Über die Gestalt der positiv gekrümmten offenen Flächen im dreidimensionalen Raume

Von der

Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich

zur Erlangung der

Würde eines Doktors der Mathematik

genehmigte

Promotionsarbeit

vorgelegt von

James J. Stoker
Pittsburgh, Pa., U.S.A.

Referent: Herr Prof. Dr. H. Hopf
Korreferent: Herr Prof. Dr. G. Pólya

Groningen
ERVEN P. NOORDHOFF
Compositio Mathematica 3, 55—89
1936

Über die Gestalt der positiv gekrümmten offenen Flächen im dreidimensionalen Raume

von

J. J. Stoker
Pittsburgh, Penn.

Einleitung.

1. *Der Hadamardsche Satz.* Den Ausgangspunkt dieser Arbeit bildet ein Satz von *Hadamard,* den man folgendermaßen auszusprechen pflegt: *Jede singularitätenfreie geschlossene Fläche im dreidimensionalen Raume, deren Krümmungsmaß überall positiv ist, ist das topologische Bild einer Kugel, also eine „Eifläche".* [1]) Das Ziel ist, ihm einen ähnlichen Satz über *offene* Flächen an die Seite zu stellen; der Hadamardsche Satz selbst wird bei dieser Gelegenheit noch einmal bewiesen werden.

Um Voraussetzungen und Behauptungen dieser Sätze, auch des Hadamardschen, klar formulieren zu können, ist es notwendig, einige Begriffe wie „Fläche im Raum" und „Singularitätenfreiheit" zu präzisieren.

2. *Der Begriff der „Fläche im Raum" und der „Parameterfläche".* Zunächst betrachten wir eine in abstracto gegebene topologische Fläche Φ, geschlossen oder offen; jeder ihrer Punkte besitzt — gemäß der topologischen Definition der „Fläche" — eine Umgebung, die dem Innern eines Kreises homöomorph ist. Auf Φ seien in folgender Weise Koordinatensysteme ausgezeichnet: jeder Punkt hat eine Umgebung, in der wenigstens eines dieser ausgezeichneten Koordinatensysteme erklärt ist; wo zwei Koordinatensysteme übereinandergreifen, ist die durch die Koinzidenz bewirkte Koordinatentransformation zweimal stetig differenzierbar mit von 0 verschiedener Funktionaldeterminante; *jedes* in einem Gebiet von Φ erklärte Koordinatensystem, das durch eine Transformation der eben geschilderten Art aus einem

[1]) J. Hadamard: Sur certaines propriétés des trajectoires en dynamique [Journ. de Math. (5) 3 (1897), 331—387].

ausgezeichneten System hervorgeht, ist selbst ein ausgezeichnetes System. An der Gesamtheit dieser ausgezeichneten Koordinatensysteme soll niemals etwas geändert werden. In bezug auf sie ist der Begriff der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit von Kurven und Funktionen erklärt und sinnvoll. Wir nennen Φ jetzt eine „zweimal stetig differenzierbare" Fläche.

Auf der zweimal stetig differenzierbaren Fläche Φ seien drei zweimal stetig differenzierbare Funktionen des Ortes gegeben, die wir als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{x}$ im R^3 auffassen; die beiden Ableitungen $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ seien immer linear unabhängig voneinander; dabei sind u, v Koordinaten in irgend einem zugelassenen System; die Voraussetzungen der Differenzierbarkeit und Unabhängigkeit haben offenbar einen von der speziellen Wahl des zugelassenen Systems unabhängigen Sinn. Dieser Vektor $\mathfrak{x}$ bestimmt eine „Fläche im Raume" $F = \mathfrak{x}(\Phi)$; Φ ist „Parameterfläche" von F. Aus der Stetigkeit und Unabhängigkeit der $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ folgt bekanntlich, daß jeder Punkt von Φ eine Umgebung besitzt, die durch $\mathfrak{x}$ *eineindeutig* in den R^3 abgebildet wird, sowie daß F Tangentialebenen besitzt, die stetig von den Berührungspunkten abhängen. Es wird ausdrücklich *nicht* verlangt, daß F das *eineindeutige* Bild von Φ ist; Selbstdurchdringungen und -berührungen sind also zugelassen.

Auf F wird in bekannter Weise durch die euklidische Geometrie des R^3 eine Differentialgeometrie bewirkt; durch Vermittlung der in der Umgebung jedes Punktes erklärten Umkehrung der Abbildung $\mathfrak{x}$ läßt sie sich auf Φ übertragen; so entsteht auf Φ eine reguläre Riemannsche Metrik. Für je zwei Punkte $\alpha, \beta \subset \Phi$ verstehen wir unter $\varrho(\alpha, \beta)$ die in dieser Metrik gemessene Entfernung, d.h. die untere Grenze der Längen der Verbindungswege von α und β; ϱ hat die üblichen Eigenschaften der Entfernungsfunktion eines metrischen Raumes [2]). Bezeichnen wir für je zwei Punkte $a, b \subset R^3$ die euklidische Entfernung mit $r(a, b)$, so ist für $a = \mathfrak{x}(\alpha)$, $b = \mathfrak{x}(\beta)$ immer $\varrho(\alpha, \beta) \geqq r(a, b)$.

Für jede Untersuchung der „Differentialgeometrie im Großen" *offener* Flächen — diese werden im folgenden im Mittelpunkte stehen — ist es nötig, den in Betracht zu ziehenden Flächen eine Einschränkung aufzuerlegen; hierzu gehen wir jetzt über.

3. *Die Vollständigkeit einer Fläche.* Eine Fläche F im Raume R^3, wie wir sie definiert haben, enthält niemals Punkte, die man

[2]) Hopf-Rinow, Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche [Comm. Math. Helv. 3 (1931), 209—225].

„singulär" nennen könnte; denn jeder Punkt besitzt ja eine Umgebung, deren Differentialgeometrie in jeder Hinsicht regulär ist. Jedoch können Punkte auftreten, die man als „Randpunkte" bezeichnen kann, womit angedeutet werden soll, daß sie, ohne selbst zur Fläche zu gehören, in einer auf der Fläche gemessenen endlichen Entfernung von den Punkten der Fläche liegen; genau: der Punkt $p \subset R^3$ heißt „Randpunkt" von F, wenn es auf Φ eine *divergente und beschränkte* Punktfolge α_i mit $\lim \mathfrak{x}(\alpha_i) = p$ gibt; (eine unendliche Punktmenge auf Φ heißt „divergent", wenn sie keinen Häufungspunkt besitzt, und „beschränkt", wenn die Entfernungen ϱ ihrer Punkte von einem festen Punkt, auf dessen Wahl es offenbar nicht ankommt, beschränkt sind). Beispiele von Randpunkten: F ist eine Halbkugel ohne ihren Randkreis K, die Parameterfläche Φ ist der Ebene homöomorph; dann sind die Punkte von K Randpunkte von F; oder: F ist ein einfacher Kegel, aus dem man die Spitze p entfernt hat, Φ ist einem Kreiszylinder homöomorph; dann ist p Randpunkt von F.

Die offene Halbkugel und der in seiner Spitze punktierte Kegel sind nun gerade Flächen, wie wir sie *nicht* untersuchen wollen; die Halbkugel nicht, weil sie als echter Teil einer größeren singularitätenfreien Fläche kein geeignetes Objekt für eine Untersuchung „im Großen" darstellt; den Kegel nicht, weil durch das Entfernen der Spitze p die in p vorliegende Singularität zwar verschwiegen, aber nicht tatsächlich beseitigt wird, so daß auch der punktierte Kegel nicht den Namen einer singularitätenfreien Fläche verdient. Wir schließen solche Fälle aus, indem wir das Auftreten von Randpunkten verbieten. Wir setzen also von jetzt an voraus: *Voraussetzung V: F besitzt keinen Randpunkt.*

Die Eigenschaft von F, keinen Randpunkt zu besitzen, kann man auch als „innere" Eigenschaft der auf Φ bewirkten Differentialgeometrie ausdrücken. Man nennt eine mit einer Riemannschen Metrik versehene Fläche Φ *„vollständig"*, wenn sie die folgende Eigenschaft hat: *jede beschränkte Punktmenge von Φ ist in Φ kompakt.* [3]) Wir behaupten nun: *die Voraussetzung V ist gleichbedeutend mit der Voraussetzung der Vollständigkeit.* In der Tat: wenn Φ vollständig ist, so gibt es auf Φ überhaupt keine Punktfolge, die divergent und beschränkt wäre, also besitzt F keinen Randpunkt; ist andererseits Φ nicht vollständig, so gibt es eine Punktmenge auf Φ, die beschränkt, aber nicht kompakt

[3]) Hopf-Rinow, l.c. Man vergl. auch E. Cartan, Les espaces de Riemann, p. 64.

ist, und daher auch eine divergente und beschränkte Teilfolge α_i dieser Menge; aus der Beschränktheit der $\varrho(\alpha_0, \alpha_i)$ bei festem α_0 ergibt sich auf Grund von $\varrho(\alpha_0, \alpha_i) \geqq r(\mathfrak{x}(\alpha_0), \mathfrak{x}(\alpha_i))$, daß auch die Folge der $\mathfrak{x}(\alpha_i)$ im R^3 beschränkt ist, also einen Häufungspunkt $p \subset R^3$ besitzt, und dieser ist Randpunkt von F.

Somit kann man die Voraussetzung V auch so aussprechen: *Voraussetzung V: Φ ist eine vollständige Fläche.*

Die oben angeführte, die Vollständigkeit einer Fläche definierende Eigenschaft ist mit mehreren anderen Eigenschaften äquivalent, von denen wir die folgende benutzen werden: *Auf einer vollständigen Fläche hat jede divergente Linie unendliche Länge.* [4]) Wir bemerken noch, daß jede geschlossene Fläche von selbst vollständig ist, da ja auf ihr jede Punktmenge kompakt ist; die Voraussetzung bedeutet also nur für offene Flächen eine Einschränkung. [5])

4. *Asymptotische Punkte und Doppelpunkte.* Durch die Voraussetzung V ist nicht ausgeschlossen, daß es Punkte $p \subset R^3$ mit folgender Eigenschaft gibt: es existiert eine divergente (unbeschränkte) Folge $\alpha_i \subset \Phi$ mit $\lim \mathfrak{x}(\alpha_i) = p$. Einen solchen Punkt p nennen wir einen „asymptotischen" Punkt. Wir werden unten naheliegende Beispiele vollständiger Flächen mit asymptotischen Punkten angeben. Die Eigenschaft einer Fläche, *keinen asymptotischen Punkt zu besitzen,* wollen wir die *„Eigenschaft V'"* nennen; sie ist offenbar eine Verschärfung der Vollständigkeits-Eigenschaft V. V' läßt sich auch so ausdrücken: *jeder in Φ divergenten Folge α_i entspricht eine im R^3 divergente Folge $\mathfrak{x}(\alpha_i)$.* Ferner ist klar: *wenn F die Eigenschaft V' besitzt, so ist F eine abgeschlossene Menge des R^3*; in der Tat: F habe die Eigenschaft V', und p sei Häufungspunkt von F; dann gibt es eine Punktfolge α_i mit $\lim \mathfrak{x}(\alpha_i) = p$; infolge V' ist diese Folge α_i nicht divergent, sie besitzt also einen Häufungspunkt α^*, und aus der Stetigkeit der Abbildung folgt $p = \mathfrak{x}(\alpha^*) \subset F$. Während wir V ein für alle Mal voraussetzen, betrachten wir V' als spezielle Eigenschaft gewisser

---

[4]) HOPF-RINOW, l.c., besonders 212.

[5]) Die Voraussetzung V ist wohl allen Untersuchungen differentialgeometrischer Eigenschaften „im Großen" auf offenen Flächen angemessen. So ist z.B. in Hilberts Satz von der Nichtexistenz singularitätenfreier Flächen der Krümmung -1 im R^3 die Singularitätenfreiheit so zu verstehen, daß die Flächen die Voraussetzung V erfüllen. Ferner lassen sich auf allen vollständigen — aber nicht auf allen unvollständigen — Flächen je zwei Punkte durch einen kürzesten Weg verbinden (HOPF-RINOW, l. c.).

Flächen; wir verbieten das Auftreten asymptotischer Punkte nicht. Jede *geschlossene* Fläche hat die Eigenschaft V′.

Ebensowenig verbieten wir das Auftreten von *Doppelpunkten*, d.h. von Punkten $p = \mathfrak{x}(\alpha) = \mathfrak{x}(\beta)$ mit $\alpha \neq \beta$. Wenn eine Fläche F keinen Doppelpunkt besitzt, wenn sie also das eineindeutige Bild ihrer Parameterfläche Φ ist, so sagen wir: F hat die „*Eigenschaft E*".

5. *Beispiele.* Wir zeigen jetzt durch Angabe einiger Beispiele, daß V′ und E keineswegs aus der Voraussetzung V folgen.

Beispiel I: Φ sei geschlossen, F habe Doppelpunkte; dann ist V und sogar V′ erfüllt, aber nicht E.

Beispiel II: C sei eine ebene Kurve, die sich beiderseits ins Unendliche erstreckt und einen Doppelpunkt besitzt (etwa ein cartesisches Blatt), F der senkrechte Zylinder über C und daher Φ mit der Ebene homöomorph; auch diese *offene* Fläche hat die Eigenschaften V und sogar V′, aber nicht die Eigenschaft E.

Beispiel III: C sei die in Polarkoordinaten r, φ durch $r = \frac{1}{\varphi}$ gegebene Spirale, F wieder der senkrechte Zylinder über C. Dann sind V und E, aber nicht V′ erfüllt; denn die Punkte auf der Achse, die im Punkte $r = 0$ senkrecht auf der Ebene von C steht, sind asymptotisch.

Beispiel IV: Wir betrachten die in Zylinderkoordinaten gegebene Fläche $z = \frac{1}{r} - \varphi$, wobei $0 < r < +\infty$, $-\infty < \varphi < +\infty$ ist. In vektorieller Schreibweise ist die Fläche durch den Vektor $\mathfrak{x}(r, \varphi)$ mit den Komponenten $(r \cos \varphi, r \sin \varphi, \frac{1}{r} - \varphi)$ gegeben. r, φ sind also die krummlinigen Koordinaten der Fläche. Man rechnet leicht nach, daß

$$(\mathfrak{x}_r \times \mathfrak{x}_\varphi)^2 = \frac{1 + r^2 + r^4}{r^2}$$

ist. Daraus folgt: die Fläche ist überall singularitätenfrei, da $r \neq 0$ ist. Die Gaußsche Krümmung der Fläche ist:

$$K = -\frac{(r^2 + 2)r^3}{(1 + r^2 + r^4)^{3/2}}.$$

Sie ist somit immer negativ.

Daß K nur von r abhängt, bedeutet: die Fläche ist eine Schraubenfläche mit der z-Achse als Schraubenachse, deren „Erzeugenden" die gleichseitigen Hyperbeln $z = \frac{1}{r}$ — konst. sind; durch ein Schrauben um die z-Achse geht die Fläche in sich über. Die

Schnittkurven der Fläche mit den Ebenen $z =$ konst. sind die Spiralen $r = \frac{1}{\varphi + \text{konst}}$. Daraus sieht man: die Fläche hat keine Doppelpunkte; *sie hat also die Eigenschaft* E, d.h. sie ist das eineindeutige Bild der durch $r > 0$ gegebenen Hälfte Φ einer Ebene, in der r, φ cartesische Koordinaten sind.

Diese Fläche hat auch die Eigenschaft V. Dazu ist zu zeigen: jeder in der Halbebene Φ divergenten Kurve entspricht eine unendlich lange Kurve auf der Fläche. Beweis: Es sei Λ irgend eine divergente Kurve in Φ, L die entsprechende Kurve auf der Fläche. L ist zunächst sicher eine auf der Fläche divergente Kurve, wenn auf ihr $|z|$ oder r (oder beide) unbeschränkt sind: in diesem Falle ist L sogar *im Raume* divergent, also unendlich lang. Es sei also auf L: $|z| < A$, $r < B$. Auf Grund hiervon und der Flächendarstellung $z = \frac{1}{r} - \varphi$ sieht man leicht: die L entsprechende Kurve Λ ist nur dann in Φ divergent, wenn längs ihr $r \to 0$ und gleichzeitig $\varphi \to + \infty$ streben. Wir haben zu zeigen, dass L in diesem Falle unendlich lang ist. Das Linienelement von L ist nun bekanntlich:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad \text{also ist}$$

$$ds \geqq r\,d\varphi > \frac{1}{\varphi + A}\,d\varphi = d\left[\log\left(\varphi + A\right)\right];$$

folglich strebt $s \to + \infty$ mit $\varphi \to + \infty$. L ist also unendlich lang. Damit ist die Eigenschaft V bewiesen.

Die Fläche besitzt die Eigenschaft V' nicht; denn die Punkte der Z-Achse sind asymptotische Punkte.

Die Beispiele II, III, IV zeigen überdies — was im Hinblick auf den weiteren Inhalt der Arbeit bemerkenswert ist —, daß E und V' nicht einmal dann aus V folgen, wenn das Vorzeichen des Krümmungsmaßes von F fest ist; denn in den Beispielen von II und III ist es konstant gleich 0, im Beispiel IV negativ; es ist natürlich auch leicht, Flächen anzugeben, die überall negativ gekrümmt sind und ähnlich aussehen wie das Beispiel II, die also Doppelpunkte besitzen.

6. *Der Hauptsatz* dieser Arbeit enthält die Behauptung, daß Beispiele, wie wir sie eben betrachtet haben, nicht existieren, falls wir noch verlangen, daß die Flächen überall *positiv* gekrümmt sind; er behauptet also: *bei Beschränkung auf Flächen positiver Krümmung sind die Eigenschaften V' und E Folgen der Eigenschaft V*; ausführlicher: *Eine vollständige, überall positiv gekrümmte Fläche im R^3 besitzt weder asymptotische Punkte noch Doppelpunkte.*

Der Satz, den wir beweisen werden, macht aber, ebenso wie der Hadamardsche Satz, den er enthält, noch eine bestimmte Aussage über die topologische Struktur der Fläche; in vollständiger Formulierung lautet er:

Satz I: *Voraussetzungen*: 1) *Φ ist eine vollständige Fläche (Voraussetzung V; mit anderen Worten: F besitzt keinen Randpunkt)*; 2) *das Krümmungsmaß von F ist überall positiv.*

Behauptungen: 1) *Φ ist entweder der Kugel oder der Ebene homöomorph*; 2) *die durch $\mathfrak{x}$ vermittelte Abbildung von Φ ist eineindeutig (Eigenschaft E; mit anderen Worten: F besitzt keinen Doppelpunkt)*; 3) *F besitzt keinen asymptotischen Punkt (Eigenschaft V').* [6])

Da jede geschlossene Fläche vollständig ist, ist hierin der Hadamardsche Satz, den wir in Nr. 1 formuliert haben, enthalten; die Behauptung 3) ist für geschlossene Flächen trivial. Die geschlossenen Flächen sind also nichts anderes als die „Eiflächen"; jede Eifläche ist bekanntlich die Begrenzung eines beschränkten konvexen Körpers.

7. *Weitere Sätze über die offenen Flächen F.* Wir verstehen von nun an unter F eine *offene, vollständige, positiv gekrümmte Fläche.* Wir werden zeigen, daß sich auch die offenen Flächen F in ähnlicher — und bei Kenntnis des Satzes I sehr naheliegender — Weise wie die Eiflächen charakterisieren lassen:

Satz IV: *Jede Fläche F ist die Begrenzung einer unbeschränkten konvexen Menge K.*

Damit sind Gestalt und Lage von F im wesentlichen beschrieben; eine andere Beschreibung dieser Flächen, die ebenfalls die weitere Untersuchung zu einer elementaren Aufgabe macht, liefert der

Satz III: *Zu jeder Fläche F läßt sich ein rechtwinkliges x-y-z-Koordinatensystem im Raume so finden, daß F in der Form $z = f(x, y)$ dargestellt werden kann, wobei F eine in einem konvexen Gebiet der x-y-Ebene eindeutige Funktion ist; man kann dabei überdies als x-y-Ebene eine geeignete Tangentialebene von F wählen.*

Ein wichtiges Hilfsmittel beim Beweis der Sätze III und IV sowie der Behauptung 3 des Satzes I wird die Untersuchung des

---

[6]) Die Ergebnisse einer Arbeit von St. Cohn-Vossen, Singularitäten konvexer Flächen [Math. Ann. **97** (1927), 377—386], kommen diesem Satz sehr nahe. Auch die Beweismethode ist zum Teil der unsrigen nahe verwandt. Jedoch wird keiner unserer Sätze, abgesehen von dem Hadamardschen, ausdrücklich formuliert.

sphärischen Bildes von F — in üblicher Weise durch parallele Normalen erklärt — sein. Es gilt der

Satz II: *Die sphärische Abbildung von F ist eineindeutig; das spärische Bild liegt ganz auf einer (offenen) Halbkugel; es ist sphärisch konvex.*

Hierin ist enthalten:

Satz IIa: *Eine Fläche F hat niemals zwei parallele Tangentialebenen.*

Da der Flächeninhalt des sphärischen Bildes gleich der „Curvatura integra" der Fläche ist, folgt aus der Tatsache, daß das sphärische Bild auf einer Halbkugel liegt:

Satz IIb: *Die Curvatura integra einer Fläche F ist stets $\leqq 2\pi$*[7]).

Weiter wird sich aus Satz II leicht ergeben:

Satz IIc: *Für jede Fläche F gibt es wenigstens eine Richtung im Raum, die zu keiner Tangente von F parallel ist.*

Satz IId: *Jede Ebene E des Raumes ist entweder einer Tangentialebene von F parallel — dann ist trivialerweise jede in E liegende Richtung einer Tangente parallel —, oder sie enthält eine Richtung, die keiner Tangente parallel ist.*

8. *Ein Korollar* des Satzes I, auf das wir nachher nicht mehr zurückkommen werden, ist das folgende: *wenn ein positiv gekrümmtes Flächenstück Doppelpunkte besitzt, so läßt es sich gewiss nicht zu einer überall positiv gekrümmten vollständigen Fläche erweitern.* Ebenso unmittelbar ergibt sich aus dem Satz IIa: *Wenn ein positiv gekrümmtes Flächenstück zwei parallele Tangentialebenen besitzt, so läßt es sich nie zu einer überall positiv gekrümmten vollständig offenen Fläche erweitern.*

9. *Kurven in der Ebene.* Im Kapitel I behandeln wir Sätze über ebene Kurven. Diese Sätze dienen teils als Hilfsmittel bei den Beweisen der vorstehend formulierten Sätze (Kap. II), teils sind sie bemerkenswert als Analoga zu den im Vorstehenden aufgeführten Eigenschaften von Flächen. Analoga zu dem Hadamardschen und zu unserem Hauptsatz gibt es nicht, wie man an ganz einfachen Beispielen sieht. Die Eigenschaften V′ und E

[7]) Dies ist ein Spezialfall eines viel allgemeineren Satzes von Cohn-Vossen (Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen [Comp. Math. 2 (1935), 69—122]): Φ sei eine mit einer „vollständigen" Riemannschen Differentialgeometrie versehene Fläche und nicht mit der Kugel homöomorph; dann ist ihre Curvatura integra — vorausgesetzt, daß diese existiert — $\leqq 2\pi$. Es wird also weder über die Einbettung in den Raum noch über das Vorzeichen des Krümmungsmaßes etwas vorausgesetzt.

lassen sich also nicht aus einer Eigenschaft V folgern; wir machen sie daher zu ausdrücklichen *Voraussetzungen* über die offene Kurve K; und zwar verstehen wir unter **E** die Doppelpunktfreiheit von K und unter V′ die Eigenschaft von K, sich beiderseits ins Unendliche der Ebene zu erstrecken. Unter diesen Voraussetzungen beweist man leicht Sätze, die denen aus Nr. 7 entsprechen.

I. KAPITEL.

Ebene Kurven.

1. *Erklärung der Kurven K.* Wir betrachten offene Kurven in der Ebene, die in einem rechtwinkligen x-y-Koordinatensystem durch stetig differenzierbare Funktionen

$$x(s),\ y(s),\ -\infty < s < +\infty,\ x'^2(s) + y'^2(s) \neq 0, \tag{1}$$

in bezug auf einen Parameter s gegeben sind. Wir setzen immer voraus, daß sie die *Eigenschaft V′* haben: sie besitzen keine Rand- oder asymptotischen Punkte (man vergl. die Einleitung), d.h. es ist

$$\lim_{s\to\infty} (x^2 + y^2) = \lim_{s\to-\infty} (x^2 + y^2) = \infty. \tag{2}$$

Verstehen wir unter $L(s)$ die Länge der Kurve vom Parameterwert 0 bis zum Parameterwert s, so ist, wenn wir Polarkoordinaten r, φ in der üblichen Weise einführen

$$L(s) = \int_0^s \sqrt{r'^2 + r^2\varphi'^2}\, d\sigma^2 \geqq \int_0^s | r' |\, d\sigma = | r(s) - r(0) |,$$

und da nach (2) $\lim\limits_{s\to\infty} r = \lim\limits_{s\to-\infty} r = \infty$ ist, erkennen wir: $\lim\limits_{s\to\infty} L(s) = \lim\limits_{s\to-\infty} L(s) = \infty$, d.h. *die Kurve ist in beiden Richtungen unendlich lang*; infolgedessen ist es erlaubt, daß wir festsetzen: der in (1) eingeführte, von $-\infty$ bis $+\infty$ variierende Parameter s ist die Bogenlänge; genauer: es ist $L(s) = | s |$.

Weiter setzen wir voraus, daß die Kurven *frei von Doppelpunkten* sind (*Eigenschaft E*), d.h. daß zu verschiedenen Werten von s immer verschiedene Punkte der Ebene gehören.

Schließlich beschränken wir uns auf Kurven, die *gleichsinnig gekrümmt* sind; um diesen Begriff zu erklären,führen wir zunächst in der üblichen Weise eine Tangentenrichtungsfunktion $\tau(s)$ ein: dies ist eine für alle s *eindeutige und stetige* Funktion mit

$$\frac{dx}{ds} = \cos\tau, \quad \frac{dy}{ds} = \sin\tau; \tag{3}$$

bekanntlich gibt es eine und, bis auf Addition eines von s unabhängigen ganzen Vielfachen von 2π, nur eine Funktion $\tau(s)$. Unserer Voraussetzung der gleichsinnigen Krümmung geben wir folgende Form:

$$\tau(s_2) > \tau(s_1) \quad \text{für} \quad s_2 > s_1. \tag{4}$$

Die drei genannten Eigenschaften — die Eigenschaft V′, die Doppelpunktfreiheit und die gleichsinnige Krümmung — sind offenbar und bekanntlich unabhängig von den zugrundegelegten x-y-Koordinaten. Eine Kurve, welche diese drei Eigenschaften besitzt, nennen wir im folgenden kurz „*eine Kurve K*".

2. *Die Totalkrümmung der Kurven K.* Infolge der durch (4) ausgedrückten Monotonität der Funktion $\tau(s)$ existieren die Grenzwerte $\lim\limits_{s\to+\infty}\tau(s)=\tau^+$ und $\lim\limits_{s\to-\infty}\tau(s)=\tau^-$, wobei die Werte $\tau^+ = +\infty$ und $\tau^- = -\infty$ zunächst nicht ausgeschlossen sind; die Differenz $\tau^+ - \tau^-$ nennen wir die *Totalkrümmung* der Kurve; ebenso verstehen wir unter der Totalkrümmung des durch $s_1 < s < s_2$ bestimmten Kurvenbogens die Differenz $\tau(s_2) - \tau(s_1)$. Der Hauptsatz, aus dem die meisten uns hier interessierenden Eigenschaften der Kurven leicht folgen werden, lautet:

Satz A: *Die Totalkrümmung einer Kurve K ist stets* $\leqq \pi$. Dieser Satz ist mit dem folgenden gleichwertig:

Satz A′: *Eine Kurve K besitzt niemals zwei parallele Tangenten.* Die Gleichwertigkeit der beiden Behauptungen (für jede gleichsinnig gekrümmte Kurve C, ob doppelpunktfrei oder nicht) ist leicht zu erkennen: wenn nämlich C zwei parallele Tangenten besitzt, etwa in den zu den Parameterwerten s_1, s_2 $(s_2 > s_1)$ gehörigen Punkten, so ist $\tau(s_2) - \tau(s_1) = k\pi$ mit ganzem k und im Hinblick auf (4): $k > 0$, also $\tau(s_2) - \tau(s_1) \geqq \pi$, und daher $\tau^+ - \tau^- > \pi$; wenn andererseits C eine Totalkrümmung $> \pi$ hat, so gibt es zwei Werte s_1, s_2 mit $s_2 > s_1$ und $\tau(s_2) - \tau(s_1) = \pi$, und die Tangenten in den zu s_1 und s_2 gehörigen Kurvenpunkten sind parallel.

Außerdem kann man dem Satz A auch die folgende Gestalt geben, in welcher wir ihn beweisen werden:

Satz A″: *C sei eine Kurve, die* 1) *die* (*durch* (2) *ausgedrückte*)

Eigenschaft V' besitzt, 2) *gleichsinnig gekrümmt ist, und* 3) *eine Totalkrümmung $> \pi$ besitzt; dann hat C wenigstens einen Doppelpunkt.*

Für den *Beweis von A''* gehen wir von der bekannten Tatsache aus, daß die Totalkrümmung einer *einfach geschlossenen,* stetig differenzierbaren Kurve gleich $\pm 2\pi$ ist [8]), — einer Tatsache, die wir auch folgendermaßen ausdrücken können: *ist die Totalkrümmung einer geschlossenen Kurve $\neq 2\pi$, so besitzt die Kurve wenigstens einen Doppelpunkt.* (Dabei kann man die „geschlossene Kurve" analog wie die offenen Kurven durch (1) unter Hinzufügung der Bedingung erklären, daß $x(s)$ und $y(s)$ die Periode 1 besitzen; die Totalkrümmung ist dann durch $\tau(s+1) - \tau(s)$ bei beliebigem s gegeben.) Wir leiten hieraus zunächst zwei Hilfssätze her, die sich auf *Kurvenbögen* beziehen, wobei wir einen „Bogen" auch wieder durch (1), jedoch nur für ein beschränktes und abgeschlossenes s-Intervall, etwa $0 \leqq s \leqq 1$, erklären. Gleichsinnigkeit der Krümmung wird in den Hilfssätzen *nicht* vorausgesetzt.

Hilfssatz 1: Die beiden Endpunkte des Bogens B sollen auf einer Kreisperipherie K, alle anderen Punkte von B im Innern von K liegen, und die Totalkrümmung $\tau(1) - \tau(0)$ von B sei $> 2\pi$; dann besitzt B wenigstens einen Doppelpunkt.

In der Tat: man zeichne einen doppelpunktfreien Bogen B' mit den folgenden Eigenschaften: er verbindet den Endpunkt q von B mit dem Anfangspunkt p von B und verläuft im übrigen im Äußeren von K; er ist stetig differenzierbar, seine Tangentenrichtungen in p und q stimmen dort mit denen von B überein, und bei Durchlaufung von B' in der Richtung $\overrightarrow{qp}$ nimmt der Winkel τ monoton zu; die Möglichkeit, solche Bögen B' zu konstruieren, liegt auf der Hand. Dann ist $B + B'$ eine stetig differenzierbare geschlossene Kurve mit einer Totalkrümmung $> 2\pi$; sie besitzt daher einen Doppelpunkt, und dieser liegt nicht auf B'; er ist daher Doppelpunkt von B.

Hilfssatz 2: Anfangs- und Endpunkt p bzw. q von B sollen auf den Grenzgeraden g_0 bzw. g_1 eines Parallelstreifens, alle anderen Punkte von B im Innern des Steifens liegen, und die Totalkrümmung von B sei $> \pi$; dann besitzt B wenigstens einen Doppelpunkt.

---

[8]) Beweise dieses „Umlaufsatzes" findet man bei A. Ostrowski: Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente [Comp. Math. 2 (1935), 26—49], sowie bei H. Hopf: Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven [ibid. 2 (1935), 50—62].

Um dies einzusehen, drehe man zunächst das Koordinatensystem so, daß der Streifen parallel zur y-Achse wird, und daß g_0 rechts von g_1 liegt (d.h. daß x auf g_0 größer ist als auf g_1); das Minimum von y auf B sei m. Jetzt verbinde man wieder q mit p durch einen doppelpunktfreien Bogen B', der B zu einer überall stetig differenzierbaren geschlossenen Kurve ergänzt und überdies die folgenden beiden Eigenschaften hat: τ nimmt niemals ab, und B' durchschreitet den Streifen in der Halbebene $y < m$, so daß also B' mit B keinen Punkt außer p und q gemein hat. Auch die Existenz solcher Bögen B' ist evident. Nun besitzt B' zwei parallele Tangenten, nämlich dort, wo die Abszisse x ihr Minimum und ihr Maximum erreicht; daher hat B', mit Rücksicht auf die Monotonität von τ, eine Totalkrümmung, die $\geqq \pi$ ist. Folglich ist die Totalkrümmung von $B + B'$ größer als 2π, und ebenso wie im Hilfssatz 1 folgt, daß B einen Doppelpunkt besitzt.

Jetzt kommen wir zum Beweise des Satzes A'' und unterscheiden zwei Fälle: I) Die Totalkrümmung von C ist $> 2\pi$, II) sie ist $\leqq 2\pi$. Im Falle I gibt es bereits einen beschränkten Teilbogen B_0 von C mit einer Totalkrümmung $> 2\pi$; K sei ein Kreis, in dessen Innern B_0 liegt; infolge der Eigenschaft V' von C gibt es, wenn man C, von B_0 ausgehend, in positiver bzw. negativer Richtung durchläuft, je einen ersten Schnittpunkt q bzw. p mit K; die Totalkrümmung des Teilbogens $B = pq$ von C ist infolge der gleichsinnigen Krümmung von C größer als die Totalkrümmung von B_0, also $> 2\pi$. B besitzt daher nach dem Hilfssatz 1 einen Doppelpunkt.

Im Falle II durchläuft τ, während s von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, monoton wachsend ein endliches offenes Intervall von einer Länge $\leqq 2\pi$ und $> \pi$; nach Drehung des Koordinatensystems dürfen wir annehmen, daß dies das Intervall

$$-\tau^* < \tau < +\tau^*, \quad \frac{\pi}{2} < \tau^* \leqq \pi,$$

ist. Dann ist $\lim\limits_{s \to +\infty} \cos \tau = \cos \tau^* < 0$, also, da nach (3) $\cos \tau = x'(s)$ ist,

$$\lim_{s \to \infty} x(s) = -\infty. \tag{5}$$

(Man beachte: hier wird V' in der Form benutzt, daß die Bogenlänge s gegen ∞ strebt.)

Ebenso ergibt sich

$$\lim_{-s \to \infty} \bigl(-x(-s)\bigr) = -\infty,$$

also

$$(5') \qquad \lim_{s \to -\infty} x(s) = +\infty.$$

Es sei nun B_0 ein Teilbogen von C mit einer Totalkrümmung $> \pi$; g_0 und g_1 seien die rechte bzw. die linke Grenzgerade eines vertikalen Parallelstreifens, der B_0 im Innern enthält. Aus (5) und (5′) ist ersichtlich: durch Verlängerung von B_0 auf C in positiver und negativer Richtung kommt man zu einem Teilbogen B von C, dessen End- und Anfangspunkt q bzw. p auf g_1 bzw. g_0 liegen, und der im übrigen im Innern des Streifens liegt. Infolge der gleichsinnigen Krümmung von C hat B eine größere Totalkrümmung als B_0; sie ist also $> \pi$. Daher erfüllt B die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2, und mithin liegt auf B ein Doppelpunkt.

Damit ist der Satz A″ bewiesen.

3. *Folgerungen.* Wir betrachten wieder eine Kurve K. Das offene Intervall, welches τ durchläuft, während s von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, ist, wie wir soeben bewiesen haben, nicht länger als π; ist es durch $\tau^- < \tau < \tau^+$ gegeben, so ist also $0 < \tau^+ - \tau^- \leqq \pi$. Wir können das Koordinatensystem so drehen, daß

$$(6) \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \tau^- < 0 < \tau^+ \leqq +\frac{\pi}{2}$$

wird; z.B. können wir immer erreichen, daß $\tau^- = -\tau^+$, $0 < \tau^+ \leqq \frac{\pi}{2}$ wird. Infolge (6) ist immer $\cos\tau > 0$, also nach (3) $x'(s) > 0$ und $x(s)$ eine monoton wachsende Funktion von s; daher können wir x als Parameter der Kurve K einführen, und es wird $y = f(x)$ eine eindeutige und stetig differenzierbare Funktion von x. $f(x)$ ist auf einem offenen Intervall $x^- < x < x^+$ erklärt, wobei $x^- = \lim_{s \to -\infty} x(s)$, $x^+ = \lim_{s \to +\infty} x(s)$ ist, und $x^- = -\infty$, $x^+ = +\infty$ sein kann. $f'(x) = \operatorname{tg}\tau$ nimmt mit wachsendem s, also auch mit wachsendem x, monoton zu. Da $y'(s) = \sin\tau$ für $s \to +\infty$ gegen den positiven Grenzwert $\sin\tau^*$ strebt, ist $\lim_{s \to -\infty} y = \lim_{x \to +x^-} y = +\infty$; ebenso ergibt sich $\lim_{s \to +\infty} y = \lim_{x \to x^+} y = +\infty$. Fassen wir diese Tatsachen zusammen:

Satz B: *Für jede Kurve K läßt sich das rechtwinklige x-y-Koordinatensystem so wählen, daß K durch eine Gleichung $y = f(x)$ dargestellt wird; dabei ist $f(x)$ eine eindeutige stetig differenzierbare Funktion; sie ist auf einem Intervall $x^- < x < x^+$ erklärt, wobei die Werte $x^- = -\infty$, $x^+ = +\infty$ zugelassen sind; $f'(x)$ nimmt mit* *wachsendem x monoton zu; $y = f(x)$ strebt für $x \to x^-$ und für $x \to x^+$ gegen $+\infty$.*

Wir stellen K nach Satz B in der Form $y = f(x)$ dar, und zwar so, daß $y > 0$ ist. Alsdann betrachten wir die unbeschränkte Punktmenge M, deren Punkte durch die Ungleichung $y \geqq f(x)$ gegeben sind. Dann gilt

SATZ C: 1) *K ist der Rand von M,* 2) *M ist konvex,* 3) *M ist identisch mit der Menge aller Sehnen von K.* Durch 3 ist K ohne Heranziehen einer speziellen Darstellung von K eindeutig bestimmt.

In Kap. II, Nr. 8, beweisen wir einen im Wortlaut identischen Satz für offene Flächen im Raume, aus dessen Beweis der ganz analoge Beweis des vorliegenden Satzes leicht zu entnehmen ist. Wir wollen also auf einen Beweis des Satzes C verzichten.

4. *Weitere Sätze über ebene Kurven.* Es wird sich in dieser Nummer nicht mehr um die Kurven K handeln. Wir wollen die Forderungen der Vollständigkeit und Doppelpunktfreiheit fallen lassen, hingegen die anderen am Anfang dieses Kapitels gemachten Voraussetzungen, also besonders die der gleichsinnigen Krümmung, aufrecht erhalten. Es handelt sich hier um Sätze, die wir für die Beweise der Sätze in Kap. II brauchen.

C sei eine gleichsinnig gekrümmte Kurve in der x-y-Ebene; sie werde durch den Punkt $(0, 0)$ in die Bögen C_1, C_2 zerlegt; die x-Achse sei Tangente in diesem Punkt; in seiner Nähe sei $x > 0$ auf C_1, $x < 0$ auf C_2. Es gilt der SATZ:

Voraussetzungen: 1) y wächst auf jedem der Bögen C_1 und C_2 (wenn man ihn von $(0, 0)$ her durchläuft) *monoton* gegen *denselben endlichen* Grenzwert y^*; 2) C ist unendlich lang.

Behauptung: C hat wenigstens einen Doppelpunkt.

Beweis: Auf C_1 wächst der Tangentenwinkel τ, der in $(0, 0)$ den Wert 0 hat, monoton. Aus $\frac{dy}{ds} = \sin\tau$ und dem monotonen Wachsen von y folgt $\sin\tau \geqq 0$, also

$$(1) \qquad 0 \leqq \tau \leqq \pi;$$

folglich strebt τ gegen einen Grenzwert $\tau^* \leqq \pi$, und mithin strebt $\cos\tau$ von 1 her monoton abnehmend gegen den Wert $\cos\tau^*$. Wir behaupten, daß der Grenzwert x^*, dem sich $x = \int \cos\tau\, ds$ nähert, gewiß $\neq +\infty$ ist ($-\infty$ bleibt zugelassen).

Ist nämlich $\tau^* \leqq \frac{\pi}{2}$, so ist ctg τ auf ganz C_1 stetig und postiv und nimmt monoton ab; daher ist, wenn x_0 die Abszisse, y_0 die

Ordinate, τ_0 den τ-Wert in einem festen, von $(0, 0)$ verschiedenen Punkt p_0 von C_1 bezeichnet,

$$x = \int_0 \operatorname{ctg} \tau \, dy = x_0 + \int_{y_0} \operatorname{ctg} \tau \, dy < x_0 + (y - y_0) \operatorname{ctg} \tau_0,$$

$$x < x_0 + (y^* - y_0) \operatorname{ctg} \tau_0$$

für jeden hinter p_0 gelegenen Punkt. Ist $\tau^* > \frac{\pi}{2}$, so nimmt wegen $\frac{dx}{ds} = \cos \tau$ die Abszisse x von dem Punkt an, in dem $\tau = \frac{\pi}{2}$ ist, monoton ab; also strebt sie gewiß nicht gegen $+\infty$.

Damit ist gezeigt: *auf* C_1 *strebt* x *nicht gegen* $+\infty$; und ebenso folgt: *auf* C_2 *strebt* x *nicht gegen* $-\infty$.

Dies hat sich aus der Voraussetzung 1) ergeben (dabei haben wir noch nicht benützt, daß y auf beiden Bögen gegen *denselben* Grenzwert strebt). Nach 2) ist wenigstens einer der beiden Bögen C_i unendlich lang; das treffe etwa für C_1 zu. Aus der Beschränktheit von y folgt dann, daß $\frac{dy}{ds} = \sin \tau$ gegen 0, also (mit Rücksicht auf (1)) τ gegen π, und daher $\cos \tau$ gegen -1 strebt: dann folgt aus $x = \int \cos \tau \, ds$: $\lim x = -\infty$.

Wir wissen also: *es ist* $\lim x = -\infty$ *auf* C_1, $\lim x \neq -\infty$ *auf* C_2.

Da nun y auf jedem der Bögen C_i monoton gegen y^* wächst, können wir die beiden Bögen durch Funktionen

$$x = f_1(y) \quad \text{bzw.} \quad x = f_2(y)$$

darstellen, die beide in dem Intervall $0 \leqq y < y^*$ eindeutig und stetig sind. In der Nähe des Punktes $(0, 0)$ ist

$$f_2(y) < 0 < f_1(y);$$

aus

$$\lim_{y \to y^*} f_2(y) \neq -\infty, \quad \lim_{y \to y^*} f_1(y) = -\infty$$

folgt

$$f_2(y) > f_1(y)$$

in der Nähe von y^* und daher die Existenz eines Wertes $y > 0$ mit

$$f_2(y) = f_1(y),$$

d.h. eines gemeinsamen Punktes von C_2 und C_1, also eines Doppelpunktes von C.

Den damit bewiesenen Satz werden wir später in den beiden folgenden äquivalenten Formen anwenden:

Satz D_1: *y wachse auf jedem der Bögen C_1 und C_2 monoton gegen denselben endlichen Grenzwert y^*, und $C = C_1 + C_2$ sei doppelpunktfrei; dann hat C endliche Länge.*

Satz D_2: *y wachse auf jedem der Bögen C_1 und C_2 monoton gegen denselben Grenzwert y^*, wobei $y^* = \infty$ zugelassen ist; C sei unendlich lang und doppelpunktfrei; dann ist $y^* = \infty$.*

Zum Schluß beweisen wir den

Satz E: *Für eine geschlossene (gleichsinnig gekrümmte) Kurve C, die wenigstens einen Doppelpunkt besitzt, hat die Totalkrümmung einen Betrag $\geqq 4\pi$.*

Nehmen wir an, der Punkt p sei ein Doppelpunkt der Kurve. Es sei T eine der Kurventangenten in diesem Punkte. Weil die Kurve geschlossen ist, gibt es auf derjenigen Kurvenschleife, die T als Tangente besitzt, einen Punkt p', der in maximalem Abstand von T liegt. Im Punkte p' besitzt die Kurvenschleife eine zu T parallele Tangente. Der Kurvenbogen pp' hat somit die Totalkrümmung $\geqq \pi$, wegen der gleichsinnigen Krümmung. Die Schleife $pp'p$ hat also erst recht die Totalkrümmung $> \pi$. Es gibt aber mindestens eine andere von $pp'p$ verschiedene Schleife durch p, die der gleichen Betrachtung unterzogen werden kann. Die Totalkrümmung der ganzen Kurve ist somit $> 2\pi$, muß also $\geqq 4\pi$ sein, weil die Totalkrümmung einer geschlossenen Kurve immer ein ganzzahlige Vielfaches von 2π ist.

II. KAPITEL.

Beweise der Hauptsätze.

1. *Allgemeines über Niveaulinien.* Φ sei wie in der Einleitung eine abstrakte Fläche, auf der Koordinatensysteme so erklärt sind, daß man von zweimal stetig differenzierbaren Funktionen auf Φ (in bezug auf diese Koordinatensysteme) sprechen kann. Wir setzen in dieser Nummer Φ noch nicht zu einer räumlichen Fläche F in Beziehung; wir benutzen auf Φ eine Metrik, deren „Vollständigkeit" aber erst ganz am Schluß eine Rolle spielt.

z sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf Φ. Ein Punkt α von Φ heißt „kritischer" Punkt von z, wenn in ihm

$$z_u = z_v = 0$$

ist; andernfalls heißt er „gewöhnlicher" Punkt; diese Unterscheidung ist offenbar unabhängig von dem speziell herangezogenen u-v-System.

Unter „Niveaulinie" von z verstehen wir eine zusammenhängende Kurve, auf der z konstant und die nicht echter Teil einer Kurve mit derselben Eigenschaft ist. Die Differentialgleichung der Niveaulinien ist

$$z_u du + z_v dv = 0.$$

Aus bekannten Existenz- und Eindeutigkeitssätzen für gewöhnliche Differentialgleichungen folgt: durch jeden gewöhnlichen Punkt geht genau eine Niveaulinie; in der Umgebung jedes gewöhnlichen Punktes ist die Gesamtheit der dort befindlichen Bögen von Niveaulinien das topologische Bild einer Schar paralleler Geraden; ist in dem gewöhnlichen Punkt α etwa $z_u \neq 0$, so bilden z, v in der Umgebung von α ein zugelassenes Koordinatensystem, woraus ersichtlich ist: auf der einen Seite der durch α gehenden Niveaulinie hat z größeren, auf der anderen Seite kleineren Wert als in α.

Λ sei eine Niveaulinie, deren sämtlichen Häufungspunkte — also auch sämtliche Punkte von Λ — gewöhnliche Punkte von z seien. Sie besitzt gewiß keinen Doppelpunkt, da ein solcher ein kritischer Punkt sein müßte; sie ist also entweder eine einfach geschlossene oder eine einfach offene Linie; diese zweite Möglichkeit ist so zu verstehen: Λ läßt sich auf einen Parameter t mit $-\infty < t < +\infty$ so beziehen, daß zu verschiedenen t-Werten immer verschiedene Punkte von Λ gehören; wir behaupten aber sogar: Λ ist eine beiderseits in Φ *divergierende* Linie, d.h.: für jede Parameterfolge t_i mit $t_i \to \pm\infty$ besitzt die entsprechende Punktfolge $\alpha(t_i)$ keinen Häufungspunkt in Φ. In der Tat: gäbe es einen Punkt α^* mit $\alpha(t_i) \to \alpha^*$, so müßte er infolge der über Λ gemachten Voraussetzung gewöhnlicher Punkt sein; in seiner Umgebung gäbe es daher außer den auf seiner Niveaulinie Λ^* gelegenen Punkten keine weiteren Punkte, in denen z denselben Wert z^* hätte wie in α^*; ist z_1 der Wert von z auf Λ, so ist aber wegen der Stetigkeit von z und wegen $\alpha(t_i) \to \alpha^* : z_1 = z^*$; folglich lägen die Punkte $\alpha(t_i)$ auf Λ^*, und es wäre also $\Lambda^* = \Lambda$; da auf Λ Parameterwerte und Kurvenpunkte eineindeutig und beiderseits stetig einander entsprechen, müßten daher die t_i gegen den Parameterwert t^* streben, den α^* auf Λ hat, und nicht gegen $\pm\infty$.

Damit haben wir erkannt: eine Niveaulinie ist *entweder* eine einfach geschlossene Kurve *oder* eine beiderseits in Φ divergierende, einfach offene Kurve, *oder* sie besitzt einen Häufungspunkt, der kritischer Punkt ist. In jedem Fall ist sie natürlich in allen ihren gewöhnlichen Punkten stetig differenzierbar.

Im Punkte α liege ein relatives Extremum vor; es bedeutet für das Folgende keine Einschränkung, wenn wir es als Minimum und $z(\alpha) = 0$ annehmen. In der Nähe von α bilden die Niveaulinien bekanntlich ein System einfach geschlossener Kurven, das einer Schar konzentrischer Kreise homöomorph ist, wobei α dem Mittelpunkt entspricht, und zwar läßt es sich so auf die Kreise abbilden, daß den orthogonalen Trajektorien der Niveaulinien die Radien entsprechen. Eine aus α und solchen Niveaulinien mit $0 < z < z_1$ gebildete (offene) Umgebung von α nennen wir $\Sigma(z_1)$, und z_1 nennen wir einen „regulären" Wert. Zu verschiedenen Niveaulinien in $\Sigma(z_1)$ gehören immer verschiedene z-Werte, da bei Durchlaufung einer Trajektorie, von α herkommend, z monoton wächst.

Wir behaupten zunächst:

Hilfssatz: *Wenn der Rand von $\Sigma(z_1)$ eine geschlossene und von kritischen Punkten freie Niveaulinie Λ enthält, so gibt es einen regulären Wert $z_2 > z_1$.*

Beweis: *Erstens*: die Linie Λ wird in jedem ihrer Punkte β von der Verlängerung einer Trajektorie aus $\Sigma(z_1)$ geschnitten. Denn da β gewöhnlicher Punkt ist, ist in einer Umgebung U von β die Differentialgleichung der Trajektorien regulär; die von dem in U verlaufenden Bogen von Λ ausgehenden Trajektorein *schneiden* daher diesen Bogen, treten also in $\Sigma(z_1)$ ein und sind somit Verlängerungen von Trajektorien aus $\Sigma(z_1)$.

Zweitens: in *verschiedenen* Punkten wird Λ immer von *verschiedenen* Trajektorien geschnitten; denn auf der schneidenden Trajektorie ist der Schnittpunkt mit Λ in eindeutiger Weise als der *erste* Punkt mit $z = z_1$ charakterisiert.

Drittens: *jede* Trajektorie aus $\Sigma(z_1)$ schneidet Λ. Denn wie wir soeben sahen, sind die Punkte von Λ in eineindeutiger Weise den schneidenden Trajektorien zugeordnet; ist nun Λ_0 eine Niveaulinie im Innern von $\Sigma(z_1)$, so wird, da Λ_0 von allen Trajektorien geschnitten wird, durch Vermittlung der schneidenden Trajektorien die Linie Λ in eineindeutiger und — infolge der stetigen Abhängigkeit der Lösungen einer Differentialgleichung von den Anfangsbedingungen — stetiger Weise auf einen Teil Λ'_0 von Λ_0 abgebildet, der zunächst ein *echter* Teil sein könnte. Da aber Λ und Λ_0 einfach geschlossene Kurven sind, ist eine solche eineindeutige Abbildung offenbar nur möglich, wenn $\Lambda'_0 = \Lambda_0$ ist; mithin ergibt sich aus der Tatsache, daß Λ_0 von *allen* Trajektorien getroffen wird, dasselbe für Λ.

Wir wissen also, daß eine Verlängerung jeder Trajektorie aus

$\Sigma(z_1)$ die Kurve Λ schneidet und sich ein Stück über Λ hinaus verlängern läßt; ferner wissen wir, daß diese Verlängerungen die ganze Kurve Λ bedecken; schließlich erinnern wir uns daran, daß jeder Punkt von Λ gewöhnlicher Punkt von z ist, so daß die Niveaulinien und ihre Trajektorien in seiner Umgebung reguläre Felder bilden. Daraus ergibt sich leicht — etwa unter Benutzung des Heine-Borelschen Satzes — die Existenz eines Wertes $z_2 > z_1$ mit folgender Eigenschaft: jede Trajektorie aus $\Sigma(z_1)$ läßt sich über Λ hinaus soweit verlängern, daß z monoton wachsend gegen z_2 strebt, und daß diese Verlängerungen je zweier voneinander verschiedener Trajektorien zueinander fremd bleiben.

Dann hat die Gesamtheit $\Sigma(z_2)$ der durch diese verlängerten Trajektorien überstrichenen Punkte offenbar die Eigenschaften, die z_2 als „regulären" Wert charakterisieren, w.z.b.w.

Unter der „regulären Umgebung" Σ von α verstehen wir nun die Vereinigung aller $\Sigma(z_1)$ mit regulären z_1; z^* sei die obere Grenze der z_1; man sieht leicht, daß z^* selbst regulär, und daß $\Sigma = \Sigma(z^*)$ ist.

Von nun an machen wir über z die folgenden Voraussetzungen: 1.) *z besitzt in wenigstens einem Punkte α ein relatives Extremum*, 2.) *z besitzt keine anderen kritischen Punkte als relative Extrema.* Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß das Extremum in α ein Minimum mit $z(\alpha) = 0$ ist, so daß wir die früheren Bezeichnungen und Aussagen ungeändert anwenden dürfen.

Wir untersuchen Σ und unterscheiden die folgenden drei Fälle, die alle Möglichkeiten erschöpfen: A) Σ ist die ganze Fläche Φ; B) Σ ist echter Teil von Φ, und im Rande von Σ ist ein kritischer Punkt von z enthalten; C) Σ ist echter Teil von Φ, und jeder Randpunkt von Σ ist gewöhnlicher Punkt.

Fall A: Es ist ohne weiteres klar: *$\Sigma = \Phi$ ist der Ebene homöomorph; z besitzt keinen weiteren kritischen Punkt als das Minimum α.*

Fall B: Ist α' kritischer Punkt auf dem Rande von Σ, so hat z in α' den Wert z^*, und da in Σ immer $z < z^*$ ist, liegt in α' ein (relatives) Maximum vor; auf α' können wir auch die vorstehenden Betrachtungen — mutatis mutandis — anwenden; statt Σ werden wir dann Σ' schreiben. Λ sei eine so nahe bei α' verlaufende geschlossende Niveaulinie mit $z = z_1$, daß sie in Σ eintritt; dann ist sie notwendigerweise eine der ganz in Σ verlaufende Niveaulinien. Es existiert also das Teilgebiet $\Sigma(z_1)$ der regulären

Umgebung Σ von α; es existiert aber auch — wie für jedes z in hinreichender Nähe von z^* — eine entsprechend definierte Umgebung $\Sigma'(z_1)$ von α'. In $\Sigma(z_1)$ ist $z < z_1$, in $\Sigma'(z_1)$ ist $z > z_1$; $\Sigma(z_1)$ und $\Sigma'(z_1)$ sind also fremd zueinander. Sie haben aber als gemeinsamen Rand die Niveaulinie Λ. Da sowohl $\Sigma(z_1) + \Lambda$ als auch $\Sigma'(z_1) + \Lambda$ einer abgeschlossenen Kreisscheibe homöomorph ist, ist daher, wie man unmittelbar sieht, $\Sigma(z_1) + \Lambda + \Sigma'(z_1)$ mit einer Kugelfläche homöomorph. Φ enthält aber keine geschlossene Fläche als echten Teil; folglich ist $\Phi = \Sigma(z_1) + \Lambda + \Sigma'(z_1)$.

Damit haben wir als Ergebnis im Fall B: *Φ ist der Kugel homöomorph; z besitzt außer seinem (absoluten) Minimum in α und (absoluten) Maximum in α' keinen weiteren kritischen Punkt; es ist $\Sigma = \Phi - \alpha'$.*

Fall C: β sei ein Randpunkt von $\Sigma = \Sigma(z^*)$. Er ist gewöhnlicher Punkt, es gibt also durch ihn eine Niveaulinie Λ. Da Σ selbst aus lauter Niveaulinien besteht, muß Λ (infolge der regulären Abhängigkeit des Lösungskurven einer Differentialgleichung von den Anfangswerten) *ganz* im Rande von Σ liegen; alle ihre Häufungspunkte sind also — nach Definition des Falles C — gewöhnliche Punkte. Infolgedessen ist Λ, wie wir weiter oben festgestellt haben, entweder geschlossen oder divergierend. Sie kann aber nicht geschlossen sein; denn dies widerspräche nach dem oben bewiesenen „Hilfssatz" der Definition von z^* als oberer Grenze aller regulären z.

Damit erkennen wir für den Fall C: *Der Rand von Σ besteht aus offenen, also divergierenden, Niveaulinien.* (Darin ist enthalten, daß Φ eine offene Fläche ist.) —

Wir wollen für den Fall C noch eine besondere Eigenschaft der Niveaulinien in Σ feststellen, nachdem wir in Φ eine Metrik eingeführt haben, die die „Vollständigkeits-Eigenschaft" V besitzt (vgl. die Einleitung).

In einer solchen Metrik besitzt die offene und divergierende Niveaulinie Λ, die im Rande von Σ enthalten ist, unendliche Länge. Man kann daher, wenn m eine beliebige positive Zahl, β ein fester Punkt von Λ ist, auf Λ von β aus einen Bogen Λ_m von der Länge m abtragen. Ist $\beta^{(i)}$ eine gegen β konvergierende Punktfolge aus Σ, so müssen — infolge der regulären Abhängigkeit der Lösungen einer Differentialgleichung von den Anfangsbedingungen — die geschlossenen Niveaulinien $\Lambda^{(i)}$, auf denen die $\beta^{(i)}$ liegen, einfache Bögen enthalten, die gleichmäßig gegen Λ_m konvergieren; die Längen dieser Bögen streben dann gegen m. Da m beliebig ist, sind also die Längen der Niveaulinien in Σ unbeschränkt.

Da ferner in Σ immer $z < z^*$, und da z^* der Wert von z auf dem Rande von Σ ist, so können wir im Fall C also zwei Feststellungen machen, die wir später anwenden werden:

Liegt der Fall C vor, so ist einerseits z in Σ beschränkt, andererseits sind die Längen der Niveaulinien in Σ — gemessen in einer „vollständigen" Metrik — unbeschränkt.

2. *Die reguläre Umgebung eines Punktes der Fläche F.* Für die Voraussetzungen über die räumliche Fläche F sei auf die Einleitung verwiesen. Wir betrachten einen beliebigen Punkt α auf Φ. Der Punkt $a = \mathfrak{x}(\alpha)$ sei der Bildpunkt von α auf F. Die Tangentialebene von F in a wird als x-y-Ebene eines x-y-Koordinatensystems gewählt, und zwar mit dem Ursprung im Punkte a. Die Koordinate z der Punkte von F ist eine Ortsfunktion auf Φ. Die Niveaulinien dieser Ortsfunktion sind die Bildkurven der in den Ebenen $z =$ konst. liegenden Schnittkurven von F. z hat die in Nr. 1 (kurz vor Unterscheidung der Fälle A, B, C) formulierten Eigenschaften 1 und 2; ist nämlich $z_u(\beta) = z_v(\beta) = 0$ in einem Punkt β auf Φ, dann ist bekanntlich die Ebene $z = z_b$ eine Tangentialebene von F in dem β entsprechenden Punkt b von F, und wegen der positiven Krümmung von F ist im Punkte β ein relatives Extremum von z vorhanden. Andere kritische Punkte von z gibt es nicht. Daher existiert die „reguläre" Umgebung" Σ auf Φ mit α als Mittelpunkt. Unter S verstehen wir das Bild von Σ auf F, d.h. $S = \mathfrak{x}(\Sigma)$. S heißt die reguläre Umgebung von $a = b(\alpha)$ auf F.

Wir zeigen nun: *die Abbildung von Σ auf S ist eineindeutig.* Es ist zunächst klar, daß Punkten verschiedener Niveaulinien in Σ verschiedene Punkte in S zugeordnet sind, weil verschiedenen Niveaulinien in Σ verschienene Werte von z zugeordnet sind. Wenn also verschiedene Punkte α_i in Σ einen einzigen Bildpunkt p in S haben, dann müssen sie auf derselben Niveaulinie Λ' liegen, deren Bildkurve L' in S einen Doppelpunkt in p haben müßte. Wir werden aber zeigen, daß alle Niveaulinien L in S doppelpunktfrei sind. Das Hilfsmittel dazu ist die Totalkrümmung der Kurven L in S. Weil die Abbildung von Σ auf S eindeutig ist, und die Niveaulinien Λ in Σ geschlossen sind, müssen die Bildkurven L der Niveaulinien auch geschlossen sein. Die Kurven L sind weiter ebene gleichsinnig gekrümmte Kurven; sie sind ja ebene Schnittkurven der positiv gekrümmten Fläche F und, als solche, wendepunktfrei. Wir behaupten nun, daß die Totalkrümmung jeder Niveaulinie L 2π ist. Für die Niveaulinien in einer genügend kleinen Umgebung des Punktes a trifft das zu, weil diese Kurven wegen der positiven Flächenkrümmung bekanntlich *einfach* geschlossene Kurven sind. Die Totalkrümmung der Kurven L ist aber eine stetige Funktion des Scharparameters z und muß daher konstant bleiben, weil sie ja immer ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist. Die Totalkrümmung jeder Kurve L ist also 2π. Gäbe es aber eine Kurve L' mit einem Doppelpunkt, dann müßte nach Satz E (Kap. I) die Totalkrümmung einen Betrag $\geqq 4\pi$ haben.

Für den Beweis der Eigenschaft E, d.h. der Eineindeutigkeit der Abbildung von Φ auf F, sind wir damit bereits fertig, falls wir uns im Fall A oder B befinden. *Insbesondere haben wir bereits den Satz von Hadamard über geschlossene Flächen bewiesen.* Die weiteren Ausführungen beziehen sich daher ausschließlich auf die *offenen* Flächen F.

Wir haben für den Beweis der Behauptungen 1 und 2 des Satzes I (s. Einl.) nur noch zu zeigen, daß Fall C niemals eintritt. Wir nehmen immer $z(\alpha) = 0$ als relatives Minimum an. z^* sei immer die obere Grenze von z in Σ mit $z^* \leqq +\infty$. Angenommen, wir hätten schon bewiesen, daß Fall C niemals eintritt, dann würden wir weiter für den Beweis der Eigenschaft V' (also der Behauptung 3 des Satzes I nur zu zeigen haben: im Falle A ist z^* unendlich; und zwar genügt es offenbar sogar, dies für einen einzigen Flächenpunkt a (als „Mittelpunkt" der regulären Umgebung $S = F$) zu zeigen.

3. *Die Schattengrenzen.* Ein nützliches Hilfsmittel bei den späteren Beweisen sind die sogenannten „Schattengrenzen" von S [9]). Bevor wir sie definieren, betrachten wir gewisse Kurven in Σ und S. In jedem von a verschiedenen Punkt von S gibt es zur Richtung der Niveaulinie L in diesem Punkt eine konjugierte Richtung; sie ist wegen der positiven Krümmung von S *verschieden von der Richtung der Kurve L durch den Punkt.* Es entspricht ihr eine Richtung im entsprechenden Punkt von Σ. In dieser Weise ist ein stetiges Richtungsfeld in $\Sigma - \alpha$ erklärt. Durch Integrieren der durch diese Richtungen gegebenen Differentialgleichung entsteht in $\Sigma - \alpha$ ein System von Kurven σ, so daß durch jeden Punkt von $\Sigma - \alpha$ genau eine σ geht. Es ist klar, daß sich z auf jeder Kurve σ monoton ändert. Wir behaupten

---

[9]) Sie werden in ähnlicher Weise von St. Cohn-Vossen [Math. Ann. l.c.] herangezogen.

nun: *die obere Grenze der auf irgend einer σ vorkommenden z-Werte ist gleich z^*, der oberen Grenze von z in Σ; die untere Grenze von z auf σ ist gleich $z(\alpha) = 0$, der unteren Grenze von z in Σ.* Beweis: Nehmen wir an, es sei $z_1 < z^*$ die obere Grenze von z auf einer gewissen σ. Λ sei die Niveaulinie $z = z_1$. Auf σ gibt es eine Folge β_i von Punkten, so daß $z(\beta_i)$ gegen z_1 konvergiert. Indem wir nötigenfalls zu einer Teilfolge übergehen, können wir offenbar eine Folge $\beta_i \subset \sigma$ finden, die gegen einen Punkt $\beta^* \subset \Lambda$ konvergiert. Wie wir soeben festgestellt haben, ist die Feldrichtung in β^* verschieden von der Richtung Λ in β^*. Die Integralkurve σ^* durch β^* muß also Punkte außerhalb der Niveaulinie Λ besitzen. Wegen der stetigen Abhängigkeit der Integralkurven von dem Anfangspunkt müßte damit auch σ Punkte außerhalb von Λ besitzen. Die Werte von z außerhalb Λ sind aber größer als z_1. Unsere Annahme, daß z_1 obere Grenze von z auf σ ist, besteht also zu Unrecht. Ebenso zeigt man, daß die untere Grenze von z auf σ den Wert $z(\alpha) = 0$ hat. — Wir können die damit bewiesene Tatsache auch so aussprechen: *Durch jeden von α verschiedenen Punkt von Σ geht eine und nur eine Kurve σ; auf ihr strebt z monoton in der einen Richtung gegen z^*, in der anderen gegen 0.*

Den Kurven σ entsprechen auf S Kurven $s = \mathfrak{x}(\sigma)$. Wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung von Σ auf S ist klar: *Die Kurven s bedecken S derart, daß durch jeden von a verschiedenen Punkt von S eine und nur eine s geht; z verhält sich auf s ebenso wie auf σ.*

Längs einer der Kurven s wird jetzt die S berührende Torse $Z(s)$ konstruiert. Wir behaupten: *sie ist ein Zylinder.* Denn nach einem bekannten Satz haben die Torsenerzeugenden die zu den Tangentenrichtungen von s konjugierten Richtungen; sie sind also Tangenten an die Kurven $z =$ konst. und liegen damit in einer Schar paralleler Ebenen, nämlich der Ebenen $z =$ konst. Eine Torse ist aber bekanntlich entweder Zylinder, Ebene, Kegel oder Tangentenfläche an einer Raumkurve. Die Torse kann offenbar kein Kegel sein. Sie kann auch keine Ebene sein, weil S positiv gekrümmt ist. Wäre sie Tangentenfläche an eine Raumkurve, dann müßte diese Kurve so beschaffen sein, daß alle ihrer Tangenten zu einer festen Ebene parallel wären. Die Kurve könnte nur eine ebene Kurve sein, d.h. die Torse wäre eine Ebene. Die Torse $Z(s)$ kann also nur Zylinder sein.

Jetzt nehmen wir irgend eine Ebene durch die z-Achse (d.h. durch die Flächennormale im Punkte a von S). Die Schnittkurve s' dieser Ebene mit einem Zylinder $Z(s)$, dessen Erzeugenden senkrecht auf der Ebene stehen, heiße die „*Schattengrenze*" von S in dieser Ebene. Zu jeder Ebene durch die z-Achse gibt es immer *zwei* solche Zylinder; denn jede Niveaulinie $z =$ konst. auf S ist eine geschlossene konvexe Kurve, zu irgend einer Richtung in der Ebene einer solchen Kurve gibt es bekanntlich genau zwei Stützgeraden der konvexen Kurve, und diese sind Erzeugende auf je einem der zwei Zylinder. Im Punkte a war keine konjugierte Richtung definiert. Man sieht aber, daß jedes Paar von Zylindern mit parallelen Erzeugenden zu einem einzigen Zylinder zusammengefaßt werden kann, indem man noch eine parallele erzeugende Gerade durch den Punkt a hinzunimmt. Die Berührungskurve dieses Zylinders ist dann $s_1 + a + s_2$, wobei s_1 und s_2 die Berührungskurven der beiden ursprünglichen Zylinder sind. Die Berührungskurve $s_1 + a + s_2$ hat auch im Punkte a eine bestimmte Tangentenrichtung, nämlich die zu der Erzeugenden-Richtung konjugierte. Daher sehen wir jetzt auch, daß man sagen darf: „die Kurven s münden in bestimmten Richtungen in den Punkt a" — und das Analoge für die Kurven σ und den Punkt α. Indem wir auch zu den Schattengrenzen noch den Punkt a hinzufügen, gelangen wir offenbar zu der folgenden Aussage: *Jede Schattengrenze berührt die x-y-Ebene im Punkte a, und auf jeder Schattengrenze strebt z monoton von 0 her gegen z^*.*

Obwohl man somit die Kurven s_1, s_2, die mit gleicher Richtung in a münden, zu einer einzigen Kurve zusammenfassen kann, werden wir auch weiterhin diese Kurven als *verschieden* ansehen, und wir werden auch weiter von den *zwei* in derselben Ebene liegenden Schattengrenzen s_1' und s_2' sprechen.

Wir behaupten nun: *jede Schattengrenze s' besitzt stetige Tangentenrichtungen und ist wendepunktfrei, also gleichsinnig gekrümmt. Beweis:* Zunächst wollen wir uns überzeugen, daß jede s' stetig differenzierbar ist: Jede s' kann man offenbar auffassen als die senkrechte Projektion der Kurve s auf die Ebene von s'; s ist stetig differenzierbar; die Richtung ihrer Tangente fällt niemals mit der Projektionsrichtung $z =$ konst. zusammen, da diese beiden Richtungen konjugiert sind; folglich ist auch s' stetig differenzierbar.

Nehmen wir an, s' sei nicht gleichsinnig gekrümmt, habe also in p' einen Wendepunkt. Die Tangente von s' in p' durchsetzt s' in p'. Das hätte zur Folge, daß die Tangentialebene von S in dem zu p' entsprechenden Punkt p auf S den Zylinder $Z(s)$ in p durchsetzte. Die s' entsprechende Kurve s liegt aber auf diesem Zylinder und würde daher durch die Tangentialebene durchsetzt, und zwar im Punkte p. Das ist aber nicht möglich, weil S überall positives Krümmungsmass hat, und s auf S verläuft.

Es sei jetzt S auf die x-z-Ebene projiziert. Wir bekommen dabei zwei Schattengrenzen s_1' und s_2' in dieser Ebene. Es seien dann p_1 und p_2 Punkte auf s_1' bzw. s_2' mit gleichem z, l_1 und l_2 die Längen der Kurvenbögen ap_1 auf s_1' und ap_2 auf s_2'. Dann ist klar: $|x_1| < l_1$ und $|x_2| < l_2$, wobei x_1 und x_2 die x-Koordinaten der Punkte p_1 und p_2 sind. Daraus können wir den Schluß ziehen: *Wenn s_1' und s_2' beschränkte Längen haben, dann sind die x-Koordinaten auf S beschränkt.* Das ist zunächst klar für die Punkte, die auf s_1' und s_2' projiziert werden; alle anderen Punkte werden auf Punkte von Verbindungsstrecken je zweier Punkte auf s_1' und s_2' mit gleichem z projiziert, weil jede solche Strecke alle Projektionspunkte einer gewissen konvexen Niveaulinie $z =$ konst. enthält.

Schließlich bemerken wir, daß *das sphärische Bild jeder Kurve s ein Großkreisbogen ist.* Das sphärische Bild einer Fläche wird bekanntlich erhalten, wenn man die Flächennormalen parallel in dem Mittelpunkt einer Einheitskugel abträgt und den Flächenpunkten die Schnittpunkte der zugehörigen Normalen mit der Kugeloberfläche zuordnet. Nun sind die Flächennormalen längs s sämtlich senkrecht zu der Richtung der Erzeugenden des Zylinders $Z(s)$; ihre Richtungen liegen also in einer festen Ebene und ihre sphärischen Bilder mithin auf einem Großkreis.

4. *Beweis der Behauptungen* 1 *und* 2 *des Satzes I.* Es ist zu zeigen (vgl. Nr. 2, Schluß), daß der Fall C nicht eintritt. Wir wissen (Nr. 1), daß in diesem Fall einerseits z in Σ, also auch in S, beschränkt wäre, andererseits die Längen der Niveaulinien Λ von z in S unbeschränkt wären. Wir werden zeigen, daß diese beiden Tatsachen nicht miteinander verträglich sind.

s_1', s_2' seien die beiden Schattengrenzen in der x-z-Ebene. Da nach Nr. 3 auf jeder Schattengrenze z monoton gegen die obere Grenze z^* strebt — die wir als endlich annehmen —, und $s_1' + s_2'$ keinen Doppelpunkt hat, sind die Voraussetzungen des Satzes D_1 aus Kap. I für die Kurve $C = s_1' + s_2'$ erfüllt. Folglich hat C endliche Länge, und daraus folgt weiter (Nr. 3): x ist auf S beschränkt. Ebenso folgt die Beschränktheit von y auf S.

Wenn aber x und y beschränkt sind, etwa beide dem Betrage nach $< r$, so läßt sich jede der auf S liegenden konvexen geschlossenen Linien $z =$ konst. in ein Quadrat von der Seitenlänge $2r$ einschließen. Dann ist die Länge jeder dieser Eilinien bekanntlich kleiner als der Umfang $8r$ des Quadrates — im Gegensatz zu der oben noch einmal festgestellten unbeschränkten Länge der Niveaulinien im Falle C.

Damit ist die Unmöglichkeit von C und somit insbesondere, mit Rücksicht auf Nr. 2, das Bestehen der Eigenschaft E bewiesen. Da war uns also im Falle A befinden, ist von jetzt an immer $S = F$, $\Sigma = \Phi$; F und Φ sind der Ebene homöomorph.

5. *Das sphärische Bild der offenen Flächen F.* In Nr. 3 haben wir die Definition des sphärischen Bildes bereits angegeben. Wir stellen jetzt zunächst fest: *F besitzt niemals parallele Tangentialebenen.* Denn aus der Tatsache $\Sigma = \Phi$ folgt: wenn man von einem ganz willkürlichen Punkt a der Fläche F ausgeht, dann ist dieser Punkt a die einzige Singularität der Ortsfunktion z auf F, was gleichbedeutend mit der obigen Aussage ist. Daraus folgt weiter: *das sphärische Bild von F ist eineindeutig*, und: *von je zwei Diametralpunkten der Kugel gehört höchstens einer zum sphärischen Bild.*

Weiter wissen wir aus der Tatsache $\Sigma = \Phi$ und dem Abschnitt über die Schattengrenzen: je zwei Punkte von F lassen sich durch eine Kurve s verbinden, deren sphärisches Bild ein Großkreisbogen ist, und dieser Bogen enthält niemals zwei Diametralpunkte; also: *das sphärische Bild ist sphärisch konvex* [10]).

Wir werden zeigen: *Das sphärische Bild liegt auf einer Halbkugel.*

Der Beweis wird durch den folgenden *Hilfssatz* geliefert: *Eine sphärisch konvexe Menge M ist entweder die ganze Kugel, oder sie liegt auf einer Halbkugel.*

Beweis des Hilfssatzes: Wenn M die ganze Kugelfläche ist, dann ist nichts zu beweisen. M sei also nicht die ganze Kugel. Die Menge M sei durch Hinzufügen aller vom Kugelmittelpunkt nach Punkten von M ausgehenden Halbstrahlen zu einem „Kegel" K ergänzt. Wir behaupten: K ist im gewöhnlichen Sinne konvex, d.h. mit je zwei Punkten aus K gehört auch deren Verbindungsstrecke dazu. Es seien p_1 und p_2 irgend zwei Punkte aus K. Diese Punkte liegen auf zwei Halbstrahlen S_1 und S_2, die etwa in den Punkten p_1' und p_2' die Kugel durchsetzen mögen. Die zwei Strahlen S_1 und S_2 zusammen mit allen Halbstrahlen durch denjenigen zu M gehörigen Großkreisbogen zwischen p_1' und p_2', der die Länge $\leqq \pi$ hat, bilden dann die Begrenzung eines kon-

[10]) Wir nennen eine Menge auf der Einheitskugel *sphärisch konvex*, wenn man je zwei ihrer Punkte in ihr durch einen Großkreisbogen der Länge $\leqq \pi$ verbinden kann.

vexen ebenen Winkelraumes, der offenbar ganz zu K gehört. Die Verbindungsstrecke zwischen p_1 und p_2 gehört also diesem Winkelraum, folglich auch dem Kegel K an. K ist also konvex. Nun behaupten wir: der Kugelmittelpunkt ist Randpunkt von K. Nach Voraussetzung gibt es mindestens einen Punkt auf der Kugel, der nicht zu M gehört; infolgedessen gibt es wenigstens einen vom Kugelmittelpunkt ausgehenden K nicht angehörenden Halbstrahl. In jeder Umgebung des Kugelmittelpunktes gibt es also sowohl Punkte, die K angehören, als Punkte, die ihm nicht angehören. Durch den Kugelmittelpunkt geht also eine Stützebene von K. Die Menge M als Teilmenge von K muß damit auf einer Seite einer gewissen Ebene durch den Kugelmittelpunkt liegen, w.z.b.w.

Damit ist der Satz II (vgl. die Einleitung) bewiesen. — Man beachte übrigens: das sphärische Bild ist eine auf der Kugel *offene* Menge; daher ist es fremd zum Rande jeder Halbkugel, auf der es liegt.

Unsere Kenntnisse über das sphärische Bild gestatten uns wichtige Aussagen über Richtungen von Geraden und Stellungen von Ebenen in Raume in ihrer Beziehung zu F zu machen. Wir sagen von einer Geraden, sie habe „*Tangentialrichtung*", wenn sie einer Tangente von F parallel ist, andernfalls sagen wir, sie habe „*Achsenrichtung*". Eine Gerade G durch den Mittelpunkt der Einheitskugel hat offenbar dann und nur dann Achsenrichtung, wenn das sphärische Bild von F ganz auf einer der beiden Halbkugeln mit zu G senkrechter Äquatorebene liegt. Der oben bewiesene Satz enthält daher die Tatsache: *es gibt wenigstens eine Achsenrichtung.* (Satz IIc.)

Wir behaupten jetzt sogar: *es gibt einen Punkt auf F, in dem die Flächennormale Achsenrichtung hat*; diese Behauptung ist offenbar gleichbedeutend mit der folgenden: *es gibt einen Punkt p des sphärischen Bildes, so daß die Kugelachse durch ihn Achsenrichtung hat, mit anderen Worten: daß das sphärische Bild auf der Halbkugel mit dem Mittelpunkt p liegt.*

Diese Behauptung können wir nochmals umformen, in dem wir uns — ähnlich wie früher — das sphärische Bild *zusammen mit seinen Randpunkten* zu einem *abgeschlossenen* konvexen Kegel K mit der Spitze im Kugelmittelpunkt ergänzt denken. Unsere Behauptung lautet dann offenbar: *Es gibt durch den Kugelmittelpunkt O eine solche Stützebene von K, daß deren Normale A durch O ein Strahl aus dem Innern von K ist.*

Zum Beweise der Existenz eines solchen Strahles A führen wir den Begriff des zu K *polaren* Kegels $\bar{K}$ ein: $\bar{K}$ wird von den äußern — d.h. K abgewandten — Normalen der Stützebenen von K in O gebildet; diese Definition ist offenbar gleichbedeutend mit der folgenden: ein Strahl $\mathfrak{x}$ gehört dann und nur dann zu $\bar{K}$, wenn er mit *jedem* Strahl $\mathfrak{a}$ von K einen Winkel $\geqq \frac{\pi}{2}$ bildet. Man sieht leicht, daß auch $\bar{K}$ konvex ist[11]). Ferner zeigen wir jetzt: K fällt mit dem zu $\bar{K}$ polaren Kegel $\bar{\bar{K}}$ zusammen. Denn ist α ein beliebiger Strahl aus K, so gilt für *jeden* Strahl aus $\bar{K}$: $\sphericalangle(\mathfrak{a}, \mathfrak{x}) \geqq \frac{\pi}{2}$, d.h. $\mathfrak{a} \subset \bar{\bar{K}}$, also $K \subset \bar{\bar{K}}$; gehört andererseits der Strahl $\mathfrak{a}$ durch O *nicht* zu K, so gibt es eine Stützebene E von K durch O, die $\mathfrak{a}$ von K trennt, und für die äußere Normale $\mathfrak{x}$ von E gilt daher: $\sphericalangle(\mathfrak{x}, \mathfrak{a}) < \frac{\pi}{2}$; da $\mathfrak{x}$ zu $\bar{K}$ gehört, gehört also $\mathfrak{a}$ *nicht* zu K; aus $\mathfrak{a} \not\subset K$ folgt somit $\mathfrak{a} \not\subset \bar{\bar{K}}$. Damit ist $\bar{\bar{K}} \equiv K$ bewiesen. (Wir werden im folgenden übrigens nur $\bar{\bar{K}} \subset K$ benutzen.)

Nun haben K und $\bar{K}$ — wie je zwei konvexe Körper mit gemeinsamem Randpunkt O, aber ohne gemeinsamen inneren Punkt — eine gemeinsame Stützebene E durch O; die K zugewandte Normale A von E gehört zu $\bar{\bar{K}}$, also zu K. Falls A im Innern von K liegt, dann hat also A die behauptete Eigenschaft. A liege also nicht im Innern, sondern im Rande von K; dann gibt es durch A eine Stützebene E_1 von K, die senkrecht auf E steht; K liegt also im konvexen Winkelraum zwischen zwei zu einander senkrechten Ebenen. Betrachten wir nun eine Ebene E_2 durch O senkrecht zu E_1 und E. Falls E_2 einen Strahl A aus dem Innern von K enthält, sind wir wiederum fertig: eine Ebene durch O senkrecht zu A ist offenbar Stützebene von K, und A hat die behauptete Eigenschaft. Falls E_2 keinen Strahl aus dem Innern von K enthält, so ist auch E_2 offenbar Stützebene von K; K liegt also im konvexen Winkelraum zwischen drei Ebenen, die zu je zweien aufeinander senkrecht stehen; dann hat aber offenbar *jeder* Strahl aus dem Innern von K die behauptete Eigenschaft: seine senkrechte Ebene ist Stützebene von K.

Der Unterscheidung zwischen Tangential- und Achsenrichtungen von Geraden entspricht eine Unterscheidung von Ebenen: wir sagen, eine Ebene habe „Tangentialstellung", wenn sie einer Tangentialebene von F parallel ist; andernfalls sagen wir, sie habe „Achenstellung". Es ist klar, daß jede Gerade, die in einer

---

11) Bonnesen-Fenchel, l.c., S. 4.

Ebene mit Tangentialstellung liegt, Tangentialrichtung hat: weniger selbstverständlich ist der folgende Satz: In jeder Ebene mit Achsenstellung gibt es wenigstens eine Gerade mit Achsen*richtung*. Beweis: In die Sprache des sphärischen Bildes übersetzt, lautet die Behauptung: E sei eine solche Ebene durch den Kugelmittelpunkt O, daß die Endpunkte p, q der auf E senkrechten Kugelachse nicht zum sphärischen Bild gehören; dann gibt es in E eine Gerade G durch O, so daß das sphärische Bild ganz auf einen der der Halbkugeln mit zu G senkrechter Äquatorebene E' liegt. Um diese Behauptung zu beweisen, konstruieren wir wieder den konvexen Kegel K mit der Spitze O über dem sphärischen Bild. Die Gerade pq ist Stützgerade von K, da p und q nicht zum sphärischen Bild gehören; daher gibt es eine Ebene E' durch pq, die Stützebene von K ist. Der Schnitt G von E' mit E hat die behauptete Eigenschaft.

Damit haben wir also gezeigt: *Jede Ebene des Raumes ist entweder einer Tangentialebene von F parallel — (in diesem Fall ist trivialerweise jede in ihr gelegene Richtung einer Tangente parallel) — oder sie enthält eine Richtung, die keiner Tangente parallel ist.* (Satz IId.)

6. *Spezielle Darstellung von F in der Form $z = f(x, y)$.* (Satz III.) In Nr. 5 haben wir gezeigt: es gibt wenigstens einen Punkt a auf F, in dem die Flächennormale Achsenrichtung hat. Wir wollen jetzt beweisen: *Man mache die Flächennormale von F im Punkte a zur z-Achse eines rechtwinkligen x-y-z-Koordinatensystems; dann wird die senkrechte Projektion von F auf die x-y-Ebene eineindeutig. Es läßt sich also F durch eine Gleichung $z = f(x, y)$ mit eindeutigem f darstellen.* (Bemerkung: Wir werden später zeigen, daß überhaupt *jede* Achsenrichtung bezüglich F als z-Achse eines x-y-z-Koordinatensystems gemäß den Bedingungen dieses Satzes gewählt werden kann.)

Beweis: Der Bequemlichkeit halber nehmen wir noch an, daß der Punkt a Koordinatenursprung ist, und daß immer $z \geqq 0$ ist. Wir müssen zeigen: die Parallelen zur z-Achse treffen F, wenn überhaupt, in einem einzigen Punkt. Nehmen wir an, dies wäre nicht der Fall, so müßte es auf F zwei Punkte p_1 und p_2 mit z-Koordinaten z_1 und z_2 (natürlich ist $z_1 \neq z_2$) geben, die auf einer Parallelen zur z-Achse liegen würden. Die Niveaulinien $z = z_1$ und $z = z_2$ werden alsdann auf die x-y-Ebene projiziert: diese zwei Ovale in der x-y-Ebene hätten also einen gemeinsamen Punkt; die zwei Ovale würden daher offenbar eine gemeinsame

Stützgerade G haben. Wir nehmen jetzt eine Ebene durch die z-Achse, die senkrecht zu G steht, und betrachten die Schattengrenzen s_1' und s_2' (vgl. Nr. 3) von F in dieser Ebene. Es müßte also offenbar zwei Punkte auf einer der zwei Schattengrenzen, etwa auf s_1', geben, deren Verbindungsstrecke zur z-Achse parallel wäre; s_1' hätte daher eine zur z-Achse parallele Tangente, und folglich gäbe es auf F eine zur z-Achse parallele Tangentialebene. Unsere Annahme wäre also nicht verträglich mit der Tatsache, daß die z-Achse Achsenrichtung hat.

Weiter zeigen wir jetzt: *das Definitionsgebiet G von $f(x, y)$ ist konvex.* Denn nach dem Abschnitt über Schattengrenzen wissen wir, daß F durch die vom Punkte a ausgehenden Kurven s schlicht bedeckt ist; wenn wir also die Projektion G_1 desjenigen Teils von F betrachten, für den $z < z_1$ ist, dann besteht G_1 aus den Projektionen der Bögen der Kurven s mit $z < z_1$, also aus dem ganzen Innern der Projektion der konvexen Niveaulinie $z = z_1$; das ist aber ein konvexes Gebiet. Wenn also p_1 und p_2 irgend zwei Punkte aus G sind, für die $f(p_1) = z_1$ und $f(p_2) = z_2$ sind, dann brauchen wir die vorangehende Betrachtung nur auf eine Niveaulinie $z = z_3$ mit $z_3 > z_1$ und z_2 anzuwenden, um einzusehen, daß auch die Verbindungsstrecke von p_1 und p_2 ganz in G liegt.

Der Satz III (vgl. Einl.) ist damit bewiesen. In dem Beweis ist mitenthalten: *Ist $p_0 \subset G$, dann ist p_0 im Innern der Projektionen aller Niveaulinien $z = k$ enthalten, für welche $k > f(p_0)$ ist.*

Das Gebiet G kann beschränkt oder unbeschränkt sein. Eine Kurve in G, die entweder ins Unendliche läuft oder gegen einen Randpunkt von G konvergiert, heißt eine in G „divergente" Kurve. Auf Grund der obigen Charakterisierung des Gebietes G ist dann klar: *einer beiderseits divergenten Kurve in G entspricht eine Kurve K auf F, auf der die z-Werte gegen die obere Grenze z^* von z streben, d.h. das Bild von K in der Parameterebene Φ ist eine in Φ divergente Kurve; folglich ist K beiderseits unendlich lang.*

7. *Beweis der Eigenschaft V' (Behauptung 3 des Satzes I).* Wir müßen zeigen, daß z unbeschränkt ist und dürfen uns dabei des Koordinatensystems aus Nr. 6 bedienen (vg. Nr. 2). F sei, genau wie oben, in der Form $z = f(x, y)$ dargestellt. Wir betrachten die Schnittkurve K von F mit der x-z-Ebene, also die Kurve $z = f(x, 0)$. Weil G konvex ist, ist das Definitionsintervall von $f(x, 0)$ zusammenhängend. Außerdem ist dieses Intervall offenbar eine in G beiderseits „divergente" Kurve. Daraus folgt: K ist eine zusammenhängende beiderseits unendlich lange Kurve.

Ferner ist K doppelpunktfrei und gleichsinnig gekrümmt; auf jedem ihrer beiden von a ausgehenden Zweige strebt z monoton gegen z^*. Daher ist nach Satz D_2 (Kap. I) $z^* = \infty$.

8. *Die offenen Flächen F beranden eine konvexe Punktmenge.* (Satz IV.) F sei wiederum in demselben Koordinatensystem durch $z = f(x, y)$ dargestellt, und es sei $z \geqq 0$. G sei das Definitionsgebiet von f. Wir betrachten die Menge K aller Punkte (x, y, z) mit $(x, y, 0) \subset G$ und $z \geqq f(x, y)$. Im folgenden werden wir der Reihe nach beweisen: 1) *F ist der Rand von K*; 2) *K ist konvex*; 3) *K ist identisch mit der Menge aller Sehnen von F.* Durch 3 ist K eindeutig ohne Heranziehen einer speziellen Darstellung von F bestimmt.

Daß jeder Punkt von F Randpunkt von K ist, ist evident. Umgekehrt zeigen wir, daß jeder Randpunkt von K auf F liegt. Es sei r Randpunkt von K, r_0 seine Projektion in der x-y-Ebene. Wir unterscheiden zwei Fälle, je nach der Lage von r_0 in der x-y-Ebene: I) $r_0 \subset G$, II) $r_0 \not\subset G$.

Fall I: z_1 sei die z-Koordinate von r; wir haben zu zeigen, daß $z_r = f(r_0)$ ist. Wäre $z_r \gtrless f(r_0)$, so gäbe es eine Umgebung U von r, so daß für jeden Punkt $p \subset U$ ebenfalls $z_p \gtrless f(p_0)$ wäre. Im Falle $z_p > f(p_0)$ wäre r innerer Punkt von K, im Falle $z_p < f(p_0)$ wäre r nicht Häufungspunkt von K, in keinem der beiden Fälle wäre also r Randpunkt von K. Für den Randpunkt r muß also $z_r = f(r_0)$ sein.

Fall II: Wir werden zeigen, daß dieser Fall überhaupt nicht eintritt. Wir unterscheiden zwei weitere Fälle: 1.) r_0 ist nicht Randpunkt von G, 2.) r_0 liegt auf dem Rande von G. Der erste Fall ist ganz leicht auszuschließen: es gibt nämlich eine Umgebung U_0 von r_0 so, daß kein Punkt von G darin liegt; aus $(x, y, 0) \subset U_0$ folgt dann $(x, y, z) \not\subset K$, also gibt es eine Umgebung von r, die fremd zu K ist; r wäre also nicht Häufungspunkt von K. Der zweite Fall ist der wenigst triviale Fall von allen. Es sei z_r wiederum die z-Koordinate von r. Es gibt also eine Folge p^i von Punkten aus K, so daß $\lim z_{p^i} = z_r$ ist. Die Projektionen der Punkte p^i auf die x-y-Ebene seien die Punkte $p_0^i \subset G$. Die Punktfolge p_0^i hat also r_0 als Häufungspunkt. Aus der Definition von K folgt: $z_{p^i} \geqq f(p_0^i)$ für jedes i. Wegen der Eigenschaft V′ ist aber $\lim\limits_{p_0^i \to r_0} f(p_0^i) = \infty$ (vgl. Nr. 7). Damit müßte auch $\lim\limits_{p^i \to r} z_{p^i} = \infty$ und nicht gleich z_r sein. Die Annahme, daß ein Randpunkt von G Projektion eines

Randpunktes von K sein könnte, besteht also zu Unrecht [12]).

Wir behaupten nun, daß die Punktmenge K konvex ist. Es ist zu zeigen: wenn p und q zu M gehören, dann gehört auch deren Verbindungsstrecke dazu. Wenn die Strecke pq parallel zur z-Achse ist, dann ist offenbar nichts zu beweisen. Wir nehmen also an, daß die Projektionen p' und q' von p und q auf die x-y-Ebene voneinander verschieden sind. p' und q' liegen in G. Daraus folgt, daß auch die Verbindungsstrecke $p'q'$ in G liegt, weil G konvex ist. Wir nehmen ein neues Koordinatensystem, in dem wir die x- und y-Achsen so verlegen, daß die x-Achse längs $p'q'$ fällt, aber so, daß die neuen x- und y-Achsen in der alten x-y-Ebene liegen. Dann ist F offenbar nach wie vor in der Form $z = f(x, y)$ darstellbar.

Wir betrachten jetzt die ebene Schnittkurve $z = f(x, 0)$ von F. Diese Kurve ist, wie wir wissen, eine beiderseits in F divergente Linie; sie hat also beiderseits positives und unbeschränktes z, und ist außerdem gleichsinnig gekrümmt. Die erste Ableitung von $f(x, 0)$ muß daher offenbar eine monoton zunehmende Funktion von x sein. Wir betrachten nun denjenigen Teil der Kurve, der der Strecke $\widehat{p', q'}$ entspricht; wir wissen: $z_p \geqq f(p, 0)$, $z_q > f(q, 0)$, wobei z_p und z_q die z-Koordinaten von p und q sind. Es sei jetzt r irgend ein Punkt der Strecke pq, r_1 seine Projektion in G; eine elementare Diskussion zeigt dann: $z_1 > f(r_1, 0)$, d.h. r liegt in K, w.z.b.w.

Es bleibt noch zu zeigen, daß K mit der Menge aller Sehnen von F identisch ist. Daß jede Sehne von F zu K gehört, ist wegen der Konvexität von K trivial. Umgekehrt zeigen wir: jeder Punkt von K liegt auf einer Sehne von F. Wir betrachten also irgend einen Punkt p aus K; aus der Definition von K folgt: $z_p \geqq f(p_0)$, wobei z_p die z-Koordinate von p, p_0 seine Projektion in G bedeutet; der Fall $z_p = f(p_0)$ ist trivial; es sei $z_p > f(p_0)$. Dann liegt, wie in Nr. 6 gezeigt wurde, p_0 im Inneren der Projektion der Niveaulinie mit $z = z_p$, also p im Inneren dieser Niveaulinie selbst. p liegt also, da dies eine geschlossene konvexe Kurve ist, auf einer ihrer Sehnen.

9. *Allgemeine Darstellbarkeit von F in der Form $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$.* In Nr. 6 haben wir bereits die Behauptung aufgestellt: *jede* Achsenrichtung läßt sich als ζ-Achse eines rechtwinkligen

---

[12]) Die Eigenschaft V′ ist an dieser Stelle, wie man sich leicht überlegt, wesentlich.

ξ-η-ζ-Koordinatensystems wählen, so daß F sich in der Form $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$ mit eindeutigem φ darstellen läßt. Diese Behauptung wollen wir nun beweisen.

Aus Nr. 6 wissen wir: F läßt sich immer in der Form $z = f(x, y)$ darstellen, wobei das Definitionsgebiet G von f konvex ist. Daraus folgt: Die Schnittkurve von F mit irgend einer zur z-Achse parallelen Ebene E ist zusammenhängend. Denn der Schnitt von E mit G ist wegen der Konvexität von G ein zusammenhängendes Intervall g, und auf g ist die z-Koordinate der Schnittkurve als eindeutige stetige Funktion gegeben, nämlich wenn man den Schnitt von E mit der Ebene $z = 0$ zur x-Achse macht, als $z = f(x, 0)$.

Daraus folgt weiter: *zu jeder Sehne von F gibt es eine parallele Tangente von F.* Denn durch jede solche Sehne gibt es eine zur z-Achse parallele Ebene, also gibt es nach dem Vorstehenden eine ebene Kurve auf F durch die Endpunkte der Sehne, also eine zur Sehne parallele Tangente dieser Kurve.

Die damit bewiesene Tatsache läßt sich auch so ausdrücken: *Eine Sehne von F hat niemals Achsenrichtung.* Es sei nun eine Achsenrichtung vorgegeben; wir machen sie zur ζ-Richtung eines rechtwinkligen ξ-η-ζ-Koordinatensystems. Da jede Parallele zur ζ-Achse infolge des Fehlens von Sehnen dieser Richtung höchstens einen Schnittpunkt mit F hat, ist die senkrechte Projektion von F auf die ξ-η-Ebene *eineindeutig*; damit ist gezeigt: *hat die ζ-Achse „Achsenrichtung", so läßt sich F in der Form $\zeta = \varphi(\xi, \eta)$ mit eindeutigem φ darstellen.*

10. *Weitere Folgerungen.* Um zu zeigen, daß das Definitionsgebiet Γ von φ *konvex* ist, benutzen wir die Tatsache, die uns für die oben gebrauchte „spezielle" Darstellung $z = f(x, y)$ schon bekannt ist: die durch $z \geqq f(x, y)$ definierte Punktmenge K ist konvex. Ferner hat K offenbar die folgende Eigenschaft: jede Gerade g durch einen Punkt von K trifft F; denn wenn g nicht zur x-y-Ebene parallel ist, so nimmt z auf g auch Werte in beliebiger Nähe von $-\infty$ an, es gibt also auf g nicht nur Punkte mit $z \geqq f(x, y)$, sondern auch mit $z < f(x, y)$ (da immer $f \geqq 0$ ist) und daher auch einen Punkt mit $f = 0$; ist aber g parallel zur x-y-Ebene, so muß (wie aus Nr. 8 hervorgeht) die Gerade g die in ihrer Ebene gelegene ovale Schnittkurve mit F treffen.

Da somit insbesondere jede Parallele zur ζ-Achse F trifft, ist die senkrechte Projektion von K auf die ξ-η-Ebene in der Projektion Γ von F enthalten; daß umgekehrt Γ in der Projektion von K enthalten ist, ist wegen $F \subset K$ trivial. Γ ist somit die

Projektion der konvexen Menge K, und daher gilt: *der Definitionsbereich Γ von φ ist konvex.*

Ebenso wie oben (Nr. 9) aus der Konvexität von G folgte, daß die Schnittkurve von F mit irgend einer zur z-Achse parallelen Ebene zusammenhängend ist, folgt jetzt aus der Konvexität von Γ: der Schnitt von F mit irgend einer zur ζ-Achse parallelen Ebene ist eine zusammenhängende Kurve. Wir können jetzt aber sogar behaupten: *der Schnitt jeder beliebigen Ebene mit F ist zusammenhängend.* Denn wenn die Schnittebene Achsenstellung hat, so enthält die Ebene eine Achsenrichtung (Nr. 5), die wir zur ζ-Achse machen können; und wenn die Ebene Tangentialstellung hat, so wissen wir schon aus Nr. 4, daß der Schnitt ein Oval ist. Übrigens ist die Schnittkurve, falls die Ebene Achsenstellung hat, bestimmt kein Oval, da sie ja keine Tangente besitzt, die zu der in der Ebene vorkommenden Achsenrichtung parallel wäre. Damit sehen wir: *ein ebener Schnitt von F ist eine geschlossene oder eine offene Kurve, je nachdem die Schnittebene Tangential- oder Achsenstellung hat.*

Auf Grund der Tatsache, daß F eine konvexe unbeschränkte Punktmenge berandet, kann man nun leicht eine Reihe weiterer Sätze aufstellen, z.B. den folgenden: *Der Flächeninhalt von F ist unbeschränkt.* Denn stellen wir F wiederum wie in Nr. 6 in der Form $z = f(x, y)$ dar, und betrachten irgend eine Niveaulinie $z = z_0$ von F; über $z = z_0$ als Leitlinie wird ein senkrechter Zylinder aufgebaut, dessen Erzeugenden von $z = z_0$ aus in der positiven z-Richtung ins Unendliche laufen. Dieser Zylinder liegt offenbar ganz in der durch F berandeten Punktmenge K und hat unendlichen Flächeninhalt. Der Teil von F, der oberhalb der Ebene $z = z_0$ liegt, hat dann offenbar erst recht unendlichen Flächeninhalt.

Daraus folgt weiter: Auf der offenen Fläche F kann die Krümmung K nicht überall größer als eine positive Konstante sein. Denn die Totalkrümmung von F ist bekanntlich einerseits gleich dem Flächeninhalt ihres sphärischen Bildes, also nach Satz IIb $\leqq 2\pi$, andererseits gleich dem Integral der Krümmung erstreckt über F; wäre K also größer als eine positive Konstante, so müßte dieses Integral wegen des unbeschränkten Flächeninhaltes von F unendlich sein. Damit haben wir den Satz von Bonnet bewiesen: *Eine vollständige Fläche F, deren Krümmung überall größer als eine positive Konstante ist, ist geschlossen* [13]).

(Eingegangen den 11. September 1934.)

---

[13]) Vgl. Hopf-Rinow, l.c. Hier wird dieser Satz durch „innere" differentialgeometrische Betrachtungen bewiesen.

Lebenslauf.

Am 2. März 1905 bin ich im Staate Pennsylvanien der Vereinigten Staaten von Amerika als Sohn des Bergingenieurs James J. Stoker geboren. Mit 18 Jahren ging ich nach Absolvierung eines zwölfjährigen Elementar- und Mittelschulkursus an das Carnegie Institute of Technology in Pittsburgh, das ich im Frühling 1927 mit dem Degree of Bachelor of Science in Mining Engineering verließ. Nach einem Jahre Tätigkeit als Bergingenieur erhielt ich eine Stellung als Instructor of Mechanics an dem Carnegie Institute of Technology. Hier hielt ich Vorlesungen über Technische Mechanik; gleichzeitig erweiterte ich meine Kenntnisse der Mathematik und Physik, so daß ich 1931 den Degree of Master of Science erwarb. In demselben Jahre wurde ich zum Assistant Professor of Mechanics befördert. Im Herbst 1932 ging ich an die Eidgenössische Technische Hochschule in Zürich, wo ich mich während der zwei folgenden Jahre ausschließlich mit Mathematik und Physik beschäftigte. Während meines Aufenthalts in Zürich wurde ich namentlich durch Vorlesungen und Seminare der Herren Professoren Hopf, Kienast, Meißner, Polya, Plancherel wesentlich gefördert.

Im zweiten Jahre meines Aufenthalts in Zürich bekam ich ein Exchange Fellowship von dem Institute of International Education, dem ich dafür zu großem Dank verpflichtet bin.

Schließlich möchte ich meinen aufrichtigen Dank an Herrn Professor Hopf aussprechen, der mir die Anregung zu der vorliegenden Arbeit gegeben und mich bei ihrer Ausarbeitung in der liebenswürdigsten Weise unterstützt hat, so daß es für mich eine große Freude war, bei ihm arbeiten zu können.