \frac{-62{,}63 \cdot 51{,}89 + 16{,}92 \cdot 112{,}97}{123{,}72} = -\frac{1338{,}418}{123{,}72} = -10{,}818$$

Für ΔH^* in m ist $c_6 = -0{,}010818$.

$$c_7 = \frac{-4.113 \cdot 112{,}97 + 7{,}914 \cdot 51{,}89}{123{,}72} = -\frac{53{,}988}{123{,}72} = -0{,}436$$

bzw. $= -0{,}000436$ für ΔH^* in m.

Kontrolle: $-10{,}818 \cdot 4{,}113 - 0{,}436 \cdot 16{,}92 = -51{,}87 = \Delta H_1^*$
$-10{,}818 \cdot 7{,}914 - 0{,}436 \cdot 62{,}63 = -112{,}92 = \Delta H_2^*$

Die Formel für den Höhenausgleich bei Maschinenrechnung lautet demnach im vorliegenden Beispiel:

$$\underline{(H_n) = (H_{n-1}) - 0{,}010818\ (x_n - x_{n-1}) - 0{,}000436\ (x_n^2 - x_{n-1}^2)}$$
$$\underline{+\,0{,}008699\ (x_n y_n - x_{n-1} y_{n-1}) - 0{,}000700\ (x_n^2 y_n - x_{n-1}^2 y_{n-1})}\,.$$

Ausgleich der Lage- und Höhenfehler der Übergangspaßpunkte.

In der folgenden Tabelle IV ist für die Autographenwerte x, y und H_a der Übergangspaßpunkte stets das Mittel aus den Ablesungen in zwei benachbarten Aufnahmepaaren zu verwenden. Diese Werte bzw. deren Produkte und Differenzen werden nun in die Kolonnen 3 und 5—15 eingeschrieben. (Kontrolle: Die Summen am Schluß der Kolonnen 10—15 müssen mit den entsprechenden Werten des letzten Übergangspaßpunktes übereinstimmen. — Die Zahlen in Klammern werden bei Maschinenrechnung nicht geschrieben.)

Am Kopf der Kolonnen 10—13 setzt man die berechneten Koeffizienten ein. Können c_1 und c_2 nicht als konstant angenommen werden, so sind für $(1 + c_1)$ und c_2 die Kolonnen 2 bzw. 4 zu benützen.

Sind alle Zahlen eingesetzt und die erwähnten Kontrollen durchgeführt, so erfolgt die Berechnung der ausgeglichenen Werte (x), (y) und (H) durch Multiplikation der in einer Zeile stehenden Zahlen mit den darüber notierten Koeffizienten für x, y bzw. H und gleichzeitige Addition dieser Einzelresultate mit der Maschine. — Sind c_1 und c_2 variabel, so müssen die Zahlwerte in Kolonne 10 und 11 mit den Koeffizienten in Kolonne 2 bzw. 4 multipliziert werden.

Als Schlußkontrolle ergeben die Summen der Kolonnen 10—15 mit den entsprechenden Koeffizienten multipliziert die ausgeglichenen Koordinaten des letzten Übergangspaßpunktes. — Für (x) ist diese Kontrolle jedoch nur möglich bei konstantem c_1 und c_2.

Im vorliegenden Beispiel ist das Komma beim Einstellwerk vor der 6., beim Zählwerk vor der 5. und beim Resultatwerk vor der 8. Stelle anzunehmen, wenn (x) und (y) in mm, (H) in m erhalten werden soll.

Umrechnung der ausgeglichenen Maschinenkoordinaten in Landeskoordinaten.

In vielen Fällen wird die Umrechnung der definitiven Maschinenkoordinaten der Übergangspaßpunkte in Landeskoordinaten erwünscht sein. Dies ist namentlich dann notwendig, wenn verschiedene Streifen für die Triangulation eines größeren Gebietes ausgeglichen werden müssen. Die Umrechnung gemeinsamer Punkte in je zwei benachbarten Streifen in Landeskoordinaten erlaubt dann noch eine weitere Ausgleichung.

Die Tabelle V auf Seite 31 entspricht im Prinzip der Tabelle III, so daß sich weitere Erklärungen erübrigen. Es sei lediglich darauf hingewiesen, daß eine weitere Kontrollmöglichkeit besteht, indem in derselben Weise die Maschinenkoordinaten der Schwerpunkte oder von einem oder zwei gegebenen Punkten (aus Tabelle III) wieder in Landeskoordinaten umgerechnet werden. Für Punkt 43 z. B. ergibt die Umrechnung $Y = +641\,274{,}49$ und $X = +247\,375{,}53$. Die Differenzen gegenüber den gegebenen Werten (Tabelle II) betragen also nur ca. 0,1 m.

Schlußbemerkungen.

Die hier vorliegende Berechnungsart hat sich aus verschiedenen Versuchen ergeben, die dahin zielten, die Rechnungsschemas so zu vereinfachen, daß die Ausgleichung vollständig durch *Hilfspersonal* erfolgen kann. Dieses Ziel dürfte weitgehend erreicht worden sein.

Die zu berechnenden Koeffizienten geben sofort Aufschluß über die Zuverlässigkeit der Autographenarbeit und über die Stabilität des

Tabelle V: *Koordinatenberechnung der ausgeglichenen Übergangspaßpunkte.*

Punkt	(x)	(y)	$(x)\,k = X^*$	$(y)\,k = Y^*$	$X^*_n - X^*_{n-1}$		$Y^*_n - Y^*_{n-1}$		Y	X
	mm	mm	$k = 12{,}5$		+	−	+	−	m	m
					$\sin\delta = +\,0{,}786350$		$\cos\delta = +\,0{,}617781$			
0	± 0,00	± 0,00	± 0,00	± 0,00	$\cos\delta = +\,0{,}617781$		$-\sin\delta = -\,0{,}786350$		+562 959,88	+184 316,12
410	+ 359,55	− 111,19	+ 4 494,38	− 1 389,88	4 494,38			1 389,88	+565 635,40	+188 185,59
411	+ 354,23	+ 9,97	+ 4 427,88	+ 124,62		66,50	1 514,50		+566 518,74	+186 953,58
412	+ 357,78	+ 119,76	+ 4 472,25	+ 1 497,00	44,37		1 372,38		+567 401,46	+185 901,82
494	+ 3 557,97	− 98,45	+44 474,63	− 1 230,62	40 002,38			2 727,62	+597 172,26	+212 759,39
495	+ 3 514,92	+ 18 83	+43 936,50	+ 235,38		538,13	1 466,00		+597 654,77	+211 274,15
496	+ 3 512,16	+ 146,08	+43 902,00	+ 1 826,00		34,50	1 590,62		+598 610,29	+210 002,06
605	+ 7 734,13	− 85,97	+96 676,63	− 1 074,62	52 774,63			2 900,62	+638 317.67	+244 886,12
606	+ 7 760,19	+ 37,50	+97 002,38	+ 468,75	325,75		1 543,37		+639 527,28	+243 873,73
607	+ 7 782,16	+ 182,37	+97 277,00	+ 2 279,62	274,62		1 810,87		+640 861,95	+242 619,41
					(+97916,13) (− 639,13) +97277,00	(−639,13)	(+9 297,74) (−7 018,12) +2 279,62	(−7 018,12)		

Kontrolle: $+\,562\,959{,}88 + 97\,277{,}00 \sin\delta + 2\,279{,}62 \cos\delta = +\,640\,861{,}96 = \underline{Y_{607}}.$

$+\,184\,316{,}12 + 97\,277{,}00 \cos\delta - 2\,279{,}62 \sin\delta = +\,242\,619{,}42 = \underline{X_{607}}.$

verwendeten Auswertegerätes. Es ist jedoch streng darauf zu achten, daß die gegebenen Punkte einwandfrei identifiziert werden können und daß deren Koordinaten und Höhen zuverlässig sind. Ferner darf nicht außer Acht gelassen werden, daß an den Enden und ca. in der Hälfte des Streifens nicht nur die theoretisch notwendige Anzahl von Festpunkten, sondern je eine *Punktgruppe* zur Verfügung steht. Nur wenn dies der Fall ist, können die zufälligen Einpaßfehler sicher innerhalb der tolerierten Grenzen gehalten und so die systematischen Fehler mit genügender Genauigkeit erfaßt und berücksichtigt werden.

Die hier verwendete Berechnungsmethode für die Ausgleichung von Triangulationsstreifen wurde bei 7 verschiedenen Auswertungen angewendet. Die diesbezüglichen *Resultate* sind im *Bericht der Kommission III des internationalen Kongresses für Photogrammetrie 1948* [1] enthalten.

Literatur:

[1] *Brandenberger, A.:* Generalbericht der Kommission III: Lufttriangulation und ihre Anwendung in der Geodäsie. — Internat. Kongreß für Photogrammetrie. Den Haag 1948.

[2] *Zeller, M.:* Lehrbuch der Photogrammetrie. Orell Füßli Verlag, Zürich 1947.

X 2742

Erschienen in der
„Schweizerischen Zeitschrift für Vermessung und Kulturtechnik“,
Jahrgang 1948, Hefte Nr. 4 und 5

Der Einfluß der Autographenfehler auf die gegenseitige Orientierung bei senkrechten Aufnahmen

von Dr. A. Brandenberger

Bei der Orientierung von Steilaufnahmen am Auswertegerät ist bekanntlich zuerst die gegenseitige Orientierung durchzuführen. Damit erhält man unter normalen Verhältnissen ein Modell, das zum aufgenommenen Gelände ähnlich ist. Nach Richtigstellung des Modellmaßstabes, sowie der räumlichen Orientierung des Modelles, bildet dieses die Grundlage für die vermessungstechnische Auswertung des betreffenden Geländeabschnittes. Diese Auswertung ist jedoch immer mit Fehlern behaftet. Von besonderer Bedeutung sind dabei die *Fehler der gegenseitigen Orientierung*, namentlich dann, wenn ein Folgebildanschluß durchzuführen ist. Diese Fehler der gegenseitigen Orientierung sind einerseits bedingt durch die *Beobachtungsfehler des Operateurs* und andererseits durch die vorhandenen *Instrumenten- und Bildfehler.*

Im vorliegenden Aufsatz werden wir in erster Linie den Einfluß der Autographenfehler auf die gegenseitige Orientierung betrachten. Zu diesem Zwecke muß ein bestimmtes Verfahren der gegenseitigen Orientierung vorausgesetzt werden. Wir wählen hiefür das in [5] beschriebene Verfahren. Dieses geht aus von einer näherungsweise durchgeführten gegenseitigen Orientierung nach von Gruber. Nun ist darnach zu trachten, daß die 5 Elemente der gegenseitigen Orientierung aus den Restparallaxen aller für die gegenseitige Orientierung verwendeter Punkte bestimmt werden, in denen Veränderungen dieser Orientierungselemente zu Höhenparallaxe Anlaß geben. Durch rein geometrische Interpretation der Wirkungsweise der 5 Orientierungselemente auf die Höhenparallaxe und unter Berücksichtigung des genannten Prinzipes erhält man die Formeln (6) in [5]. Zu diesen Formeln gelangt man aber auch durch formale Behandlung des numerischen Verfahrens (vermittelnde oder bedingte Ausgleichung). Dieser Weg wurde unter anderen von Prof. B. Hallert (siehe [6]) gewählt. Es ist hier jedoch darauf hinzuweisen, daß schon 1942 Prof. Ansermet (siehe [1]) die sich für dieses Verfahren ergebenden Gewichte der Orientierungselemente und die Restparallaxen berechnet hat. — Durch Messung der 6

Restparallaxen $pv_1' \ldots pv_6'$ (dies kann z. B. mit by' geschehen) und Einsetzen der entsprechenden Werte in die genannten Formeln (6), ließen sich relativ rasch die Fehler $d\Delta\kappa \ldots dby$ der Elemente $\Delta\kappa \ldots by$ der gegenseitigen Orientierung berechnen, so daß die entgegengesetzten Werte der genannten Fehler direkt als Verbesserungen am Autographen eingeführt werden könnten. Dieses Vorgehen hat beispielsweise auch Prof. Hallert vorgeschlagen. In [5] wurde nun aber darauf hingewiesen, daß man die Restparallaxen noch einfacher erfassen kann, indem man sie direkt in der Bildebene in Markengrößen feststellt. In der Praxis ist es dabei meistens so, daß durch die genäherte gegenseitige Orientierung nach von Gruber mehrere Restparallaxen zum Verschwinden gebracht werden können, so daß im allgemeinen nur noch 2 oder 3 Restparallaxen vorhanden sind, deren Größe und Sinn ohne weiteres im Kopf behalten werden kann. Anhand dieser Restparallaxen erhält man, wie dies in [5] Seite 13, 14 und 15 an einem allgemeinen Beispiel gezeigt wurde, zuerst die Fehler, resp. die Verbesserungen der Elemente der gegenseitigen Orientierung in Markengrößen. Die diesen Verbesserungen entsprechenden Änderungen an den Zählwerken des Autographen sind dem Praktiker aus der Erfahrung bekannt. So ergeben sich z. B. für die Wild'sche Präzisionsfliegerkammer und 60 %ige Überdeckung die folgenden *Verbesserungen der Elemente der gegenseitigen Orientierung pro Markendurchmesser:*

$$\begin{aligned} \Delta\kappa &: -5^c, \\ \gamma &: -16^c, \\ \Delta\omega &: -14^c, \\ bz &: -2{,}5\ ‰\ b. \end{aligned}$$

Diese Werte können auch anhand des Markendurchmessers (0,04 mm für den A 5) und der betreffenden Höhenparallaxformeln leicht berechnet werden. Für praktische Belange kann man sich die Berechnung von dby nach Formel (6*e*) in [5] ersparen, indem nach erfolgter Korrektur der übrigen Einstellelemente, die noch verbleibende Höhenparallaxe in den Punkten 1 ... 6 gemittelt und mit by' weggestellt werden kann.

Dieser Orientierungsvorgang entspricht dem numerischen Verfahren. Er führt sehr rasch zum Ziel, selbst wenn obige Zahlenwerte nicht genau bekannt sind; denn bei der in jedem Falle vorzunehmenden Kontrolle der Verbesserungen erkennt man sofort, welche Orientierungselemente zu viel oder zu wenig korrigiert worden sind, so daß man auch rein erfahrungsgemäß zu obigen Zahlenwerten gelangt. Damit ist die für den Anfänger immer wieder verblüffende Erscheinung erklärt, daß der Praktiker, nachdem er nach v. Gruber genähert gegenseitig orientiert hat, alle 6 Restparallaxen feststellt und aus deren Verteilung sofort erkennt, welche Elemente der gegenseitigen Orientierung und um wieviel diese noch verbessert werden müssen.

Dieses Verfahren der gegenseitigen Orientierung ist genauigkeitstechnisch den verschiedenen optisch-mechanischen Orientierungsverfahren nach von Gruber, die auf dem Prinzip der Verwendung der Nullstellen der Orientierungselemente beruhen, überlegen, weil bei dem Verfahren

nach [5] die einzelnen Orientierungselemente nicht nur aus den Höhenparallaxen in den Nullstellen der anderen Orientierungselemente, sondern aus den Höhenparallaxen aller für die gegenseitige Orientierung verwendeten Punkte bestimmt werden, in denen die betreffenden Orientierungselemente zu Höhenparallaxe Anlaß geben. Bemerkenswert (aber naheliegend) ist dabei, daß das Ergebnis dieser Konzeption im Einklang steht mit den Resultaten der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Es sei aber auch darauf hingewiesen, daß ein Operateur, der über die nötigen theoretischen Kenntnisse verfügt, früher oder später auf das Verfahren nach [5] gelangen muß, sobald er sich einmal von dem genauigkeitstechnisch ungünstigen Prinzip der Verwendung der Nullstellen der betreffenden Orientierungselemente zur Bestimmung der andern Orientierungselemente und der damit im Zusammenhang stehenden schrittweisen Bestimmung derselben loslöst. Daß die ausschließliche Verwendung eines optisch-mechanischen Orientierungsverfahrens nach von Gruber genauigkeitstechnisch ungünstig ist, geht beispielsweise auch daraus hervor, daß das von Prof. Bachmann benutzte von Gruber'sche Verfahren im Mittel zu viermal größeren, mittleren Restparallaxen führt, als das numerische Verfahren. Zudem werden bei diesem Verfahren, resp. bei dem Verfahren nach [5] auch die Einflüsse der Instrumenten- und Bildfehler auf die gegenseitige Orientierung (soweit diese zufälliger Natur sind) stärker reduziert, als beispielsweise bei den Verfahren nach von Gruber, resp. einer mehrfachen Wiederholung derselben.

Mit der Feststellung von Autographenfehlern haben sich schon verschiedene Photogrammeter beschäftigt. Es sei hier beispielsweise auf Genauigkeitsuntersuchungen des Wild-Autographen A 5 durch Prof. *Zeller* und dipl. Ing. *Wiser* hingewiesen. Alle diese Untersuchungen ergaben mittlere Restparallaxen, herrührend von den Autographenfehlern, von $\pm$ 0,01–0,02 mm, gemessen in den Bildebenen. Anderseits beträgt aber der mittlere Fehler in der Erfassung einer Höhenparallaxe in den Bildebenen bei der Durchführung der gegenseitigen Orientierung durch einen geübten Operateur $\pm$ 0,01 mm (dieser Wert wurde auch von Prof. Roelofs in [7] benutzt). Verwendet man für die gegenseitige Orientierung das Verfahren nach [5], so ergibt sich, basierend auf diesem Wert, gemäß den Formeln (8) in [5], eine mittlere Restparallaxe in den Bildebenen im Betrage von $\pm$ 0,005 mm, d. h. diese durch die Beobachtungsfehler des Operateurs bedingte mittlere Restparallaxe beträgt nur ca. ⅓ der mittleren Restparallaxe, herrührend von den Autographenfehlern, woraus klar hervorgeht, daß die Restparallaxen, die nach einer sachgemäß durchgeführten gegenseitigen Orientierung resultieren, vor allem durch die Autographenfehler bedingt sind. Zu den Einflüssen der Autographenfehler treten dann noch diejenigen der Bildfehler hinzu, so daß tatsächlich mit noch größeren Restparallaxen zu rechnen ist, die nicht durch die Beobachtungsfehler des Operateurs bedingt sind.

Es wäre nun aber falsch, sich mit den vorhandenen Autographenfehlern ohne weiteres abzufinden, namentlich dann nicht, wenn es sich um Präzisionsauswertungen, resp. um die Durchführung von Aerotriangulationen

handelt. Vielmehr muß hier darnach getrachtet werden, durch geeignete Verfahren der gegenseitigen Orientierung die Einflüsse dieser Fehler soweit wie möglich zu kompensieren. Wie dies zu geschehen hat, ist in [5] eingehend beschrieben worden. Es ergibt sich hier eine Analogie zur Reduktion der Einflüsse der Teilungsfehler bei Präzisionsmessungen mit dem Theodolit. Auch hier hat man Meßverfahren ausgearbeitet, die eine möglichst weitgehende Kompensation der Einflüsse der Teilungsfehler zum Ziele haben.

Aus oben Gesagtem geht hervor, daß die Bedeutung der Autographenfehler auf keinen Fall unterschätzt werden darf, namentlich dann nicht, wenn es sich um die Durchführung von Aerotriangulationen handelt. Dieser Umstand gab Anlaß zu weiteren Genauigkeitsuntersuchungen am Wild-Autographen A 5 des Photogrammetrischen Institutes der ETH. Zürich, mit dem Ziele, alle in Betracht fallenden Autographenfehler zu messen, resp. zu bestimmen. Die Erfassung der Fehler des Wild-Autographen A 5 ist dabei von besonderer Bedeutung, da es sich hier um die Feststellung der instrumentellen Fehler eines der genauesten und bestqualifizierten Universalautographen handelt.

Die im folgenden beschriebenen Genauigkeitsuntersuchungen wurden derart angeordnet, daß einerseits die Genauigkeit eines bestimmten Justierzustandes des Autographen untersucht wurde und andererseits Messungen erfolgten hinsichtlich der Justierhaltigkeit im Verlaufe eines längeren Zeitabschnittes. Wir beschränken uns jedoch im folgenden auf die Beschreibung der Genauigkeitsuntersuchungen eines bestimmten Justierzustandes und möchten nur erwähnen, daß sich die Stabilität des A 5 in bezug auf die Justierung als sehr gut erwiesen hat. Die Genauigkeitsuntersuchungen eines bestimmten Justierzustandes haben folgende Prüfungen zu umfassen: Untersuchung der Rechtwinkligkeit der in Frage kommenden Achsen, Prüfung der Geradlinigkeit der entsprechenden Bewegungen, Untersuchung der Ganghöhen- resp. Teilungsfehler, Prüfung sämtlicher in Betracht fallender beweglichen Teile auf toten Gang und Spiel, Untersuchung der Fehlerquellen, die sich ergeben aus der Lenkerführung und der Schwenkarmmechanik usw. Sofern es sich um die Feststellung der Einflüsse dieser Fehler auf das Modell handelt, ist darauf hinzuweisen, daß sich die hier in Betracht fallenden, instrumentellen Fehler als mehr oder weniger verschiedene Höhen- oder Seitenparallaxen in den Bildebenen bemerkbar machen, d. h. diese instrumentellen Höhen- und Seitenparallaxen können durch Messungen an den eingelegten Gittern festgestellt werden. Dabei erhält man für diese instrumentellen Parallaxen je nach der Größe der 5 Elemente der gegenseitigen Orientierung andere Werte. Nun sind aber für senkrechte Aufnahmen diese 5, die gegenseitige Orientierung bestimmenden Elemente, im Mittel = 0. Die Prüfung der Einflüsse der Autographenfehler auf das Modell mittelst Gitterablesungen zerfällt also in 2 Prüfungen, nämlich in eine Untersuchung der instrumentellen Parallaxen, die sich ergeben unter der Annahme, daß die Elemente der gegenseitigen Orientierung 0 sind (die Zählwerke sämtlicher Orientierungselemente sind, mit Ausnahme von

bx, auf 0 eingestellt), und in eine Untersuchung der Veränderlichkeit der instrumentellen Parallaxen für verschiedene endliche Werte der Elemente der gegenseitigen Orientierung, wie dies z. B. bei normal-konvergenten Aufnahmen für die Konvergenz $\varphi'' - \varphi' = \gamma$ der Fall ist. Auf diese letztere Untersuchung treten wir jedoch hier nicht ein.

Für die im folgenden beschriebene Untersuchung wurde der Autograph zuerst einer eingehenden Prüfung und Justierung unterzogen. Hierauf wurde eine X-Komponente bx der Basis b von 100 mm eingeschraubt. Als Arbeitsdistanz wurde $Z = 410 \cong 400$ mm gewählt. Damit erhält man ein Basisverhältnis von 1:4. Dieses Basisverhältnis kommt gewöhnlich für Aerotriangulationen mit der Wild'schen Präzisionsfliegerkammer (Normalkammer) in Frage bei der üblichen Überdeckung von 60–70 %. Um die sich aus den Gitterablesungen ergebenden instrumentellen Parallaxen mit genügender Genauigkeit zu erhalten, sind verschiedene Vorsichtsmaßnahmen zu treffen. So ist einmal darauf hinzuweisen, daß die bis jetzt existierenden, photographisch hergestellten Gitter für die vorliegenden Zwecke zu wenig genau sind, indem Untersuchungen am Photogrammetrischen Institut der ETH. gezeigt haben, daß die einzelnen Punkte des Gitters nur eine Genauigkeit von rund $\pm$ 0,01 mm aufweisen. Um diese Gitterfehler für die vorliegenden Untersuchungen zu reduzieren, wurde so vorgegangen, daß zuerst Gitterablesungen gemacht wurden in normaler Gitterstellung; hierauf wurden die Gitter um 100^g gedreht und wieder abgelesen. Dieser Prozeß wurde noch 2mal wiederholt. Damit wurden für jeden Gitterpunkt 4 Ablesungen erhalten, welche unter Berücksichtigung der Einlegefehler der Gitter in die Kassetten gemittelt wurden, so daß diese Mittelwerte praktisch frei von Gitterfehlern sind (der mittlere Gitterfehler wurde damit auf mindestens $\pm$ 0,005 mm reduziert). Wie schon erwähnt, wurden zudem für alle Gitterlagen die Einlegefehler der Gitter durch Messung der Differenzen zwischen den Kassettenkreuzen und den entsprechenden Gitterstrichen festgestellt und die Ablesungen entsprechend verbessert. Im weitern wurde für sämtliche Ablesungen ein Aufsatzfernrohr verwendet, um die Fehler der Einstellung der Meßmarke auf die Gitterstriche derart klein zu halten (ca. $\pm$ 0,003 mm, gemessen in den Gitterebenen), daß diese Fehler nicht weiter zu berücksichtigen waren. Unter Beachtung all dieser Vorsichtsmaßnahmen wurden die Maschinenkoordinaten sämtlicher Punkte des linken und rechten Gitters ermittelt (gemessen in der Ebene $Z = 400$ mm), die für das Gemeinsamkeitsgebiet zweier Aufnahmen mit der Normalkammer ($f = 164$ mm, Bildformat 12×12 cm) und bei einem Basisverhältnis von 1:4 in Frage kommen und zwar sowohl für Basis innen wie für Basis außen. Hierauf wurden die Differenzen der X- und Y-Werte entsprechender Punkte im linken und rechten Gitter gebildet, womit die instrumentellen Seiten- und Höhenparallaxen erhalten wurden. Diese sollten entsprechend der vorausgesetzten Disposition theoretisch 0 sein. Da dies praktisch nie der Fall ist, so wird durch die instrumentellen Höhenparallaxen einerseits die gegenseitige Orientierung verfälscht, was Anlaß zu Modelldeformationen gibt, und andererseits verursachen die instrumentellen Seitenparallaxen

variable Modellfehler. Da wir jedoch im vorliegenden Aufsatz nur die Einflüsse der Autographenfehler auf die gegenseitige Orientierung behandeln, beschränken wir uns im folgenden auf die eingehende Behandlung der instrumentellen Höhenparallaxen. Die hiefür erhaltenen Werte sind in den Tabellen Ia und b dargestellt (Maßeinheit $^1/_{100}$ mm).

Die in der Tabelle Ia dargestellten instrumentellen Höhenparallaxen entsprechen den Abweichungen des rechten Gitters gegenüber dem linken bei Basis innen und die in Tabelle Ib enthaltenen Höhenparallaxen den Abweichungen des linken Gitters gegenüber dem rechten bei Basis außen, d. h. die in Tabelle Ia enthaltenen Höhenparallaxen sind zusätzliche, durch die Autographenfehler bedingte Höhenparallaxen, die die Zuorientierung der rechten zur linken Aufnahme bei Basis innen verfälschen, während die in der Tabelle Ib dargestellten Höhenparallaxen die Zuorientierung der linken zur rechten Aufnahme bei Basis außen beeinflussen.

Wie schon erwähnt, sind die in den Tabellen I enthaltenen instrumentellen Höhenparallaxen in der Ebene $Z = 400$ mm gemessen (siehe Fig. 1a und 1b). Um die entsprechenden Werte in den Gitterebenen zu erhalten, sind die Werte in den Tabellen I mit dem Faktor: $\frac{f}{Z} = \frac{164}{400}$ zu reduzieren. Es sei hier noch erwähnt, daß die Figuren 1a und b dem üblichen Arbeitsgang beim Folgebildanschluß entsprechen. Dieser besteht darin, daß die erste Aufnahme des betreffenden Bildstreifens in die linke und die zweite Aufnahme in die rechte Autographenkammer eingelegt wird, worauf bei Basis innen die rechte Kammer zur linken zuorientiert wird. Hierauf wird die erste Aufnahme durch die dritte ersetzt und nun bei Basis außen die linke Kammer zur rechten zuorientiert. Ferner ist darauf hinzuweisen, daß die in den Tabellen I enthaltenen instrumentellen Höhenparallaxen praktisch nur dann auftreten, wenn es sich um mehr oder weniger horizontale Modelle handelt. Diese Bedingung ist nun allerdings in den meisten Fällen eingehalten, da namentlich bei Aerotriangulationen die Höhenunterschiede in den einzelnen Teilmodellen im Vergleich zur Flughöhe über Grund i. allg. klein sind.

Die in den Tabellen I enthaltenen instrumentellen Höhenparallaxen können als die Folge von zwei Fehlerkategorien interpretiert werden; erstens als die Folge von falschen Nullstellungen der Elemente der gegenseitigen Orientierung, die ihre Ursache in kleinen, unvermeidlichen Justierfehlern des Autographen haben, und zweitens als die Folge von Autographenfehlern, die auch noch vorhanden wären, wenn die Nullstellungsfehler der Elemente der gegenseitigen Orientierung eliminiert werden könnten, d. h., wenn der Operateur in der Lage wäre, die bestmögliche Justierung des betreffenden Autographen tatsächlich zu erreichen. Diese beiden Fehlerkategorien wirken sich hinsichtlich der Durchführung der gegenseitigen Orientierung als systematische Fehler aus. Um die durch die Justierfehler bedingten Nullstellungsfehler der Elemente der gegenseitigen Orientierung berechnen zu können, verwenden wir sämtliche instrumentellen Höhenparallaxen innerhalb der 6 in den Tabellen I eingezeich-

bx = + *100 mm* [*Basis innen*]

mm									
—150	+7	+5	+2	+2	+2	±0	—2	—3	—5
—125	+4	+5	+4	+4	+4	+8	+3	+1	—2
— Y —100	+6	+6	+5	+7	+6	+7	+6	+4	+2
— 75	+3	+4	+2	+2	+2	+2	+4	+1	+3
— 50	+2	±0	+1	±0	+2	+2	+2	+1	—2
— 25	+3	+1	—2	—2	—2	—2	—3	—4	—7
0	+3	+2	+2	+2	+1	+1	+1	—1	—5
+ 25	+5	+5	+4	+4	+3	+4	+4	+2	+1
+ 50	±0	—2	—2	—3	—5	—3	—2	—2	—3
+ 75	—3	—4	—3	—3	—6	—5	—4	—3	—5
+ Y +100	—4	—3	—4	—5	—7	—8	—10	—10	—10
+125	—2	—3	—3	—4	—2	—5	—5	—8	—12
+150	±0	+1	±0	+1	±0	—1	—1	—3	—7

b = 100 mm

—50 —25 0 +25 +50 +75 +100 +125 +150 mm

— *X* ← → + *X*

Tabelle I a

bx = —*100 mm* [*Basis außen*]

									mm
+7	+4	+1	+1	±0	—1	—1	—1	—2	+150
+10	+7	+6	+5	+5	+2	+3	+2	+2	+125
+12	+8	+5	+5	+5	+6	+5	+5	+2	+100 + Y
+11	+8	+6	+6	+4	+4	+2	+1	±0	+ 75
+8	+5	+2	+3	+3	+1	—1	—2	—2	+ 50
+6	±0	—2	—2	—2	—2	—2	—1	—4	+ 25
+10	+4	+1	+1	—1	—1	±0	—2	—3	0
+7	+3	+1	+2	+1	—1	—1	—3	—4	— 25
+2	+1	±0	±0	—2	—3	—4	—5	—5	— 50
—1	—3	—4	—3	—4	—3	—5	—4	—5	— 75
—3	—5	—6	—7	—6	—9	—9	—8	—9	—100 — Y
±0	—2	—3	—4	—4	—5	—7	—8	—6	—125
±0	+1	—2	—1	—2	—4	—3	—5	—6	—150

+150 +125 +100 +75 +50 +25 0 —25 —50 mm

+ *X* ← → — *X*

Tabelle I b

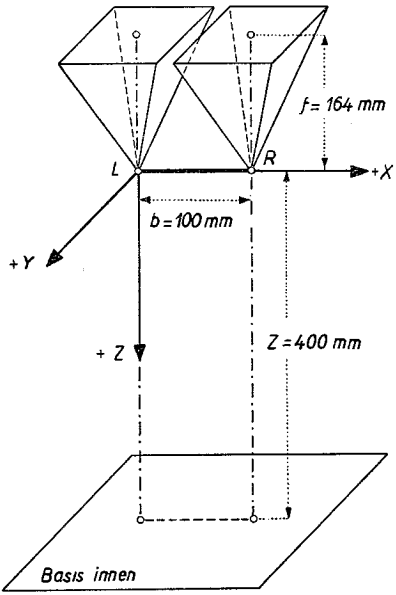


Fig. 1a

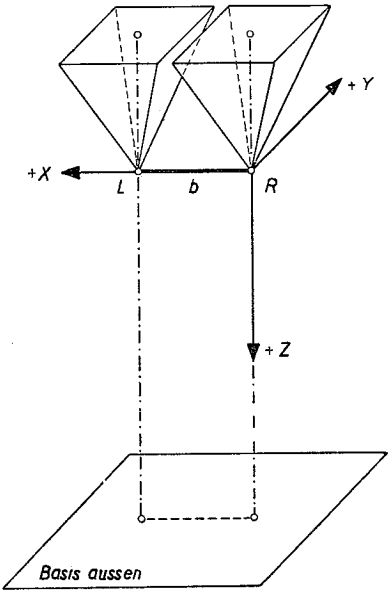


Fig. 1b

neten Bereiche, indem damit alle Punktlagen berücksichtigt werden, die praktisch für die gegenseitige Orientierung in Frage kommen. Als Berechnungsgrundlage verwenden wir dabei die nachfolgende Formel:

$$pv = + \frac{f}{Z}\, dby_0 + \frac{fY}{Z^2}\, dbz_0 - f\left(1 + \frac{Y^2}{Z^2}\right) d\Delta\omega_0 + \frac{f(X-b)\,Y}{Z^2}\, d\gamma_0 - \frac{f(X-b)}{Z}\, d\Delta\kappa_0. \qquad (1)$$

Diese Formel, die der Formel (15) auf Seite 109 in [4] entspricht, gilt sowohl für die Zuorientierung der rechten Kammer zur linken bei Basis innen, wie für die Zuorientierung der linken Kammer zur rechten bei Basis außen. Im ersten Fall wird die Höhenparallaxe pv im rechten Bild beobachtet. Der Koordinatenursprung für die Modellkoordinaten X, Y und Z befindet sich dabei im Projektionszentrum der linken Autographenkammer (siehe Fig. 1a). Im zweiten Fall wird die Höhenparallaxe im linken Bild beobachtet und der Koordinatenursprung befindet sich im Projektionszentrum der rechten Autographenkammer (siehe Fig. 1b). dby_0, dbz_0, $d\Delta\omega_0$, $d\gamma_0$ und $d\Delta\kappa_0$ seien die Nullstellungsfehler der Elemente der gegenseitigen Orientierung by, bz, $\Delta\omega$, γ und $\Delta\kappa$, d. h. bei der Zuorientierung der rechten zur linken Kammer von $by'' \ldots \kappa''$ und bei der Zuorientierung der linken zur rechten Kammer von $by' \ldots \kappa'$. Da die instrumen-

tellen Höhenparallaxen nach den Tabellen I in der Ebene $Z = 400$ mm gemessen wurden, ist die Formel (1) mit $\frac{Z}{f}$ zu multiplizieren. Damit erhält man:

$$Pv = \frac{Z}{f}\, pv = dby_0 + \frac{Y}{Z}\, dbz_0 - \left(Z + \frac{Y^2}{Z}\right) d\Delta\omega_0 + \frac{(X-b)\,Y}{Z}\, d\gamma_0 - (X-b)\, d\Delta\kappa_0. \qquad (2)$$

In der Formel (2) bedeutet Pv die in der Ebene $Z = 400$ mm gemessene Höhenparallaxe. Man könnte nun durch Einsetzen der X- und Y-Werte der 54 Gitterpunkte innerhalb der oben erwähnten 6 Bereiche (diese X- und Y-Werte in der Ebene $Z = 400$ mm sind an den Rändern der Tabellen I angegeben), sowie der entsprechenden instrumentellen Höhenparallaxen Pv innerhalb derselben Bereiche ein System von 54 Gleichungen (2) aufstellen, das durch vermittelnde Ausgleichung gelöst werden könnte, womit man die 5 Unbekannten $dby_0 \ldots d\Delta\kappa_0$, sowie deren mittlere Fehler erhalten würde. Dieses Vorgehen verlangt jedoch eine große Rechenarbeit.

Rascher gelangt man zum Ziel, wenn man für jeden der 6 Bereiche die mittlere instrumentelle Höhenparallaxe Pv_m berechnet, sowie die mittlere Abweichung der einzelnen instrumentellen Höhenparallaxen gegenüber dem Mittelwert Pv_m innerhalb des betreffenden Bereiches. Bezeichnet man die Mittelpunkte der Bereiche in der Ebene $Z = 400$ mm, entsprechend den Figuren 2 a und b, mit den Ziffern 1 ... 6, so erhält man, basierend auf der Formel (2) und entsprechend den Formeln (6) in [5] für die Unbekannten $dby_0 \ldots d\Delta\kappa_0$ die folgenden Ausdrücke:

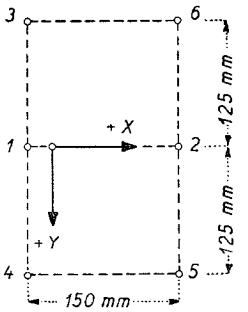
$$d\Delta\kappa_0 = \frac{1}{150 \cdot 100}\left(\frac{Pv_{m1} + Pv_{m3} + Pv_{m4}}{3} - \frac{Pv_{m2} + Pv_{m5} + Pv_{m6}}{3}\right)\rho^c,$$

$$d\gamma_0 = \frac{400}{150 \cdot 125 \cdot 100}\left(\frac{Pv_{m3} - Pv_{m4}}{2} - \frac{Pv_{m6} - Pv_{m5}}{2}\right)\rho^c,$$

$$d\Delta\omega_0 = \frac{400}{125^2 \cdot 100}\left(\frac{Pv_{m1} + Pv_{m2}}{2} - \frac{Pv_{m3} + Pv_{m4} + Pv_{m5} + Pv_{m6}}{4}\right)\rho^c, \qquad (3)$$

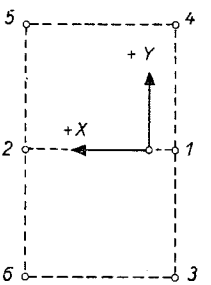
$$dbz_0 = \frac{400}{125 \cdot 100} \cdot \frac{Pv_{m5} - Pv_{m6}}{2},$$

$$dby_0 = \frac{5.52\, Pv_{m1} + 5.73\, Pv_{m2} - 2.67\,(Pv_{m3} + Pv_{m4}) - 2.45\,(Pv_{m5} + Pv_{m6})}{100}.$$



Basis innen

Fig. 2a



Basis aussen

Fig. 2b

Die Formeln (3) gelten sowohl für die Zuorientierung der rechten Kammer zur linken bei Basis innen, wie für die Zuorientierung der linken Kammer zur rechten bei Basis außen.

Berechnet man die einzelnen Pv_m und setzt sie in die Formeln (3) ein, so erhält man für die Unbekannten $dby_0 \ldots d\Delta\kappa_0$, d. h. für die durch die Justierfehler bedingten Nullstellungsfehler der Elemente der gegenseitigen Orientierung die folgenden Werte für die Zuorientierung der rechten zur linken Kammer bei Basis innen:

$$\begin{aligned} d\Delta\kappa_0 &= +1.9^c, \\ d\gamma_0 &= -0.6^c, \\ d\Delta\omega_0 &= +2.6^c, \\ dbz_0 &= -0.124 \text{ mm}; \; d\varphi_0 = -5.3^c, \\ dby_0 &= +0.157 \text{ mm}. \end{aligned} \tag{4a}$$

Für die Zuorientierung der linken zur rechten Kammer bei Basis außen erhält man:

$$\begin{aligned} d\Delta\kappa_0 &= -2.1^c, \\ d\gamma_0 &= +0.3^c, \\ d\Delta\omega_0 &= +1.2^c, \\ dbz_0 &= +0.142 \text{ mm}; \; d\varphi_0 = +6.0^c, \\ dby_0 &= +0.096 \text{ mm}. \end{aligned} \tag{4b}$$

Aus diesen Werten ergibt sich, daß die Justierung des Autographen eine gute war, da die Nullstellungsfehler der Elemente der gegenseitigen Orientierung relativ klein sind und sich zum Teil für die Zuorientierung der rechten zur linken Kammer bei Basis innen und für die Zuorientierung der linken zur rechten Kammer bei Basis außen praktisch aufheben. Dieser Umstand ist wesentlich für die Durchführung von Aerotriangulationen, da diese Nullstellungsfehler der Elemente der gegenseitigen Orientierung

eine der Ursachen sind, für die in den einzelnen Streifen auftretenden systematischen Fehler. Von besonderer Bedeutung ist dabei die Tatsache, daß sich die Nullstellungsfehler von bz, resp. diejenigen der partiellen Längsneigung φ bei Verwendung von Statoskopangaben, für die Zuorientierung der rechten zur linken Kammer bei Basis innen und für die Zuorientierung der linken zur rechten Kammer bei Basis außen praktisch aufheben.

Es wäre nun allerdings falsch zu glauben, daß in einem Streifen nur diese relativ kleinen systematischen Fehler auftreten, indem zu beachten ist, daß die Größen $d\Delta\kappa_0 \ldots dby_0$ aus 9 instrumentellen Höhenparallaxen in jedem Bereich, d. h. aus total 54 Höhenparallaxen bestimmt wurden, während bis dato bei der praktischen gegenseitigen Orientierung in jedem Bereich gewöhnlich nur ein Punkt mit seiner unmittelbaren Umgebung verwendet wird, und zudem noch andere Fehlerquellen vorhanden sind, die für die in einem Streifen auftretenden systematischen Fehler maßgebend sind.

Führt man in der Gleichung (2) die Werte nach (4) ein und subtrahiert die so erhaltenen Höhenparallaxen von den ursprünglichen, instrumentellen Höhenparallaxen Pv, so erhält man instrumentelle Restparallaxen, die vorhanden sind, auch wenn die Nullstellungsfehler der Elemente der gegenseitigen Orientierung eliminiert werden könnten. Die Summe dieser Restparallaxen muß für die Bereiche 1 ... 6 verschwinden, sofern die Größen $d\Delta\kappa_0 \ldots dby_0$ nach (4) richtig berechnet wurden. Für diese Summe erhält man bei Zuorientierung der rechten zur linken Kammer bei Basis innen $+$ 0,05 mm, gemessen in der Ebene $Z = 400$ mm. Dieser kleine Betrag rührt von den Fehlern der Aufrundung her, so daß die genannte Bedingung erfüllt ist. Für die Summe sämtlicher Restparallaxen über das ganze Gemeinsamkeitsgebiet beider Aufnahmen erhält man $\pm$ 0,00 mm. Für die Zuorientierung der linken zur rechten Kammer bei Basis außen ergeben sich die Werte $\pm$0,00 mm, resp. —0,02 mm. Daraus geht hervor, daß die Berechnung der Größen $d\Delta\kappa_0 \ldots dby_0$ nach (4) richtig ist. Berechnet man die mittlere, instrumentelle Restparallaxe für die 6 Bereiche bei Basis innen, so erhält man $\pm$0,013 mm und für das ganze Gemeinsamkeitsgebiet beider Aufnahmen ebenfalls $\pm$0,013 mm, gemessen in den Bildebenen. Bei Basis außen erhält man für die mittlere, instrumentelle Restparallaxe in den Bereichen 1 ... 6 den Wert $\pm$0,011 mm und für das ganze Gemeinsamkeitsgebiet beider Aufnahmen $\pm$0,010 mm, gemessen in den Bildebenen. *Unter der Annahme, daß die Nullstellungsfehler der Elemente der gegenseitigen Orientierung eliminiert, d. h., daß die Justierung des Autographen fehlerlos durchgeführt werden könnte, ergibt sich somit noch eine mittlere instrumentelle Restparallaxe in den Bildebenen von im Mittel $\pm$0,012 mm, die ausschließlich durch die Autographenfehler bedingt ist. Diese ist größer als der mittlere Fehler in der Erfassung einer Höhenparallaxe ($\pm$0,01 mm in den Bildebenen). Ferner ist diese mittlere instrumentelle Restparallaxe ca. 2,5mal größer als die mittlere Restparallaxe, die aus den Beobachtungsfehlern eines geübten Operateurs nach durchgeführter gegenseitiger Orientierung resultiert bei Anwendung des Verfahrens nach* [5].

Die maximal mögliche instrumentelle Restparallaxe, herrührend von den Autographenfehlern, die noch vorhanden ist, wenn die Nullstellungsfehler der Elemente der gegenseitigen Orientierung eliminiert werden könnten, beträgt sowohl für Basis innen wie für Basis außen ± 0,029 mm, gemessen in den Bildebenen, d. h. diese maximale instrumentelle Restparallaxe ist 3mal größer als der mittlere Fehler in der Erfassung einer Höhenparallaxe in den Bildebenen und ca. 6mal größer als die mittlere Restparallaxe, die aus den Beobachtungsfehlern eines geübten Operateurs nach durchgeführter gegenseitiger Orientierung resultiert bei Anwendung des Verfahrens nach [5].

Um die, je nach der gewählten Punktlage innerhalb der 6 Bereiche, verschiedenen Einflüsse der Autographenfehler auf die gegenseitige Orientierung mit den Einflüssen der Beobachtungsfehler des Operateurs noch eingehender vergleichen zu können, müssen die mittleren Streuungen (in der Folge kurz als mittlere Fehler bezeichnet) der Größen $d\Delta\kappa_0 \ldots dby_0$ sowohl für die Zuorientierung der rechten zur linken Kammer bei Basis innen, wie für die Zuorientierung der linken zur rechten Kammer bei Basis außen berechnet werden. Zu diesem Zwecke ist auf die Formeln (3) das Gauß'sche Fehlerfortpflanzungsgesetz anzuwenden, wobei für die mittlere instrumentelle Höhenparallaxe Pv_m in den einzelnen Bereichen die entsprechende mittlere Abweichung der einzelnen instrumentellen Höhenparallaxen gegenüber dem Mittelwert Pv_m innerhalb des betreffenden Bereiches einzuführen ist. Damit erhält man für die Größen $d\Delta\kappa_0 \ldots dby_0$ die folgenden mittleren Fehler für die Zuorientierung der rechten zur linken Kammer bei Basis innen:

$$\begin{aligned} m_{d\Delta\kappa_0} &= \pm 1.0^c, \\ m_{d\gamma_0} &= \pm 3.9^c, \\ m_{d\Delta\omega_0} &= \pm 4.2^c, \\ m_{dbz_0} &= \pm 0.083 \text{ mm}; \; m_{d\varphi_0} = \pm 3.5^c, \\ m_{dby_0} &= \pm 0.279 \text{ mm}. \end{aligned} \tag{5a}$$

Für die Zuorientierung der linken zur rechten Kammer bei Basis außen erhält man:

$$\begin{aligned} m_{d\Delta\kappa_0} &= \pm 0.9^c, \\ m_{d\gamma_0} &= \pm 3.4^c, \\ m_{d\Delta\omega_0} &= \pm 3.9^c, \\ m_{dbz_0} &= \pm 0.061 \text{ mm}; \; m_{d\varphi_0} = \pm 2.6^c, \\ m_{dby_0} &= \pm 0.264 \text{ mm}. \end{aligned} \tag{5b}$$

Andererseits erhält man gemäß [4] Seite 122 folgende mittleren Fehler der Elemente der gegenseitigen Orientierung, herrührend von den Beobachtungsfehlern eines geübten Operateurs, unter der Voraussetzung

daß das Verfahren der gegenseitigen Orientierung nach [5] angewendet wird und praktisch absolut scharfe Bilder vorhanden sind:

$$\begin{aligned} m_{\Delta\kappa} &= \pm 1.1^c, \\ m_{\gamma} &= \pm 4.1^c, \\ m_{\Delta\omega} &= \pm 3.0^c, \\ m_{bz} &= \pm 0.05 \text{ mm}; \; m_{d\varphi} = \pm 2.9^c, \\ m_{by} &= \pm 0.20 \text{ mm}. \end{aligned} \tag{5c}$$

Daraus ergibt sich, daß die durch die Autographenfehler bedingten mittleren Fehler der Größen $d\Delta\kappa_0 \ldots dby_0$, d. h. der Elemente der gegenseitigen Orientierung, gemäß (5a) und (5b) im Mittel von der gleichen Größenordnung sind sie diejenigen, die sich aus den Beobachtungsfehlern eines geübten Operateurs nach durchgeführter gegenseitiger Orientierung ergeben bei Anwendung des Verfahrens nach [5], wobei jedoch zu beachten ist, daß in diesen, durch die Autographenfehler bedingten mittleren Fehlern die durch die Justierfehler verursachten Nullstellungsfehler der Elemente der gegenseitigen Orientierung nicht enthalten sind. Zudem ist darauf hinzuweisen, daß diese durch die Autographenfehler verursachten Fehler der Orientierungselemente für die Durchführung der gegenseitigen Orientierung nicht mehr den Charakter von zufälligen Fehlern, sondern von systematischen Fehlern haben, die daher durch eine mehrmalige Wiederholung der gegenseitigen Orientierung mit derselben Punktlage nicht ausgeschaltet werden können. Von besonderer Bedeutung sind dabei die Maximalfehler der Größen $d\Delta\kappa_0 \ldots dby_0$, welch erstere namentlich bei Aerotriangulationen zu sogen. Sprüngen Anlaß geben. Zur Bestimmung dieser Maximalfehler sind in den Bereichen 1 ... 6 (siehe Tabellen I) die für die gegenseitige Orientierung zu verwendenden Punkte derart zu wählen, daß sie bei Anwendung des Verfahrens der gegenseitigen Orientierung nach [5], entweder einen extrem positiven oder extrem negativen Fehler der einzelnen Elemente der gegenseitigen Orientierung liefern. So erhält man für die Zuorientierung der rechten zur linken Kammer bei Basis innen auf Grund der instrumentellen Höhenparallaxen nach Tabelle Ia und bei Verwendung von Formeln, die den Formeln (3) entsprechen, folgende extremale, durch die Autographenfehler bedingten Fehler der Größen $d\Delta\kappa_0 \ldots dby_0$, d. h. der Elemente der gegenseitigen Orientierung:

$$\begin{aligned} d\Delta\kappa^+ &= +4.9^c; & d\Delta\kappa^- &= -2.8^c, \\ d\gamma^+ &= +10.2^c; & d\gamma^- &= -13.6^c, \\ d\Delta\omega^+ &= +15.4^c; & d\Delta\omega^- &= -11.4^c; \\ dbz^+ &= +0.053 \text{ mm}; & dbz^- &= -0.320 \text{ mm}, \\ d\varphi^+ &= +2.2^c; & d\varphi^- &= -13.6^c, \\ dby^+ &= +0.980 \text{ mm}; & dby^- &= -0.840 \text{ mm}. \end{aligned} \tag{6a}$$

Analog erhält man für die Zuorientierung der linken zur rechten Kammer bei Basis außen:

$$
\begin{aligned}
d\Delta\kappa^+ &= +1.9^c; & d\Delta\kappa^- &= -5.2^c,\\
d\gamma^+ &= +13.0^c; & d\gamma^- &= -12.7^c,\\
d\Delta\omega^+ &= +12.2^c; & d\Delta\omega^- &= -9.4^c,\\
dbz^+ &= +0.360 \text{ mm}; & dbz^- &= \pm 0.000 \text{ mm}\\
d\varphi^+ &= +15.3^c; & d\varphi^- &= \pm 0.0^c\\
dby^+ &= +0.980 \text{ mm}; & dby^- &= -0.700 \text{ mm}.
\end{aligned}
\tag{6b}
$$

Daraus ergeben sich die folgenden maximalen Streuungsbereiche für die Fehler der Elemente der gegenseitigen Orientierung, bedingt durch die Autographenfehler, für die Zuorientierung der rechten zur linken Kammer bei Basis innen:

$$
\begin{aligned}
\Delta\kappa&: \quad 7.7^c,\\
\gamma&: \quad 23.8^c,\\
\Delta\omega&: \quad 26.8^c,\\
bz&: \quad 0.373 \text{ mm}, \ \varphi: 15.8^c,\\
by&: \quad 1.820 \text{ mm}.
\end{aligned}
\tag{7a}
$$

Für die Zuorientierung der linken zur rechten Kammer bei Basis außen erhält man:

$$
\begin{aligned}
\Delta\kappa&: \quad 7.1^c,\\
\gamma&: \quad 25.7^c,\\
\Delta\omega&: \quad 21.6^c,\\
bz&: \quad 0.360 \text{ mm}, \ \varphi: 15.3^c,\\
by&: \quad 1.680 \text{ mm}.
\end{aligned}
\tag{7b}
$$

Ferner ergeben sich aus (6 a) und (6 b) die folgenden extremen Variationsgrenzen resp. Sprünge der Fehler der Elemente der gegenseitigen Orientierung, bedingt durch die Autographenfehler, beim Basiswechsel:

$$
\begin{aligned}
\Delta\kappa&: \text{ von } +4.9^c && \text{bis } -5.2^c, && \text{max. Sprung: } 10.1^c,\\
\gamma&: \text{ von } -13.6^c && \text{bis } +13.0^c, && \text{max. Sprung: } 26.6^c,\\
\Delta\omega&: \text{ von } +15.4^c && \text{bis } -9.4^c, && \text{max. Sprung: } 24.8^c,\\
bz&: \text{ von } -0.320 \text{ mm} && \text{bis } +0.360 \text{ mm}, && \text{max. Sprung: } 0.660 \text{ mm},\\
\varphi&: \text{ von } -13.6^c && \text{bis } +15.3^c, && \text{max. Sprung: } 28.9^c,\\
by&: \text{ von } -0.840 \text{ mm} && \text{bis } +0.980 \text{ mm}, && \text{max. Sprung: } 1.820 \text{ mm}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

D. h. je nach der gewählten Lage der Punkte bei der Durchführung der gegenseitigen Orientierung innerhalb der Bereiche 1 ... 6 (in der Praxis kann vielfach die theoretische Lage der für die gegenseitige Orientierung benutzten Punkte infolge Detailmangel, Gewässer, Wald usw. nicht eingehalten werden) können beim Basiswechsel die oben angeführten *maximalen Sprünge* auftreten. *Diese sind rund 9 mal größer als die mittleren Fehler der Elemente der gegenseitigen Orientierung* [*siehe* (5 c)], *bedingt durch die Beobachtungsfehler eines geübten Operateurs, sofern er das Verfahren der gegenseitigen Orientierung nach* [5] *anwendet.* Dabei ist zudem darauf hinzuweisen, daß dieses Verfahren auch hinsichtlich der Reduktion der Einflüsse der Autographenfehler auf die gegenseitige Orientierung günstig ist. Verwendet man hingegen die Methode v. Gruber, oder eine

6malige Wiederholung derselben, wie dies Prof. Bachmann vorgeschlagen hat, so wirken sich die Autographenfehler noch ungünstiger aus, so daß mit dem Auftreten von noch größeren durch die Autographenfehler bedingten Sprüngen zu rechnen ist.

Diese durch die Autographenfehler bedingten maximal möglichen Sprünge beim Basiswechsel üben einen entscheidenden Einfluß aus auf die Durchführung und auf die Genauigkeit von Aerotriangulationen. Das Vorhandensein dieser Sprünge kann auch tatsächlich in verschiedenen durchgeführten Aerotriangulationen nachgewiesen werden. So wurde beispielsweise in einem Streifen ein größter Sprung der Querneigung bei einem Basiswechsel festgestellt von 50^c. Dieser Sprung kann nur durch einen Fehler der Differenzkippung und einen solchen der Differenzkantung verursacht sein. Aus der Tabelle (8) ergibt sich ein maximal möglicher Sprung der Querneigung, herrührend von einem maximalen Sprung der Differenzkippung beim Basiswechsel von $26{,}6^c$. Für den maximal möglichen Sprung der Querneigung, herrührend von einem maximalen Sprung der Differenzkantung beim Basiswechsel, erhält man $4 \cdot 10{,}1 = 40{,}4^c$. *Daraus ergibt sich, daß ein maximaler Sprung der Querneigung von* 50^c *beim Basiswechsel durch das Zusammenwirken von entsprechenden Sprüngen der Differenzkippung und Differenzkantung, bedingt durch die Autographenfehler, ohne weiteres möglich ist, womit nachgewiesen ist, daß die in den einzelnen Streifen bisweilen auftretenden, abnormal großen Sprünge tatsächlich in erster Linie durch die Autographenfehler bedingt sind. Ferner ist darauf hinzuweisen, daß auch die Bildfehler einen gewissen Einfluß auf die Größe dieser Sprünge haben. Wenn daher von theoretischer Seite aus versucht worden ist, diese Sprünge als Zufallsprodukte, herrührend von den Beobachtungsfehlern bei der gegenseitigen Orientierung, zu erklären, so wird diese Erklärung den tatsächlichen Verhältnissen nicht gerecht. In gleicher Weise kann daher auch eine mehrmalige gegenseitige Orientierung bei derselben Punktlage nicht zu einer Reduktion dieser Sprünge führen, da diese eben in vorwiegendem Maße durch die Autographenfehler und bis zu einem gewissen Grade auch durch die Bildfehler bedingt sind.* Dabei ist allerdings vorausgesetzt, daß der Operateur über eine genügende Praxis verfügt und die gegenseitige Orientierung sachgemäß durchführt.

Zusammenfassend kann folgendes gesagt werden: Die vorliegende Untersuchung zeigt, daß wenn die gegenseitige Orientierung gemäß dem in [5] beschriebenen Verfahren durch einen geübten Operateur durchgeführt wird, der Einfluß der Autographenfehler auf die gegenseitige Orientierung wesentlich größer ist als der Einfluß der Beobachtungsfehler. Die übertriebene Bedeutung, die den zufälligen, durch die Beobachtungsfehler des Operateurs bedingten Fehlern der Elemente der gegenseitigen Orientierung beigemessen wird, besteht daher nicht zu Recht. Diese Feststellungen sind von entscheidender Bedeutung für die Durchführung und Ausgleichung von Aerotriangulationen, *indem ein Triangulierungsverfahren, resp. eine Ausgleichung, die den mehr oder weniger systematisch wirkenden Autographen- und Bildfehlern nicht Rechnung trägt, nicht befriedigen kann. Dies gilt noch in vermehrtem Maße für Aerotriangu-*

lationen mit Weitwinkelaufnahmen, indem hier die zufälligen, durch die Beobachtungsfehler eines geübten Operateurs bedingten Orientierungsfehler gegenüber den Einflüssen der Autographen- und Bildfehler vernachlässigbar klein sind. Ist man sich jedoch über die Bedeutung der Autographen- und Bildfehler im klaren, so ist es sehr wohl möglich, die Einflüsse dieser Fehler weitgehend zu reduzieren. So wurde beispielsweise in [5] gezeigt, wie man nicht nur zu einer fehlertheoretisch günstigsten gegenseitigen Orientierung gelangt, sondern, wie auch der Einfluß der Autographen- und Bildfehler reduziert werden kann. Im übrigen ist es Sache des Operateurs, in jedem einzelnen Falle zu beurteilen, welche Fehlerquellen von entscheidender Bedeutung sind und welche Fehler vernachlässigt werden können. *Es muß aber auch darauf hingewiesen werden, daß die Ergebnisse der modernen Luftphotogrammetrie einen Genauigkeitsgrad erreicht haben, der in erster Linie durch den derzeitigen Stand der Instrumententechnik bedingt ist. Noch genauere Resultate dürften daher zur Zeit nur durch Verbesserung der praktischen Methoden auf Grund der bekannten Einflüsse der unvermeidlichen Autographen- resp. Bildfehler erreicht werden können.*

Literaturverzeichnis

[1] A. Ansermet: L'orientation de levers aérotopographiques. Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières, No. 8, 1942.

[2] W. K. Bachmann: Théorie des erreurs de l'orientation relative. Thèse 1943.

[3] W. K. Bachmann: Théorie des erreurs de la triangulation aérienne, 1946.

[4] A. Brandenberger: Fehlertheorie der äußeren Orientierung von Steilaufnahmen, Diss. 1947.

[5] A. Brandenberger: Theorie und Praxis der gegenseitigen Orientierung von Steilaufnahmen. Separatabdruck aus der Schweiz. Zeitschrift für Vermessung und Kulturtechnik, Jahrgang 1947, Heft Nr. 9.

[6] B. Hallert: Über die Herstellung photogrammetrischer Pläne. Diss. 1944.

[7] R. Roelofs: Fehlertheorie der Aerotriangulation. Photogrammetria, 1941, Nr. 3 und folgende.