

Prom. Nr. 3232

Beiträge zur
algebraischen Homotopietheorie
der Moduln

Von der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH
zur Erlangung
der Würde eines Doktors der
Mathematik
genehmigte
PROMOTIONSARBEIT

Vorgelegt von
WERNER MEIER
von Steinmaur (Zürich)

Referent: Herr Prof. Dr. B. Eckmann
Korreferent: Herr Prof. Dr. K. Voss

1962 Buchdruckerei AG Suhr

BEITRÄGE ZUR
ALGEBRAISCHEN HOMOTOPIETHEORIE
DER MODULN

von

W. Meier

Vorwort

=====

Die vorliegende Arbeit basiert auf einer Untersuchung von B. Eckmann und P.J. Hilton [1]. Dort wird - analog zum Vorgehen in der Topologie - für Homomorphismen zwischen Moduln ein Homotopiebegriff definiert. Dieser Begriff samt verschiedenen daraus resultierenden Folgerungen lässt sich auf beliebige Abelsche Kategorien verallgemeinern (vergleiche H. Kleisli [2]). Im folgenden soll nun diese Homotopietheorie in zwei speziellen exakten Kategorien ganz explizit entwickelt werden, nämlich in der Kategorie der Moduln über einem Ring, welche schon in [1] andeutungsweise behandelt wurde, und in der Kategorie der Paare von Moduln, wobei wir hier unter einem "Paar" eine durch einen Homomorphismus definierte spezielle differentielle Folge von Moduln verstehen.

Im Kapitel I werden zunächst Definitionen und Sätze aus [1] zusammengestellt; für einige Resultate wird ein vollständiger Beweis gegeben. Dabei werden die Sätze über differentielle Folgen ausführlich behandelt (§5), da wir sie zur Definition der relativen Homotopiegruppen benötigen. Dann geben wir die injektive (und projektive) Homotopiesequenz eines Paares an; die Exaktheit dieser Sequenz wird hier nicht bewiesen, wir verweisen bezüglich des Beweises auf [2]. Nach einem Abschnitt über das algebraische Analogon zum Begriff der "Faserung" wird im letzten Teil dieses Kapitels eine Abbildung betrachtet, die den verschiedenen Aspekten der sogenannten Transgression entspricht.

Im Kapitel II werden allgemeine Sätze über Doppelfolgen zusammengestellt und sodann, in der Kategorie der differentiiellen Folgen, die relativen Homotopiegruppen definiert. Eine besondere Rolle spielt dabei das "Transponieren" einer Abbildung eines Paares in ein anderes Paar; daraus kann unter anderem die exakte Homotopiesequenz eines Tripels (d.h. einer Zusammensetzung zweier Homomorphismen) gewonnen werden. Auch die so erhaltene Tripelsequenz ist das algebraische Analogon eines bekannten Satzes der Topologie.

Das Kapitel III untersucht einige Resultate, die man unter der Voraussetzung erhält, dass der injektive und der projektive Homotopiebegriff zusammenfallen. Dies tritt ein für spezielle Arten von Ringen, welche den Moduln zugrunde gelegt werden [5]. In diesem Falle ist es möglich, auch in der Kategorie der Paare eine Tripelsequenz aufzustellen, wobei aber nicht die gewöhnlichen Homotopiegruppen verwendet werden können, sondern die "transponierten" (twisted homotopy groups).

In einem Anhang werden die Cohomotopiegruppen (im injektiven Fall) untersucht, welche den gleichbenannten Gruppen in der Topologie ähnlich sind. Die injektive Cohomotopiesequenz wird hier nicht für ein beliebiges Paar, sondern für einen Monomorphismus betrachtet. Sie ist im allgemeinen nicht exakt, sondern nur exakt "bis auf Suspension", eine Aussage, deren genaue Bedeutung im Anhang präzisiert wird.

I N H A L T

Kapitel I. Homotopie in der Kategorie der Moduln.

1. Grundlegende Bezeichnungen und Definitionen	1
2. i -homotope und p -homotope Abbildungen in $H(A,B)$	2
3. Homotopietyp	3
4. Suspension	4
5. Differentielle Folgen	6
6. Relative Homotopiegruppen	13
7. Injektive Homotopiesequenz	14
8. Faserung	17
9. Transgression	19

Kapitel II. Homotopie in der Kategorie der differentiellen Folgen.

1. Doppelfolgen	23
2. Relative Homotopiegruppen	25
3. Injektive Homotopiesequenz, Tripelfolge	28

Kapitel III. Transponierte Homotopiegruppen.

1. Voraussetzungen	31
2. Definition der transponierten Homotopiegruppe	33
3. Tripelfolge	36

Anhang. Cohomotopiegruppen	41
----------------------------	----

Kapitel I.

Homotopie in der Kategorie der Moduln.

1. Grundlegende Bezeichnungen und Definitionen.

In diesem und den beiden folgenden Abschnitten werden einige Definitionen und Sätze zusammengestellt, die wir in der vorliegenden Arbeit ständig benützen. Da diese Sätze bereits bekannt sind, führen wir die Beweise nur ausnahmsweise durch und verweisen im übrigen auf die Literatur.

Λ sei ein Ring mit Einselement. Wir betrachten linksseitige Moduln über dem Ring Λ . Sind A und B zwei solche Moduln, so bezeichnen wir mit $H(A, B)$ die Abelsche Gruppe der Λ -Homomorphismen von A nach B . Einen Homomorphismus $f \in H(A, B)$ nennen wir auch Abbildung von A in bzw. auf B .

Ein Modul \bar{B} heisst injektiv, wenn jeder Homomorphismus f von irgend einem Modul A nach \bar{B} auf jeden Modul $A' \supset A$ erweitert werden kann, d.h. wenn zu f und dem Monomorphismus $i: A \rightarrow A'$ ein $g \in H(A', \bar{B})$ existiert, so dass $f = gi$ ist. Das drücken wir durch folgendes Diagramm aus:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & A' \\ & & f \downarrow & \swarrow g & \\ & & \bar{B} & & \end{array}$$

Satz 1.1. Jeder Modul B kann in einen injektiven Modul \bar{B} eingebettet werden, d.h. es existiert ein Monomorphismus $j: B \rightarrow \bar{B}$ (siehe [3] oder [4]).

Ein Modul \underline{A} heisst projektiv, wenn zu irgend einem Homomorphismus $f: \underline{A} \rightarrow B$ und jedem Epimorphismus $h': B' \rightarrow B$ ein Homomorphismus $g': \underline{A} \rightarrow B'$ existiert, so dass $f = h'g'$ ist:

$$\begin{array}{ccccc} & & \underline{A} & & \\ & g' \swarrow & \downarrow f & & \\ B' & \xrightarrow{h'} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Satz 1.2. Jeder Modul A ist Quotient eines projektiven Moduls \underline{A} , d.h. es existiert ein Epimorphismus $h: \underline{A} \rightarrow A = \underline{A}/A_0$, wobei A_0 den Kern der Abbildung h bedeutet [4].

2. i-homotope und p-homotope Abbildungen in $H(A,B)$.

Zwei Abbildungen f und $g \in H(A,B)$ heissen i-homotop ($f \underset{1}{\sim} g$), falls sich $f - g$ auf jeden Modul $A' \supset A$ erweitern lässt.

Satz 2.1. Damit $f \underset{1}{\sim} 0$, ist notwendig und hinreichend, dass f auf einen beliebigen injektiven Modul $\bar{A} \supset A$ erweitert werden kann.

Zwei Abbildungen f und g heissen p-homotop ($f \underset{p}{\sim} g$), falls $f - g$ sich über jeden Epimorphismus h' irgend eines Moduls B' auf B faktorisieren lässt: $f - g = h'k$, wo $k: A \rightarrow B'$.

Satz 2.2. Damit $f \underset{p}{\sim} 0$, ist notwendig und hinreichend, dass f sich über einen Epimorphismus h eines projektiven Moduls \underline{B} auf B faktorisieren lässt.

Die Beziehungen $\underset{1}{\sim}$ und $\underset{p}{\sim}$ zwischen den Abbildungen in $H(A,B)$ sind Äquivalenzrelationen und die entsprechenden Homotopieklassen bilden die Elemente der injektiven bzw. projektiven Homotopiegruppen

$$\bar{\pi}(A,B) = H(A,B) / j_* H(\bar{A}, B) \quad \text{bzw.}$$

$$\underline{\pi}(A,B) = H(A,B) / h_* H(A, \underline{B}),$$

wobei j die Einbettung von A in eine injektive Erweiterung \bar{A} und h die Abbildung von \underline{B} auf B bedeuten. Die Abbildungen j_* bzw. h_* sind die durch j bzw. h induzierten Homomorphismen $H(\bar{A}, B) \rightarrow H(A, B)$ und $H(A, \underline{B}) \rightarrow H(A, B)$.

Sind $f \in H(A, B)$ und $g \in H(B, C)$ und ist $f \underset{1}{\sim} 0$ oder $g \underset{1}{\sim} 0$, dann ist auch $gf \underset{1}{\sim} 0$. Jedes $k \in H(A, A')$ induziert deshalb eine Abbildung k^* von $\bar{\pi}(A', B)$ in $\bar{\pi}(A, B)$ und jedes $l \in H(B, B')$ eine Abbildung l_* von $\bar{\pi}(A, B)$ in $\bar{\pi}(A, B')$. Daher ist $\bar{\pi}(A, B)$ ein in A kontravarianter, in B kovarianter Funktor.

Satz 2.3. Wenn A injektiv ist, dann ist $\bar{\pi}(A, B) = 0$ für jedes B und umgekehrt; falls B injektiv ist, dann ist $\bar{\pi}(A, B) = 0$ für jedes A und umgekehrt.

Für die projektiven Homotopiegruppen $\underline{\pi}(A, B)$ gelten die entsprechenden Sätze.

3. Homotopietyp.

Die Abbildung $f \in H(A, A')$ heisst injektive Homotopieäquivalenz (i-Aequivalenz), falls eine Abbildung $g \in H(A', A)$ existiert, so dass gf und fg i-homotop zu den identischen Abbildungen in A bzw. A' sind. In diesem Fall nennt man die Moduln A und A' i-äquivalent oder vom gleichen i-Typ. ($A \stackrel{\sim}{\underset{i}{\cong}} A'$).

Die entsprechende Definition gilt für die projektive Homotopieäquivalenz (p-Aequivalenz) und p-äquivalente Moduln A und A' . (Moduln vom gleichen p-Typ, $A \stackrel{\sim}{\underset{p}{\cong}} A'$).

Satz 3.1. Damit $A \stackrel{\sim}{\underset{i}{\cong}} 0$, ist notwendig und hinreichend, dass A injektiv ist.

Satz 3.2. Wenn $A \stackrel{\sim}{\underset{i}{\cong}} A'$ und $B \stackrel{\sim}{\underset{i}{\cong}} B'$, dann ist $A + B \stackrel{\sim}{\underset{i}{\cong}} A' + B'$.

Satz 3.3. Wenn ein additiver Funktor $F(A)$ für jeden injektiven Modul A Null ist, dann induziert jede i-Aequivalenz zwischen A und A' einen Isomorphismus zwischen $F(A)$ und $F(A')$. (Zur Definition eines additiven Funktors siehe [4], S.19)

Den Beweis führen wir für einen kovarianten Funktor $F(A)$: Es seien $f: A \rightarrow A'$ und $g: A' \rightarrow A$ die i-Aequivalenzen zwischen A und A' , so dass $gf \underset{i}{\sim} 1$ und $fg \underset{i}{\sim} 1$. Dann ist $h = gf - 1 \underset{i}{\sim} 0$. Ist j die Einbettung von A in eine injektive Erweiterung \bar{A} , so existiert ein Homomorphismus \bar{h} , so dass $h = \bar{h}j$. h induziert einen Homomorphismus $h_*: F(A) \rightarrow F(A)$. Die Faktorisierung $h_* = \bar{h}_* j_*: F(A) \xrightarrow{j_*} F(\bar{A}) \xrightarrow{\bar{h}_*} F(A)$ zeigt, dass $h_* = 0$, da ja $F(\bar{A}) = 0$ ist. Also gilt $(gf - 1)_* = g_* f_* - 1_* = 0$ oder $g_* f_* = 1_* = 1$. Entsprechend beweist man, dass $f_* g_* = 1$ ist, das bedeutet aber $F(A) \cong F(A')$.

Satz 3.3. sagt mit anderen Worten, dass unter den gemachten Voraussetzungen $F(A)$ nur vom i-Typ von A abhängig ist. Dies trifft z.B. für $\bar{\pi}(A, B)$ zu.

Zu den Sätzen 3.1. bis 3.3. gelten die analogen Sätze für die p-Aequivalenz.

Satz 3.4. Jeder Homomorphismus $f \in H(A, B)$ kann faktorisiert werden in a) einen Monomorphismus und eine anschließende i-Aequivalenz, b) eine p-Aequivalenz und einen anschliessenden Epimorphismus.

Beweis von a): Es sei j ein Monomorphismus von A in eine injektive Erweiterung \bar{A} . Wir bilden A in die direkte Summe $\bar{A} + B$ ab durch $f'(a) = (j(a), f(a))$, $a \in A$. Diese Summe $\bar{A} + B$ wird in B abgebildet durch $f''(a, b) = b$. Die Abbildung f' ist ein Monomorphismus und f'' eine i -Äquivalenz, da nach Satz 3.2.

$\bar{A} + B \underset{i}{\simeq} B$ ist.

Die Abbildungen für den Fall b) werden in dualer Weise konstruiert.

4. Suspension.

Unter einer Suspension ΣA eines Moduls A verstehen wir den Quotienten \bar{A}/A einer injektiven Erweiterung \bar{A} von A . Verschiedene injektive Erweiterungen von A ergeben verschiedene Suspensionen, die aber alle denselben i -Typ haben. Das zeigen die folgenden Ueberlegungen:

Es sei f ein Homomorphismus von A nach A' , j die Einbettung von A in eine injektive Erweiterung \bar{A} , j' diejenige von A' in eine injektive Erweiterung \bar{A}' :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ j \downarrow & & \downarrow j' \\ \bar{A} & \xrightarrow{\bar{f}} & \bar{A}' \end{array}$$

Die Abbildung $j'f \in H(A, \bar{A}')$ kann zu einer Abbildung $\bar{f} \in H(\bar{A}, \bar{A}')$ erweitert werden und induziert somit eine Abbildung \bar{f}_0 von $\Sigma A = \bar{A}/A$ in $\Sigma A' = \bar{A}'/A'$. Es gilt nun der

Hilfssatz 4.1. \bar{f} und \bar{g} seien zwei verschiedene Erweiterungen von $j'f \in H(A, \bar{A}')$ auf den injektiven Modul \bar{A} . Dann sind die induzierten Homomorphismen \bar{f}_0 und \bar{g}_0 von ΣA in $\Sigma A'$ i -homotop.

Beweis: $\bar{h} = \bar{g} - \bar{f}$ ist 0 auf A ; wir erhalten also eine Abbildung von A in \bar{A}' , die wir ebenfalls mit \bar{h} bezeichnen wollen. Ist p die Abbildung von \bar{A}' auf $\Sigma A'$, so ist $\bar{h}_0 = p\bar{h}$ eine Abbildung zwischen den Suspensionen ΣA und $\Sigma A'$. Da diese Abbildung über \bar{A}' faktorisiert ist, gilt nach Satz 2.1. $\bar{h}_0 \underset{i}{\simeq} 0$ oder $\bar{f}_0 \underset{i}{\simeq} \bar{g}_0$.

Die durch verschiedene \bar{f} erhaltenen \bar{f}_0 liegen also alle in derselben Homotopieklasse, die durch $f: A \rightarrow A'$ eindeutig bestimmt ist. Wir wollen in Zukunft diese verschiedenen \bar{f}_0 nicht mehr unterscheiden und schreiben dafür einfach $\Sigma f: \Sigma A \rightarrow \Sigma A'$.

Satz 4.2. Ist $f \in H(A, A')$ eine i -Äquivalenz, so ist Zf ebenfalls eine i -Äquivalenz.

Beweis: Es existiert eine Abbildung $g \in H(A', A)$, so dass $gf \underset{1}{\sim} 1$ ist, dann ist $h = gf - 1 \underset{1}{\sim} 0$, wir können h also auf \bar{A} erweitern:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{j} & \bar{A} & \xrightarrow{p} & \Sigma A \\
 h \downarrow & \swarrow h' & \downarrow \bar{h} & & \downarrow \Sigma h \\
 A & \xrightarrow{j} & \bar{A} & \xrightarrow{p} & \Sigma A
 \end{array} \quad h = h'j.$$

Nun ersetzen wir h durch die Abbildung $h'' = h - h'j = 0$; es ist $h'' \underset{1}{\sim} h$. Damit das Diagramm kommutativ bleibt, müssen wir \bar{h} ersetzen durch $\bar{h}'' = \bar{h} - jh'$, während Σh unverändert bleibt. Nun ist \bar{h}'' auf A die Nullabbildung. Wie bei Hilfssatz 4.1. folgt daraus $Z\bar{h}'' \underset{1}{\sim} 0$ oder $ZgZf \underset{1}{\sim} 1$. Analog beweist man, dass $ZfZg \underset{1}{\sim} 1$ ist. Zf ist also eine i -Äquivalenz und damit $ZA \underset{1}{\sim} ZA'$.

Bemerkung: Satz 4.2. bedeutet, dass Suspensionen, die durch verschiedene injektive Erweiterungen von A erhalten werden, i -äquivalent sind, da man in diesem Fall für f die identische Abbildung nehmen kann.

Durch n -malige Iteration erhalten wir die Suspension $\Sigma^n A$ und bilden mit ihrer Hilfe die injektive Homotopiegruppe $\bar{\pi}_n(Z^n A, B)$. Diese ist unabhängig von den benutzten injektiven Erweiterungen und somit durch die beiden Moduln A und B (sogar durch ihre i -Typen) eindeutig bestimmt. Wir bezeichnen sie als die n -te injektive Homotopiegruppe $\bar{\pi}_n(A, B)$ von A in B :

$$\bar{\pi}_n(A, B) = \bar{\pi}(\Sigma^n A, B), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Im dualen (projektiven) Fall bezeichnen wir mit ΩB den Kern des Epimorphismus h eines Projektiven Moduls B auf B . Dual zu Satz 4.2. beweist man, dass der p -Typ von ΩB nur vom p -Typ von B abhängig ist. Wir können deshalb die n -te projektive Homotopiegruppe $\pi_n(A, B)$ definieren als

$$\pi_n(A, B) = \pi(A, \Omega_n B), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Zu jedem Satz im "injektiven Fall" kann man einen entsprechenden Satz im "projektiven Fall" formulieren und beweisen. Man hat dazu bloss die entsprechenden Begriffe und Operationen durch ihre "dualen" zu ersetzen. Wir werden uns deshalb im weiteren auf den "injektiven Fall" beschränken. Nur im Kapitel III werden wir auch die "projektiven" Sätze benötigen und ohne spezielle Beweise benötigen.

5. Differentielle Folgen.

Eine Folge σ

$$0 \longrightarrow S_0 \xrightarrow{d_0} S_1 \xrightarrow{d_1} S_2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

von Moduln S_i und von Homomorphismen d_i heisst differentiell, wenn die Zusammensetzung von zwei aufeinanderfolgenden Homomorphismen 0 ist, d.h. wenn $d_i d_{i-1} = 0$ ist für $i = 1, 2, \dots$. Die Folge σ heisst exakt an der Stelle i , wenn $\text{Im } d_{i-1} = \text{Ker } d_i$ ist, sie heisst exakt, wenn sie an jeder Stelle $i = 0, 1, 2, \dots$ exakt ist.

Ein Homomorphismus f einer differentiellen Folge σ in eine differentielle Folge τ ist eine Folge von Homomorphismen f_i von S_i in T_i , so dass das nachstehende Diagramm kommutativ ist, d.h. dass $f_i d_{i-1} = d'_{i-1} f_{i-1}$ für $i = 1, 2, 3, \dots$ gilt:

$$\begin{array}{ccccccc} \sigma : & 0 & \longrightarrow & S_0 & \xrightarrow{d_0} & S_1 & \xrightarrow{d_1} & S_2 & \xrightarrow{d_2} & \dots \\ & \downarrow f & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \\ \tau : & 0 & \longrightarrow & T_0 & \xrightarrow{d'_0} & T_1 & \xrightarrow{d'_1} & T_2 & \xrightarrow{d'_2} & \dots \end{array}$$

Diese Homomorphismen f von σ in τ bilden eine Abelsche Gruppe $H(\sigma, \tau)$. $f = 0$ bedeutet, dass alle $f_i = 0$ sind. f heisst monomorph (epimorph, isomorph), wenn alle f_i Monomorphismen (Epimorphismen, Isomorphismen) sind. Diese Festsetzungen stehen mit den üblichen kategoriethoretischen Begriffen in Einklang.

Eine differentielle Folge τ heisst injektiv, wenn für eine beliebige differentielle Folge σ jeder Homomorphismus $f \in H(\sigma, \tau)$ auf jede differentielle Folge $\sigma' \supset \sigma$ erweitert werden kann.

Satz 5.1. In einer injektiven differentiellen Folge τ sind alle T_i injektiv.

Beweis: Es sei f_i ein Homomorphismus von einem beliebigen Modul S in T_i . Mit diesem Homomorphismus können wir eine Abbildung f der speziellen differentiellen Folge

$$\sigma : \dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{d_{i-1}} S \xrightarrow{d_i = 1} S \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

in τ konstruieren, indem wir $f_{i+1} = \bar{d}_i f_i$ setzen ($\bar{d}_i \in H(T_i, T_{i+1})$) und $f_n = 0$ wählen für $n \neq i, i+1$. Da nach Voraussetzung τ injektiv ist, kann f auf eine beliebige Folge $\sigma' \supset \sigma$ erweitert werden, wobei wir für unsere Zwecke speziell die Folge

$$\sigma': \dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{d_{i-1}'} S' \xrightarrow{d_i'=1} S' \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

wählen, in der $S' \supset S$ ist. Wir erhalten also das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \sigma: & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & S & \xrightarrow{d_i} & S & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ f & \swarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \sigma': & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & S' & \xrightarrow{f_{i+1}'} & S' & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \tau: & \dots & \longrightarrow & T_{i-1} & \xrightarrow{\bar{d}_{i-1}} & T_i & \xrightarrow{\bar{d}_i} & T_{i+1} & \xrightarrow{\bar{d}_{i+1}} & T_{i+2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Durch die Erweiterung f' von f erhalten wir auch eine Erweiterung f'_i von f_i auf S' . Da $S' \supset S$ beliebig gewählt werden kann, folgt daraus, dass T_i injektiv ist.

Die Umkehrung von Satz 5.1. gilt nicht, denn es gibt differentielle Folgen, die aus lauter injektiven Moduln bestehen und die trotzdem keine injektiven Folgen sind. Hingegen gilt

Satz 5.2. Eine exakte Folge τ , in der alle Moduln T_i injektiv sind, ist eine injektive Folge.

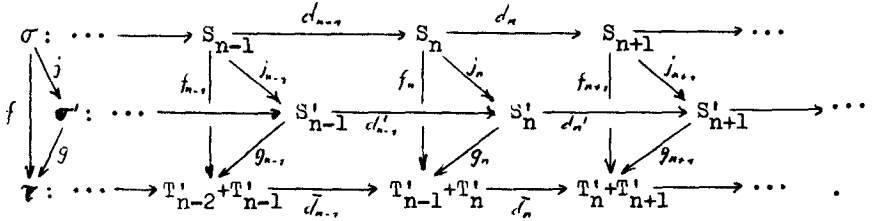
Beweis: Da τ exakt ist und alle T_i injektiv sind, ist T_0 direkter Summand von T_1 ([4] S.10), wir schreiben deshalb $T_1 = T_0 + T'_1$. Der Homomorphismus $\bar{d}_1: T_1 \rightarrow T_2$ ist 0 auf T_0 , das Bild von \bar{d}_1 ist isomorph zu T'_1 und direkter Summand von T_2 , so dass wir $T_2 = T'_1 + T'_2$ schreiben dürfen. Dieselben Überlegungen zeigen, dass allgemein $T_n = T'_{n-1} + T'_n$ ist, und zwar für $n = 0, 1, 2, \dots$, wenn wir zur Vereinheitlichung der Schreibweise $T'_{-1} = 0$ und $T'_0 = T_0$ setzen. Die Folge τ hat dann die Gestalt

$$0 \longrightarrow T'_{-1} + T'_0 \xrightarrow{\bar{d}_0} T'_0 + T'_1 \xrightarrow{\bar{d}_1} T'_1 + T'_2 \xrightarrow{\bar{d}_2} \dots$$

Es ist $\bar{d}_n(t'_{n-1}, t'_n) = (t'_n, 0)$ für $n = 0, 1, 2, \dots$, wobei $t'_n \in T'_n$. Nun betrachten wir einen Homomorphismus f einer beliebigen differentiiellen Folge σ in τ :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \sigma: & 0 & \longrightarrow & S_0 & \xrightarrow{d_0} & S_1 & \xrightarrow{d_1} & S_2 & \xrightarrow{d_2} & \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ f & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \tau: & 0 & \longrightarrow & T'_{-1} + T'_0 & \xrightarrow{\bar{d}_0} & T'_0 + T'_1 & \xrightarrow{\bar{d}_1} & T'_1 + T'_2 & \xrightarrow{\bar{d}_2} & \dots \end{array}$$

Es ist $f_n(s_n) = (t'_{n-1}; t'_n)$. Setzen wir $f'_n(s_n) = (t'_{n-1}, 0)$ und $f''_n(s_n) = (0, t'_n)$, so ist $f_n = f'_n + f''_n$. Betten wir σ in eine differentielle Folge $\sigma' \rightarrow \sigma$ ein, so können wir f_n über S'_n erweitern, da ja T_n injektiv ist. Diese Erweiterung können wir so konstruieren, dass daraus eine Erweiterung von f über σ' resultiert, d.h. dass das folgende Diagramm kommutativ ist:



g_n sei also eine Erweiterung von f_n über S'_n , so dass $f_n = g_n j_n$ ist. Gleich wie f_n können wir auch g_n in eine Summe $g_n = g'_n + g''_n$ zerlegen, und zwar so, dass $f'_n = g'_n j_n$ und $f''_n = g''_n j_n$ ist. Dabei wollen wir zur Vereinfachung der Schreibweise die Bezeichnungen f'_n und g'_n bzw. f''_n und g''_n auch als Abbildungen von S_n und S'_n in die Komponenten T'_{n-1} bzw. T'_n von T_n auffassen (wobei T'_n auch Komponente von T_{n+1} ist, sodass wir z.B. $f'_{n+1} d_n = f''_n$ schreiben können).

Die Zerlegung von g_n in eine Summe können wir nun folgendermassen konstruieren: Für g'_n wählen wir eine beliebige Erweiterung von f'_n , so dass $f'_n = g'_n j_n$ ist für $n = 0, 1, 2, \dots$ ($g'_0 = 0$), und setzen $g''_n = g'_{n+1} d'_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Dann ist

$$g''_n j_n = g'_{n+1} d'_n j_n = g'_{n+1} j_{n+1} d_n = f'_{n+1} d_n = f''_n,$$

also ist g''_n wirklich eine Erweiterung von f''_n . Weiter ist

$$\bar{d}_n g_n = \bar{d}_n g'_n + \bar{d}_n g''_n = 0 + g''_n \quad \text{und}$$

$$g_{n+1} d'_n = g'_{n+1} d'_n + g''_{n+1} d'_n = g''_n + g'_{n+2} d'_{n+1} d'_n = g''_n,$$

also ist das Diagramm kommutativ. Die Folge der Homomorphismen g_n bildet somit einen Homomorphismus g von σ' in τ . Damit haben wir f über σ' erweitert: $f = g j$, τ ist also eine injektive Folge.

Bemerkung: Wenn wir für T'_{-1} einen beliebigen injektiven Modul $\neq 0$ wählen, wobei dann auch $f'_0 \neq 0$ und g'_0 eine beliebige Erweiterung von f'_0 ist, so bleibt das Diagramm trotzdem kommutativ, da T'_{-1} durch \bar{d}_0 auf 0 abgebildet wird. τ ist also auch in diesem Fall injektiv, aber an der Stelle 0 nicht mehr exakt.

Aus dieser Bemerkung folgt, dass man auch Satz 5.2. nicht umkehren kann, denn es gibt injektive Folgen, die nicht exakt sind.

Satz 5.3. (Einbettungssatz) Jede differentielle Folge σ kann in eine injektive Folge $\bar{\sigma}$ eingebettet werden.

Beweis: Es sei j_n die Einbettung von S_n in eine injektive Erweiterung \bar{S}_n , dann ist die Folge

$$\bar{\sigma} : 0 \longrightarrow \bar{S}_0 + \bar{S}_1 \xrightarrow{\bar{d}_0} \bar{S}_1 + \bar{S}_2 \xrightarrow{\bar{d}_1} \bar{S}_2 + \bar{S}_3 \xrightarrow{\bar{d}_2} \dots$$

nach der Bemerkung zu Satz 5.2. eine injektive Folge. Die Homomorphismen f_n von S_n in $\bar{S}_n + \bar{S}_{n+1}$ sind folgendermassen definiert: $f_n = (j_n, j_{n+1} \bar{d}_n)$, während für die \bar{d}_n die Definition von Satz 5.2. gilt. Damit bildet die Folge der f_n , $n = 0, 1, 2, \dots$ eine Einbettung f von σ in die injektive differentielle Folge $\bar{\sigma}$.

Bemerkung 1. Ist die Folge σ exakt, dann können wir für die injektive Erweiterung $\bar{\sigma}$ ebenfalls eine exakte Folge wählen, z.B. die Folge

$$0 \longrightarrow \bar{S}_1 \xrightarrow{\bar{d}_0} \bar{S}_1 + \bar{S}_2 \xrightarrow{\bar{d}_1} \bar{S}_2 + \bar{S}_3 \xrightarrow{\bar{d}_2} \dots$$

Dabei ist $\bar{d}_0(\bar{s}_1) = (\bar{s}_1, 0)$, $\bar{d}_n(\bar{s}_n, \bar{s}_{n+1}) = (\bar{s}_{n+1}, 0)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $\bar{s}_n \in \bar{S}_n$. Da nach Voraussetzung $d_0: S_0 \rightarrow S_1$ ein Monomorphismus ist, gilt dasselbe auch für $f_0 = j_1 d_0: S_0 \rightarrow \bar{S}_1$.

Bemerkung 2. Ist σ eine exakte Folge, in der nur k Glieder $\neq 0$ sind, also

$$0 \longrightarrow S_0 \longrightarrow S_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow S_{k-1} \longrightarrow 0,$$

so kann auch die injektive Erweiterung $\bar{\sigma}$ als eine exakte Folge mit nur k von Null verschiedenen Gliedern gewählt werden, z.B.

$$0 \longrightarrow \bar{S}_1 \longrightarrow \bar{S}_1 + \bar{S}_2 \longrightarrow \bar{S}_2 + \bar{S}_3 \longrightarrow \dots \longrightarrow \bar{S}_{k-2} + \bar{S}_{k-1} \longrightarrow \bar{S}_{k-1} \longrightarrow 0.$$

Als spezielle differentielle Folgen interessieren uns im Folgenden besonders die "Paare". Jedem Homomorphismus $\alpha \in H(A_1, A_2)$ können wir eine (bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmte) exakte Folge

$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha} A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow 0$$

zuordnen. Unter einem Paar α wollen wir entweder eine solche exakte Folge mit höchstens 4 von 0 verschiedenen Gliedern oder auch nur den eine solche Folge definierenden Homomorphismus $\alpha \in H(A_1, A_2)$ verstehen. Im zweiten Fall müssen wir uns aber bewusst sein, dass wir hier stets die zum Homomorphismus α gehörige exakte Folge mitberücksichtigen wollen. Ist z.B. das Paar α im Paar α' enthalten ($\alpha \subset \alpha'$), so bedeutet dies: $A_1 \subset A'_1$, $A_2 \subset A'_2$, α ist die Restriktion von α' auf A_1 , woraus $A_0 \subset A'_0$ folgt; weiter muss aber auch $A_3 \subset A'_3$ sein (d.h. dass der induzierte Homomorphismus des Cokerns von α in den Cokern von α' ein Monomorphismus sein muss). Die Begriffe monomorph, epimorph, äquivalent, ..., die im Folgenden für "Paare" verwendet werden, sind also immer im Sinne der Kategorie der differentiellen Folgen zu verstehen.

Ist α ein Monomorphismus von A_1 in A_2 , so sind im "Paar" α nur 3 Glieder von 0 verschieden:

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha} A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow 0.$$

Aus der Bemerkung 2 zu Satz 5.3. folgt, dass als injektive Erweiterung eines Paares α wieder ein Paar gewählt werden kann, z.B.

$$\bar{\alpha}: 0 \longrightarrow \bar{A}_1 \longrightarrow \bar{A}_1 + \bar{A}_2 \longrightarrow \bar{A}_2 + \bar{A}_3 \longrightarrow \bar{A}_3 \longrightarrow 0.$$

Ein wichtiger Spezialfall einer differentiellen Folge ist die injektive Auflösung eines Moduls A, d.h. die exakte Folge

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \bar{A} \longrightarrow \bar{\Sigma A} \longrightarrow \bar{\Sigma^2 A} \longrightarrow \dots,$$

wo die $\bar{\Sigma^n A}$ injektive Erweiterungen der Suspensionen $\Sigma^n A$ sind; die Abbildungen sind in naheliegender Weise definiert.

Sind f und g zwei Homomorphismen von einer differentiellen Folge σ in eine andere τ , dann ist die i -Homotopie von f und g gleich definiert wie für Moduln:

f und $g \in H(\sigma, \tau)$ heißen i -homotop ($f \sim_i g$), falls sich $f - g$ auf jede differentielle Folge $\sigma' \supset \sigma$ erweitern lässt.

Eine Abbildung f eines Paars α in eine differentielle Folge τ ist i -homotop zu 0, wenn sich f auf jedes Paar $\alpha' \supset \alpha$ erweitern lässt. Es genügt dafür sogar, dass sich α auf ein injektives Paar $\bar{\alpha} \supset \alpha$ erweitern lässt (siehe Satz 2.1.).

Die Klassen i -homotoper Abbildungen in $H(\sigma, \tau)$ bilden eine Gruppe

$$\bar{\pi}(\sigma, \tau) = H(\sigma, \tau) / j_* H(\bar{\sigma}, \tau),$$

wobei j die Einbettung von σ in eine injektive Erweiterung $\bar{\sigma}$ bedeutet. $\bar{\pi}(\sigma, \tau)$ ist 0, wenn mindestens eine der Folgen σ, τ injektiv ist. Ist $\bar{\pi}(\sigma, \tau) = 0$ für jedes τ , dann ist σ injektiv; ist $\bar{\pi}(\sigma, \tau) = 0$ für jedes σ , dann ist τ injektiv.

Zwei differentielle Folgen σ und τ heissen i -äquivalent oder vom gleichen i -Typ ($\sigma \stackrel{\sim}{\underset{i}{\cong}} \tau$), wenn zwei Homomorphismen $f \in H(\sigma, \tau)$ und $g \in H(\tau, \sigma)$ existieren, so dass $gf \underset{i}{\sim} 1$ und $fg \underset{i}{\sim} 1$ ist. Entsprechend dem Satz 3.1. haben wir nun

Satz 5.4. Damit $\sigma \stackrel{\sim}{\underset{i}{\cong}} 0$, ist notwendig und hinreichend, dass σ injektiv ist.

Beweis: Ist $\sigma \stackrel{\sim}{\underset{i}{\cong}} 0$, dann wählen wir $f = 0: \sigma \rightarrow 0$ und $g = 0: 0 \rightarrow \sigma$. $gf \underset{i}{\sim} 1$ bedeutet, dass die identische Abbildung von σ auf sich i -homotop zu 0 ist (da ja $gf = 0$ ist), und daraus folgt leicht, dass σ injektiv sein muss. Ist andererseits σ injektiv, so lässt sich die identische Abbildung $\sigma \rightarrow \sigma$ auf jedes $\sigma' \supset \sigma$ erweitern, also ist $1 \underset{i}{\sim} 0$ und daraus folgt, dass $\sigma \stackrel{\sim}{\underset{i}{\cong}} 0$ ist.

Satz 5.5. $\bar{\pi}(\sigma, \tau)$ ist nur vom i -Typ von σ und τ abhängig.

Dieser Satz entspricht dem Satz 3.3. und kann entsprechend bewiesen werden.

Die Einbettung eines Moduls A in eine injektive Erweiterung \bar{A} definiert ein Paar ι :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow \bar{A} \longrightarrow \Sigma A \longrightarrow 0.$$

Für solche spezielle Paare, die im folgenden eine wichtige Rolle spielen werden, gilt

Satz 5.6. Wenn $A \stackrel{\sim}{\underset{i}{\cong}} B$, dann sind die Paare $\iota: A \rightarrow \bar{A}$ und $\iota': B \rightarrow \bar{B}$ i -äquivalent.

Beweis: Im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota} & \bar{A} & \xrightarrow{p} & \Sigma A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\iota'} & \bar{B} & \xrightarrow{p'} & \Sigma B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow g_1 & & \downarrow g_2 & & \downarrow g_3 & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota} & \bar{A} & \xrightarrow{p} & \Sigma A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

sind f_1, f_2 und f_3 i -Äquivalenzen (f_3 nach Satz 4.2.). Es gilt also $h_n = g_n f_n - 1 \sim_1 0$, $n = 1, 2, 3$.

Wir wollen zeigen, dass der Homomorphismus $f \in H(\sigma, \tau)$, der aus der Folge der 3 Homomorphismen f_1, f_2 und f_3 besteht, eine i -Äquivalenz (in der Kategorie der Paare) ist. Dazu ersetzen wir vorerst den Homomorphismus h durch einen einfacheren $h' \sim_1 h$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota} & \bar{A} & \xrightarrow{p} & \Sigma A \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow h_1 & \swarrow h_1'' & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota} & \bar{A} & \xrightarrow{p} & \Sigma A \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Da $h_1 \sim_1 0$ ist, können wir diesen Homomorphismus über \bar{A} erweitern: $h_1 = h_1'' \iota$. Wir setzen:

$$h_1' = h_1 - h_1'' \iota = 0, \quad h_2' = h_2 - \iota h_1'', \quad h_3' = h_3.$$

(Siehe Beweis von Satz 4.2.)

Da h_2' auf A die Nullabbildung ist, induziert sie eine Abbildung von ΣA in \bar{A} , die wir mit h_2'' bezeichnen wollen: $ph_2' = h_2''$. Sie kann über den injektiven Modul $\overline{\Sigma A} \supset \Sigma A$ erweitert werden:

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma A & \xrightarrow{h_2'} & \bar{A} \\
 \downarrow \iota_1'' & \swarrow h_2'' & \\
 \overline{\Sigma A} & &
 \end{array}
 \quad h_2'' = \overline{h_2'} \iota_1''$$

Nun können wir $h': \iota \longrightarrow \iota$ über ein injektives Paar $\bar{\iota}$

$$\bar{\iota}: 0 \longrightarrow \bar{A} \xrightarrow{\bar{\iota}} \bar{A} + \overline{\Sigma A} \xrightarrow{\bar{p}} \overline{\Sigma A} \longrightarrow 0 \quad \text{erweitern:}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota} & \bar{A} & \xrightarrow{p} & \Sigma A \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow o & \swarrow \iota & \downarrow k_1' & \swarrow \bar{\iota}' & \downarrow k_3' & \swarrow \iota_1' \\
 0 & \longrightarrow & \bar{A} & \xrightarrow{\bar{\iota}} & \bar{A} + \overline{\Sigma A} & \xrightarrow{\bar{p}} & \overline{\Sigma A} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow o & \swarrow \iota & \downarrow k_2 & \swarrow \bar{p} & \downarrow k_3 & \swarrow \iota_1 \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota} & \bar{A} & \xrightarrow{p} & \Sigma A \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Die Abbildungen sind die folgenden:

$\bar{l}(\bar{a}) = (\bar{a}, 0)$, $\bar{p}(\bar{a}, \bar{a}_1) = \bar{a}_1$, $\bar{l}'(\bar{a}) = (\bar{a}, \iota_1 p \bar{a})$, $k_2(\bar{a}, \bar{a}_1) = \bar{h}_2''(\bar{a}_1)$
 $k_3 = p \bar{h}_2''$, wobei $\bar{a} \in \bar{A}$ und $\bar{a}_1 \in \bar{Z}A$.

Durch leichte Rechnung zeigt man, dass das Diagramm kommutativ ist, dass also h' wirklich auf $\bar{l} \circ \iota$ erweitert werden kann. Daraus folgt aber $h' \underset{1}{\sim} h \underset{1}{\sim} 0$, d.h. f ist eine i -Äquivalenz oder $\iota \underset{1}{\sim} \iota'$.

In der Konstruktion einer "injektiven Auflösung von A " kommen die Abbildungen $\iota_n: \Sigma^{n-1}A \longrightarrow \bar{\Sigma}^{n-1}A$, $n = 1, 2, 3, \dots$ vor. Diese Abbildungen und die entsprechende Auflösung sind abhängig von den benützten injektiven Erweiterungen. Aus Satz 4.2. und dem eben bewiesenen Satz 5.6. folgt aber

Satz 5.7. Die Paare ι_n und ι'_n , die zu zwei verschiedenen "injektiven Auflösungen" von A gehören, sind i -äquivalent.

6. Relative Homotopiegruppen.

Es sei ι_n die Einbettung von $\Sigma^{n-1}A$ in eine injektive Erweiterung $\bar{\Sigma}^{n-1}A$ und $\beta: 0 \longrightarrow B_0 \longrightarrow B_1 \xrightarrow{\beta} B_2 \longrightarrow B_3 \longrightarrow 0$ ein beliebiges Paar. Wir betrachten die injektive Homotopiegruppe $\bar{\pi}(\iota_n, \beta)$. Nach den Sätzen 5.5. und 5.7. ist diese Gruppe unabhängig von der gewählten injektiven Auflösung von A , wir dürfen sie deshalb mit $\bar{\pi}_n(A, \beta)$ bezeichnen. Sie heisst die n -te relative injektive Homotopiegruppe von A in das Paar β :

$$\bar{\pi}_n(A, \beta) = \bar{\pi}(\iota_n, \beta), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ist $\beta' = 0: 0 \longrightarrow B_2$, so ist $\bar{\pi}_n(A, \beta') \cong \bar{\pi}_n(A, B_2)$. Das folgt leicht aus dem untenstehenden Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \iota_n: 0 & \longrightarrow & \Sigma^{n-1}A & \xrightarrow{\iota_n} & \bar{\Sigma}^{n-1}A & \longrightarrow & \Sigma^n A \longrightarrow 0 \\ \left| \begin{array}{c} f \\ \beta' \end{array} \right. & & \left| \begin{array}{c} 0 \\ \beta' \end{array} \right. & & \left| \begin{array}{c} \bar{f}_{n-1} \\ \beta' \end{array} \right. & & \left| \begin{array}{c} f_n \\ \beta' \end{array} \right. \\ \beta': 0 & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{\beta'} & B_2 & \longrightarrow & B_2 \longrightarrow 0. \end{array}$$

Ebenso leicht sieht man, dass für $\beta'' = 0: B_0 \longrightarrow 0$ die beiden Gruppen $\bar{\pi}_n(A, \beta'')$ und $\bar{\pi}_{n-1}(A, B_0)$ isomorph sind.

7. Injektive Homotopiesequenz.

Einem Modul A und einem Paar $\beta: B_1 \longrightarrow B_2$ können wir unter Benützung der relativen injektiven Homotopiegruppen folgende injektive Homotopiesequenz von β zuordnen:

$$\Sigma_1: \dots \longrightarrow \bar{\pi}_n(A, B_1) \xrightarrow{\beta_*} \bar{\pi}_n(A, B_2) \xrightarrow{J} \bar{\pi}_n(A, \beta) \xrightarrow{\partial} \bar{\pi}_{n-1}(A, B_1) \longrightarrow \dots \longrightarrow \bar{\pi}_0(A, B_2)$$

Die einzelnen Homomorphismen von Σ_1 sind folgendermassen definiert:

- 1.) β_* ist der durch $\beta: B_1 \longrightarrow B_2$ induzierte Homomorphismus.
- 2.) g sei der durch untenstehendes Diagramm gegebene Homomorphismus von $\beta': 0 \longrightarrow B_2$ in β :

$$\begin{array}{ccccccccc} \beta': & 0 & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{\beta'} & B_2 & \xrightarrow{1} & B_2 & \longrightarrow & 0 \\ g \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \beta: & B_0 & \xrightarrow{\beta_0} & B_1 & \xrightarrow{\beta} & B_2 & \xrightarrow{\beta_1} & B_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Da $\bar{\pi}_n(A, \beta') \cong \bar{\pi}_n(A, B_2)$ ist, ersetzen wir $\bar{\pi}_n(A, B_2)$ durch $\bar{\pi}_n(A, \beta')$ und können J als den durch g induzierten Homomorphismus g_* definieren.

- 3.) Es ist $\bar{\pi}_n(A, \beta) = \bar{\pi}(l_n, \beta)$, wobei l_n die Einbettung von $\Sigma^{n-1}A$ in $\Sigma^{n-1}A$ ist. ∂ ordnet jedem $f \in H(l_n, \beta)$ jene "Komponente" f_1 zu, die $\Sigma^{n-1}A$ in B_1 abbildet, wobei f durch folgendes Diagramm gegeben ist:

$$\begin{array}{ccccccccc} l_n: & 0 & \longrightarrow & \Sigma^{n-1}A & \xrightarrow{l_n} & \Sigma^{n-1}A & \longrightarrow & \Sigma^{n-1}A & \longrightarrow & 0 \\ f \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \beta: & B_0 & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow{\beta} & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Satz 7.1. Die injektive Homotopiesequenz Σ_1 ist exakt.

Der Beweis dieses Satzes wurde in allgemeinerem Rahmen von H. Kleisli [2] durchgeführt und soll hier nicht wiederholt werden.

Da wir im Kapitel III auch die projektive Homotopiesequenz eines Paares $\alpha: A_1 \longrightarrow A_2$ benötigen, wollen wir sie hier der Vollständigkeit halber angeben:

$$\Sigma_p: \cdots \longrightarrow \pi_n(A_2, B) \longrightarrow \pi_n(A_1, B) \longrightarrow \pi_n(\quad, B) \longrightarrow \pi_{n-1}(A_2, B) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \pi_0(A_1, B).$$

Die projektiven relativen Homotopiegruppen und die Homomorphismen in der obigen Sequenz sind dabei dual zu jenen im "injektiven Fall" definiert.

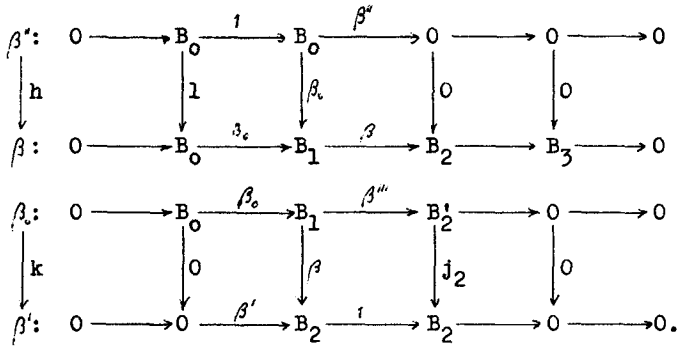
Aus der Exaktheit der injektiven Homotopiesequenz folgt

Satz 7.2. Ist $\beta: B_1 \longrightarrow B_2$ eine 1-Aequivalenz, dann ist $\bar{\pi}_n(A, \beta) = 0$.

Beweis: Alle β_* sind Isomorphismen.

Speziell ist also $\bar{\pi}_n(A, 1) = 0$, wenn 1 die identische Abbildung in irgend einem Modul B bedeutet.

Nun betrachten wir die beiden Homomorphismen h zwischen den Paaren $\beta': B_0 \longrightarrow 0$ und $\beta: B_1 \longrightarrow B_2$ bzw. k zwischen $\beta_0: B_0 \longrightarrow B_1$ und $\beta': 0 \longrightarrow B_2$, die durch die beiden folgenden Diagramme gegeben sind:



Im zweiten Diagramm ist $B_2' = \text{Coim } \beta \cong \text{Im } \beta$ und $j_2 \beta'' = \beta$. h und k induzieren die Homomorphismen

$$h_*: \bar{\pi}_{n-1}(A, B_0) \longrightarrow \bar{\pi}_n(A, \beta) \quad \text{und} \\ k_*: \bar{\pi}_n(A, \beta_0) \longrightarrow \bar{\pi}_n(A, B_2), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Bezeichnen wir mit δ_β den Homomorphismus von $\bar{\pi}_n(A, \beta_0)$ in $\bar{\pi}_{n-1}(A, B_0)$, der in der injektiven Homotopiesequenz $\Sigma_i \beta_0$ von $\beta_0: B_0 \longrightarrow B_1$ vorkommt, so gilt

Satz 7.3. Es ist $h_* \partial_{n_*} + Jk_* = 0$.

Der obige zusammengesetzte Homomorphismus ist eine Abbildung von $\bar{\pi}_n(A, \beta_0)$ in $\bar{\pi}_n(A, \beta)$. Zum Beweis des Satzes betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \iota_n: & 0 & \longrightarrow & \Sigma^{n-1}A & \xrightarrow{\iota_n} & \Sigma^{n-1}A & \xrightarrow{P_n} & \Sigma^n A & \longrightarrow & 0 \\
 f \downarrow & \downarrow & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f'_2 & & \\
 \beta_0: & 0 & \longrightarrow & B_0 & \xrightarrow{\beta_0} & B_1 & \xrightarrow{\beta''} & B'_2 & \longrightarrow & 0 \\
 g \downarrow & \downarrow & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \beta & & \downarrow \beta_2 j_2 & & \\
 \beta: & B_0 & \longrightarrow & B_1 & \xrightarrow{\beta} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

in dem nach Konstruktion $\beta_0 f_0 = f_1 \iota_n$ und $\beta'' f_1 = f'_2 p_n$ ist. Wegen $B'_2 \cong \text{Im } \beta = \text{Ker } \beta_2$ gilt $\beta_2 j_2 = 0$. Der Homomorphismus $g: \beta_0 \longrightarrow \beta$ induziert den betrachteten Homomorphismus $h_* \partial_{n_*} + Jk_*$, indem er jedem $f = (f_0, f_1, f'_2) \in H(\iota_n, \beta_0)$ ein $gf = (\beta_0 f_0, \beta f_1, \beta_2 j_2 f'_2) \in H(\iota_n, \beta)$ zuordnet. Wir zeigen, dass $gf \in \text{Im } h$ ist, indem wir diesen Homomorphismus auf ein Paar $\bar{\iota}_n, \bar{\iota}_n$ erweitern:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \iota_n: & 0 & \longrightarrow & \Sigma^{n-1}A & \xrightarrow{\iota_n} & \Sigma^{n-1}A & \xrightarrow{P_n} & \Sigma^n A & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow j_n & & & \downarrow \beta_0 f_0 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \beta_2 j_2 f'_2 & & \\
 gf \downarrow & \downarrow \bar{\iota}_n & & \downarrow \bar{\iota}_n & & \downarrow \bar{\iota}_n & & \downarrow 0 & & \\
 \beta: & B_0 & \xrightarrow{\beta} & B_1 & \xrightarrow{\beta} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Die Abbildungen in obigem Diagramm sind folgendermassen definiert:

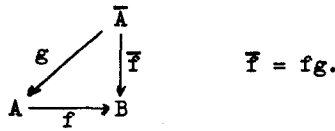
$$\begin{aligned}
 \bar{\iota}_n(\bar{a}_{n-1}) &= (\bar{a}_{n-1}, 0), & \bar{p}_n(\bar{a}_{n-1}, \bar{a}_n) &= \bar{a}_n, & \bar{\iota}'_n(\bar{a}_{n-1}) &= (\bar{a}_{n-1}, \iota_{n+1} p_n \bar{a}_{n-1}), \\
 h(\bar{a}_{n-1}, \bar{a}_n) &= \beta f_1 \bar{a}_{n-1}, & \bar{a}_{n-1} &\in \Sigma^{n-1}A, & \bar{a}_n &\in \Sigma^n A.
 \end{aligned}$$

Damit wird $h \bar{\iota}'_n(\bar{a}_{n-1}) = h(\bar{a}_{n-1}, \iota_{n+1} p_n \bar{a}_{n-1}) = \beta f_1 \bar{a}_{n-1}$, so dass h wirklich eine Erweiterung von βf_1 ist.

Dass das Diagramm kommutativ ist, rechnet man leicht nach. Es ist also wirklich $gf \sim_1 0$, d.h. dass jedes $f \in H(\iota_n, \beta_0)$ durch g in die Klasse der 0-homotopen Abbildungen von $H(\iota_n, \beta)$ abgebildet wird. Damit ist der Satz bewiesen.

8. Faserung.

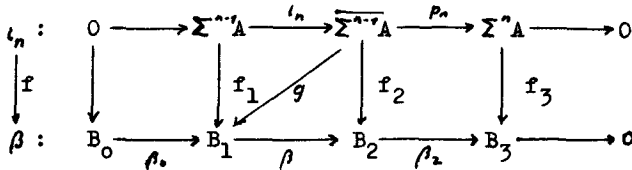
Ein Homomorphismus $f \in H(A, B)$ heisst eine i -Faserung, wenn jeder Homomorphismus \bar{f} von einem injektiven Modul \bar{A} in B über f faktorisiert werden kann:



Satz 8.1. Wenn β eine i -Faserung ist, dann sind die in Abschnitt 7 definierten Homomorphismen h_* und k_* Isomorphismen.

Beweis: $h: \beta'' \rightarrow \beta$ induziert nicht nur den Homomorphismus $h_*: \bar{\pi}_n(A, B_0) \rightarrow \bar{\pi}_n(A, \beta)$, sondern auch einen Homomorphismus $h_*^!: H(\Sigma^{n-1}A, B_0) \rightarrow H(\iota_n, \beta)$, und zwar ist für $f_0 \in H(\Sigma^{n-1}A, B_0)$ $h_*^!(f_0) = f' = (\beta_0 f_0, 0, 0) \in H(\iota_n, \beta)$.

a.) h_* ist epimorph, d.h. $(f_1, f_2, f_3) \sim_1 h_*^!(f_0)$. Wir können $(f_1, f_2, f_3) \in H(\iota_n, \beta)$ vereinfachen:



Da β eine i -Faserung ist, existiert ein Homomorphismus $g: \overline{\Sigma^{n-1}A} \rightarrow B_1$, so dass $f_2 = \beta g$ ist. In diesem Fall ist $f_3 p_n = \beta_2 f_2 = \beta_2 \beta g = 0$, d.h. $f_3 = 0$, da ja p_n epimorph ist.

Nun setzen wir

$$f'_1 = f_1 - g \iota_n, \quad f'_2 = f_2 - \beta g = 0, \quad f'_3 = f_3 = 0.$$

Es ist $f' = (f'_1, 0, 0) \sim_1 f$.

Da $\beta f'_1 = \beta f_1 - \beta g \iota_n = \beta f_1 - f_2 \iota_n = 0$, ist $\text{Im } f'_1 \subset \text{Ker } \beta = B_0$, wir können also $f_0 = f'_1$ setzen und haben $h_*(f_0) = (f'_1, 0, 0) \underset{1}{\sim} (f_1, f_2, f_3)$. Jedes $f \in H(\iota_n, \beta)$ ist also i -homotop zum Bild eines $f_0 \in H(\Sigma^{n-1}A, B_0)$.

b.) h_* ist monomorph, d.h. aus $h_*(f_0) \underset{1}{\sim} 0$ folgt $f_0 \underset{1}{\sim} 0$: Da $h_*(f_0) = f' = (\beta_0 f_0, 0, 0) \underset{1}{\sim} 0$, ist auch $\beta_0 f_0 \underset{1}{\sim} 0$ oder $\beta_0 f_0 = g \iota_n$, wo $g \in H(\Sigma^{n-1}A, B_1)$. Da die zweite Komponente von f' Null ist, muss auch $\beta g = 0$ sein oder $\text{Im } g \subset \text{Ker } \beta = \text{Im } \beta_0 = B_0$, so dass g auch als eine Erweiterung von $f_0: \Sigma^{n-1}A \rightarrow B_0$ auf den injektiven Modul $\Sigma^{n-1}A$ aufgefasst werden kann. Daraus folgt aber die Behauptung $f_0 \underset{1}{\sim} 0$.

Aus a.) und b.) zusammen folgt, dass h_* ein Isomorphismus ist.

k induziert wie h einen Homomorphismus $k_*: H(\iota_n, \beta_0) \rightarrow H(\Sigma^n A, B_2)$, und zwar ist für $f = (f_0, f_1, f'_2) \in H(\iota_n, \beta_0)$ $k_*(f) = j_2 f'_2 = f_2$ mit $f'_2 \in H(\Sigma^n A, B'_2)$ und $f_2 \in H(\Sigma^n A, B_2)$. (siehe Seite 15).

a.) k_* ist epimorph, d.h. zu f_2 existiert ein $f = (f_0, f_1, f'_2)$, so dass $k_*(f) = j_2 f'_2 \underset{1}{\sim} f_2$ ist. Wir betrachten folgendes Diagramm:

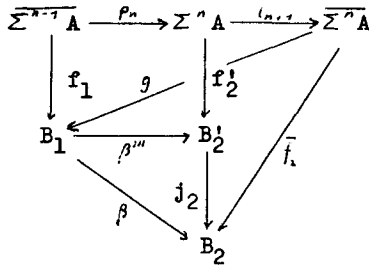
$$\begin{array}{ccccccc}
 \iota_n: & 0 & \longrightarrow & \Sigma^{n-1}A & \xrightarrow{\iota_n} & \Sigma^{n-1}A & \xrightarrow{p_n} & \Sigma^n A & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow f & & \downarrow f_0 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f'_2 & \nearrow f_2 & \\
 \beta_0: & 0 & \longrightarrow & B_0 & \xrightarrow{\beta_0} & B_1 & \xrightarrow{\beta''} & B'_2 & \xrightarrow{j_2} & 0
 \end{array}$$

$f_2 p_n$ kann über β faktorisiert werden, da β eine i -Faserung ist: $f_2 p_n = \beta f_1 = j_2 \beta'' f_1$. Da p_n epimorph ist, gilt $\text{Im } f_2 = \text{Im } f_2 p_n = \text{Im } \beta f_1 \subset \text{Im } \beta \cong B'_2$, so dass wir $f_2 = j_2 f'_2$ setzen dürfen, wobei $f'_2 \in H(\Sigma^n A, B'_2)$. Es ist also $j_2 f'_2 p_n = j_2 \beta'' f_1$ oder $j_2 (f'_2 p_n - \beta'' f_1) = 0$. Da j_2 monomorph ist, haben wir $f'_2 p_n = \beta'' f_1$. Wegen $\beta'' f_1 \iota_n = f'_2 p_n \iota_n = 0$ bildet $f_1 \iota_n$ den Modul $\Sigma^{n-1}A$ in den Kern von β'' , d.h. in B_0 ab. Wir dürfen also (zur Vereinfachung der Schreibweise) $f_0 = f_1 \iota_n$ setzen, es existiert also ein $f = (f_0, f_1, f'_2)$, so dass $k_*(f) = j_2 f'_2 = f_2$ ist.

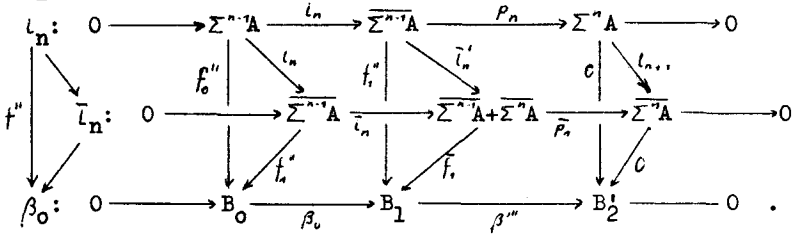
b.) k_* ist monomorph, d.h. aus $k_*(f_0, f_1, f'_2) = j_2 f'_2 \underset{1}{\sim} 0$ folgt $(f_0, f_1, f'_2) \underset{1}{\sim} 0$:

Im nachfolgenden Diagramm ist nach Voraussetzung $j_2 f'_2 \underset{1}{\sim} 0$, d.h. es existiert ein $\bar{f}_2 \in H(\Sigma^n A, B_2)$, so dass $j_2 f'_2 = \bar{f}_2 \iota_{n+1}$ ist. Da β eine i -Faserung ist, existiert weiter ein $g \in H(\Sigma^{n-1}A, B_1)$, für das $\bar{f}_2 = \beta g$ gilt. Es ist $\beta f_1 = j_2 \beta'' f_1 = \bar{f}_2 \iota_{n+1} p_n = j_2 \beta'' g \iota_{n+1} p_n = j_2 k' p_n$. Aus dieser Gleichungskette folgt $j_2 \beta'' (f_1 - g \iota_{n+1} p_n) = 0$ sowie $j_2 (f_2 - \beta'' g \iota_{n+1} p_n) = 0$ und da j_2 ein Monomorphismus und p_2 ein

Epimorphismus ist, gilt $\beta'''(f_1 - g l_{n+1} p_n) = 0$ bzw. $f_2' - \beta''' g l_{n+1} = 0$:



Nun setzen wir $f_2'' = f_2' - \beta''' g l_{n+1} = 0$, $f_1'' = f_1 - g l_{n+1} p_n$, $f_0'' = f_0$.
 Es ist $f'' = (f_0'', f_1'', 0) \underset{\sim}{\underset{i}{\sim}} f = (f_0, f_1, f_2')$ und wir zeigen, dass $f'' \underset{\sim}{\underset{i}{\sim}} 0$.
 Dazu betrachten wir das Diagramm



Wenn wir $\tilde{f}_1(\bar{a}_{n-1}, \bar{a}_n) = f_1''(\bar{a}_{n-1})$ setzen, so ist das Diagramm kommutativ, da wegen $\beta''' f_1'' = 0$ die Beziehung $\text{Im } f_1'' \subset \text{Ker } \beta''' = B_0$ gilt; \tilde{f}_1 vermittelt somit auch eine Abbildung von $\overline{\Sigma}^{n-1} A$ in B_0 ($\beta_0 f_1'' = \tilde{f}_1$) und es ist $\beta_0 f_1'' l_n = \tilde{f}_1 l_n = f_1 l_n - g l_{n+1} p_n l_n = f_1 l_n = \beta_0 f_0 = \beta_0 f_0''$, also $\beta_0(f_1'' l_n - f_0'') = 0$. Wegen $\text{Ker } \beta_0 = 0$ folgt daraus $f_0'' = f_1'' l_n$. Es ist also $f \underset{\sim}{\underset{i}{\sim}} f'' \underset{\sim}{\underset{i}{\sim}} 0$ und somit k_* monomorph.

a.) und b.) zusammen ergeben wieder, dass k_* ein Isomorphismus ist.

Wenn β eine i-Faserung ist, dann enthält die injektive Homotopiesequenz von β keine relativen Homotopiegruppen mehr, sondern nur noch absolute:

$$\Sigma_i' : \dots \rightarrow \overline{\pi}_n(A, B_1) \xrightarrow{\beta_*} \overline{\pi}_n(A, B_2) \xrightarrow{h_* j} \overline{\pi}_{n-1}(A, B_0) \xrightarrow{\beta_*} \overline{\pi}_{n-1}(A, B_1) \rightarrow \dots \rightarrow \overline{\pi}_0(A, B_2)$$

9. Transgression.

Neben der injektiven Homotopiesequenz $\Sigma_{i, \beta}$ von β wollen wir auch diejenige von β_0 betrachten:

$$\Sigma_{i,\beta_0}: \dots \rightarrow \bar{\pi}_n(A, B_0) \xrightarrow{\beta_{0*}} \bar{\pi}_n(A, B_1) \xrightarrow{J_{\beta_0}} \bar{\pi}_n(A, \beta_0) \xrightarrow{\partial_{\beta_0}} \bar{\pi}_{n-1}(A, B_0) \rightarrow \dots \rightarrow \bar{\pi}_0(A, B_1)$$

Diese Folge können wir durch das folgende Diagramm in $\Sigma_{i,\beta}$ abbilden:

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma_{i,\beta_0}: \dots & \rightarrow & \bar{\pi}_n(A, B_0) & \xrightarrow{\beta_{0*}} & \bar{\pi}_n(A, B_1) & \xrightarrow{J_{\beta_0}} & \bar{\pi}_n(A, \beta_0) & \xrightarrow{\partial_{\beta_0}} & \bar{\pi}_{n-1}(A, B_0) & \rightarrow & \dots \\ & & \downarrow h_* & \boxed{1} & \downarrow 1 & \boxed{2} & \downarrow k_* & \boxed{3} & \downarrow h_* & & \\ \Sigma_{i,\beta}: \dots & \rightarrow & \bar{\pi}_{n+1}(A, \beta) & \xrightarrow{\partial_{\beta}} & \bar{\pi}_n(A, B_1) & \xrightarrow{\beta_*} & \bar{\pi}_n(A, B_2) & \xrightarrow{J_{\beta}} & \bar{\pi}_n(A, \beta) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

Satz 9.1. An den Stellen $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ ist das obige Diagramm kommutativ, an der Stelle $\boxed{3}$ ist es antikommutativ.

Beweis:

Stelle $\boxed{1}$: Wenn $f_0 \in \bar{\pi}_n(A, B_0)$ ist, dann ist $\beta_{0*}(f_0) = \beta_0 f_0 \in \bar{\pi}_n(A, B_1)$. (f_0 ist ein Repräsentant aus der betreffenden Homotopieklasse).

Andererseits ist $h_*(f_0) = (\beta_0 f_0, 0, 0) \in \bar{\pi}_{n+1}(A, \beta)$ (siehe Beweis zu Satz 8.1.) und $\partial_{\beta} h_*(f_0) = \partial_{\beta}(\beta_0 f_0, 0, 0) = \beta_0 f_0$. Also ist $\beta_{0*} = \partial_{\beta} h_*$.

Stelle $\boxed{2}$: Für $f_1 \in \bar{\pi}_n(A, B_1)$ ist $\beta_*(f_1) = \beta f_1$.

J_{β_0} wird durch folgendes Diagramm gegeben (siehe Abschnitt 7):

$$\begin{array}{ccccccccc} \iota_n: & 0 & \longrightarrow & \Sigma^{n-1} A & \xrightarrow{\iota_n} & \Sigma^{n-1} A & \xrightarrow{J_n} & \Sigma^n A & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \bar{f}_1 & & \downarrow f_1 & & \\ \beta'_0: & 0 & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{\beta'_0} & B_1 & \xrightarrow{J} & B_1 & \longrightarrow & 0 \\ & \downarrow g_0 & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow \beta''' & & \\ \beta_0: & 0 & \longrightarrow & B_0 & \xrightarrow{\beta_0} & B_1 & \xrightarrow{\beta'''} & B_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Nach der Definition von k_* (im Beweis von Satz 8.1.) ist $k_*(0, \bar{f}_1, \beta''' f_1) = J_2 \beta''' f_1 = \beta f_1$, so dass $\beta_* = k_* J_{\beta_0}$ ist.

Stelle $\boxed{3}$: Nach Satz 7.3. ist $h_* \partial_{\beta_0} + J_{\beta} k_* = 0$, also $h_* \partial_{\beta_0} = -J_{\beta} k_*$.

Eine Abbildung von $\bar{\pi}_n(A, B_2)$ in $\bar{\pi}_{n-1}(A, B_0)$ (Die i.A. kein Homomorphismus ist, da sie nicht einwertig ist) kann nach dem Diagramm am Anfang dieses Abschnittes auf zwei Arten definiert werden, nämlich als

$$T = h_*^{-1} J_{\beta} \quad \text{oder} \quad T' = \partial_{\beta_0} k_*^{-1}.$$

Satz 9.2. Die beiden Abbildungen T und T' haben denselben Definitions- und Bildbereich.

Beweis:

1.) Gleicher Definitionsbereich bedeutet, dass $\text{Im } k_* = J_\beta^{-1}(\text{Im } h_*)$ ist.

a.) $J_\beta(\text{Im } k_*) = -h_* \partial_{\beta_o}(\bar{\pi}_n(A, \beta_o)) \subset \text{Im } h_*$, d.f.

$$\text{Im } k_* \subset J_\beta^{-1}(\text{Im } h_*).$$

b.) Es sei $f_2 \in \bar{\pi}_n(A, B_2)$ so, dass $J_\beta(f_2) = h_*(f_o)$ ist, $f_o \in \bar{\pi}_{n-1}(A, B_o)$, d.h. $f_2 \in J_\beta^{-1}(\text{Im } h_*)$. Dann ist $\partial_\beta J_\beta(f_2) = \partial_\beta h_*(f_o) = \beta_{o*}(f_o) = 0$. Da $\sum i_\beta$ exakt ist, folgt daraus $f_o = \partial_{\beta_o}(f)$, $f \in \bar{\pi}_n(A, \beta_o)$.

Weiter ist $J_\beta(f_2) = h_*(f_o) = h_* \partial_{\beta_o}(f) = -J_\beta k_*(f)$ oder $J_\beta(f_2 + k_*(f)) = 0$. Wir setzen $f'_2 = f_2 + k_*(f)$, also $J_\beta(f'_2) = 0$. Wegen der Exaktheit von $\sum i_\beta$ folgt $f'_2 = \beta_{*}(f_1) = k_* J_{\beta_o}(f_1)$, also $f_2 = f'_2 - k_*(f) = k_*(J_{\beta_o}(f_1) - f)$ oder

$$J_\beta^{-1}(\text{Im } h_*) \subset \text{Im } k_*.$$

Aus a.) und b.) folgt nun

$$J_\beta^{-1}(\text{Im } h_*) = \text{Im } k_*.$$

2.) Um die Gleichheit der Bildbereiche von T und T' zu beweisen, haben wir zu zeigen, dass $\text{Im } \partial_{\beta_o} = h_*^{-1}(\text{Im } J_\beta)$ ist.

a.) $h_*(\text{Im } \partial_{\beta_o}) = J_\beta k_*(\bar{\pi}_n(A, \beta_o)) \subset \text{Im } J_\beta$, d.f.

$$\text{Im } \partial_{\beta_o} \subset h_*^{-1}(\text{Im } J_\beta).$$

b.) Es sei $f_o \in h_*^{-1}(\text{Im } J_\beta)$, d.h. $h_*(f_o) = J_\beta(f_2)$. Dann ist $0 = \partial_\beta J_\beta(f_2) = \partial_\beta h_*(f_o) = \beta_{o*}(f_o)$, d.h. $f_o \in \text{Ker } \beta_{o*} = \text{Im } \partial_{\beta_o}$

oder $h_*^{-1}(\text{Im } J_\beta) \subset \text{Im } \partial_{\beta_o}$ und mit a.) zu-

sammen $\text{Im } \partial_{\beta_o} = h_*^{-1}(\text{Im } J_\beta)$.

Eine Abbildung von $\bar{\pi}_n(A, B_2)$ in $\bar{\pi}_{n-1}(A, B_o)$ heisst Transgression.

Satz 9.3. Ist h_* (oder k_*) ein Isomorphismus, dann ist die Transgression $T = -T'$ ein Homomorphismus von $\bar{\pi}_n(A, B_2)$ in $\bar{\pi}_{n-1}(A, B_o)$.

Beweis: Ist h_* ein Isomorphismus, dann ist nach einem bekannten Satz ("5-Lemma", angewendet auf das Diagramm auf S. 20 oben, siehe [4], s. 5) auch k_* ein Isomorphismus und umgekehrt.

Damit sind auch h_*^{-1} und k_*^{-1} Isomorphismen, also $T = h_*^{-1}J_\beta$ und $T' = \partial_{\beta_0} k_*^{-1}$ Homomorphismen. Weiter folgt aus

$$h_* \partial_{\beta_0} = -J_\beta k_*, \text{ dass } h_*^{-1}J_\beta = -\partial_{\beta_0} k_*^{-1} \text{ oder } T = -T' \text{ ist.}$$

Die Bedingung des Satzes 9.3. ist z.B. erfüllt, wenn β eine i -Faserung ist. In diesem Fall enthält nicht nur die injektive Homotopiesequenz von β , sondern auch diejenige von β_0 ausschliesslich absolute Homotopiegruppen. Das Diagramm am Anfang dieses Abschnitts hat dann folgende Gestalt:

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma'_{i\beta_0} : \dots & \longrightarrow & \bar{\pi}_n(A, B_0) & \xrightarrow{\beta_{0*}} & \bar{\pi}_n(A, B_1) & \xrightarrow{\beta_*} & \bar{\pi}_n(A, B_2) & \xrightarrow{\partial_{\beta_0} k_*^{-1}} & \bar{\pi}_{n-1}(A, B_0) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \\ \Sigma'_{i\beta} : \dots & \longrightarrow & \bar{\pi}_n(A, B_0) & \xrightarrow{\beta_{0*}} & \bar{\pi}_n(A, B_1) & \xrightarrow{\beta_*} & \bar{\pi}_n(A, B_2) & \xrightarrow{h_*^{-1}J_\beta} & \bar{\pi}_{n-1}(A, B_0) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Die beiden Folgen $\Sigma'_{i\beta_0}$ und $\Sigma'_{i\beta}$ enthalten somit dieselben Homotopiegruppen und unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen des einen Homomorphismus, da $h_*^{-1}J_\beta = -\partial_{\beta_0} k_*^{-1}$ ist.

Kapitel II

Homotopie in der Kategorie der differentiellen Folgen.

=====

1. Doppelfolgen.

Eine Doppelfolge \mathcal{F} ist eine differentielle Folge von differentiellen Folgen, also eine Folge

$$0 \longrightarrow \varphi_0 \xrightarrow{d_0} \varphi_1 \xrightarrow{d_1} \varphi_2 \xrightarrow{d_2} \dots,$$

in der die φ_i differentielle Folgen sind und die d_i Homomorphismen zwischen diesen differentiellen Folgen, so dass $d_{i+1}d_i=0$ ist für $i = 0, 1, 2, \dots$.

Die Definitionen und Sätze für Doppelfolgen entsprechen genau jenen für gewöhnliche differentielle Folgen im Abschnitt 5 von Kapitel I, so dass wir hier nur die wichtigsten Definitionen anführen und zu den Sätzen keine Beweise geben. Diese erhält man aus den entsprechenden Beweisen in I.5., indem man dort die Moduln durch differentielle Folgen ersetzt.

Eine Doppelfolge heisst exakt an der Stelle i , wenn $\text{Im } d_{i-1} = \text{Ker } d_i$ ist, sie heisst exakt, wenn sie an jeder Stelle $i = 0, 1, 2, \dots$ exakt ist.

Eine Doppelfolge \mathcal{Y} heisst injektiv, wenn für eine beliebige Doppelfolge \mathcal{F} jeder beliebige Homomorphismus $f \in H(\mathcal{F}, \mathcal{Y})$ über jede Doppelfolge $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ erweitert werden kann.

Satz 1.1. In einer injektiven Doppelfolge \mathcal{Y} sind alle differentiellen Folgen φ_i injektiv.

Satz 1.2. Eine exakte Doppelfolge \mathcal{Y} , in der alle differentiellen Folgen φ_i injektiv sind, ist eine injektive Doppelfolge.

Satz 1.3. (Einbettungssatz) Jede Doppelfolge \mathcal{F} kann in eine injektive Doppelfolge eingebettet werden.

Zu diesem Satz gelten die entsprechenden Bemerkungen wie bei Satz 1.5.3. Ist insbesondere $\bar{\phi}$ ein Paar, d.h. eine exakte Doppelfolge mit höchstens 4 von null verschiedenen differentiellen Folgen ϕ_i , so kann man als injektive Erweiterung ebenfalls ein Paar von differentiellen Folgen wählen.

Zwei Homomorphismen f und $g \in H(\bar{\phi}, \Upsilon)$ heißen i-homotop ($f \sim_1 g$), falls sich $f - g$ über jede Doppelfolge $\bar{\phi}' \supset \bar{\phi}$ erweitern lässt.

Die Klassen i-homotoper Homomorphismen in $H(\bar{\phi}, \Upsilon)$ bilden die injektive Homotopiegruppe

$$\bar{\pi}(\bar{\phi}, \Upsilon) = H(\bar{\phi}, \Upsilon) / j_* H(\bar{\phi}, \Upsilon),$$

wobei j die Einbettung von $\bar{\phi}$ in eine injektive Erweiterung $\bar{\bar{\phi}}$ bedeutet.

Zwei Doppelfolgen $\bar{\phi}$ und Υ heißen i-äquivalent oder vom gleichen i-Typ ($\bar{\phi} \approx \Upsilon$), wenn zwei Homomorphismen $f \in H(\bar{\phi}, \Upsilon)$ und $g \in H(\Upsilon, \bar{\phi})$ existieren, so dass $gf \sim_1 1$ und $fg \sim_1 1$ ist.

Satz 1.4. Damit $\bar{\phi} \approx 0$, ist notwendig und hinreichend, dass $\bar{\phi}$ injektiv ist.

Satz 1.5. $\bar{\pi}(\bar{\phi}, \Upsilon)$ ist nur vom i-Typ von $\bar{\phi}$ und Υ abhängig.

Satz 1.6. Wenn die beiden differentiellen Folgen ϕ und ψ i-äquivalent sind, dann sind die Paare

$$I: 0 \longrightarrow \phi \xrightarrow{I} \bar{\phi} \longrightarrow \Sigma \phi \longrightarrow 0$$

und

$$I': 0 \longrightarrow \psi \xrightarrow{I'} \bar{\psi} \longrightarrow \Sigma \psi \longrightarrow 0$$

i-äquivalent.

Dabei soll I wiederum sowohl den Homomorphismus von ϕ in $\bar{\phi}$ als auch das durch diesen Homomorphismus induzierte Paar bezeichnen.

Mit Hilfe der Suspension $\Sigma\varphi = \bar{\varphi}/\varphi$ und ihrer Iterierten $\Sigma^n\varphi$ können wir die Paare

$$I_n: 0 \longrightarrow \Sigma^{n-1}\varphi \longrightarrow \overline{\Sigma^{n-1}\varphi} \longrightarrow \Sigma^n\varphi \longrightarrow 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

bilden und damit eine injektive Auflösung von φ , d.h. eine exakte Doppelfolge

$$0 \longrightarrow \varphi \longrightarrow \bar{\varphi} \longrightarrow \overline{\Sigma\varphi} \longrightarrow \overline{\Sigma^2\varphi} \longrightarrow \dots$$

Die Paare I_n und die damit konstruierte injektive Auflösung von φ sind abhängig von den benützten injektiven Erweiterungen. Wie für differentielle Folgen gilt aber

Satz 1.7. Zwei Paare I_n und I'_n von differentiellen Folgen, die zu zwei verschiedenen injektiven Auflösungen von φ gehören, sind i -äquivalent.

Die Suspension $\Sigma^n\alpha$ einer differentiellen Folge α benutzen wir noch zur Definition der n -ten injektiven Homotopiegruppe von α in eine differentielle Folge β :

$$\bar{\pi}_n(\alpha, \beta) = \bar{\pi}(\Sigma^n\alpha, \beta), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Diese Gruppe ist wie in der Kategorie der Moduln durch die i -Typen von α und β eindeutig bestimmt (vergl. Seite 5).

Wegen Satz 1.3. können wir auch für eine Doppelfolge Φ die Suspensionen $\Sigma^n\Phi$ bilden. Ist \mathcal{Y} eine weitere Doppelfolge, so definieren wir die n -te injektive Homotopiegruppe von Φ in \mathcal{Y} als

$$\bar{\pi}_n(\Phi, \mathcal{Y}) = \bar{\pi}(\Sigma^n\Phi, \mathcal{Y}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

2. Relative Homotopiegruppen.

Eine differentielle Folge α ergibt die Paare

$$I_n: 0 \longrightarrow \Sigma^{n-1}\alpha \longrightarrow \overline{\Sigma^{n-1}\alpha} \longrightarrow \Sigma^n\alpha \longrightarrow 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

wobei wegen Satz 1.7. $I_n \cong \Sigma^{n-1}I_1$ ist. Bezeichnen wir mit Φ das Paar

$$0 \longrightarrow \beta^0 \longrightarrow \beta \xrightarrow{\Phi} \beta' \longrightarrow \beta'' \longrightarrow 0,$$

dann können wir wegen Satz 1.5. die n -te relative injektive Homotopiegruppe von α in das Paar Φ folgendermassen definieren:

$$\bar{\pi}_n(\alpha, \Phi) = \bar{\pi}(I_n, \Phi) = \bar{\pi}_{n-1}(I_1, \Phi), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ist $\Phi_0 = 0: 0 \longrightarrow \beta',$ dann ist

$$\bar{\pi}_n(\alpha, \Phi_0) \cong \bar{\pi}_n(\alpha, \beta') = \bar{\pi}(\Sigma^n\alpha, \beta').$$

Für das Folgende ist jener Spezialfall von $\bar{\pi}_n(\alpha, \phi)$ besonders wichtig, in dem für α das Paar

$$i_1: 0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_1} \bar{A} \longrightarrow \Sigma A \longrightarrow 0$$

und für β bzw. β' die Paare

$$\beta: 0 \longrightarrow B_0 \longrightarrow B_1 \xrightarrow{\beta} B_2 \longrightarrow B_3 \longrightarrow 0$$

bzw.

$$\beta': 0 \longrightarrow B'_0 \longrightarrow B'_1 \xrightarrow{\beta'} B'_2 \longrightarrow B'_3 \longrightarrow 0$$

gewählt werden. Wegen den Sätzen I.5.7., I.6. und I.5. ist dann $\bar{\pi}_n(i_1, \phi) = \bar{\pi}(I_n, \phi)$ unabhängig von der verwendeten Auflösung von A , sodass wir dafür $\bar{\pi}_{n+1}(A, \phi)$ schreiben dürfen. Es ist also

$$\bar{\pi}_n(A, \phi) = \bar{\pi}_{n-1}(i_1, \phi) = \bar{\pi}(I_{n-1}, \phi) = \bar{\pi}_{n-2}(I_1, \phi), \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Diese Gruppe ist durch das auf Seite 27 stehende Diagramm gegeben. In diesem Diagramm ist $\bar{\Sigma}^{n-2}A = \bar{\Sigma}^{n-3}A + \bar{\Sigma}^{n-4}A$ und die Abbildungen sind folgendermassen definiert (siehe auch Satz I.7.3.; für die das Paar $\bar{\Sigma}^{n-2}i_1$ definierende Abbildung schreiben wir i_{n-1} , denn nach Satz I.5.7. ist $\bar{\Sigma}^{n-2}i_1 \cong i_{n-1}$):

$$\bar{i}_{n-1}(\bar{a}_{n-2}) = (\bar{a}_{n-2}, 0), \quad \bar{p}_{n-1}(\bar{a}_{n-2}, \bar{a}_{n-1}) = \bar{a}_{n-1},$$

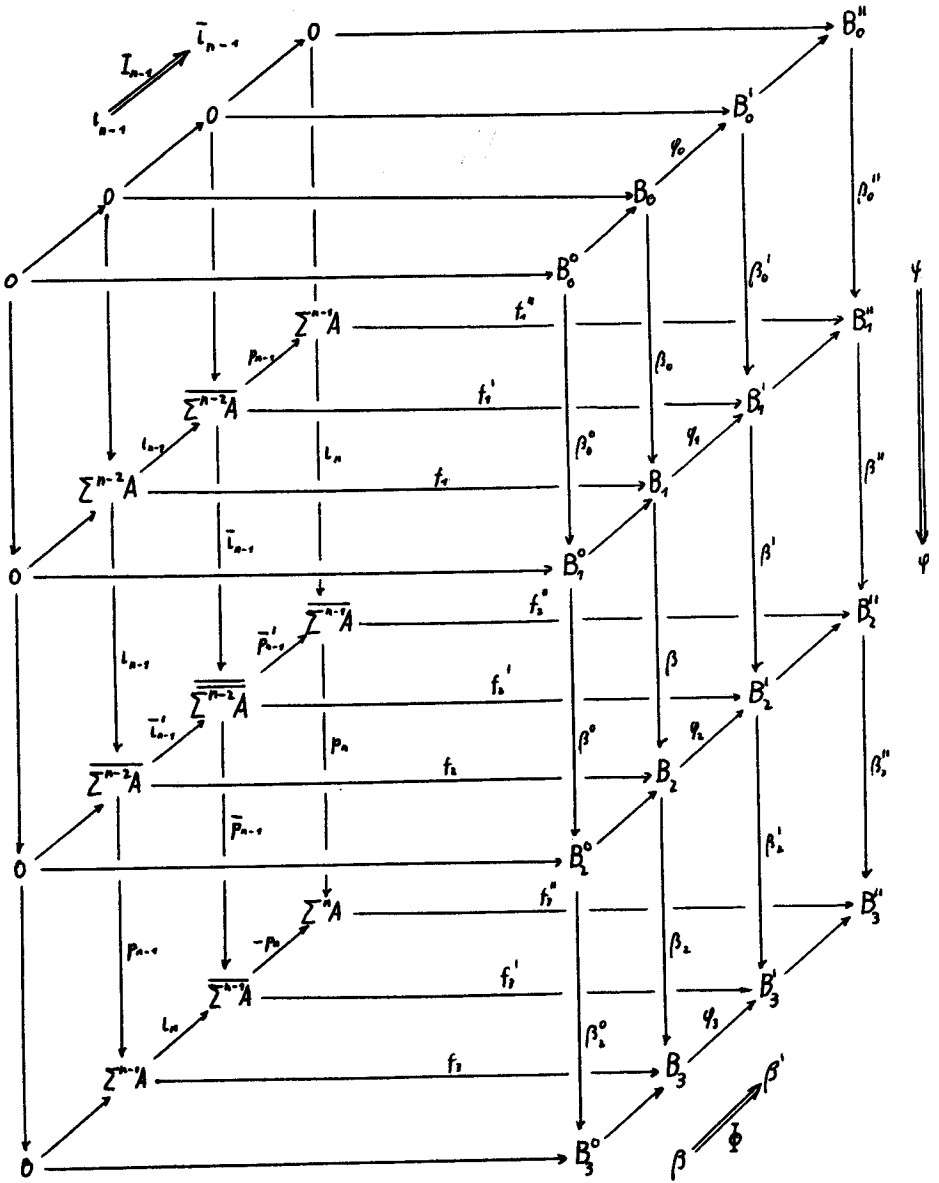
$$i'_{n-1}(\bar{a}_{n-2}) = (\bar{a}_{n-2}, i_{n-1} \bar{a}_{n-2}), \quad p'_{n-1}(\bar{a}_{n-2}, \bar{a}_{n-1}) = i_{n-1} \bar{a}_{n-2} - \bar{a}_{n-1}$$

Im Diagramm auf Seite 27 betrachten wir neben der Abbildung $\phi: \beta \longrightarrow \beta'$ auch die transponierte Abbildung $\tilde{\phi}: \psi \longrightarrow \psi'$ und das zugehörige Paar.

Satz 2.1. Es ist $\bar{\pi}_n(A, \phi) \cong \bar{\pi}_n(A, \tilde{\phi})$, $n = 2, 3, 4, \dots$

Beweis: Bezeichnen wir mit I'_{n-1} das Paar $i'_{n-1} \longrightarrow i'_{n-1}$, so ist $\bar{\pi}(I_{n-1}, \phi) = \bar{\pi}(I'_{n-1}, \tilde{\phi})$, da beide Gruppen durch dasselbe Diagramm gegeben werden. Nach den Sätzen I.5.7. und I.6. ist aber $I_{n-1} \cong I'_{n-1}$ und somit nach Satz I.5.

$$\bar{\pi}_n(A, \phi) \cong \bar{\pi}_n(A, \tilde{\phi}).$$



3. Injektive Homotopiesequenz, Tripelfolge.

Wie in der Kategorie der Moduln können wir einer differentiellen Folge α und einem Paar $\tilde{\phi}: \beta \longrightarrow \beta'$ die exakte injektive Homotopiesequenz

$$\sum_{i, \tilde{\phi}}: \dots \rightarrow \bar{\pi}_n(\alpha, \beta) \xrightarrow{\tilde{\phi}_n} \bar{\pi}_n(\alpha, \beta') \xrightarrow{F} \bar{\pi}_n(\alpha, \tilde{\phi}) \xrightarrow{D} \bar{\pi}_{n-1}(\alpha, \beta) \rightarrow \dots \rightarrow \bar{\pi}_0(\alpha, \beta')$$

zuordnen. Die Abbildungen $\tilde{\phi}_n$, F und D sind analog wie jene in I.7. definiert und auch die Exaktheit der Sequenz folgt aus der dort genannten Arbeit.

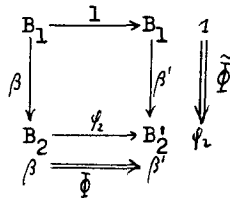
Betrachten wir wieder den im vorhergehenden Abschnitt erwähnten Spezialfall, in dem α durch das Paar $\zeta: A \longrightarrow \bar{A}$ ersetzt wird und β bzw. β' beliebige Paare sind. Wegen Satz I.5.7. ist dann $\bar{\pi}_n(\zeta, \beta) \cong \bar{\pi}_{n+1}(A, \beta)$, so dass aus der obigen injektiven Homotopiesequenz die folgende wird:

$$\sum'_{i, \tilde{\phi}}: \dots \rightarrow \bar{\pi}_{n+1}(A, \beta) \rightarrow \bar{\pi}_{n+1}(A, \beta') \rightarrow \bar{\pi}_{n+1}(A, \tilde{\phi}) \rightarrow \bar{\pi}_n(A, \beta) \rightarrow \dots \rightarrow \bar{\pi}_1(A, \beta').$$

Satz 3.1. Ist $\beta = 1: B \longrightarrow B$, dann ist $\bar{\pi}_n(A, \tilde{\phi}) \cong \bar{\pi}_{n+1}(A, \beta')$ für $n = 1, 2, 3, \dots$.

Beweis: Nach Satz I.7.2. ist $\bar{\pi}_n(A, 1) = 0$ und da $\sum'_{i, \tilde{\phi}}$ exakt ist, folgt daraus die Behauptung.

Nun betrachten wir das (unvollständige) Diagramm



Aus den Sätzen 2.1. und 3.1. folgt

$$\bar{\pi}_n(A, \tilde{\phi}) \cong \bar{\pi}_n(A, \tilde{\phi}) \cong \bar{\pi}_n(A, \psi_2)$$

und da $\beta' = \psi_2 \beta$ ist, wird aus der injektiven Homotopiesequenz in diesem speziellen Fall die exakte Tripelfolge

$$\dots \rightarrow \bar{\pi}_{n+1}(A, \beta) \rightarrow \bar{\pi}_{n+1}(A, \psi_2 \beta) \rightarrow \bar{\pi}_{n+1}(A, \psi_2) \rightarrow \bar{\pi}_n(A, \beta) \rightarrow \dots \rightarrow \bar{\pi}_1(A, \psi_2)$$

Wir wollen diese Tripelfolge zum Beweis eines Satzes benutzen, der in unseren Problemkreis gehört:

Die beiden Abbildungen β und β' von B_1 in B_2 seien i -homotop. Das bedeutet nun nicht, dass die entsprechenden Paare i -äquivalent sind. Ist z.B. $\beta: B \rightarrow \bar{B}$ die Einbettung von B in eine injektive Erweiterung \bar{B} , so ist $\beta \sim_1 0$, aber das Paar

$$\beta: 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\beta} \bar{B} \longrightarrow \Sigma B \longrightarrow 0$$

ist nach den Sätzen I.5.4. und I.5.1. nicht i -äquivalent zu 0 , da nicht alle Moduln injektiv sind. Hingegen gilt

Satz 3.2. Sind β und $\beta' \in H(B_1, B_2)$ und ist $\beta \sim_1 \beta'$, dann ist $\bar{\pi}_n(A, \beta) \cong \bar{\pi}_n(A, \beta')$.

Beweis: Da $\gamma = \beta - \beta' \sim_1 0$ ist, kann γ über die injektive Erweiterung \bar{B}_1 von B_1 faktorisiert werden:

$$\begin{array}{ccc} & \bar{B}_1 & \\ \iota \uparrow & \searrow g & \\ B_1 & \xrightarrow{\gamma} & B_2 \end{array} \quad \gamma = g \iota.$$

Zur klareren Formulierung der folgenden Ueberlegungen benutzen wir neben B_1 noch einen Modul $B_1' \cong B_1$ und wollen β' als Abbildung von B_1' in B_2 auffassen. Dabei bezeichnen wir die Elemente von B_1' je nach Bedarf mit b' oder wie jene von B_1 mit b .

Wir bilden nun B_1 und B_1' in die direkte Summe $Z = \bar{B}_1 + B_1'$ ab, und zwar durch die Einbettungen

$$j(b) = (b, b) \quad \text{und} \quad j'(b') = (0, b').$$

(hier haben wir zur Vereinfachung $\iota(b) = b$ gesetzt).

Nach Satz I.3.2. ist $Z \cong_1 B_1$ und j bzw. j' sind i -Äquivalenzen, was man leicht sieht, wenn man für beide Einbettungen die Abbildung $k: Z \rightarrow B_1$ bzw. $Z \rightarrow B_1'$ definiert als $k(\bar{b}, b') = b'$. Es ist also nach Satz I.7.2. $\bar{\pi}_n(A, j) = \bar{\pi}_n(A, j') = 0$.

Die Abbildung $f: Z \rightarrow B_2$ sei gegeben durch

$$f(\bar{b}, b') = g(\bar{b}) + \beta'(b').$$

Es ist

$$fj(b) = f(b, b) = g(b) + \beta'(b) = \beta(b) - \beta'(b) + \beta'(b) = \beta(b),$$

da $g(b) = \beta(b) - \beta'(b)$, wenn $b \in B_1$ ist,

$$fj'(b) = f(0,b) = \beta'(b),$$

wir haben also β und β' über Z faktorisiert.

Aus der Exaktheit der Tripelfolge

$$\dots \longrightarrow \bar{\pi}_n(A, j) \longrightarrow \bar{\pi}_n(A, fj) \longrightarrow \bar{\pi}_n(A, f) \longrightarrow \bar{\pi}_{n-1}(A, j) \longrightarrow \dots$$

erhalten wir

$$\bar{\pi}_n(A, \beta) = \bar{\pi}_n(A, fj) \cong \bar{\pi}_n(A, f),$$

da ja $\bar{\pi}_n(A, j) = 0$ ist. Ebenso beweist man, dass

$$\bar{\pi}_n(A, \beta') \cong \bar{\pi}_n(A, f)$$

ist. Da beide Homotopiegruppen $\bar{\pi}_n(A, \beta)$ und $\bar{\pi}_n(A, \beta')$ isomorph zu $\bar{\pi}_n(A, f)$ sind, ist Satz 3.2. bewiesen. Der Isomorphismus zwischen den beiden in diesem Satz vorkommenden Homotopiegruppen ist jedoch von der gewählten Abbildung f abhängig.

Kapitel III.

Transponierte Homotopiegruppen.

1. Voraussetzungen.

In diesem Kapitel wollen wir einige Resultate zusammenstellen, die man unter der Voraussetzung erhält, dass die Begriffe "injektiv" und "projektiv" zusammenfallen, d.h. dass

$$\bar{\pi}(A, B) = \underline{\pi}(A, B) = \pi(A, B)$$

ist. Unter dieser Voraussetzung gilt dann auch

$$\pi(\Sigma A, B) = \pi(A, \Sigma B)$$

und

$$\bar{\pi}_n(A, B) = \underline{\pi}_n(A, B) = \pi_n(A, B).$$

Diese Voraussetzung ist z.B. erfüllt, wenn der den Moduln zugrundeliegende Ring Λ eine Frobenius-Algebra ist [5].

Aus der injektiven Homotopiesequenz von I.7. wird nun die Folge

$$(1) \dots \rightarrow \pi_n(A, B_1) \rightarrow \pi_n(A, B_2) \rightarrow \pi_n(A, \beta) \rightarrow \pi_{n-1}(A, B_1) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(A, B_2)$$

und aus der projektiven Homotopiesequenz erhalten wir

$$(2) \dots \rightarrow \pi_n(A_2, B) \rightarrow \pi_n(A_1, B) \rightarrow \pi_n(\alpha, B) \rightarrow \pi_{n-1}(A_2, B) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(A_1, B).$$

In der Kategorie der differentiellen Folgen haben wir nach II.3. entsprechend

$$(3) \dots \rightarrow \pi_n(\alpha, \beta_1) \rightarrow \pi_n(\alpha, \beta_2) \rightarrow \pi_n(\alpha, \beta) \rightarrow \pi_{n-1}(\alpha, \beta_1) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(\alpha, \beta_2)$$

und

$$(4) \dots \rightarrow \pi_n(\alpha_2, \beta) \rightarrow \pi_n(\alpha_1, \beta) \rightarrow \pi_n(\beta, \beta) \rightarrow \pi_{n-1}(\alpha_2, \beta) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(\alpha_1, \beta).$$

In (3) bedeutet $\bar{\phi}$ einen Homomorphismus von β_1 in β_2 und in (4) ist $\bar{\phi}'$ ein solcher von α_1 in α_2 .

Im Folgenden bezeichne $i(A)$ die Einbettung von A in eine injektive Erweiterung \bar{A} und $p(B)$ den Epimorphismus eines projektiven Moduls \underline{B} auf B . Nach den Sätzen I.4.2. und I.5.7. sowie ihren dualen gilt nun für die entsprechenden Paare

$$\begin{aligned} i(\Sigma A) &\cong \Sigma i(A) & \text{bzw.} & & p(\Omega B) &\cong \Omega p(B), \\ i(\Sigma^n A) &\cong \Sigma^n i(A) & \text{bzw.} & & p(\Omega^n B) &\cong \Omega^n p(B). \end{aligned}$$

($\Sigma i(A)$ ist die Suspension des Paares $i(A)$, d.h. das Paar $\overline{i(A)}/i(A)$ und $\Sigma^n i(A)$ wird durch n -malige Iteration dieses Prozesses erhalten).

Ist β ein beliebiges Paar, so folgt wegen Satz I.5.5. aus den obigen Äquivalenzen, dass

$$\pi_{n-1}(i(A), \beta) \cong \pi_n(A, \beta), \quad \text{und wenn } \alpha$$

ein Paar ist, dass $\pi_{n-1}(\alpha, p(B)) \cong \pi_n(\alpha, B)$ ist.

(siehe auch Seite 28).

Setzen wir in der Folge (1) für β die Abbildung $p(B)$ ein, so erhalten wir

$$\dots \rightarrow \pi_n(A, \underline{B}) \rightarrow \pi_n(A, B) \rightarrow \pi_n(A, p(B)) \rightarrow \pi_{n-1}(A, \underline{B}) \rightarrow \dots$$

und da $\pi_n(A, \underline{B}) = 0$ ist, gilt

$$\pi_n(A, B) \cong \pi_n(A, p(B)).$$

Ebenso folgt aus der Folge (2) für $\alpha = i(A)$, dass

$$\pi_n(A, B) \cong \pi_n(i(A), B) \quad \text{ist.}$$

Wenn wir in (3) für $\bar{\phi}$ den Epimorphismus $p(\beta): \underline{\beta} \rightarrow \beta$ einsetzen, so ergibt sich analog wie oben

$$\pi_n(\alpha, \beta) \cong \pi_n(\alpha, p(\beta))$$

und aus (4) für $\bar{\phi}' = i(\alpha): \alpha \rightarrow \bar{\alpha}$

$$\pi_n(\alpha, \beta) = \pi_n(i(\alpha), \beta).$$

Diese Resultate fassen wir zusammen im

Satz 1.1. Es ist $\pi_n(A, B) \cong \pi_n(i(A), B) \cong \pi_n(A, p(B))$
 und $\pi_n(\alpha, \beta) \cong \pi_n(i(\alpha), \beta) \cong \pi_n(\alpha, p(\beta))$.

Bezeichnen wir noch mit $i^{(n)}(A)$ die durch n-malige Iteration aus $i(A)$ erhaltene Abbildung, also

$$i^{(2)}(A) = i(i(A)): i(A) \longrightarrow \overline{i(A)}, \dots$$

$$i^{(n)}(A) = i(i^{(n-1)}(A)): i^{(n-1)}(A) \longrightarrow \overline{i^{(n-1)}(A)},$$

so können wir die Ordnung der n-ten Homotopiegruppe $\pi_n(A, B)$ folgendermassen reduzieren:

$$\pi_n(A, B) \cong \pi_n(i(A), B) \cong \pi_{n-1}(i(A), p(B)) \cong \pi_{n-1}(i^{(2)}(A), p(B)) \cong$$

$$\pi_{n-1}(i^{(2)}(A), p^{(2)}(B)) \cong \dots \cong \pi_0(i^{(n)}(A), p^{(n)}(B)).$$

Allerdings haben wir diese Reduktion der Ordnung dadurch erkaufte, dass wir in entsprechend höhere Kategorien gekommen sind.

Satz 1.2. Es ist $\pi_n(A, B) \cong \pi_{n-1}(i(A), p(B)) \cong \dots \cong \pi_0(i^{(n)}(A), p^{(n)}(B))$

2. Definition der transponierten Homotopiegruppe.

In der Folge (4) wollen wir speziell

$$\alpha_1 = i(A_1): A_1 \longrightarrow \overline{A}_1 \quad \text{und}$$

$$\alpha_2 = i(A_2): A_2 \longrightarrow \overline{A}_2 \quad \text{setzen.}$$

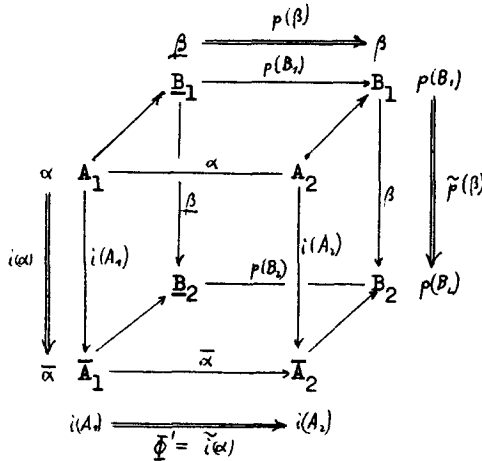
Φ' ist dann durch das folgende Diagramm gegeben (wir schreiben nicht mehr immer die vollständigen Paare an):

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha} & A_2 \\ \downarrow i(A_1) & \xrightarrow{\Phi'} & \downarrow i(A_2) \\ \overline{A}_1 & \xrightarrow{\overline{\alpha}} & \overline{A}_2 \end{array}$$

Damit wird aus (4) die Folge (4'), wobei von nun an in diesem Kapitel β immer ein Paar $B_1 \longrightarrow B_2$ bedeuten soll:

$$(4') \dots \rightarrow \pi_{n+1}(A_2, \beta) \rightarrow \pi_{n+1}(A_1, \beta) \rightarrow \pi_n(\tilde{\Phi}', \beta) \rightarrow \pi_n(A_2, \beta) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(A_1, \beta).$$

Wie in der Kategorie der Moduln gilt auch hier in der Kategorie der differentiellen Folgen, dass $\pi_n(\tilde{\Phi}', \beta) \cong \pi_{n-1}(\tilde{\Phi}', p(\beta))$ ist (siehe Seite 32) und die letztgenannte Homotopiegruppe ist durch folgendes Diagramm gegeben:



Darin bezeichnen:

$i(\alpha)$ den Homomorphismus $\alpha \longrightarrow \bar{\alpha}$ und $p(\beta)$ den Homomorphismus $\beta \longrightarrow \beta$.

Die zu diesen Homomorphismen transponierten Abbildungen sind

$$\tilde{i}(\alpha): i(A_1) \longrightarrow i(A_2) \quad \text{und} \quad \tilde{p}(\beta): p(B_1) \longrightarrow p(B_2),$$

wobei $\tilde{i}(\alpha) = \tilde{\Phi}'$ ist. Es gilt also

$$\pi_{n-1}(\tilde{\Phi}', p(\beta)) = \pi_{n-1}(\tilde{i}(\alpha), p(\beta)) = \pi_{n-1}(i(\alpha), \tilde{p}(\beta)).$$

Diese Gruppe, die (bis auf Isomorphismen) nur von α und β abhängt, bezeichnen wir mit $\tilde{\pi}_n(\alpha, \beta)$ und nennen sie die n -te transponierte Homotopiegruppe von α in β . Es ist also

$$\tilde{\pi}_n(\alpha, \beta) = \pi_n(\tilde{\Phi}', \beta), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Mit dieser Bezeichnung wird aus der Folge (4') die Folge

$$(5) \dots \rightarrow \pi_{n+1}(A_2, \beta) \rightarrow \pi_{n+1}(A_1, \beta) \rightarrow \tilde{\pi}_n(\alpha, \beta) \rightarrow \pi_n(A_2, \beta) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(A_1, \beta).$$

Aus der Folge (3) wird in entsprechender Weise die Folge

$$(6) \dots \rightarrow \pi_{n+1}(\alpha, B_1) \rightarrow \pi_{n+1}(\alpha, B_2) \rightarrow \tilde{\pi}_n(\alpha, \beta) \rightarrow \pi_n(\alpha, B_1) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_1(\alpha, B_1).$$

Die Folgen (1), (2), (5) und (6) sind nun sehr eng miteinander verbunden, was durch das folgende Netz zum Ausdruck kommt:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & (1) & & (1) & & (6) & & (1) \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 (5) \dots & \rightarrow & \pi_{n+1}(A_2, \beta) & \rightarrow & \pi_{n+1}(A_1, \beta) & \rightarrow & \tilde{\pi}_n(\alpha, \beta) & \rightarrow & \pi_n(A_2, \beta) & \rightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 (2) \dots & \rightarrow & \pi_n(A_2, B_1) & \rightarrow & \pi_n(A_1, B_1) & \rightarrow & \pi_n(\alpha, B_1) & \rightarrow & \pi_{n-1}(A_2, B_1) & \rightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 (2) \dots & \rightarrow & \pi_n(A_2, B_2) & \rightarrow & \pi_n(A_1, B_2) & \rightarrow & \pi_n(\alpha, B_2) & \rightarrow & \pi_{n-1}(A_2, B_2) & \rightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 (5) \dots & \rightarrow & \pi_n(A_2, \beta) & \rightarrow & \pi_n(A_1, \beta) & \rightarrow & \tilde{\pi}_{n-1}(\alpha, \beta) & \rightarrow & \pi_{n-1}(A_2, \beta) & \rightarrow \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
 \end{array}$$

Ist $\beta = 1: B \rightarrow B$, dann wird aus der Folge (6) die spezielle Folge

$$\dots \rightarrow \pi_{n+1}(\alpha, B) \xrightarrow{\cong} \pi_{n+1}(\alpha, B) \rightarrow \tilde{\pi}_n(\alpha, 1) \rightarrow \pi_n(\alpha, B) \xrightarrow{\cong} \dots$$

und da diese exakt ist, erhalten wir

Satz 2.1. Es ist $\tilde{\pi}_n(\alpha, 1) = 0$ für $n = 1, 2, 3, \dots$.

3. Tripelfolge.

Mit Hilfe der transponierten Homotopiegruppen können wir die nachstehende exakte Folge aufstellen:

$$(7) \dots \rightarrow \tilde{\pi}_n(\alpha, \beta) \rightarrow \tilde{\pi}_n(\alpha, \beta') \rightarrow \tilde{\pi}_n(\alpha, \bar{\varphi}) \rightarrow \tilde{\pi}_{n-1}(\alpha, \beta) \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{\pi}_1(\alpha)$$

in der $\bar{\varphi}$ das Paar β in das Paar β' abbildet. Nach der Definition der transponierten Homotopiegruppen ist diese Folge (7) nämlich die untenstehende injektive Homotopiesequenz in der Kategorie der Doppelfolgen:

$$(7') \dots \rightarrow \pi_{n-1}(\tilde{i}(\alpha), p(\beta)) \rightarrow \pi_{n-1}(\tilde{i}(\alpha), p(\beta')) \rightarrow \pi_{n-1}(\tilde{i}(\alpha), \bar{\varphi}) \\ \rightarrow \pi_{n-2}(\tilde{i}(\alpha), p(\beta)) \rightarrow \dots \rightarrow \pi_0(\tilde{i}(\alpha), p(\beta')).$$

Die Gruppe $\pi_{n-1}(\tilde{i}(\alpha), \bar{\varphi})$ ist dabei durch eine Abbildung des Diagramms I auf Seite 37 in das Diagramm II auf Seite 38 gegeben, wobei Moduln, die in den beiden Diagrammen an entsprechenden Stellen stehen, so ineinander abgebildet werden, dass das ganze kommutativ wird. (Die beiden Diagramme sind insofern nicht vollständig, als die Nullen am Anfang und Ende eines Paares nicht überall angefügt wurden).

Im Diagramm I führen wir nun folgende Abbildungen von Paaren, bzw. die entsprechenden Paare von Paaren ein:

$$i(\bar{\Sigma}^{n-2}\alpha): \bar{\Sigma}^{n-2}\alpha \longrightarrow \bar{\Sigma}^{n-2}\alpha \quad (\text{kommt zweimal vor})$$

$$\tilde{i}(\bar{\Sigma}^{n-1}\alpha): i(\bar{\Sigma}^{n-2}A_1) \longrightarrow i(\bar{\Sigma}^{n-2}A_2) \quad (\text{kommt zweimal vor})$$

$$i(\bar{\Sigma}^{n-2}\alpha): \bar{\Sigma}^{n-2}\alpha \longrightarrow \bar{\Sigma}^{n-2}\alpha \quad (\text{in der hinteren Fläche des stärker ausgezogenen Würfels})$$

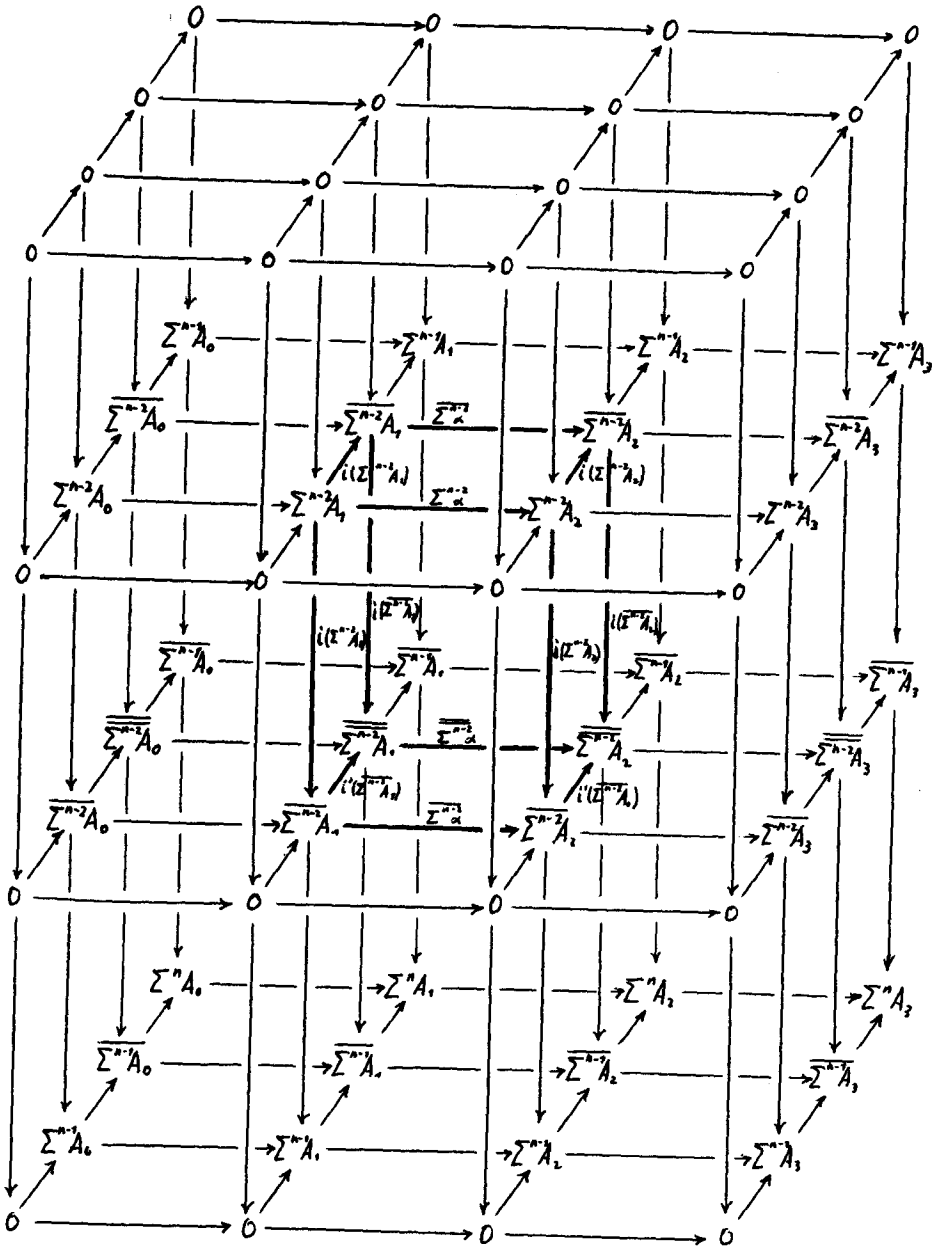
$$\tilde{i}(\bar{\Sigma}^{n-2}\alpha): i(\bar{\Sigma}^{n-2}A_1) \longrightarrow i(\bar{\Sigma}^{n-2}A_2)$$

$$i'(\bar{\Sigma}^{n-2}\alpha): \bar{\Sigma}^{n-2}\alpha \longrightarrow \bar{\Sigma}^{n-2}\alpha \quad (\text{in der unteren Fläche des stärker ausgezogenen Würfels})$$

$$\tilde{i}'(\bar{\Sigma}^{n-2}\alpha): i'(\bar{\Sigma}^{n-2}A_1) \longrightarrow i'(\bar{\Sigma}^{n-2}A_2)$$

Die Abbildung $i'(\bar{\Sigma}^{n-2}A_1)$ entspricht dabei der auf Seite 26 definierten Abbildung i'_{n-1} .

Das Diagramm I vermittelt nun folgende Abbildungen von einem Paar von Paaren auf ein anderes:



$$\begin{array}{l}
 I_{n-1}(\alpha): i(\Sigma^{n-1}\alpha) \longrightarrow i(\overline{\Sigma^{n-1}\alpha}) \\
 \tilde{I}_{n-1}(\alpha): \tilde{i}(\Sigma^{n-1}\alpha) \longrightarrow \tilde{i}(\overline{\Sigma^{n-1}\alpha}) \\
 I'_{n-1}(\alpha): i(\Sigma^{n-1}\alpha) \longrightarrow i'(\overline{\Sigma^{n-1}\alpha}) \\
 \tilde{I}'_{n-1}(\alpha): \tilde{i}(\Sigma^{n-1}\alpha) \longrightarrow \tilde{i}'(\overline{\Sigma^{n-1}\alpha})
 \end{array}
 \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Dabei ergeben sich die beiden ersten Homomorphismen durch dieselbe Abbildung von vorn nach hinten im Diagramm I, so dass

$$I_{n-1}(\alpha) = \tilde{I}_{n-1}(\alpha)$$

ist; die beiden letzten Homomorphismen erhält man durch dieselbe Abbildung von oben nach unten, so dass auch hier

$$I'_{n-1}(\alpha) = \tilde{I}'_{n-1}(\alpha)$$

gilt. Aus den Sätzen I.5.7. und II.1.6. folgt weiter, dass

$$I_{n-1}(\alpha) \cong \tilde{I}_{n-1}(\alpha) \quad \text{und} \quad \tilde{I}'_{n-1}(\alpha) \cong \tilde{I}'_{n-1}(\alpha) \quad \text{ist.}$$

Im Diagramm II haben wir die Abbildungen

$$\begin{array}{ll}
 \tilde{\phi}: \beta \longrightarrow \beta' & \tilde{\phi}: \varphi_1 \longrightarrow \varphi_2 \\
 p(\beta): \underline{\beta} \longrightarrow \beta & p(\beta'): \underline{\beta}' \longrightarrow \beta' \\
 p(\varphi_1): \underline{\varphi}_1 \longrightarrow \varphi_1 & p(\varphi_2): \underline{\varphi}_2 \longrightarrow \varphi_2.
 \end{array}$$

Es ist $\tilde{\phi}_*: p(\beta) \longrightarrow p(\beta')$, $\tilde{\phi}_*: p(\varphi_1) \longrightarrow p(\varphi_2)$.

Mit diesen Bezeichnungen haben wir

$$\tilde{\pi}_n(\alpha, \tilde{\phi}) = \pi_{n-1}(\tilde{i}(\alpha), \tilde{\phi}_*) = \pi(\tilde{I}_{n-1}(\alpha), \tilde{\phi}_*).$$

Satz 3.1. Mit den oben eingeführten Bezeichnungen ist

$$\tilde{\pi}_n(\alpha, \tilde{\phi}) \cong \tilde{\pi}_n(\alpha, \tilde{\phi}), \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Beweis: Nach Definition gilt

$$\begin{array}{l}
 \tilde{\pi}_n(\alpha, \tilde{\phi}) = \pi(\tilde{I}_{n-1}(\alpha), \tilde{\phi}_*) \quad \text{und} \\
 \tilde{\pi}_n(\alpha, \tilde{\phi}) = \pi(\tilde{I}'_{n-1}(\alpha), \tilde{\phi}_*).
 \end{array}$$

Weiter ist $\pi(\tilde{I}_{n-1}(\alpha), \tilde{\phi}_*) = \pi(\tilde{I}'_{n-1}(\alpha), \tilde{\phi}_*)$, da beide Gruppen durch dieselbe Abbildung vom Diagramm I in das Diagramm II gegeben sind. Aus $\tilde{I}_{n-1}(\alpha) \cong \tilde{I}'_{n-1}(\alpha)$ folgt $\pi(\tilde{I}_{n-1}(\alpha), \tilde{\phi}_*) \cong \pi(\tilde{I}'_{n-1}(\alpha), \tilde{\phi}_*)$, da auch in der Kategorie der differentiellen Folgen von Doppelfolgen die Homotopiegruppen nur vom i -Typ dieser Folgen abhängig sind. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 3.2. Ist im Diagramm II $\beta = 1: B_1 \longrightarrow B_1$, dann ist

$$\tilde{\pi}_n(\alpha, \beta') = \tilde{\pi}_n(\alpha, \tilde{\phi}), \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Beweis: Nach Satz 2.1. ist $\tilde{\pi}_n(\alpha, 1) = 0$ und daraus folgt die Behauptung m.H. der Exaktheit der Folge (7).

Für $\phi_1 = 1$ ist $\beta' = \phi_2 \beta$ und wegen der Sätze 3.1. und 3.2. gilt dann

$$\tilde{\pi}_n(\alpha, \tilde{\phi}) \cong \tilde{\pi}_n(\alpha, \tilde{\phi}) = \tilde{\pi}_n(\alpha, \phi_2), \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

In diesem Fall wird aus der Folge (7) die Tripelfolge

$$(8) \dots \longrightarrow \tilde{\pi}_n(\alpha, \beta) \longrightarrow \tilde{\pi}_n(\alpha, \phi_2 \beta) \longrightarrow \tilde{\pi}_n(\alpha, \phi_2) \longrightarrow \tilde{\pi}_{n-1}(\alpha, \beta) \longrightarrow \dots \longrightarrow \pi_0(\alpha,$$

in der im Gegensatz zu der Tripelfolge in II.3. an der ersten Stelle in den Homotopiegruppen statt des Moduls A das Paar α steht.

zu den Sätzen 2.1., 3.1. und 3.2. gehören die folgenden dualen Sätze:

Satz 3.3. Es ist $\tilde{\pi}_n(1, \beta) = 0$ für $n = 1, 2, 3, \dots$

Satz 3.4. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{\phi_1} & A'_1 \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ A_2 & \xrightarrow{\phi_2} & A'_2 \end{array}$$

bedeute $\tilde{\phi}' : \phi_1 \longrightarrow \phi_2$ die zu $\tilde{\phi} : \alpha \longrightarrow \alpha'$ transponierte Abbildung.

Dann ist $\tilde{\pi}_n(\tilde{\phi}', \beta) \cong \tilde{\pi}_n(\tilde{\phi}', \beta)$.

Satz 3.5. Ist im Diagramm von Satz 3.4. $A'_1 = A'_2$, d.h. $\alpha' = 1$, dann ist $\tilde{\pi}_n(\tilde{\phi}', \beta) \cong \tilde{\pi}_n(\alpha, \beta)$.

Ist nun $\phi_2 = 1$, dann ist $\alpha = \alpha' \phi_1$ und wir erhalten die Tripelfolge

$$(9) \dots \longrightarrow \tilde{\pi}_n(\alpha', \beta) \longrightarrow \tilde{\pi}_n(\alpha' \phi_1, \beta) \longrightarrow \tilde{\pi}_n(\phi_1, \beta) \longrightarrow \tilde{\pi}_{n-1}(\alpha', \beta) \longrightarrow \dots \longrightarrow \pi_1(\alpha' \phi_1, \beta)$$

Anhang.

Cohomotopiegruppen.

In diesem Anhang werden wir zuerst die Cohomotopiegruppe definieren und dann zeigen, dass die Cohomotopiesequenz, die man einem Monomorphismus α zuordnen kann, nur unter bestimmten Voraussetzungen exakt ist.

Unter der n-ten injektiven Cohomotopiegruppe $\bar{\pi}^n(A, B)$ von A in B verstehen wir die Abelsche Gruppe

$$\bar{\pi}^n(A, B) = \bar{\pi}(A, \Sigma^n B) = H(A, \Sigma^n B) / j_* H(\bar{A}, \Sigma^n B), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei j die Einbettung von A in eine injektive Erweiterung \bar{A} und j^* den dadurch induzierten Homomorphismus von $H(\bar{A}, \Sigma^n B)$ in $H(A, \Sigma^n B)$ bedeuten.

Wie die Homotopiegruppe $\bar{\pi}_n(A, B)$ ist auch die Cohomotopiegruppe $\bar{\pi}^n(A, B)$ unabhängig von der benutzten Auflösung von B und durch die i -Typen von A und B eindeutig bestimmt.

Das durch den Monomorphismus $\alpha: A_1 \rightarrow A_2$ definierte Paar

$$\alpha: 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha} A_2 \xrightarrow{\beta} A_3 \rightarrow 0$$

gibt Anlass zu der injektiven Cohomotopiesequenz C :

$$\bar{\pi}^0(A_3, B) \rightarrow \dots \xrightarrow{\delta} \bar{\pi}^n(A_3, B) \xrightarrow{\beta^*} \bar{\pi}^n(A_2, B) \xrightarrow{\alpha^*} \bar{\pi}^n(A_1, B) \xrightarrow{\delta} \bar{\pi}^{n+1}(A_3, B) \rightarrow \dots$$

α^* und β^* sind die durch α und β induzierten Homomorphismen, δ ist folgendermassen gegeben: Im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\alpha} & A_2 & \xrightarrow{\beta} & A_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma^n B & \xrightarrow{\iota_n} & \Sigma^n \bar{B} & \xrightarrow{p_n} & \Sigma^{n+1} B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

sei der Homomorphismus $f_1: A_1 \rightarrow \Sigma^n B$ gegeben; dann kann $\iota_n f_1$ über A_2 erweitert werden, da $\Sigma^n \bar{B}$ injektiv ist: $f_2 \alpha = \iota_n f_1$.

f_3 erhält man durch Uebergang zum Quotienten. Es ist $\partial(f_1) = f_3$.
 Nach Satz I.4.1. ist ∂ unabhängig von der Erweiterung f_2 .

Satz 1. Die Cohomotopiesequenz C ist differentiell.

Beweis:

- a) $\text{Im } \beta^* \subset \text{Ker } \alpha^*$: Es sei $f_2: A_2 \rightarrow Z^n B$ so, dass $f_2 \in \text{Im } \beta^*$,
 d.h. $f_2 = f_3/\beta$, dann ist $f_2 \alpha = f_3/\beta \alpha = 0$, also ist $f_2 \in \text{Ker } \alpha^*$.
 b) $\text{Im } \alpha^* \subset \text{Ker } \partial$: Es sei $f_1: A_1 \rightarrow Z^n B$ so, dass $f_1 \in \text{Im } \alpha^*$,
 d.h. $f_1 = f_2' \alpha$. Wir betrachten das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\alpha} & A_2 & \xrightarrow{\beta} & A_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \\
 & & & \swarrow f_1' & & & & & \\
 0 & \longrightarrow & Z^n B & \xrightarrow{\iota_n} & \overline{Z^n B} & \xrightarrow{p_n} & Z^{n+1} B & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

Darin setzen wir $f_2 = \iota_n f_2'$: $A_2 \rightarrow \overline{Z^n B}$. Beim Uebergang zum Quotienten wird $\overline{Z^n B}$ auf 0 abgebildet, d.h. es ist $f_3 = 0$ oder nach der Definition von ∂ : $\partial f_1 = 0$, also $f_1 \in \text{Ker } \partial$.

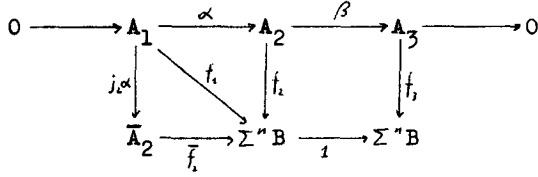
- c) $\text{Im } \partial \subset \text{Ker } \beta^*$: Ist $f_3: A_3 \rightarrow Z^{n+1} B$ im Bild von ∂ , dann hat man f_3 aus dem untenstehenden Diagramm erhalten:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\alpha} & A_2 & \xrightarrow{\beta} & A_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \\
 0 & \longrightarrow & Z^n B & \xrightarrow{\iota_n} & \overline{Z^n B} & \xrightarrow{p_n} & Z^{n+1} B & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

In diesem Diagramm kann $f_3/\beta: A_2 \rightarrow Z^{n+1} B$ über $\overline{Z^n B}$ faktorisiert werden, denn es ist ja $f_3/\beta = p_n f_2$. Also ist $f_3/\beta \sim 0$ und somit $f_3 \in \text{Ker } \beta^*$.

Satz 2. Die Cohomotopiesequenz C ist bei $\pi^n(A_2, B)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ exakt.

Beweis: Wir zeigen, dass $\text{Ker } \alpha^* \subset \text{Im } \beta^*$ ist. Es sei also $f_2: A_2 \rightarrow Z^n B$ so, dass $f_2 \in \text{Ker } \alpha^*$, dann ist $f_2 \alpha \sim 0$. Wir betrachten das Diagramm



Die Abbildungen $f_1 = f_2 \alpha: A_1 \longrightarrow \Sigma^1 B$ kann über \bar{A}_2 erweitert werden (Die Einbettung von A_1 in \bar{A}_2 ist durch $j_2 \alpha$ gegeben):
 $f_1 = f_2 \alpha = \bar{f}_2 j_2 \alpha$ oder $(f_2 - \bar{f}_2 j_2) \alpha = 0$.

Nun ersetzen wir f_2 durch $f'_2 = f_2 - \bar{f}_2 j_2 \approx f_2$, dann ist $f'_2 \alpha = 0$, f'_2 ist also die Nullabbildung auf $A_1 \subset A_2$. Deshalb induziert f'_2 eine Abbildung f_3 von $A_3 = A_2/A_1$ in $\Sigma^1 B$, so dass $f'_2 = f_3 \beta$ oder $f_2 \approx f_3 \beta$ ist. Es ist also $f_2 \in \text{Im } \beta^*$, d.h. $\text{Ker } \alpha^* \subset \text{Im } \beta^*$.

Nach Satz 1 ist auch $\text{Im } \beta^* \subset \text{Ker } \alpha^*$, sodass aus der eben bewiesenen Inklusion die Beziehung $\text{Im } \beta^* = \text{Ker } \alpha^*$ folgt; damit haben wir Satz 2 bewiesen.

An den beiden anderen Stellen ist die Cohomotopiesequenz nur "modulo Suspension" exakt, d.h. nur unter der Voraussetzung, dass $\bar{\pi}(\Sigma X, \Sigma Y) \cong \bar{\pi}(X, Y)$ ist für gewisse Moduln X und Y. Insbesondere sollen wegen $\bar{\pi}^n(X, Y) \cong \bar{\pi}^{n-1}(X, \Sigma Y)$ die Isomorphismen $\bar{\pi}^n(X, Y) \cong \bar{\pi}^{n+1}(\Sigma X, Y)$ für die in Frage stehenden Moduln gelten.

Zum Beweis der Exaktheit der Cohomotopiesequenz "modulo Suspension" benötigen wir zwei Hilfssätze:

Nach Satz I.5.3. können wir das Paar α :

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha} A_2 \xrightarrow{\beta} A_3 \longrightarrow 0$$

in das injektive Paar $\bar{\alpha}$:

$$0 \longrightarrow \bar{A}_1 \xrightarrow{\bar{\alpha}} \bar{A}_2 \xrightarrow{\bar{\beta}} \bar{A}_3 \longrightarrow 0$$

einbetten, in dem $\bar{A}_2 = \bar{A}_1 + \bar{A}_3$ ist:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\alpha} & A_2 & \xrightarrow{\beta} & A_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow j_1 & \searrow h & \downarrow j_1 & & \downarrow j_1 \\
 0 & \longrightarrow & \bar{A}_1 & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \bar{A}_1 + \bar{A}_3 & \xrightarrow{\bar{\beta}} & \bar{A}_3 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

j_1 und j_3 sind die Einbettungen von A_1 in \bar{A}_1 bzw. A_3 in \bar{A}_3 .
 j_1 kann über A_2 erweitert werden: $j_1 = h\alpha$. Es ist $j_2 = (h, j_3\beta)$.

Nun kann nach Satz I.3.4.a der Epimorphismus β zerlegt werden
 in einen Monomorphismus β_1 und eine i-Aequivalenz β_2 :

$$A_2 \xrightarrow{\beta_1} M \xrightarrow{\beta_2} A_3, \quad \beta = \beta_2\beta_1.$$

Dabei ist $M = \bar{A}_2 + A_3 = \bar{A}_1 + \bar{A}_3 + A_3$ und die Abbildungen β_1
 und β_2 sind folgendermassen definiert:

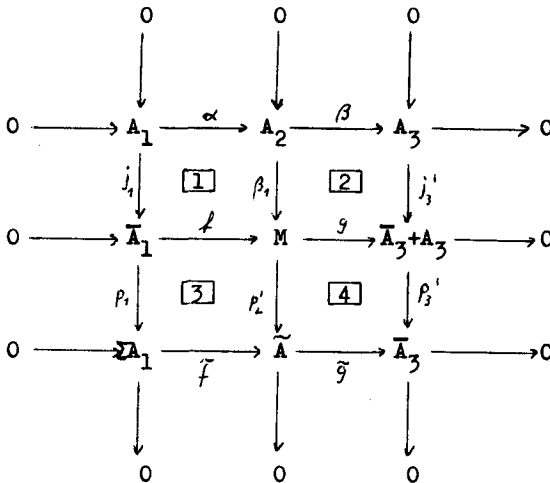
$$\beta_1(a_2) = (h(a_2), j_3\beta(a_2), \beta(a_2)), \quad \beta_2(\bar{a}_1, \bar{a}_3, a_3) = a_3.$$

Später brauchen wir noch $\beta'_2(a_3) = (0, j_3a_3, a_3): A_3 \longrightarrow M$, wo-
 bei $\beta_2\beta'_2 = 1$ und $\beta'_2\beta_2 \sim 1$ ist.

Hilfssatz 3. Mit den Bezeichnungen des Textes ist

$$\tilde{A} = M/\beta_1(A_2) \xrightarrow{\sim} \Sigma A_1.$$

Beweis: Wir betrachten das folgende Diagramm:



Ausser den bereits definierten Abbildungen haben wir in diesem
 Diagramm noch die folgenden:

$$f(\bar{a}_1) = (\bar{a}_1, 0, 0), \quad g(\bar{a}_1, \bar{a}_3, a_3) = (\bar{a}_3, a_3), \quad j_3^i(a_3) = (j_3(a_3), a_3).$$

p_1 , p_2^i und p_3^i bedeuten je den Uebergang zum Quotienten:

$$p_1(\bar{a}_1) = \bar{a}_1 \pmod{j_1(A_1)} = \{\bar{a}_1 + a_1/a_1 \in A_1\},$$

$$p_2^i(\bar{a}_1, \bar{a}_3, a_3) = (\bar{a}_1, \bar{a}_3, a_3) \pmod{\beta_1(A_2)},$$

$$p_3^i(\bar{a}_3, a_3) = (\bar{a}_3, a_3) \pmod{j_3^i(A_3)} = \bar{a}_3 - j_3 a_3,$$

$$\text{letzteres, da } \bar{A}_3 + A_3 / j_3^i(A_3) \cong \bar{A}_3 \text{ und } (\bar{a}_3, a_3) \pmod{j_3^i(A_3)} = (\bar{a}_3 - j_3 a_3, 0) \pmod{j_3^i(A_3)} \text{ ist.}$$

\tilde{f} und \tilde{g} sind die durch f und g in den Quotienten induzierten Homomorphismen:

$$\tilde{f}(a_1^i) = (a_1^i, 0, 0) \pmod{\beta_1(A_2)}, \quad a_1^i = \bar{a}_1 \pmod{j_1(A_1)}$$

$$\tilde{g}[(\bar{a}_1, \bar{a}_3, a_3) \pmod{\beta_1(A_2)}] = (\bar{a}_3, a_3) \pmod{j_3^i(A_3)} = \bar{a}_3 - j_3 a_3.$$

a) Das Diagramm ist kommutativ:

$$f j_1(a_1) = (j_1(a_1), 0, 0)$$

$$\beta_1 \alpha(a_1) = (h \alpha(a_1), j_3 \beta \alpha(a_1), \beta \alpha(a_1)) = (j_1(a_1), 0, 0)$$

d.h. [1] ist kommutativ.

$$g \beta_1(a_2) = g(h(a_2), j_3 \beta(a_2), \beta(a_2)) = (j_3 \beta(a_2), \beta(a_2))$$

$$j_3^i \beta(a_2) = (j_3 \beta(a_2), \beta(a_2))$$

d.h. [2] ist kommutativ.

$$\tilde{f} p_1(\bar{a}_1) = \tilde{f}[\bar{a}_1 \pmod{j_1(A_1)}] = (\bar{a}_1, 0, 0) \pmod{\beta_1(A_2)}$$

$$p_2^i f(\bar{a}_1) = p_2^i(\bar{a}_1, 0, 0) = (\bar{a}_1, 0, 0) \pmod{\beta_1(A_2)}$$

d.h. [3] ist kommutativ.

$$\tilde{g} p_3^i(\bar{a}_1, \bar{a}_3, a_3) = \tilde{g}[(\bar{a}_1, \bar{a}_3, a_3) \pmod{\beta_1(A_2)}] = \bar{a}_3 - j_3 a_3$$

$$p_3^i g(\bar{a}_1, \bar{a}_3, a_3) = p_3^i(\bar{a}_3, a_3) = \bar{a}_3 - j_3 a_3$$

d.h. [4] ist kommutativ.

b) Die Zeilen des Diagramms sind exakt: Das ist für die erste und zweite Zeile nach Voraussetzung bzw. Konstruktion der Fall und somit nur für die dritte Zeile zu beweisen:

Da $\tilde{g}\tilde{f}(a_1^i) = \tilde{g}[(a_1^i, 0, 0) \pmod{\beta_1(A_2)}] = (0, 0) \pmod{j_3(A_3)}$, ist
 $\text{Im } \tilde{f} \subset \text{Ker } \tilde{g}$.

Nun sei $(\bar{a}_1, \bar{a}_3, a_3) \pmod{\beta_1(A_2)} \in \text{Ker } \tilde{g}$, also
 $\tilde{g}[(\bar{a}_1, \bar{a}_3, a_3) \pmod{\beta_1(A_2)}] = \bar{a}_3 - j_3 a_3 = 0$, d.h.

$\bar{a}_3 = j_3 a_3 = j_3 \beta a_2$, da β ein Epimorphismus ist. Es ist also
 $(\bar{a}_1, \bar{a}_3, a_3) \pmod{\beta_1(A_2)} = (\bar{a}_1, j_3 \beta(a_2), \beta(a_2)) \pmod{\beta_1(A_2)} =$
 $(\bar{a}_1 - h(a_2), 0, 0) \pmod{\beta_1(A_2)} = \tilde{f}[(\bar{a}_1 - h(a_2)) \pmod{j_1(A_1)}]$, d.h.
 $\text{Ker } \tilde{g} \subset \text{Im } \tilde{f}$.

Die beiden Inklusionen ergeben zusammen die Behauptung
 $\text{Im } \tilde{f} = \text{Ker } \tilde{g}$.

c) \tilde{A} ist direkte Summe: $\tilde{A} = \Sigma A_1 + \bar{A}_3$:

Neben $\tilde{f}[(\bar{a}_1 \pmod{j_1(A_1)})] = (\bar{a}_1, 0, 0) \pmod{\beta_1(A_2)}$ betrachten wir
 die "inverse" Abbildung $\tilde{f}^{-1}[(\bar{a}_1, \bar{a}_3, a_3) \pmod{\beta_1(A_2)}] = \bar{a}_1 \pmod{j_1(A_1)}$

Es ist $\tilde{f}^{-1}\tilde{f}[(\bar{a}_1 \pmod{j_1(A_1)})] = \bar{a}_1 \pmod{j_1(A_1)}$, d.h. $\tilde{f}^{-1}\tilde{f} = 1$.
 Also ist ΣA_1 direkter Summand von \tilde{A} . Wegen der Exaktheit der
 letzten Zeile unseres Diagramms ist somit

$$\tilde{A} = \Sigma A_1 + \bar{A}_3 \quad \text{oder} \quad \tilde{A} \cong \bar{A}_3,$$

womit der Hilfssatz 3 bewiesen ist.

Mit der Folge

$$0 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\beta_1} M \xrightarrow{P_2'} \tilde{A} \longrightarrow 0$$

bilden wir die entsprechende Cohomotopiesequenz C' :

$$\dots \longrightarrow \bar{\pi}^n(\tilde{A}, B) \xrightarrow{P_2'^*} \bar{\pi}^n(M, B) \xrightarrow{\beta_1'^*} \bar{\pi}^n(A_2, B) \xrightarrow{\partial'} \bar{\pi}^{n+1}(\tilde{A}, B) \longrightarrow \dots$$

Diese ist nach Satz 2 bei $\bar{\pi}^n(M, B)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ exakt.

Hilfssatz 4. Wenn $\bar{\pi}^n(\Sigma A_1, B) \cong \bar{\pi}^{n-1}(A_1, B)$ ist für $n = 1, 2, 3, \dots$,
 dann sind die beiden Cohomotopiesequenzen C und
 C' isomorph. (bis auf ein Vorzeichen, welches im
 Beweis präzisiert wird).

Beweis: Aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\alpha} & A_2 & \xrightarrow{\beta} & A_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow 1 & & \downarrow h & & \downarrow h' \\
 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{j_1} & \bar{A}_1 & \xrightarrow{p_1} & \Sigma A_1 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

gewinnen wir die Abbildung $h': A_3 \rightarrow \Sigma A_1$ und daraus h'^* :

$$\bar{\pi}^n(\Sigma A_1, B) \longrightarrow \bar{\pi}^n(A_3, B). \text{ Es ist}$$

$$h'(a_3) = (h\beta^{-1}(a_3)) \pmod{j_1(A_1)}, \text{ wo } \beta^{-1}(a_3) = \{a_2 / \beta a_2 = a_3\} \text{ ist.}$$

Nun betrachten wir das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 C': \dots & \longrightarrow & \bar{\pi}^n(\tilde{A}, B) & \xrightarrow{F_2'^*} & \bar{\pi}^n(M, B) & \xrightarrow{\beta_2'^*} & \bar{\pi}^n(A_2, B) & \xrightarrow{\delta'} & \bar{\pi}^{n+1}(\tilde{A}, B) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \tilde{f}^* \downarrow & \boxed{1} & \downarrow & & \downarrow 1 & & \downarrow \tilde{f}^* & & \\
 & & \bar{\pi}^n(\Sigma A_1, B) & & \downarrow \beta_2'^* & \boxed{3} & & \boxed{4} & \bar{\pi}^{n+1}(\Sigma A, B) & & \\
 & & \downarrow k & \boxed{2} & \searrow h'^* & & & & \downarrow k & & \\
 C: \dots & \longrightarrow & \bar{\pi}^{n-1}(A_1, B) & \xrightarrow{\delta} & \bar{\pi}^n(A_3, B) & \xrightarrow{\beta^*} & \bar{\pi}^n(A_2, B) & \xrightarrow{\alpha^*} & \bar{\pi}^n(A_1, B) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Die senkrechten Abbildungen sind Isomorphismen; k nach Voraussetzung, \tilde{f}^* und $\beta_2'^*$, da \tilde{f} und β_2' i-Aequivalenzen sind.

Der Isomorphismus k ist folgendermassen gegeben: Nach Voraussetzung existiert zu $f_1': \Sigma A_1 \rightarrow \Sigma^* B$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{j_1} & \bar{A}_1 & \xrightarrow{p_1} & \Sigma A_1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow f_1 & & \downarrow \tilde{f}_1 & & \downarrow f_1' \\
 0 & \longrightarrow & \Sigma^{*+1} B & \xrightarrow{l_n} & \Sigma^{*+1} B & \xrightarrow{p_n} & \Sigma^* B \longrightarrow 0
 \end{array}$$

und es ist $k(f_1') = f_1$. Kann man zu einem gegebenen f_1' verschiedene solche Diagramme konstruieren, so liegen die so erhaltenen verschiedenen f_1 in der-selben Homotopieklasse, da ja nach Voraussetzung k ein Isomorphismus ist.

Wir haben noch zu beweisen, dass das Diagramm, welches C' in C abbildet, kommutativ ist (an einer Stelle ist es antikommutativ).

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad \tilde{f}h'(a_3) &= \tilde{f}[(h\beta^{-1}(a_3))(\text{mod } j_1(A_1))] = (h\beta^{-1}(a_3), 0, 0)(\text{mod } \beta_1(A_2)) \\ p_2'\beta_2'(a_3) &= p_2'(0, j_3(a_3), a_3) = (0, j_3(a_3), a_3)(\text{mod } \beta_1(A_2)) = \\ &= (-h\beta^{-1}(a_3), 0, 0)(\text{mod } \beta_1(A_2)) \end{aligned}$$

d.h. $\boxed{1}$ ist antikommutativ.

$\boxed{2}$ Es sei $f_1' \in \overline{\pi}^n(\Sigma A_1, B)$, dann ist $k(f_1') = f_1$. $\partial(f_1) = f_3$ ist durch das Diagramm auf Seite 41 gegeben. Der Homomorphismus $(f_1, f_2, f_3) \in H(\alpha, \iota_n)$ kann über das Paar

$$j_1: 0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{j_1} \overline{A}_1 \xrightarrow{p_1} \Sigma A_1 \longrightarrow 0$$

faktorisiert werden:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\alpha} & A_2 & \xrightarrow{\beta} & A_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_1 & \searrow i & \downarrow f_2 & \searrow h & \downarrow f_3 & \searrow h' & \\ 0 & \longrightarrow & \overline{A}_1 & \xrightarrow{j_1} & \overline{A}_1 & \xrightarrow{p_1} & \Sigma A_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_1' & \searrow & \downarrow f_2' & \searrow & \downarrow f_3' & & \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma^{n-1} B & \xrightarrow{\iota_n} & \overline{\Sigma^{n-1} B} & \xrightarrow{\rho_n} & \Sigma^n B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

\overline{f}_2 sei eine Erweiterung von f_2 : $f_2 = \overline{f}_2 h$. Da $f_2 \alpha = \iota_n f_1$ und $j_1 = h \alpha$ ist, haben wir $f_2 \alpha = \overline{f}_2 h \alpha = \overline{f}_2 j_1 = \iota_n f_1$, sodass \overline{f}_2 eine Erweiterung von $\iota_n f_1$ auf \overline{A}_1 ist. f_3' erhalten wir durch Quotientenbildung. Die Homomorphismen $(f_1', \overline{f}_2, f_3')$, welche eine Abbildung vom Paar j_1 in das Paar ι_n vermitteln, machen das entsprechende Diagramm kommutativ, sodass sie wirklich eine Faktorisierung von (f_1, f_2, f_3) über j_1 ergeben.

Da in der Definition von k auch \overline{f}_1 eine Erweiterung von $\iota_n f_1$ auf \overline{A}_1 ist, gilt nach Satz I.4.1., dass $f_3' \underset{1}{\sim} f_1'$ ist, somit auch $f_3' h' \underset{1}{\sim} f_1' h'$. Es ist also $\partial k(f_1') = f_3 = f_3' h' \underset{1}{\sim} f_1' h'$ oder

$$\partial k(f_1') = h'*(f_1').$$

3) Es ist $\beta_2^1 \beta = \beta_2^1 \beta_2 \beta_1 \tilde{1} \beta_1$, d.h. $\beta^* \beta_2^{1*} = \beta_1^*$.

4) Es sei $f_2 \in \bar{\pi}^n(A_2, B)$. ∂' wird durch folgendes Diagramm definiert:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{\beta_1} & M & \xrightarrow{P_1'} & \tilde{A} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_2' & & \downarrow \tilde{f}_2' & & \\
 0 & \longrightarrow & \Sigma^n B & \xrightarrow{L_n} & \tilde{\Sigma}^n B & \xrightarrow{P_n} & \Sigma^{n+1} B & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

Es ist also $\partial'(f_2) = \tilde{f}_2'$ und $\tilde{f}^*(\tilde{f}_2') = \tilde{f}_2' \tilde{f}$.

Ein $f_1 = k(\tilde{f}_2' \tilde{f})$ können wir folgendermassen erhalten:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{J_1} & \tilde{A}_1 & \xrightarrow{P_1} & \Sigma A_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow f & & \downarrow \tilde{f} & & \\
 0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{\beta_2} & M & \xrightarrow{P_2'} & \tilde{A} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_2' & & \downarrow \tilde{f}_2' & & \\
 0 & \longrightarrow & \Sigma^n B & \xrightarrow{L_n} & \tilde{\Sigma}^n B & \xrightarrow{P_n} & \Sigma^{n+1} B & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Aus der Kommutativität der oberen und unteren Hälfte des obigen Diagramms folgt die Kommutativität des ganzen Diagramms. Nach der Bemerkung bei der Definition von k kann $f_1 = \alpha f_2$ als Repräsentant der durch $k(\tilde{f}_2' \tilde{f})$ bestimmten Homotopieklasse in $H(A_1, \Sigma^n B)$ benutzt werden. Also gilt

$$k\tilde{f}^* \partial'(f_2) = \alpha^*(f_2) \quad \text{oder} \quad k\tilde{f}^* \partial' = \alpha^*.$$

Damit ist der Hilfssatz 4 bewiesen.

Aus der Exaktheit der Sequenz C' bei $\bar{\pi}^n(M, B)$ folgt nun unter der Voraussetzung von Hilfssatz 4 die Exaktheit der Sequenz C bei $\bar{\pi}^n(A_3, B)$.

Wird die Voraussetzung von Hilfssatz 4 so erweitert, dass auch $\bar{\pi}^{n-1}(A_2, B) \cong \bar{\pi}^n(\Sigma A_2, B)$ ist, dann folgt aus der Exaktheit von C bei $\bar{\pi}^n(A_3, B)$ die Exaktheit der Sequenz C' an der entsprechenden Stelle, d.h. bei $\bar{\pi}^n(\tilde{A}, B)$ und wegen der Isomorphie der beiden Sequenzen ist dann auch C bei $\bar{\pi}^n(A_1, B)$ exakt.

Satz 5. Die Cohomotopiesequenz C ist überall exakt, wenn $\bar{\pi}(\Sigma X, \Sigma Y) \cong \bar{\pi}(X, Y)$ ist für $X = A_1$ und $X = A_2$ sowie für $Y = \Sigma^n B$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Zum Schluss wollen wir noch beweisen, dass ein Epimorphismus von der exakten Sequenz

$$(1) 0 \rightarrow \text{Ext}^0(A_3, B) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Ext}^n(A_3, B) \rightarrow \text{Ext}^n(A_2, B) \rightarrow \text{Ext}^n(A_1, B) \rightarrow \text{Ext}^{n+1}(A_3, B)$$

([4] p.107 und p.85) auf die Cohomotopiesequenz C existiert. Dazu beweisen wir zuerst die bekannte Tatsache, dass

$$\text{Ext}^n(A, B) = H(A, \Sigma^n B) / P_{n-1}^* H(A, \Sigma^{n+1} B)$$

ist. Aus der injektiven Auflösung

$$(2) 0 \rightarrow B \xrightarrow{d_0} \bar{B} \xrightarrow{d_1} \Sigma \bar{B} \xrightarrow{d_2} \Sigma^2 \bar{B} \rightarrow \dots$$

von B erhält man die differentielle Folge

$$(3) 0 \rightarrow H(A, B) \xrightarrow{d_0^*} H(A, \bar{B}) \xrightarrow{d_1^*} H(A, \Sigma \bar{B}) \xrightarrow{d_2^*} H(A, \Sigma^2 \bar{B}) \rightarrow \dots$$

Nach Definition ist

$$\begin{aligned} \text{Ext}^n(A, B) &= \text{Ker}[H(A, \Sigma^n B) \rightarrow H(A, \Sigma^{n+1} B)] / \text{Im}[H(A, \Sigma^{n+1} B) \rightarrow H(A, \Sigma^n B)] \\ &= \text{Ker } d_{n+1}^* / \text{Im } d_n^* \end{aligned}$$

Die Homomorphismen in (2) und die dadurch induzierten Homomorphismen in (3) erhalten wir durch folgende Ueberlegung: Die beiden Paare

$$\begin{aligned} l_n: 0 &\rightarrow \Sigma^n B \xrightarrow{l_n} \Sigma^n \bar{B} \xrightarrow{p_n} \Sigma^{n+1} B \rightarrow 0 \quad \text{und} \\ l_{n+1}: 0 &\rightarrow \Sigma^{n+1} B \xrightarrow{l_{n+1}} \Sigma^{n+1} \bar{B} \xrightarrow{p_{n+1}} \Sigma^{n+2} B \rightarrow 0 \end{aligned}$$

definieren zusammen $d_{n+1} = l_{n+1} p_n: \Sigma^n B \rightarrow \Sigma^{n+1} \bar{B}$.

Es sei nun $f_n \in H(A, \overline{\Sigma^n B})$, dann ist

$$f_{n+1} = d_{n+1}*(f_n) = d_{n+1}f_n = \iota_{n+1}p_n f_n \in H(A, \overline{\Sigma^{n+1} B}).$$

Damit $f_n \in \text{Ker } d_{n+1}*$ ist, muss $\iota_{n+1}p_n f_n = 0$ sein:

$$A \xrightarrow{f_n} \overline{\Sigma^n B} \xrightarrow{p_n} \Sigma^{n+1} B \xrightarrow{\iota_{n+1}} \overline{\Sigma^{n+1} B}.$$

Es ist $\text{Ker } p_n = \Sigma^n B$, $\text{Ker } \iota_{n+1} = 0$, d.h., damit $f_n \in \text{Ker } d_{n+1}*$ ist, muss $\text{Im } f_n \subset \Sigma^n B$ sein, also ist

$$\text{Ker } d_{n+1}* = (A, \Sigma^n B).$$

Nun sei $f_n = d_n f_{n-1} = \iota_n p_{n-1} f_{n-1} \in \text{Im } d_n*$:

$$A \xrightarrow{f_{n-1}} \overline{\Sigma^{n-1} B} \xrightarrow{p_{n-1}} \Sigma^n B \xrightarrow{\iota_n} \overline{\Sigma^n B}.$$

Da $\text{Im } \iota_n \cong \Sigma^n B$ ist, haben wir

$$\text{Im } d_n* = p_{n-1}*H(A, \overline{\Sigma^{n-1} B}).$$

Also ist wirklich $\text{Ext}^n(A, B) = H(A, \Sigma^n B) / p_{n-1}*H(A, \overline{\Sigma^{n-1} B})$.

Satz 6. Die Abbildung $g_n: \text{Ext}^n(A, B) \longrightarrow \overline{\pi}^n(A, B)$ ist ein Epimorphismus.

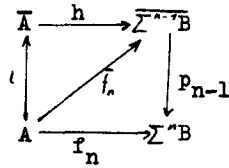
Beweis: Es ist

$$\text{Ext}^n(A, B) = H(A, \Sigma^n B) / p_{n-1}*H(A, \overline{\Sigma^{n-1} B}) \quad \text{und}$$

$$\overline{\pi}^n(A, B) = H(A, \Sigma^n B) / \iota_n*H(\overline{A}, \Sigma^n B).$$

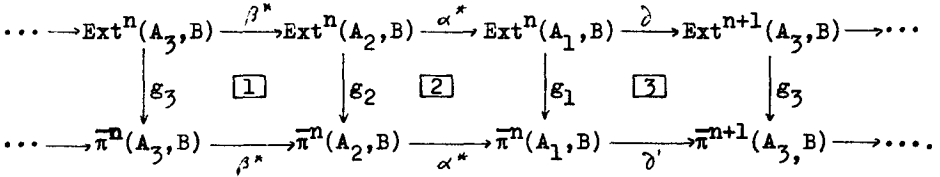
Ein $f_n \in H(A, \Sigma^n B)$ kann sowohl als Repräsentant einer Restklasse $f'_n \in \text{Ext}^n(A, B)$ als auch einer Restklasse $f''_n \in \overline{\pi}^n(A, B)$ aufgefasst werden. Es ist nun $g_n(f'_n) = f''_n$.

Nun sei $f''_n \neq 0 \in \overline{\pi}^n(A, B)$. Es existiert ein $f'_n \neq 0 \in \text{Ext}^n(A, B)$, so dass $g_n(f'_n) = f''_n$ ist. Es sei nämlich f_n ein Repräsentant von f''_n . Wäre das diesem f_n entsprechende $f'_n = 0$, dann könnte f_n über $\overline{\Sigma^{n-1} B}$ faktorisiert werden:

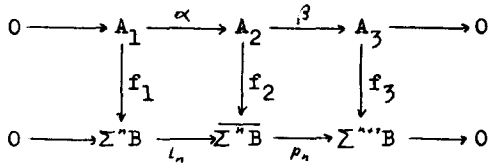


Es wäre also $f_n = p_{n-1} \bar{f}_n$ und \bar{f}_n könnte dann seinerseits auf \bar{A} erweitert werden: $\bar{f}_n = h\iota$, also $f_n = p_{n-1}h\iota$, d.h. $f_n \sim 0$ oder $f_n'' = 0$, was unserer Annahme widerspricht.

Aus Satz 6 folgt nun sofort ein Epimorphismus g der Sequenz (1) auf die Cohomotopiesequenz C:



Das Diagramm ist kommutativ. Bei $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ ist das klar, bei $\boxed{3}$ werden ∂ und ∂' durch dasselbe Diagramm



erzeugt.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] B. Eckmann, Homotopie et dualité, Colloque de Topologie algébrique, 1956, Centre Belge de Recherches Mathématiques, 41 - 53.
- [2] H. Kleisli, Homotopy Theory in abelian Categories, Canadian Journal of Mathematics, 1961 (im Druck).
- [3] B. Eckmann und A. Schopf, Ueber injektive Moduln, Archiv der Mathematik IV, 1953, 75 - 78.
- [4] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton, Princeton University Press, 1956.
- [5] B. Eckmann and H. Kleisli, Frobenius Algebras and Algebraic Homotopy Groups, Illinois Journal of Mathematics (im Druck).

LEBENS LAUF

Am 23. Januar 1929 wurde ich als Bürger von Steinmaur (Kanton Zürich) in Olten geboren. In meiner Geburtsstadt besuchte ich die Primar- und Bezirksschule. Dann trat ich in die Oberrealabteilung der Aarg. Kantonsschule in Aarau ein, wo ich im Herbst 1949 die Maturitätsprüfung bestand. Anschliessend studierte ich an der Abteilung für Mathematik und Physik der Eidg. Technischen Hochschule in Zürich und legte im Frühjahr 1954 die Diplomprüfung als Mathematiker ab. Nach dem Studium unterrichtete ich während zwei Jahren an der Evang. Lehranstalt in Schiers Mathematik und Physik, darauf während dreieinhalb Jahren am Freien Gymnasium in Zürich und während weiterer zwei Jahre an der Kantonsschule Solothurn Mathematik. Seit dem Herbst 1961 bin ich als Mathematiklehrer an der Aarg. Kantonsschule in Aarau tätig.

Ich möchte an dieser Stelle allen meinen Lehrern, insbesondere jenen an der Kantonsschule in Aarau und den Herren Professoren der ETH, deren Vorlesungen und Uebungen ich besuchte, meinen Dank für die Förderung aussprechen, die ich durch sie erfahren durfte. Ganz besonders dankbar bin ich Herrn Prof. Dr. B. Eckmann. Ohne seine Unterstützung und Geduld wäre es mir nicht möglich gewesen, die vorliegende Arbeit neben meiner vollen beruflichen Tätigkeit auszuführen.