

Diss ETH No 23719

Continuous Parabolic Molecules

A thesis submitted to attain the degree of
DOCTOR OF SCIENCES of ETH Zürich
(Dr. sc. ETH Zürich)

presented by

Željko Kereta

MSc in Mathematical Modelling and Scientific Computing
University of Oxford

born on 22 May 1987

citizen of Croatia

accepted on the recommendation of

Prof Dr Philipp Grohs, ETH Zürich, examiner

Prof Dr Helmut Bölcskei, ETH Zürich, co-examiner

Prof Dr Gitta Kutyniok, TU Berlin, co-examiner

2016

Abstract

Last decade saw the addition of a number of new representation dictionaries to the arsenal of computational harmonic analysis. A major source of inspiration that underlies their creation is the desire to address the weaknesses of the classical wavelet transform that arise due to its limited capacity for the analysis of edge like features of two-dimensional signals. The first dictionary fully adapted for addressing these tasks were the curvelets [1], followed closely by shearlets [2] and contourlets [3], to name but a few. Salient feature of these dictionaries is their adherence to a paradigm that aims to incorporate the directional selectivity and the anisotropic treatment of the axes, achieved through the parabolic scaling law, into the architecture of the dictionary.

Directional anisotropic dictionaries have subsequently garnered attention for their ability to answer questions regarding curvilinear singularities of functions of both theoretical and practical importance such as Fourier integral operators [4, 5], denoising [6] and inpainting [7]. Inferring about their properties each such dictionary required proofs tailored to the specifics of its construction, yet all are somehow repetitive. Nevertheless, there has been a sizeable body of evidence to suggest that these dictionaries answer the same fundamental questions and it should be possible to see them as parts of a much broader framework. Such a framework could help reduce the redundancy of proof techniques by establishing the universal features, and allow the usage of a dictionary that best fits any given situation, since some dictionaries are better for theoretical considerations whereas other dictionaries might be better suited for digital implementations.

In this thesis we will construct a comprehensive framework for directional parabolic dictionaries in the continuous setting, which we coin the continuous parabolic molecules. Our work builds on earlier studies such as the curvelet molecules [5] and the shearlet molecules [8], but the predominant influence is that of the discrete parabolic molecules [9]. In contrast with earlier studies, we will look at the questions and challenges that appear in the continuous setting. We will first show that our framework is general enough to include both the curvelet- and shearlet-type constructions, and that the pairs of molecules are almost-orthogonal with respect to a pseudo-distance function which is adapted to the ambient geometry. Using almost-orthogonality we will show that some fundamental notions of microlocal analysis such as the resolution of the wavefront set and microlocal Sobolev regularity can be detected by all suitable continuous parabolic molecules. Lastly, we will show that parabolic molecules can be used to identify edge and corner points of piecewise smooth closed curves in \mathbb{R}^2 .

Prefazione

Il decennio scorso ha visto l'aggiunta all'arsenale dell'analisi armonica computazionale di nuovi dizionari di rappresentazione. La loro creazione trae ispirazione dalla volontà di colmare le carenze della classica trasformata *wavelet* dovute alla limitata capacità della suddetta nell'analisi di caratteristiche, quali spigoli, in segnali in due dimensioni. Il primo dizionario pienamente pensato a questo scopo furono le *curvelets*, seguite poco dopo dalle *shearlets* e dalle *contourlets*, per citarne alcune. Caratteristica saliente dei predetti dizionari è l'adozione di un paradigma rivolto a incorporare nell'architettura del dizionario la selettività direzionale e il trattamento anisotropo degli assi, quest'ultimo tramite la legge di *scaling* parabolico.

I dizionari parabolici anisotropi hanno successivamente attratto interesse per la loro abilità nel risolvere questioni, sia teoriche che pratiche, riguardanti singolarità curvilinee che si presentano, per esempio, nello studio degli operatori integrali di Fourier, nel *denoising* e nell' *inpainting*. Le argomentazioni matematiche necessarie allo studio delle proprietà di tali dizionari richiesero un adattamento alle specificità di ognuno di essi, risultando al contempo ripetitive. Ciò nondimeno, una considerevole evidenza matematica suggerisce che questi dizionari forniscono risposte alle medesime questioni fondamentali, per cui sembrerebbe possibile inquadrarli quali parti di una struttura matematica più ampia e generalizzata. Tale struttura faciliterebbe l'identificazione di tratti universali, eliminando così tecniche di dimostrazione ridondanti; permetterebbe inoltre l'utilizzo di un dizionario singolo idoneo ad ogni situazione, tenuto conto che alcuni dizionari si prestano meglio a considerazioni di tipo teorico mentre altri risultano più adatti all'implementazione digitale.

In questa tesi costruiremo un quadro completo per dizionari parabolici direzionali nel continuo, che denominiamo molecole paraboliche continue. Il nostro lavoro di basa su studi precedenti quali le molecole *curvelet* [5] e le molecole *shearlet*, sebbene l'influsso maggiore venga dalle molecole paraboliche discrete [9]. Contrariamente a studi precedenti, rivolgeremo la nostra attenzione alle domande ed ai problemi che appaiono al continuo. Mostreremo anzitutto che la struttura matematica da noi definita è sufficientemente generale da includere sia le costruzioni di tipo *curvelet*, sia quelle di tipo *shearlet*, e che le coppie di molecole sono quasi-ortogonali rispetto ad una funzione di pseudo-distanza adattata alla geometria in questione. Utilizzando la quasi-ortogonalità, mostreremo che nozioni fondamentali dell'analisi microlocale, quali la risoluzione del *wave front set* e regolarità microlocale negli spazi di Sobolev, possono essere rintracciate da ogni tipo di

molecola parabolica continua propriamente scelta. In ultimo, mostreremo che le molecole paraboliche possono essere impiegate per identificare spigoli e angoli di curve chiuse regolari a tratti in \mathbb{R}^2 .