Prom. Nr. 3232

Beiträge zur algebraischen Homotopietheorie der Moduln

Von der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH
zur Erlangung
der Würde eines Doktors der
Mathematik
genehmigte
PROMOTIONSARBEIT

Vorgelegt von
WERNER MEIER
von Steinmaur (Zürich)

Referent: Herr Prof. Dr. B. Eckmann
Korreferent: Herr Prof. Dr. K. Voss

1962 Buchdruckerei AG Suhr

Vorwort

Die vorliegende Arbeit basiert auf einer Untersuchung von B. Eckmann und P.J. Hilton [1]. Dort wird - analog zum Vorgehen in der Topologie - für Homomorphismen zwischen Moduln ein Homotopiebegriff definiert. Dieser Begriff samt verschiedenen daraus resultierenden Folgerungen lässt sich auf beliebige Abelsche Kategorien verallgemeinern (vergleiche H. Kleisli [2]). Im folgenden soll nun diese Homotopietheorie in zwei speziellen exakten Kategorien ganz explizit entwickelt werden, nämlich in der Kategorie der Moduln über einem Ring, welche schon in [1] andeutungsweise behandelt wurde, und in der Kategorie der Paare von Moduln, wobei wir hier unter einem "Paar" eine durch einen Homomorphismus definierte spezielle differentielle Folge von Moduln verstehen.

Im Kapitel I werden zunächst Definitionen und Sätze aus [1] zusammengestellt; für einige Resultate wird ein vollständiger Beweis gegeben. Dabei werden die Sätze über differentielle Folgen ausführlich behandelt (§5), da wir sie zur Definition der relativen Homotopiegruppen benötigen. Dann geben wir die injektive (und projektive) Homotopiesequenz eines Paares an; die Exaktheit dieser Sequenz wird hier nicht bewiesen, wir verweisen bezüglich des Beweises auf [2]. Nach einem Abschnitt über das algebraische Analogon zum Begriff der "Faserung" wird im letzten Teil dieses Kapitels eine Abbildung betrachtet, die den verschiedenen Aspekten der sogenannten Transgression entspricht.

Im Kapitel II werden allgemeine Sätze über Doppelfolgen zusammengestellt und sodann, in der Kategorie der differentiellen Folgen, die relativen Homotopiegruppen definiert. Eine besondere Rolle spielt dabei das "Transponieren" einer Abbildung eines Paares in ein anderes Paar; daraus kann unter anderem die exakte Homotopiesequenz eines Tripels (d.h. einer Zusammensetzung zweier Homomorphismen) gewonnen werden. Auch die so erhaltene Tripelsequenz ist das algebraische Analagon eines bekannten Satzes der Topologie.

Das Kapitel III untersucht einige Resultate, die man unter der Voraussetzung erhält, dass der injektive und der projektive Homotopiebegriff zusammenfallen. Dies tritt ein für spezielle Arten von Ringen, welche den Moduln zugrunde gelegt werden [5]. In diesem Falle ist es möglich, auch in der Kategorie der Paare eine Tripelsequenz aufzustellen, wobei aber nicht die gewöhnlichen Homotopiegruppen verwendet werden können, sondern die "transponierten" (twisted homotopy groups).

In einem Anhang werden die Cohomotopiegruppen (im injektiven Fall) untersucht, welche den gleichbenannten Gruppen in der Topologie ähnlich sind. Die injektive Cohomotopiesequenz wird hier nicht für ein beliebiges Paar, sondern für einen Monomorphismus betrachtet. Sie ist im allgemeinen nicht exakt, sondern nur exakt "bis auf Suspension", eine Aussage, deren genaue Bedeutung im Anhang präzisiert wird.