

Experimentelle Untersuchung der
Spannungsverteilung in freiaufliegenden Balken

Theoretische Untersuchungen über die
Eigenfrequenz parallelogrammförmiger Platten

VON DER
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH
ZUR ERLANGUNG
DER WÜRDE EINES DOKTORS DER
TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN
GENEHMIGTE
PROMOTIONSARBEIT
VORGELEGT VON

RUDOLF BEREUTER

Dipl. Ing. E. T. H.
aus Illnau (Kanton Zürich)

Referent: Herr Prof. Dr. H. Favre
Korreferent: Herr Prof. Dr. H. Ziegler



Zürich 1946 Dissertationsdruckerei AG. Gebr. Leemann & Co.
Stockerstr. 64

Erscheint als No. 3 der
« Publications du Laboratoire de photo-élasticité de la Chaire de
Mécanique en langue française de l'Ecole polytechnique fédérale »
von Herrn Prof. Dr. H. Favre

MEINEN ELTERN
IN LIEBE UND DANKBARKEIT
GEWIDMET

Leer - Vide - Empty

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Vorwort	7
1. Teil: Experimentelle Untersuchung der Spannungsverteilung in freiaufliegenden Balken	
Einleitung	9
§ 1. Meßmethode und Meßapparate	11
§ 2. Beschreibung der Modelle	12
§ 3. Belastungsfälle und Belastungskräfte. Wahl der Punkte, in denen die Spannungen gemessen wurden	15
§ 4. Messungen, Berechnungen und Diagramme	21
§ 5. Theoretische Berechnung der Spannungen	23
§ 6. Besprechung der experimentellen Resultate und Vergleich mit den verschiedenen Theorien	33
§ 7. Schlußbetrachtungen	46
§ 8. Zusammenfassung	48
Anhang	49
Tafeln	50
Tabellen	62
2. Teil: Theoretische Untersuchungen über die Eigenfrequenz parallelogrammförmiger Platten	
Einleitung	69
§ 1. Rekapitulation der wichtigsten Gleichungen der Plattentheorie für kartesisch-rechtwinklige Koordinaten	71
§ 2. Die wichtigsten Gleichungen der Plattentheorie für kartesisch- schiefwinklige Koordinaten	73
§ 3. Die Näherungsmethode von Rayleigh und ihre Anwendung zur Berechnung der Eigenfrequenz der allseitig eingespannten, schiefen Platte	80
§ 4. Die Näherungsmethode von Ritz und ihre Anwendung zur Be- rechnung der Eigenfrequenz der allseitig eingespannten, schiefen Platte	90
§ 5. Die Eigenfrequenz der allseitig eingespannten, schiefen Platte mit einer konzentrierten Einzelmasse in der Mitte	94

	Seite
§ 6. Die Eigenfrequenz der allseitig eingespannten, schiefen Platte mit einer konzentrierten Einzelmasse in der Mitte bei Berücksichtigung der Masse der Platte	100
§ 7. Die Eigenfrequenz der allseitig freiaufliegenden Platte. Lösung nach der Methode von Rayleigh	103
§ 8. Die Differenzenmethode und ihre Anwendung zur Berechnung der Eigenfrequenz der freiaufliegenden, schiefen Platte	104
§ 9. Berechnung der ersten vier Näherungen nach der Differenzenmethode. Diskussion der Resultate	108
§ 10. Schlußbetrachtungen	121
§ 11. Zusammenfassung	122
Anhang	123
Tafeln	124
Ausrechnung der Determinante (76)	127
Literaturverzeichnis	133
Curriculum vitae	136

Vorwort

Die vorliegende Dissertation umfaßt zwei Teile: einen ersten, vorwiegend experimentellen, aus dem Gebiete der Photoelastizität und einen zweiten, rein theoretischen, aus dem Gebiete der Schwingungslehre.

Beide Untersuchungen wurden auf Anregung von Herrn Prof. Dr. H. Favre im Photoelastischen Laboratorium des Lehrstuhles für Mechanik in französischer Sprache an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich ausgeführt.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. H. Favre für sein großes Interesse, das er während der ganzen Zeit dieser Arbeit entgegengebracht hat und für die vielen, guten Ratschläge, bestens danken.

Herrn Prof. Dr. H. Ziegler bin ich für die eingehende Durchsicht, sowie für die wertvolle Kritik dieser Veröffentlichung ebenfalls zu Dank verpflichtet.

Leer - Vide - Empty

1. Teil

Experimentelle Untersuchung der Spannungsverteilung in freiauffliegenden Balken

Einleitung

Der freiauffliegende Balken ist ein weit verbreitetes Konstruktionselement auf dem Gebiet des Maschinenbaues, wie auch beim Brückenbau, Hochbau usw.

Aus Gründen der Materialersparnis wird er sehr oft mit veränderlichem Querschnitt ausgeführt und zwar meistens so, daß seine Breite über die ganze Spannweite konstant gehalten wird und seine Höhe der Belastungsart angepaßt wird.

Sobald es technisch durchführbar ist und es sich wirtschaftlich lohnt, wird der Ingenieur danach trachten, einen *Balken konstanter Randspannung* zu verwenden, da bei diesem das Material am besten ausgenützt wird.

Für den Konstrukteur ist es von großer Bedeutung, zu wissen, was für innere Spannungen auftreten, wie sie über einen Querschnitt verteilt sind und ob die verschiedenen Theorien, die ihm zur Vorausberechnung zur Verfügung stehen, mit den experimentell gemessenen Werten übereinstimmen. Insbesondere wird ihn das Profil des Balkens konstanter Randspannung bei verschiedenen äußeren Belastungen interessieren.

Es wurden bisher nicht viele *freiauffliegende* Balken spannungsoptisch untersucht und dann meistens nur *qualitativ*. *Akira Miura* hat *quantitative* Resultate veröffentlicht [19]¹⁾, die aber nur an Modellen von gerader oder gebrochener Berandung ausge-

¹⁾ Die eingeklammerten Zahlen [] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis der S. 133 u. ff.

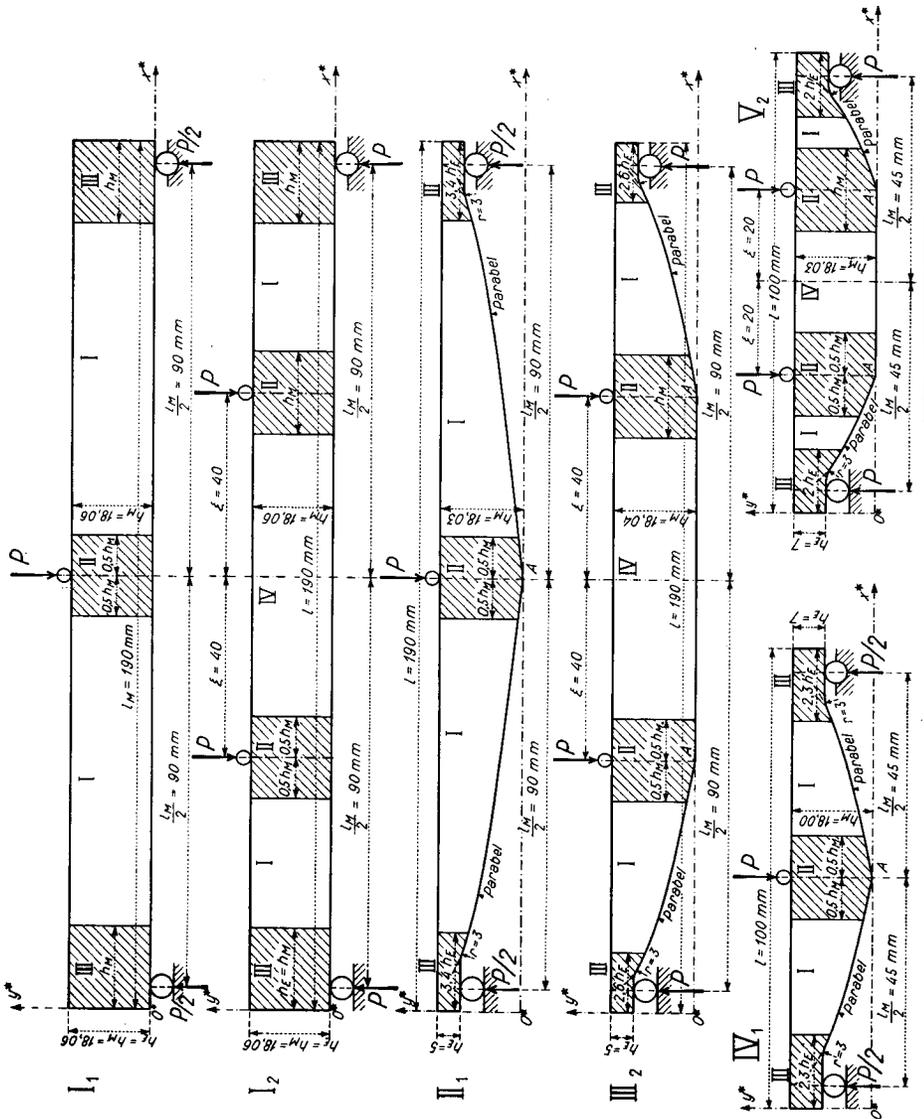


Fig. 1. Die untersuchten Modelle freiauffliegender Balken. Ausdehnung der Zonen I, II, III und IV.

führt wurden (Rechteck-, Trapez- und T-Form). Auch er hat aber den Spannungszustand nicht vollständig bestimmt, sondern hat sich damit begnügt, den Richtungswinkel α der Hauptspannungen (Hauptspannungstrajektorien) und die Differenz der beiden Hauptspannungen $\sigma_1 - \sigma_2$ zu messen. Über die Größe von σ_1 und σ_2 kann er aber aus diesen Messungen allein im allgemeinen nichts Bestimmtes aussagen.

Wir haben uns zur Aufgabe gestellt, die 5 verschiedenen Modelle mit konstanter Querschnittsbreite der Fig. 1 (No. I bis V)²⁾, von denen 4 (No. II bis V) nach der elementaren Festigkeitslehre eine konstante Randspannung aufweisen sollten, vollständig auszumessen und die Ergebnisse mit einigen Theorien zu vergleichen.

Die Untersuchung ist gewissermaßen ein Gegenstück zur Doktorarbeit von M. Robert [17], welche die beidseitig eingespannten Balken mit veränderlichem Querschnitt behandelt (siehe Fig. 5, 6, 7 und Tafel 11 von [17]).

Nachdem wir die Meßmethode kurz erwähnen (§ 1), beschreiben wir die Modelle (§ 2) und die Meßtechnik (§§ 3 und 4). Es folgt die Anwendung verschiedener Theorien zur Berechnung der Spannungen (§ 5). In § 6 unterziehen wir die experimentellen Messungen einer kritischen Prüfung und vergleichen sie mit diesen Theorien. Der § 7 enthält einige Schlußbetrachtungen und § 8 eine Zusammenfassung.

§ 1. Meßmethode und Meßapparate

Die Spannungen wurden nach der rein optischen Methode von H. Favre gemessen [1]. Da sie eingehend in seiner Dissertation [2] und in der Doktorarbeit von M. Robert [17] beschrieben ist, erübrigt sich hier eine nochmalige Erwähnung. Die Apparate werden ebenfalls in [2] und [17] ausführlich behandelt³⁾. Wir können demnach den Leser auf diese zwei Veröffentlichungen verweisen.

²⁾ Der Index₁ bzw. ₂ bei den Balkennummern der Fig. 1 bezeichnet den Belastungsfall 1 oder 2.

³⁾ Vergleiche Fig. 2a und 2b.

Immerhin möchten wir aber festhalten, daß alle Instrumente nach den Abänderungen, die in [18] beschrieben sind, zur vollen Zufriedenheit funktioniert haben, sodaß keine weiteren Verbesserungen angebracht werden konnten, und ferner daran erinnern, daß die rein optische Methode den Vorteil besitzt, die Messungen auf 1 bis 2% der maximalen Hauptspannung genau zu geben, was uns für den Vergleich mit den Theorien sehr zugute kam⁴⁾.

§ 2. Beschreibung der Modelle

Die Fig. 1 zeigt die 5 Modelle, welche untersucht wurden. Sie haben alle dieselbe maximale Höhe $h_M = 18$ mm und sind in bezug auf ihre Mitte symmetrisch. Hinsichtlich ihrer Länge können wir sie in 2 Gruppen einteilen:

a) Modell No. I, II und III mit einer Gesamtlänge von je $l = 190$ mm, Spannweite $l_M = 180$ mm, Verhältnis $h_M/l_M = 1/10$.

b) No. IV und V mit einer Gesamtlänge von je $l = 100$ mm, Spannweite $l_M = 90$ mm, $h_M/l_M = 1/5$.

Der Balken I besitzt eine konstante Höhe $h_M = 18$ mm, während die untere Berandung von II bis V teils durch 2 Parabeln allein (II und IV), teils durch 2 Parabeln mit geraden Mittelstücken (III und V) gebildet wird. Die Parabeln haben alle ihre Scheitel auf dem oberen Rand, senkrecht über den Auflagern, und ihre Achse fällt mit ihm zusammen. Die Parabeln sind weiter durch die Punkte A der Fig. 1 vollständig bestimmt. Wir werden später sehen, daß diese Modelle nach der Theorie der elementaren Festigkeitslehre in bezug auf senkrechte Querschnitte, für die verschiedenen Belastungszustände eine konstante Randspannung aufweisen sollten⁵⁾.

Da die Enden dieser Modelle nicht die Höhe null besitzen können, haben wir ihnen eine Höhe h_E gegeben, die für II und III 5 mm beträgt und für IV und V 7 mm. Der Übergang zwischen

⁴⁾ Die Genauigkeit der Meßmethode hat uns erlaubt, einen systematischen Fehler von 3,7 % in einer Theorie festzustellen (vergleiche § 6, S. 42).

⁵⁾ Siehe § 5, S. 25.

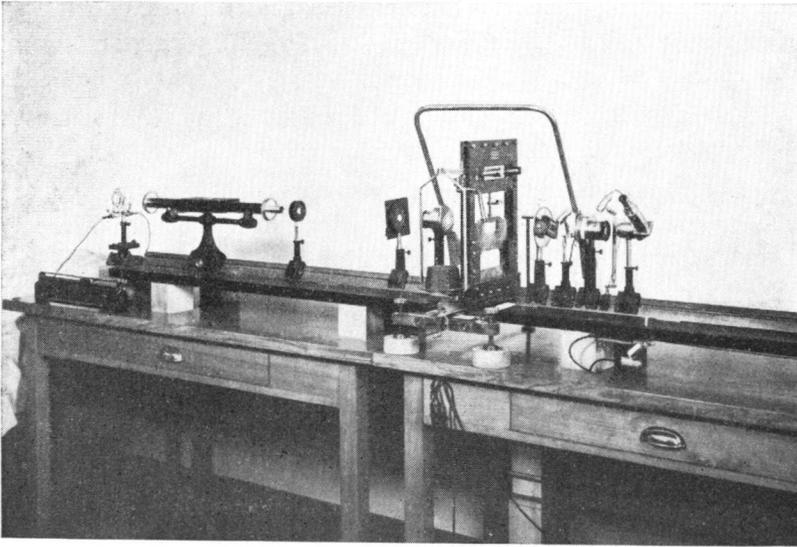


Fig. 2a. Apparate für die Messung von α und δ_3 .

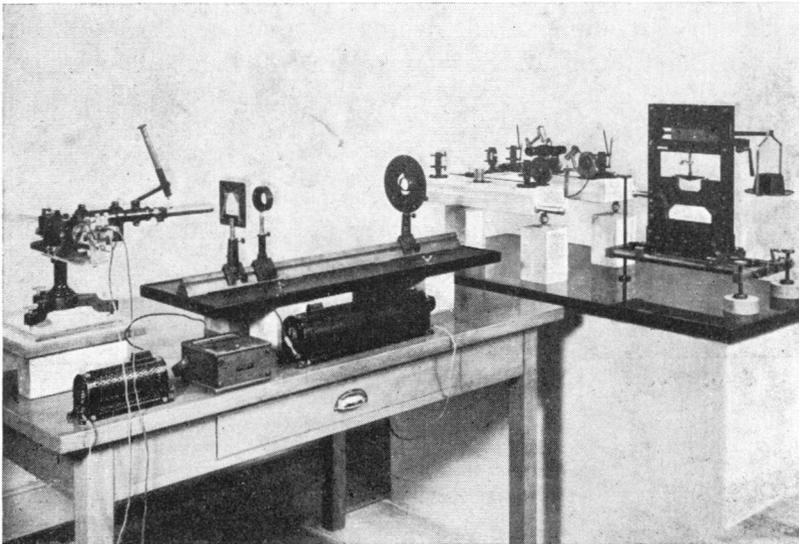


Fig. 2b. Apparate für die Messung von δ_1 und δ_2 (Interferometer).

den Teilstücken gleicher Höhe an den Enden h_E und den Parabeln wurde durch einen Kreisbogen ausgeführt, dessen Radius $r = 3$ mm beträgt.

Für alle Balken haben wir ein rechtwinkliges Achsensystem ($O^*x^*y^*$) gewählt (siehe Fig. 1).

Die Modelle sind aus optischem Glas und wurden durch die *A. G. Kern & Cie.* in Aarau geschliffen. Wir möchten diese Gelegenheit ergreifen, um dieser Firma für ihre sehr sorgfältige Arbeit unseren besten Dank auszusprechen.

Die vorderen und hinteren Hauptflächen der Modelle sind auf $\pm 1'$ planparallel. Ihr Dicke ist konstant und beträgt $e = 9,413$ mm. Die Berandung wurde mit einer Genauigkeit von $\pm 0,1$ mm ausgeführt. Wir konnten keine latenten Spannungen feststellen.

Aus der gleichen Glasplatte, zwischen den Modellen, haben wir 5 quaderförmige Probestäbe von je $6 \times 10 \times 30$ mm Kantenlänge herausschneiden lassen, die zur Bestimmung der optischen Koeffizienten a, b, c des Glases verwendet wurden.

Die untenstehende Tabelle gibt für die verschiedenen Probestäbe den Wert dieser Koeffizienten an, sowie den Mittelwert, der für die Berechnung der Spannungen in den Balken angenommen wurde.

Tabelle 1.

Werte der Koeffizienten a, b, c für die grüne Spektrallinie des Quecksilberdampfes ($\lambda = 5461$ Å).

Probestab No.	a	b	c
	$\lambda : \text{kgmm}^{-1}$	$\lambda : \text{kgmm}^{-1}$	$\lambda : \text{kgmm}^{-1}$
1	+ 0,03612	+ 0,08609	— 0,04997
2	+ 0,03559	+ 0,08561	— 0,05002
3	+ 0,03486	+ 0,08475	— 0,04989
4	+ 0,03448	+ 0,08426	— 0,04978
5	+ 0,03557	+ 0,08533	— 0,04976
Mittelwerte = Werte für die Spannungsbe- rechnung	+ 0,03532 ⁴	+ 0,08520 ⁸	— 0,04988 ⁴

§ 3. Belastungsfälle und Belastungskräfte. Wahl der Punkte in denen die Spannungen gemessen wurden

Belastungsfälle. Wir haben 2 Belastungsarten angebracht, die aber beide in bezug auf die Mitte der Modelle symmetrisch sind (siehe Fig. 1) ⁶⁾.

1. Eine nach unten gerichtete Einzelkraft P , die in der Mitte des oberen Randes senkrecht zu ihm angreift (No. I₁, II₁ und IV₁).

2. Zwei gleichgroße nach unten gerichtete Kräfte P, P im Abstand ξ von der Mitte des oberen Randes, die senkrecht auf ihn wirken (No. I₂, III₂ und V₂).

$$\xi = 40 \text{ mm für } I_2 \text{ und III}_2, \xi = 20 \text{ mm für } V_2.$$

Die Tabelle 2 gibt die Anzahl der Kräfte P und ihre Größe für die verschiedenen Profile an. Die Reaktionen in den Lagern links und rechts sind gleich groß (P für I₂, III₂ und V₂; $P/2$ für I₁, II₁ und IV₁).

Tabelle 2.

Modell No.	Anzahl der Kräfte P	Größe der Kraft P kg	Reaktion in den Lagern kg	Anzahl der Meßpunkte
I ₁	1	24,83	12,42	88
I ₂	2	22,44	22,44	97
II ₁	1	19,81	9,91	100
III ₂	2	17,43	17,43	110
IV ₁	1	31,84	15,92	91
V ₂	2	22,94	22,94	95

Anbringen der Kräfte. Die Modelle wurden nacheinander in den großen Belastungsrahmen der Laboratoriums gelegt (siehe Fig. 2c). Die Gewichtssteine übertragen dort ihre Kraft durch einen horizontalen Hebel auf einen senkrechten, in seiner Länge regulierbaren Stahlstift, der mit einer sphärischen Wasserwaage ausgestattet ist (vergleiche Fig. 3 und 4). Mit ihr kann man sich seiner senkrechten Lage, die mit der Kraftrichtung zusammenfällt, vergewissern.

⁶⁾ Siehe Fußnote 2.

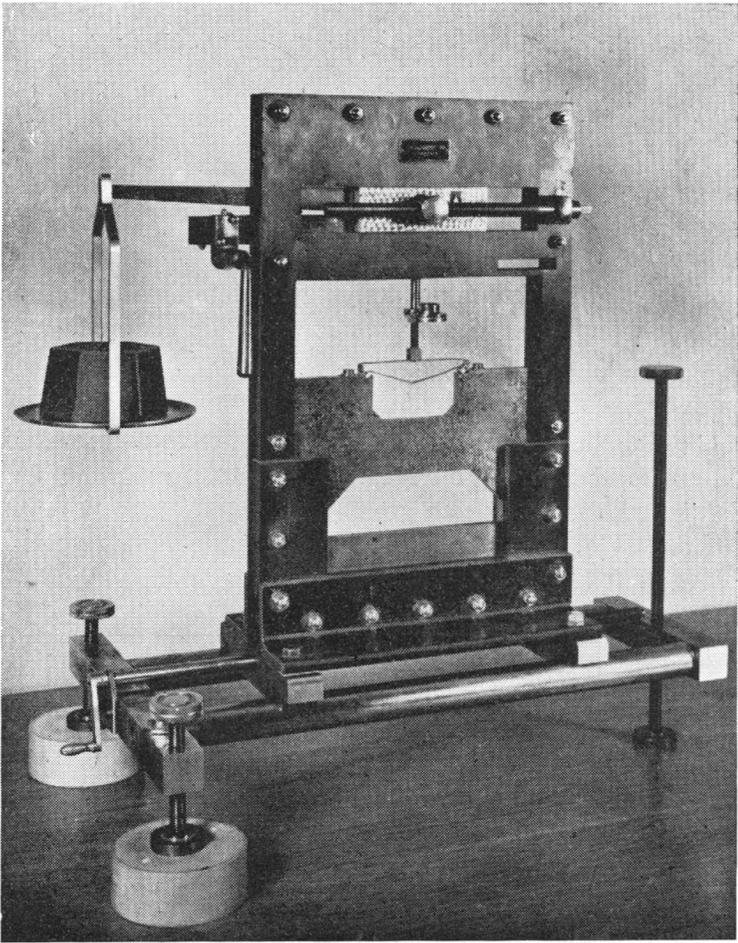


Fig. 2c. Belastungsrahmen mit Modell IV₁.

Beim Belastungsfall 1 (Fig. 2c, 2d und 3) mündet der Stift am unteren Ende in einen Würfel von 10 mm Kantenlänge aus. In die Basisfläche des Würfels ist in der Mitte ein Aluminiumzylinder von 3 mm Durchmesser und 10 mm Länge so in sie eingelassen, daß die Achse des Zylinders mit der Basisfläche des Würfels zusammenfällt und senkrecht zu zwei Kanten steht. Der

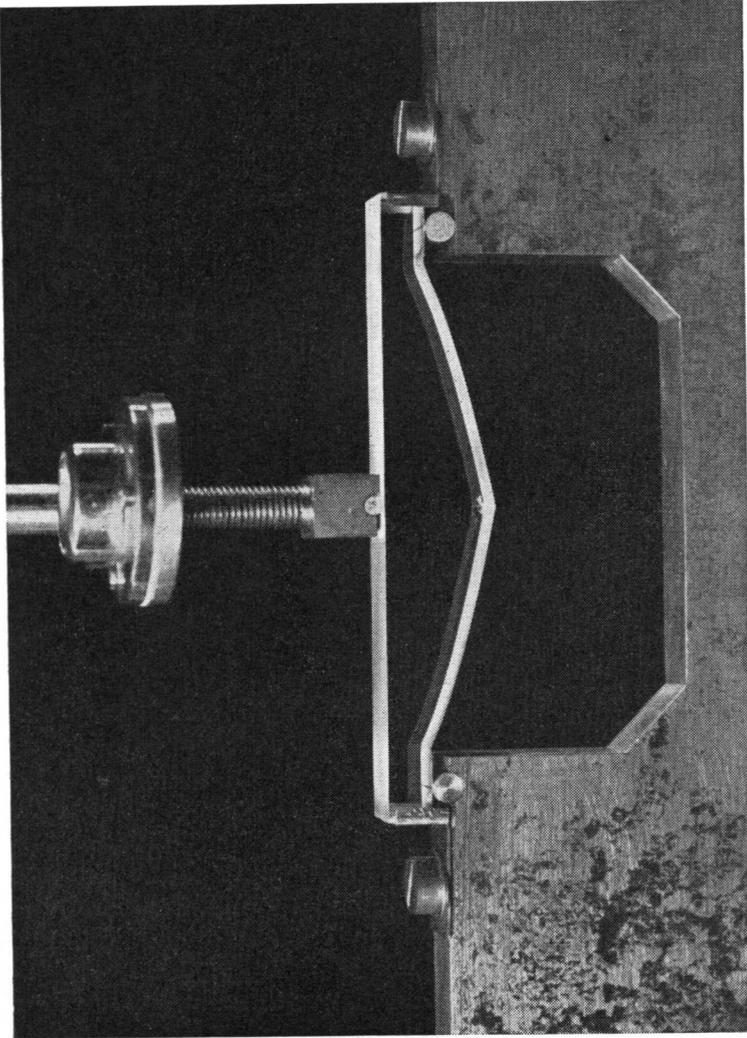


Fig. 2d. Modell IV ohne Lochblende, Belastungsfall 1.

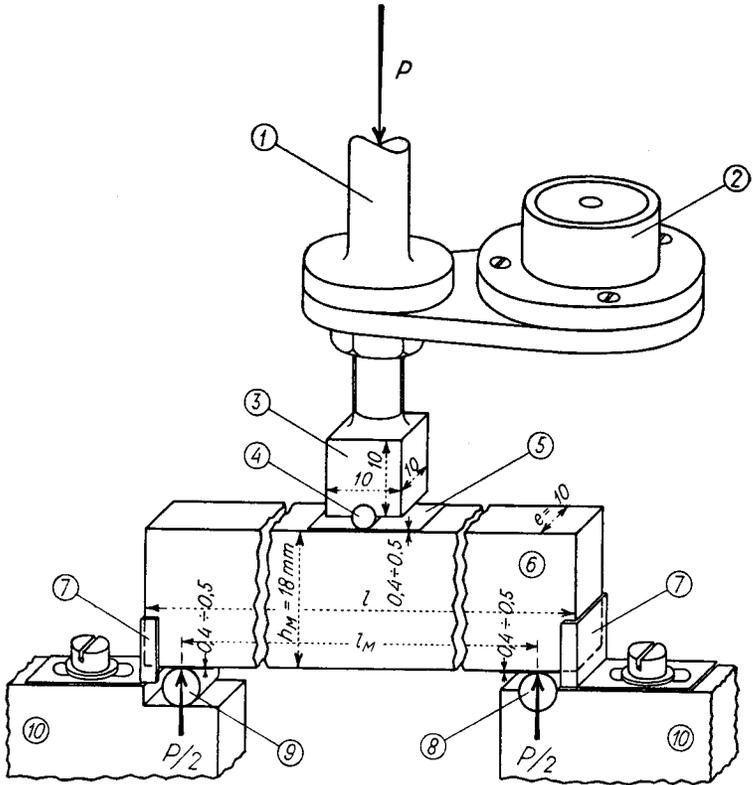


Fig. 3. Belastungsfall 1.

- | | |
|--|---|
| 1 = Stahlstift | 7 = Modellhalter, Messingblech |
| 2 = Sphärische Wasserwaage | 8 = Lagerrolle, Aluminium,
Ø = 5 mm, in den Lagerblock
eingeschoben |
| 3 = Würfel | 9 = Lagerrolle, Aluminium,
Ø = 5 mm, frei beweglich |
| 4 = Aluminiumrolle Ø = 3 mm,
in den Würfel eingeschoben | 10 = Lagerblock |
| 5 = Papierstreifen, Dicke =
0,4 ÷ 0,5 mm | |
| 6 = Modell, optisches Gußglas | |

kleine Zylinder steht also um 1,5 mm über den Würfel hervor und wird senkrecht zu den planparallelen Flächen der Modelle gestellt. Die Kraft P wird dort auf eine Strecke von 10 mm verteilt und somit auf die ganze Dicke e übertragen. Unter der Aluminiumrolle wurde ein Papierstreifen von 0,4 bis 0,5 mm Dicke auf das Glas geklebt, um die Kraftverteilung noch weiter zu verbessern.

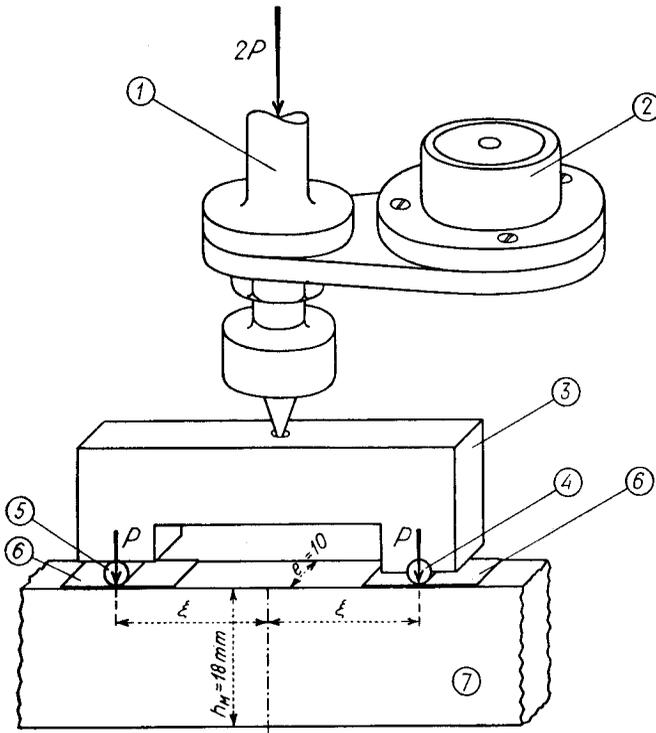


Fig. 4. Belastungsfall 2.

- | | |
|--|---|
| 1 = Stahlstift | 5 = Aluminiumrolle, $\varnothing = 3$ mm,
frei beweglich |
| 2 = Sphärische Wasserwaage | 6 = Papierstreifen,
Dicke = $0,4 \div 0,5$ mm |
| 3 = Zwischenstück | 7 = Modell, optisches Gußglas |
| 4 = Aluminiumrolle, $\varnothing = 3$ mm,
in das Zwischenstück eingeschoben | |

Beim Belastungsfall 2 (Fig. 4) läuft der Stahlstift in eine konische Spitze aus, welche in der Mitte der oberen Seite eines Zwischenstückes in einer kleinen Wanne angreift. Das Zwischenstück ist U-förmig ausgebildet mit der Öffnung nach unten und dient dazu, die Einzelkraft des Stiftes in zwei gleich große, parallele Kräfte im Abstand ξ von der Mitte zu teilen. Der eine Schenkel, der um 1,5 mm kürzer ist als der andere, hat unten eine ebene Begrenzungsfläche. Dort wird eine Aluminiumrolle von

3 mm Durchmesser und 10 mm Länge zwischen ihm und dem Glase frei beweglich angebracht. Im anderen Schenkel ist ein gleicher Zylinder wie bei Belastungsfall 1 eingeschoben. Zwischen ihnen und dem Glase wurden wieder Papierstreifen der oben erwähnten Dicke angeklebt. Diese Anordnung wurde getroffen, um eine horizontale Komponente der Kraft möglichst auszuschalten.

Die Lager. Zwei Aluminiumzylinder von 5 mm Durchmesser und 10 mm Länge bilden die beiden Lager. Wieder ist ein Zylinder auf einer ebenen Fläche des Lagerblockes frei beweglich, der andere in ihn eingeschoben, um auch hier einen Horizontalschub zu vermeiden⁷⁾. Die Papierstreifen durften natürlich auch bei den Lagern nicht fehlen.

Zwei U-förmige Modellhalter aus 0,5 mm dickem Messingblech, welche die beiden Enden umfassen, sorgten dafür, daß die Gläser in ihrer Lage blieben. Wir ließen einen kleinen Spielraum von einigen $\frac{1}{10}$ mm zwischen den Haltern und den Gläsern, damit der letzteren Verbiegung unbehindert bliebe.

Wahl der Meßpunkte. Auf jedes Modell haben wir eine Blende aus Aluminiumblech von 0,35 mm Dicke geklebt, in die kreisförmige Löcher von 0,6 mm Durchmesser gebohrt waren und welche dazu dienten, die Lage des polarisierten Lichtstrahles in bezug auf das Glas zu fixieren.

Wir haben den üblichen Durchmesser von 0,5 mm um 0,1 mm erhöht, weil sich die Blende in ihrer Ebene bei jeder Belastung nach unten verschob und wir nicht mehr den ganzen Lichtstrahl am Interferometer erfassen konnten, was sofort die Schärfe der Interferenzstreifen stark herabsetzt. Diese Verschiebung trat aus zwei Gründen ein:

1. Nachgiebigkeit der Papierstreifen unter den Lagern,
2. Durchbiegung des Balkens, welche aber in keinem Falle 0,2 mm überstieg. Die Blenden wurden überdies im *belasteten*

⁷⁾ Wir hatten nach der Messung die Möglichkeit festzustellen, ob eine Horizontalkraft auftrete. Wir werden später sehen, daß dies bis auf Meßfehler nicht der Fall war.

Zustand in der Mitte des Meßbereiches angeklebt. Wir haben dadurch erreicht, daß der Mittelpunkt der Löcher in diesem Zustand möglichst genau mit den gewünschten Koordinaten zusammenfiel (Differenz ca. $\frac{1}{10}$ mm).

Die 5. Kolonne der Tabelle 2 gibt die Anzahl der Löcher jeder Blende an. Die Lage ihrer Mittelpunkte sieht man auf den Tafeln 1, 3, 5, 7, 9 und 11 und ihre Koordinaten sind in den Tabellen I bis VI im Anhang angegeben.

Die Meßpunkte wurden auf Geraden parallel zu den y^* - und x^* -Achsen verteilt, was einerseits die Messungen erleichterte (wenige Höheneinstellungen, die nur einmal für eine horizontale Meßreihe erfolgen mußte), andererseits die Zeichnung der Spannungsdiagramme für senkrechte Querschnitte ohne besondere Interpolation ermöglichte.

Da sowohl die Belastungen, wie auch die Modelle in bezug auf ihre Mitte symmetrisch sind, konnten wir uns bis auf einige Kontrollen mit der Ausmessung der einen Hälfte begnügen.

§ 4. Messungen, Berechnungen und Diagramme

Messungen. Jeder Wert von α , δ_3 , δ_1 und δ_2 wurde zweimal gemessen⁸⁾. Wir haben jedes Mal die Messung von δ_1 , δ_2 und δ_3 wiederholt, wenn der absolute Betrag von $\delta_1 - \delta_2 - \delta_3 > 0,03$ Wellenlängen betrug ($\lambda = 5461 \text{ \AA}$). Dieser Toleranz entspricht nach der Gaußschen Ausgleichsmethode ein mittlerer Fehler der Spannungen σ_1 und σ_2 von $\mu_{\sigma_1} = \mu_{\sigma_2} = \pm 0,01 \text{ kg/mm}^2$ und ein maximaler Fehler von $\pm 0,03 \text{ kg/mm}^2$.

Die *Berechnung* der Spannungen wurde mit dem Rechenschieber nach Gl. (3) von [17] ausgeführt⁹⁾. Sie wurde erleichtert durch den Umstand, daß alle Modelle gleiche Koeffizienten a , b , c und gleiche Dicke e besaßen. Die Meßwerte von α , σ_1 und σ_2 sind in den Tabellen I bis VI zusammengestellt.

⁸⁾ Diese Reihenfolge entspricht derjenigen der Messungen.

⁹⁾ Für mehr Einzelheiten siehe Gl. (13) und (15) von [2].

Diagramme. Sie umfassen:

a) *Die Hauptspannungstrajektorien* (Tafel 1, 3, 5, 7, 9 und 11). Diese wurden aus den Hauptrichtungen konstruiert (Winkel α). Zuerst wurden die Richtungskreuze auf einem Blatt Papier aufgetragen und dann die Trajektorien so eingezeichnet, daß die Kreuze immer die Tangenten bildeten. Eine Familie von Trajektorien wurde durch voll ausgezogene Striche dargestellt (im allgemeinen Drucktrajektorien), die andere gestrichelt (im allgemeinen Zugtrajektorien).

b) *Die Diagramme der Hauptspannungen* (Tafel 1, 3, 5, 7, 9 und 11). Sie enthalten:

1. Die *Diagramme der σ_1 bzw. σ_2* für die senkrechten Meßreihen. Wir haben meistens nur die größere der beiden Hauptspannungen aufgetragen und zwar eine Druckspannung durch einen Pfeil, dessen Spitze gegen das Flächenelement hin, eine Zugspannung durch einen Pfeil, dessen Spitze vom Flächenelement weg gerichtet ist.

2. Die *Diagramme der Randspannungen*. Der Wert dieser Spannungen wurde senkrecht zum Umfang nach innen abgetragen. Der ausgezogene Strich bedeutet Druckspannungen, der unterbrochene Zugspannungen.

c) Die *Diagramme der σ_x , σ_y und τ_{xy}* . Von α , σ_1 und σ_2 ausgehend, haben wir mit den Mohrschen Gleichungen¹⁰⁾

$$\sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha, \quad \sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \cos 2\alpha,$$
$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cdot \sin 2\alpha,$$

σ_x , σ_y und τ_{xy} für ein senkrecht bzw. horizontales Flächenelement berechnet und die Diagramme für einige Querschnitte in

¹⁰⁾ Wir werden die Beziehungen zwischen den Spannungen, welche sich durch den Mohrschen Kreis darstellen lassen, der Einfachheit halber als Mohrsche Gleichungen bezeichnen.

den Tafeln 2, 4, 6, 8, 10 und 12 aufgezeichnet¹¹⁾. Die so erhaltenen Werte von σ_x , σ_y und τ_{xy} werden wir als *gemessene* oder *experimentelle Werte dieser Spannungen* bezeichnen. In diesen Diagrammen sind noch weitere Kurven eingetragen, welche den verschiedenen Theorien entsprechen. Wir werden gleich sehen, wie wir diese Werte gefunden haben.

§ 5. Theoretische Berechnung der Spannungen

Im letzten Paragraphen wurden für die verschiedenen Modelle die effektiv auftretenden Spannungen beschrieben. In diesem Abschnitt wird versucht, diese Spannungen mit Hilfe verschiedener Theorien theoretisch zu berechnen, und im nächsten Paragraphen soll auf Grund eines Vergleichs dieser Werte mit den Messungen die Genauigkeit der verschiedenen Theorien bestimmt werden.

I. Elementare Festigkeitslehre

Wir erinnern an die Voraussetzungen dieser Theorie:

1. Voraussetzung: Gültigkeit des *Hookschen Gesetzes*: Die Spannungen sind proportional zu den Dehnungen.
2. Hypothese: Lineare Verteilung der Normalspannungen in Richtung der Stabachse über den Querschnitt.
3. Hypothese: Für den prismatischen Balken (parallele Ränder) und gerader oder leicht gekrümmter Achse treten keine Normalspannungen zwischen den Fasern auf.

Aus diesen Hypothesen folgt, daß die im Querschnitt übertragenen Normalspannungen in Richtung der Stabachse σ_x dem Abstand von der neutralen Achse proportional sind. Die dritte Hypothese sagt aus, daß keine σ_y -Spannungen vorhanden sind:

¹¹⁾ Die Werte der durch Planimetrieren der Diagramme erhaltenen Integrale $\int \sigma_x df$ und $\int \tau_{xy} df$ sind auf den Tafeln angegeben. Das erste Integral sollte überall null sein, das zweite gleich der Querkraft Q . Man sieht, daß dies auf ± 2 kg der Fall ist. Dieser Toleranz entspricht in den erwähnten Diagrammen eine Fläche von $\pm 5,9$ mm², was eine scharfe Kontrolle der Spannungen darstellt.

$\sigma_y = 0$. Aus zahlreichen Versuchen wissen wir, daß diese Theorie für obige Voraussetzungen sehr schön stimmt.

Wir können diese Theorie auf zwei verschiedene Arten anwenden:

a) *Spannungsberechnung in bezug auf senkrechte Querschnitte*. Wir berechnen die Spannungen nach den bekannten Formeln:

$$\sigma_x = \frac{M}{J} \cdot y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{Q \cdot S}{e \cdot J}.$$

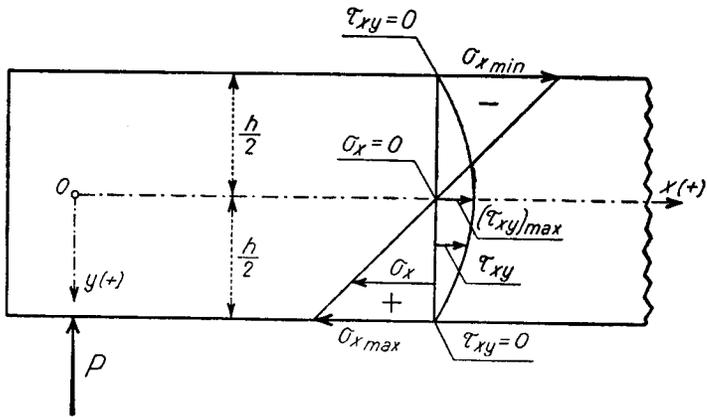


Fig. 5.

Darin bedeutet x eine horizontale Achse in der halben Höhe des Querschnittes, y eine zur x -Achse senkrechte Achse, J das Trägheitsmoment des rechteckigen Querschnittes, F die Fläche, e die Dicke, S das statische Moment desjenigen Teiles des Querschnittes, welcher sich außerhalb des betrachteten Punktes befindet, M das Biegemoment und Q die Querkraft.

Nach dieser Theorie sind die σ_y überall null, während die σ_x an das Moment gebunden sind; wo dieses null ist, sind auch die $\sigma_x = 0$ (Teile der Profile außerhalb der beiden Lager).

Die τ_{xy} sind durch die Querkraft bedingt; wo diese nicht vorhanden ist, sind auch die $\tau_{xy} = 0$ (Teile zwischen den beiden Kräften P, P der Profile I_2 , III_2 und V_2 und Gebiete außerhalb der beiden Lager).

Bei den Modellen I_1 und I_2 ist unter der Voraussetzung $y = \text{konst.}$, σ_x proportional dem Moment. Die Höhe h des Querschnittes ist bei diesen Profilen konstant und damit auch J . Insbesondere ist bei I_1 und I_2 die Randspannung σ_{xR} in direktem Verhältnis zu M .

Bei den anderen Modellen II_1 , III_2 , IV_1 und V_2 ist die Randspannung konstant, die kleinen Gebiete gleicher Höhe an den Enden h_E mit den Übergängen zu den Parabeln ausgenommen.

In der Tat ist in den parabolischen Teilen von II_1 , III_2 , IV_1 und V_2 :

$$M = \text{prop. } x, \quad h = \text{prop. } x^{1/2}, \quad J = \text{prop. } h^3 = \text{prop. } x^{3/2}.$$

Demnach wird dort:

$$\sigma_{xR} = \frac{M}{J} \cdot y_R = \frac{M}{J} \cdot \frac{h}{2} = \text{prop. } \frac{x}{x^{3/2}} \cdot x^{1/2} = \text{konst.}$$

Wir sehen also, daß wir es bei diesen Profilen, bei Anwendung der elementaren Festigkeitslehre in bezug auf senkrechte Querschnitte mit freiaufliegenden Balken konstanter Randspannung zu tun haben.

Die Verteilung der σ_x über den Querschnitt ist linear, mit $\sigma_x = 0$ für $y = 0$, während diejenige der τ_{xy} parabolisch verläuft mit dem maximalen Wert der Schubspannungen $(\tau_{xy})_{\max}$ in der Mitte des Querschnittes. τ_{xy} ist 0 für $y = \pm h/2$. Diese Verteilung wird vom statischen Moment S verlangt, dessen Wert für rechteckige Querschnitte beträgt:

$$S = \frac{e}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Unter der Voraussetzung $Q = \text{konst.}$ ist $(\tau_{xy})_{\max} = \text{konst.}$ für $h = \text{konst.}$, und $(\tau_{xy})_{\max} = \text{prop. } x^{-1/2}$ für die parabolischen Teile der Profile. Dort ist nämlich:

$$S_{\max} = (S)_{y=0} = \text{prop. } h^2 = \text{prop. } x, \quad J = \text{prop. } h^3 = \text{prop. } x^{3/2}.$$

Demnach wird:

$$(\tau_{xy})_{\max} = \frac{Q \cdot S_{\max}}{J \cdot e} = \text{prop. } \frac{x}{x^{3/2}} = \text{prop. } x^{-1/2}.$$

Wir haben die Spannungen σ_x und τ_{xy} , welche uns diese Theorie liefert, für alle Profile berechnet, und die entsprechenden Diagramme in die Tafeln 2, 4, 6, 8, 10 und 12 eingezeichnet (gestrichelte Linien), die parabolischen Teile der Profile ausgenommen, wo nur die τ_{xy} aufgetragen wurden.

Wir können hier gleich bemerken, daß die *Gebiete konstanter Höhe h die Voraussetzungen der elementaren Festigkeitslehre weitgehend erfüllen.*

Wie verhält es sich aber mit den *parabolischen Teilen?*

Dort wird die 3. Hypothese der elementaren Festigkeitslehre insofern verletzt, als die Ränder nicht mehr parallel sind, und demnach die σ_y -Spannungen nicht mehr überall 0 sein können.

Eine einfache Überlegung zeigt uns sofort, daß diese elementare Theorie dort nicht mehr stimmen kann.

Betrachten wir zu diesem Zweck das Gleichgewicht eines unendlich kleinen Elementes am unteren Rande, das durch ihn und je einer Fläche parallel zur xz - und zur yz -Ebene gebildet wird:

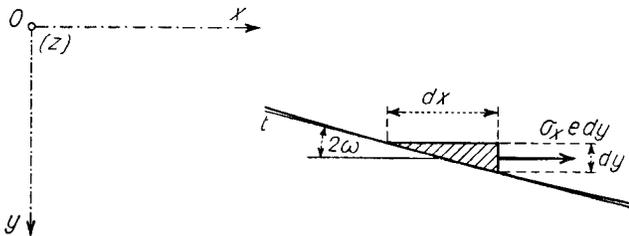


Fig. 6.

Auf dieses Element wirkt nur eine σ_x -Spannung.

In der Tat ist nach der elementaren Festigkeitslehre in bezug auf senkrechte Querschnitte für den unteren Rand:

$$\sigma_{xR} = \frac{M}{J} \cdot y_R = \frac{M}{J} \cdot \frac{h}{2}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0, \quad \sigma_y = 0,$$

und wir sehen sofort, daß das kleine betrachtete Element der Fig. 6 unter der Wirkung von $\sigma_x \cdot e \cdot dy$ allein nicht im Gleichgewicht sein kann. Dies beweist, daß diese Theorie für den unteren, geneigten Rand nicht stimmt.

Damit das Gleichgewicht der Kräfte in Richtung der x -Achse erfüllt ist, muß längs dx eine τ_{yx} -Spannung auftreten. Ist ein τ_{yx} vorhanden, so wissen wir aus dem Satz der zugeordneten Schubspannungen, daß auch ein τ_{xy} längs dy wirkt. Um endlich auch das Gleichgewicht in Richtung der y -Achse herzustellen, muß an dx eine Spannung σ_y angreifen.

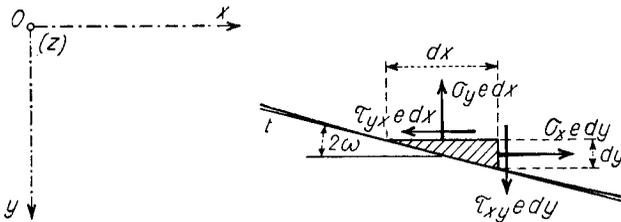


Fig. 7.

Es ist aber denkbar, daß die elementare Festigkeitslehre dennoch ganz ordentlich stimmt, besonders da, wo die Tangenten t an die Parabeln mit der horizontalen Richtung einen *kleinen Winkel* 2ω einschließen. Um uns ein Bild von der Größe dieses Winkels machen zu können, haben wir in der nächsten Tabelle die minimalen und maximalen Beträge von 2ω , welche bei den Modellen mit parabolischer Berandung auftreten, zusammengestellt.

Tabelle 3.

Modell No.	$(2\omega)_{min}$	$(2\omega)_{max}$
II ₁	5°43'	18°34'
III ₂	10°12'	29°41'
IV ₁	11°19'	25°22'
V ₂	19°46'	40°26'

b) Die zweite Anwendung der elementaren Festigkeitslehre besteht darin, die Spannungen in bezug auf einen Querschnitt $q-q$ zu berechnen, der mit dem oberen und unteren Rand des Profils gleiche Winkel einschließt.

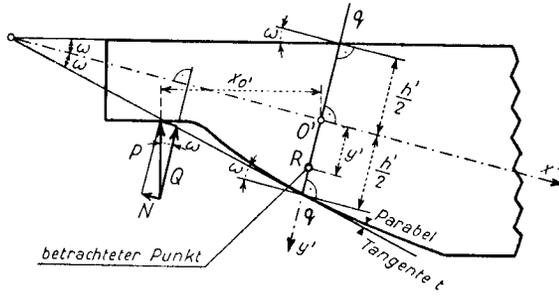


Fig. 8.

Durch einen betrachteten Punkt R legen wir also denjenigen Querschnitt $q-q$, der mit den beiden Rändern des Modells gleiche Winkel einschließt und definieren ein neues Achsensystem $O'x'y'$ nach der Fig. 8:

Nullpunkt O' in der halben Höhe des Querschnittes $q-q$, x' -Achse senkrecht zu $q-q$ durch O' , y' -Achse in der Richtung $q-q$ ¹²⁾.

Nach der Fig. 8 wird:

$$M' = P \cdot x_0', \quad Q' = P \cdot \cos \omega, \quad N' = P \cdot \sin \omega.$$

Darin bedeutet x_0' den horizontalen Abstand von der Lagerreaktion P zum Schwerpunkt O' des Querschnittes $q-q$.

Die Spannungen werden:

$$\sigma_{x'} = \frac{N'}{F} + \frac{M'}{J} \cdot y', \quad \sigma_{y'} = 0, \quad \tau_{x'y'} = \frac{Q' \cdot S}{e \cdot J}.$$

Die Größe von h' , y' und x_0' kann für jeden betrachteten Punkt R aus den geometrischen Bedingungen bestimmt werden. Da aber die Gleichungen ziemlich kompliziert werden, vor allem dann, wenn wir die Krümmung des unteren Randes mitberücksichtigen wollen, haben wir es vorgezogen, diese Größen aus einer Zeichnung direkt abzulesen.

Diese Spannungen wurden nur für je einen solchen Querschnitt $q-q$ der parabolischen Teile der Balken II_1 , III_2 , IV_1 und

¹²⁾ Der geometrische Ort aller Punkte O' bildet die *Achse des parabolischen Profiles*; die x' -Achse ist aber *nicht* Tangente an diese Kurve.

V_2 berechnet und in die Tabelle 5 und die Fig. 16, 17, 18 und 19 gestrichelt eingetragen.

Die Anwendung der elementaren Festigkeitslehre in bezug auf Querschnitte $q-q$ kann aber aus den bereits unter a) besprochenen Gründen auch nicht streng gültig sein. Es ist zu erwarten, daß sie bessere Resultate liefern wird als die Berechnung der Spannungen für senkrechte Querschnitte, denn der Winkel zwischen den Rändern und der Achse x' ist diesmal nur ω , währenddem er vorher 0 und 2ω betrug.

II. Theoretische Berechnung der Spannungen in den parabolischen Teilen mit Hilfe einer Airyschen Spannungsfunktion

Akira Miura hat in einer seiner Untersuchungen den Fall eines keilförmigen Trägers mit einer Kraft senkrecht zu einer Kante gelöst [19]. Er hat zu diesem Zweck Polarkoordinaten r, Φ eingeführt und solche partikuläre Lösungen der Airyschen Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ superponiert, daß er die gewünschten Randbedingungen erhielt¹³⁾.

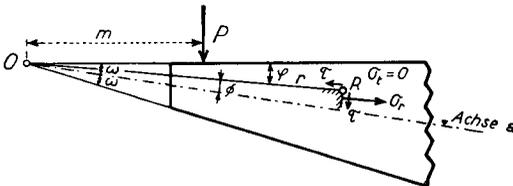


Fig. 9.

Die Spannungen sind nach dieser Theorie:

$$\sigma_r = \frac{2P}{r} \cdot \left\{ \frac{\cos \omega \sin \Phi}{2\omega - \sin 2\omega} - \frac{\sin \omega \cos \Phi}{2\omega + \sin 2\omega} \right\} + \frac{2Pm}{r^2} \cdot \left\{ \frac{\sin 2\Phi}{2\omega \cos 2\omega - \sin 2\omega} \right\},$$

$$\sigma_t = 0, \quad \tau = \frac{Pm}{r^2} \cdot \left\{ \frac{\cos 2\Phi - \cos 2\omega}{2\omega \cos 2\omega - \sin 2\omega} \right\}.$$

¹³⁾ F bedeutet hier die Airysche Spannungsfunktion, Δ den Laplace'schen Operator.

In obiger Figur und den Gleichungen bedeuten ¹⁴⁾ 0 die Keilspitze, r, ϕ die Polarkoordinaten eines betrachteten Punktes R , φ den Winkel zwischen dem Strahl r und der horizontalen Richtung, m den Abstand von der Kraftangriffsstelle bis 0 , ω den halben Öffnungswinkel des Keiles und P die Kraft.

Die so berechneten Spannungen $\sigma_r, \sigma_t = 0$ und τ beziehen sich auf ein Flächenelement, das senkrecht bzw. parallel zu r steht.

Diese Theorie ist nur in einer Zone streng gültig, die in einer gewissen Entfernung von der Kraftangriffsstelle liegt.

Wir können diese Theorie wieder auf zwei verschiedene Arten anwenden:

- a) *Indem wir senkrechte Querschnitte zugrunde legen.*

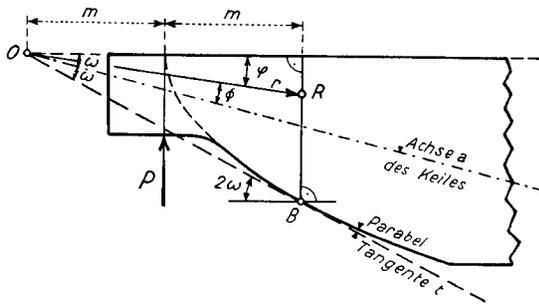


Fig. 10.

Durch den betrachteten Punkt R ziehen wir eine Senkrechte. In ihrem Schnittpunkt B mit der Parabel errichten wir die Tangente t an diese und sagen nun, daß der obere Rand des Modelles und die Tangente t in B die beiden Keilschenkel des Trägers bilden sollen (in Fig. 10 gestrichelt gezeichnet). Die Achse a des Keiles ist die Winkelhalbierende der beiden Keilschenkel. Wir ersetzen also mit anderen Worten die Parabel durch ihre Tangente t in B und können so die Spannungen nach den Gleichungen des keilförmigen Trägers berechnen. Nur müssen wir hier für jeden senkrechten Querschnitt

¹⁴⁾ Für die Ableitung dieser Gleichungen verweisen wir den Leser auf die erwähnte Abhandlung [19].

eine andere Tangente nehmen, während dies beim Keil nicht der Fall ist. Die Größen m , r , φ , Φ und ω folgen ohne weiteres aus den geometrischen Bedingungen.

b) Die zweite Anwendung der Theorie der Airyschen Spannungsfunktion besteht darin, daß man für die Berechnung der Spannungen Querschnitte $q-q$ zugrunde legt, die mit beiden Rändern des Balkens gleiche Winkel einschließen.

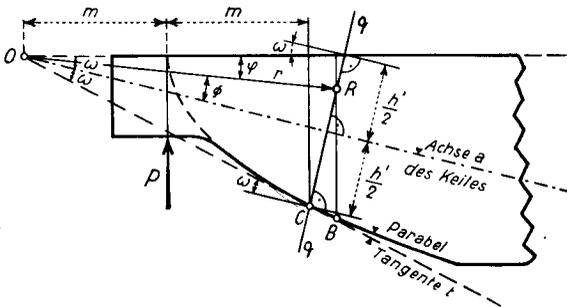


Fig. 11.

Für jeden betrachteten Punkt R ist also der geneigte Querschnitt $q-q$ bestimmt und dadurch auch dessen Schnittpunkt C mit dem unteren Rand des Profils (vergl. Fig. 11). In C errichten wir die Tangente t an die Parabel und sagen, daß diese mit dem oberen Rand des Balkens die beiden Keilschenkel bilden sollen (in Fig. 11 gestrichelt gezeichnet). Die Achse a des Keiles ist wieder die Winkelhalbierende der beiden Keilschenkel, und die Spannungen werden, wie bei a) nach den Gleichungen des keilförmigen Trägers berechnet.

Es gilt jetzt die Frage zu beantworten, was für Fehler wir bei den soeben beschriebenen zwei Anwendungen der Theorie der keilförmigen Träger begangen haben.

1. Die Bedingung, daß die Theorie nur in einer gewissen Entfernung von der Kraftangriffsstelle stimmt, ist für unsere Fälle erfüllt, denn die Zone, für welche diese Theorie angewendet wurde, schließt gerade das Gebiet aus, das unter dem direkten Einfluß der Lagerreaktion steht.

2. Die Kraft P greift bei der Theorie von *Akira Miura* senkrecht zum *oberen* Rand an, währenddem sie bei unseren Fällen die gleiche Wirkungslinie besitzt, aber in entgegengesetzter Richtung auf die *untere* Begrenzung wirkt. Nach dem Prinzip von *de Saint-Venant* ist aber zu erwarten, daß dieser Unterschied in einer gewissen Entfernung von der Kraftangriffsstelle nicht mehr spürbar sein wird.

3. Indem wir die Parabel durch ihre Tangente t ersetzen, haben wir dagegen einen Fehler begangen, der aber wenig ins Gewicht fallen wird.

Von den zwei möglichen Anwendungen a) und b) der Theorie der keilförmigen Träger haben wir nur die unter a) beschriebene ausgewertet und die Spannungen nach ihr berechnet. Sie bietet nämlich den Vorteil, daß für alle Punkte einer senkrechten Meßreihe derselbe Ersatzkeil verwendet werden kann, während bei der Anwendung b) für jeden Punkt einer senkrechten Meßreihe ein anderer Keil genommen werden muß. Zudem führen die beiden Anwendungen auf praktisch dieselben Resultate, wie Vergleichsrechnungen gezeigt haben. Der Grund hierfür liegt darin, daß die Tangente in B und diejenige in C in unseren Fällen einen Winkel bilden, der sehr klein ist (siehe Fig. 11).

Die nach den Gleichungen der keilförmigen Träger berechneten Spannungen σ_r , $\sigma_t=0$ und τ beziehen sich auf ein Flächenelement, das senkrecht bzw. parallel zu r steht (siehe Fig. 9). Um diese Werte mit denjenigen der elementaren Festigkeitslehre für senkrechte Querschnitte und mit denjenigen der Messungen vergleichen zu können, haben wir sie durch die folgenden Mohrschen Gleichungen auf ein senkrecht bzw. horizontales Flächenelement umgerechnet:

$$\sigma_x = \frac{\sigma_r}{2} (1 + \cos 2\varphi) + \tau \sin 2\varphi,$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma_r}{2} (1 - \cos 2\varphi) - \tau \sin 2\varphi,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\sigma_r}{2} \sin 2\varphi + \tau \cos 2\varphi.$$

In diesen Gleichungen bedeutet φ den Winkel zwischen dem Strahl r und der horizontalen Richtung (Fig. 10).

Die so erhaltenen Spannungen σ_x , σ_y und τ_{xy} wurden in die Tafeln 6, 8, 10 und 12 strichpunktiert eingetragen.

§ 6. Besprechung der experimentellen Resultate und Vergleich mit den verschiedenen Theorien

Vorerst sei daran erinnert, daß in den Tafeln 2, 4, 6, 8, 10 und 12 folgende Diagramme der σ_x -, σ_y - und τ_{xy} -Spannungen eingetragen sind:

- α) die gemessenen Werte (ausgezogene Linien),
- β) die theoretischen Werte:
 - I. der elementaren Festigkeitslehre in bezug auf senkrechte Querschnitte (gestrichelte Linien),
 - II. der Theorie der keilförmigen Träger (strichpunktierte Linien).

Die Untersuchung dieser Tafeln und der Tafeln 1, 3, 5, 7, 9 und 11 haben uns dazu geführt, jedes Modell in verschiedene Zonen I, II, III und eventuell IV einzuteilen und diese getrennt zu besprechen. In der Fig. 1 ist die Ausdehnung dieser Gebiete für jeden Balken ersichtlich.

An Hand der Diagramme σ_x , σ_y und τ_{xy} der Tafeln 2, 4, 6, 8, 10 und 12 stellen wir nämlich sofort fest, daß für gewisse Teile der Modelle die ausgezogenen (gemessenen) und die gestrichelten oder strichpunktierten (theoretischen) Linien schön übereinstimmen, für andere gar nicht.

Wir haben es somit mit zwei Kategorien von Zonen zu tun und zwar:

1. Gebiete, in welchen wenigstens eine der in § 5 besprochenen Theorien gültig ist (Zonen I und IV) und
2. Gebiete, wo überhaupt keine Theorie durch die Meßwerte bestätigt wird (Zonen II und III).

Diese Zonen wurden folgendermaßen abgegrenzt: Zuerst haben wir in den Tafeln 2, 4, 6, 8, 10 und 12 die *gemessenen Diagramme der σ_x , σ_y und τ_{xy} mit derjenigen Theorie verglichen, die für den betreffenden Teil die zweckmäßigste ist*, d. h. mit der elementaren Festigkeitslehre auf senkrechte Querschnitte bezogen (§ 5, Ia) für die Gebiete konstanter Höhe h_M und mit der Airyschen Spannungsfunktion (§ 5, IIa) für die Teile der Modelle mit parabolischer Berandung. Wir haben Begrenzungsgeraden parallel zur y^* -Achse dorthin gelegt, wo die Übereinstimmung zwischen Theorie und Messung aufhört (Differenz größer als $\pm 0,05 \text{ kg/mm}^2$) und hierauf kontrolliert, ob sich diese Geraden in den Diagrammen der Hauptspannungstrajektorien (Tafeln 1, 3, 5, 7, 9 und 11) ebenfalls an den Übergangsstellen von den Gebieten großer Regelmäßigkeit zu den Störzonen befinden.

Nachdem die Grenzen der Zonen I, II, III und eventuell IV auf diese Weise festgelegt sind, kann jetzt zur Besprechung der einzelnen Gebiete übergegangen werden.

Zone I.

Sie liegt zwischen der Belastungskraft P und der Lagerreaktion und ist durch den oberen und unteren Rand des Modelles und durch zwei Geraden parallel zur y^* -Achse begrenzt. Ihre Ausdehnung ist in der Fig. 1 für jedes Modell definiert.

Die Zone I ist dadurch charakterisiert, daß wenigstens eine der in § 5 beschriebenen Theorien gültig ist, und zwar:

- a) die elementare Festigkeitslehre in bezug auf senkrechte Querschnitte für die Profile konstanter Höhe I_1 und I_2 ,
- b) die Theorie der Airyschen Spannungsfunktion für die Profile mit parabolischer Berandung II_1 , III_2 , IV_1 und V_2 .

Die Übereinstimmung der Messung mit der Theorie tritt auf den Tafeln 2, 4, 6, 8, 10 und 12 hervor.

Die *Hauptspannungstrajektorien* weisen eine große Regelmäßigkeit und keine Wendepunkte auf.

Die *Diagramme der Hauptspannungen* sind annähernd linear. Die *Randspannungen* nehmen bei I_1 und I_2 linear gegen die Lager ab und sind ungefähr konstant für II_1 , III_2 , IV_1 und V_2 , wobei sie

bei diesen Modellen gegen die Lager hin etwas zunehmen. Das Minimum der Druckspannungen fällt bei II₁, III₂ und V₂ in diese Zone, ist aber äußerst flach.

Die gemessenen σ_x -Spannungen stimmen im allgemeinen gut, die σ_y befriedigend und die τ_{xy} meistens glänzend mit den theoretischen Werten überein.

Tabelle 4.
Spannungen für senkrechte Querschnitte der Zone I.

Modell No.	Koordinaten		Meßwerte			Berechnete Werte					
						Elementare Festigkeitslehre für senkrechte Querschnitte			Airysche Spannungsfunktion für keilförmige Träger		
	x^*	y^*	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}
II ₁	mm	mm	kg/mm ²	kg/mm ²	kg/mm ²	kg/mm ²	kg/mm ²	kg/mm ²	kg/mm ²	kg/mm ²	kg/mm ²
	45,0	18,0	-1,74	±0,00	±0,00	-1,75 ⁵	±0,00	±0,00	-1,76 ⁵	±0,00	±0,00
	"	15,5	-1,03	-0,02	+0,00 ⁵	-1,02 ⁵	"	+0,09	-1,02	±0,00	+0,01
	"	13,0	-0,29 ⁵	-0,00 ⁵	+0,04 ⁵	-0,29	"	+0,13	-0,29	+0,00 ⁵	+0,04 ⁵
	"	10,5	+0,47	+0,03	+0,10 ⁵	+0,44	"	+0,12 ⁵	+0,45	+0,01 ⁵	+0,10 ⁵
	"	8,0	+1,20	+0,05	+0,18 ⁵	+1,17	"	+0,07 ⁵	+1,17	+0,02 ⁵	+0,18
"	6,0	+1,70	+0,04	+0,26	+1,75 ⁵	"	±0,00	+1,74	+0,04	+0,26	
III ₂	35,0	18,0	-1,72	±0,00	±0,00	-1,71 ⁵	±0,00	±0,00	-1,75	±0,00	±0,00
	"	15,5	-1,12	-0,02	+0,01 ⁵	-1,10	"	+0,11 ⁵	-1,10 ⁵	+0,00 ⁵	+0,01 ⁵
	"	13,0	-0,47	±0,00	+0,05	-0,48 ⁵	"	+0,18 ⁵	-0,47 ⁵	+0,01 ⁵	+0,05 ⁵
	"	10,5	+0,13	-0,00 ⁵	+0,12	+0,13	"	+0,20	+0,15	+0,02 ⁵	+0,12
	"	8,0	+0,73 ⁵	+0,03 ⁵	+0,22	+0,74 ⁵	"	+0,16	+0,76	+0,05	+0,20 ⁵
	"	5,5	+1,34	+0,10	+0,31 ⁵	+1,36	"	+0,07 ⁵	+1,35	+0,07 ⁵	+0,31 ⁵
"	4,1	+1,63	+0,08 ⁵	+0,37 ⁵	+1,71 ⁵	"	±0,00	+1,68 ⁵	+0,09	+0,39	
IV ₁	30,0	18,0	-1,44 ⁵	±0,00	±0,00	-1,41	±0,00	±0,00	-1,44 ⁵	±0,00	±0,00
	"	15,5	-0,94	-0,05	±0,00	-0,88 ⁵	"	+0,11 ⁵	-0,89	+0,00 ⁵	+0,00 ⁵
	"	13,0	-0,37 ⁵	-0,03	+0,05	-0,36	"	+0,17 ⁵	-0,34 ⁵	+0,01 ⁵	+0,05 ⁵
	"	10,5	+0,19 ⁵	+0,02	+0,12	+0,17	"	+0,18 ⁵	+0,18	+0,03	+0,12
	"	8,0	+0,76	+0,10	+0,22	+0,69 ⁵	"	+0,14 ⁵	+0,70 ⁵	+0,05 ⁵	+0,21
	"	4,6	+1,33 ⁵	+0,10	+0,36 ⁵	+1,41	"	±0,00	+1,38	+0,10	+0,37
V ₂	20,0	18,0	-1,24	±0,00	±0,00	-1,13	±0,00	±0,00	-1,21 ⁵	±0,00	±0,00
	"	15,5	-0,78	-0,04	±0,00	-0,72 ⁵	"	+0,15 ⁵	-0,73 ⁵	+0,01	+0,02 ⁵
	"	13,0	-0,29	-0,02	+0,06 ⁵	-0,32	"	+0,24	-0,29	+0,03 ⁵	+0,08
	"	10,5	+0,14	+0,02	+0,17 ⁵	+0,08 ⁵	"	+0,26	+0,12	+0,06	+0,16
	"	8,0	+0,53	+0,07 ⁵	+0,31	+0,49	"	+0,21 ⁵	+0,51	+0,12	+0,27
	"	5,5	+0,88	+0,19 ⁵	+0,41	+0,89 ⁵	"	+0,10	+0,86 ⁵	+0,18 ⁵	+0,40
"	4,1	+1,05	+0,23	+0,49	+1,13	"	±0,00	+1,05	+0,22 ⁵	+0,49	

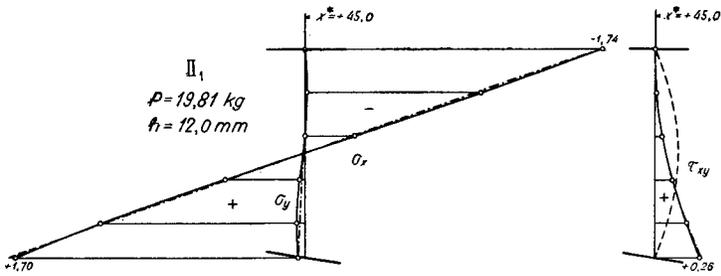


Fig. 12.

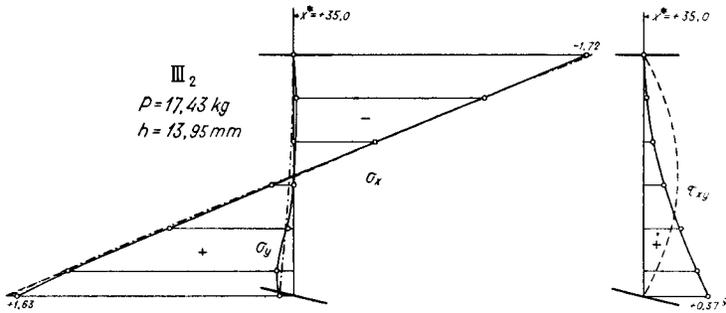


Fig. 13.

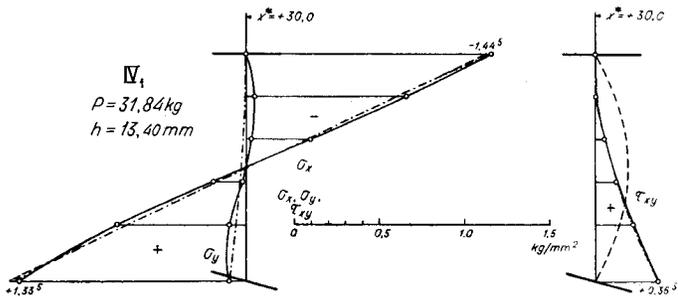


Fig. 14.

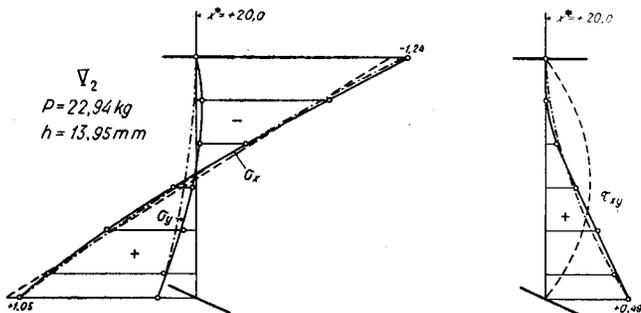


Fig. 15.

Spannungsverteilung für senkrechte Querschnitte der Zone I.

- — = Meßwerte,
- = Elementare Festigkeitslehre,
- · - · - = Airysche Spannungsfunktion.

Um die Brauchbarkeit der verschiedenen Theorien, die wir in § 5 für die *parabolischen Teile* der Modelle angewendet haben, prüfen zu können, haben wir folgende Vergleiche ausgeführt:

A) Für jedes parabolische Profil haben wir je einen senkrechten Querschnitt in der Zone I gewählt und haben die Werte der elementaren Festigkeitslehre für diese Querschnitte, die Spannungen, die mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktionen für diese Querschnitte gefunden wurden und die Meßwerte σ_x , σ_y und τ_{xy} in die Tabelle 4 und die Figuren 12, 13, 14 und 15 eingetragen. Darin bedeuten x^* , y^* die Koordinaten des betrachteten Punktes nach der Fig. 1.

B) Ferner haben wir für jedes Profil mit parabolischer Berandung je einen Querschnitt $q-q$ in der Zone I gewählt, der mit dem oberen und unteren Rand des Modelles gleiche Winkel einschließt und haben die Werte der elementaren Festigkeitslehre für diese Querschnitte, die durch die Airysche Spannungsfunktion gefundenen Spannungen, sowie die Meßwerte in der Tabelle 5 zusammengestellt und in den Figuren 16, 17, 18 und 19 eingetragen. Darin bedeutet x_0 die horizontale Abszisse des Schwerpunktes O' des schiefen Querschnittes $q-q$ und y' die schiefe Ordinate des betrachteten Punktes (siehe Fig. 8). $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ und $\tau_{x'y'}$ sind die auf ein Flächenelement parallel bzw. senkrecht zur Achse x' bezogenen Spannungen.

Die Meßwerte σ_x , σ_y und τ_{xy} in den Punkten des Querschnittes $q-q$ mußten wir durch Interpolation bestimmen, was aber ohne weiteres mit durchaus genügender Genauigkeit möglich war. Diese Spannungen σ_x , σ_y und τ_{xy} beziehen sich aber auf ein horizontales bzw. vertikales Flächenelement. Aus ihnen wurden nach den Mohrschen Gleichungen:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\omega + \tau_{xy} \cdot \sin 2\omega,$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\omega - \tau_{xy} \cdot \sin 2\omega,$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\omega + \tau_{xy} \cdot \cos 2\omega,$$

die Spannungen $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ und $\tau_{x'y'}$ in bezug auf ein Flächenelement, das parallel bzw. senkrecht zur Achse x' steht, berechnet. ω bedeutet in diesen Gleichungen den halben Öffnungswinkel des Keiles (siehe Fig. 10)¹⁵⁾.

Die Spannungen σ_r , $\sigma_t = 0$ und τ , welche mit der Airyschen Spannungsfunktion in den Punkten des Querschnittes $q-q$ bestimmt wurden, beziehen sich auf ein Flächenelement, das parallel bzw. senkrecht zu r steht (siehe Fig. 9). Wir haben daraus nach den Mohrschen Gleichungen:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_r}{2}(1 + \cos 2\Phi) + \tau \sin 2\Phi,$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_r}{2}(1 - \cos 2\Phi) - \tau \sin 2\Phi,$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_r}{2} \cdot \sin 2\Phi + \tau \cos 2\Phi,$$

die Spannungen $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ und $\tau_{x'y'}$ in bezug auf ein Flächenelement, das parallel bzw. senkrecht zur Achse x' steht, berechnet. Φ bedeutet in diesen Gleichungen den Winkel zwischen dem Strahl r und der Achse a des Keiles (siehe Fig. 9).

Zu A) Tabelle 4 und Fig. 12, 13, 14 und 15.

Wir stellen in der Tabelle und den Diagrammen fest, daß die gemessenen σ_x -Spannungen mit den beiden theoretischen Werten schön übereinstimmen. Die besseren Werte liefert natürlich die genauere Theorie der Airyschen Spannungsfunktion. Die σ_y -Spannungen treten tatsächlich auf, und die τ_{xy} -Spannungen sind am unteren Rand verschieden von null, wie die Messungen zeigen. Die σ_y - und τ_{xy} -Spannungen werden nur durch die Airysche Spannungsfunktion richtig beschrieben. Die elementare Festigkeitslehre stimmt wohl für den oberen Rand, für den unteren gibt sie aber z. B. für $\tau_{xy} = 0$ an, wo die Messungen gerade den maximalen Wert der Schubspannungen anzeigen.

¹⁵⁾ Wir hätten $\sigma_{x'}$, $\sigma_{y'}$ und $\tau_{x'y'}$ auch direkt aus den interpolierten Werten α , σ_1 und σ_2 berechnen können, jedoch hätte dann α von Punkt zu Punkt variiert, was sonst nicht der Fall ist.

Tabelle 5.

Spannungen für Querschnitte $q-q$ der Zone I, die mit beiden Rändern gleiche Winkel einschließen.

Modell No.	Koordinaten		Meßwerte			Berechnete Werte					
						Elementare Festigkeitslehre für Querschnitte $q-q$			Airysche Spannungsfunktion für keilförmige Träger		
	x_0'	y'	$\sigma_{x'}$	$\sigma_{y'}$	τ_{xy}'	$\sigma_{x'}$	$\sigma_{y'}$	τ_{xy}'	$\sigma_{x'}$	$\sigma_{y'}$	τ_{xy}'
	mm	mm	kg/mm ²	kg/mm ²	kg/mm ²	kg/mm ²	kg/mm ²	kg/mm ²	kg/mm ²	kg/mm ²	kg/mm ²
II ₁	40,0	-6,0	-1,73 ⁵	-0,01	+0,13	-1,75 ⁵	±0,00	+0,00	-1,76 ⁵	-0,01	+0,13
	"	-3,5	-1,02 ⁵	-0,02 ⁵	+0,08	-1,01 ⁵	"	+0,08 ⁵	-1,01 ⁵	-0,00 ⁵	+0,08 ⁵
	"	-1,0	-0,28 ⁵	-0,01	+0,06 ⁵	-0,28	"	+0,13	-0,28	±0,00	+0,06 ⁵
	"	+1,5	+0,48 ⁵	+0,02	+0,07	+0,45	"	+0,12 ⁵	+0,48 ⁵	+0,00 ⁵	+0,07
	"	+4,0	+1,22 ⁵	+0,03	+0,10	+1,18 ⁵	"	+0,07	+1,18 ⁵	+0,00 ⁵	+0,10
	"	+6,0	+1,74 ⁵	+0,01	+0,13 ⁵	+1,77	"	+0,00	+1,78 ⁵	+0,01	+0,13 ⁵
III ₂	30,0	-6,9	-1,69	-0,02 ⁵	+0,20	-1,72 ⁵	±0,00	+0,00	-1,73	-0,02 ⁵	+0,20
	"	-4,4	-1,10 ⁵	-0,03 ⁵	+0,14	-1,09 ⁵	"	+0,11 ⁵	-1,09 ⁵	-0,01 ⁵	+0,14 ⁵
	"	-1,8 ⁵	-0,45 ⁵	-0,01 ⁵	+0,11	-0,46	"	+0,18 ⁵	-0,47	-0,00 ⁵	+0,11
	"	+0,6 ⁵	+0,14	-0,03	+0,11	+0,18 ⁵	"	+0,19 ⁵	+0,18	±0,00	+0,10 ⁵
	"	+3,1 ⁵	+0,79	-0,00 ⁵	+0,14	+0,80	"	+0,15 ⁵	+0,81 ⁵	+0,00 ⁵	+0,13 ⁵
	"	+5,6	+1,42 ⁵	+0,04	+0,16 ⁵	+1,44	"	+0,06 ⁵	+1,43 ⁵	+0,01 ⁵	+0,16 ⁵
IV ₁	25,0	-6,6 ⁵	-1,41 ⁵	-0,02 ⁵	+0,19	-1,42 ⁵	±0,00	+0,00	-1,40 ⁵	-0,02 ⁵	+0,19
	"	-4,1	-0,93	-0,07	+0,12	-0,92 ⁵	"	+0,11 ⁵	-0,87 ⁵	-0,02 ⁵	+0,12 ⁵
	"	-1,6	-0,36 ⁵	-0,05	+0,09	-0,32	"	+0,18	-0,33 ⁵	-0,01	+0,09 ⁵
	"	+0,9 ⁵	+0,23	-0,01	+0,09	+0,22 ⁵	"	+0,19	+0,21	+0,00 ⁵	+0,09
	"	+3,4	+0,83	+0,05 ⁵	+0,13	+0,77	"	+0,14	+0,76 ⁵	+0,01	+0,12 ⁵
	"	+6,6 ⁵	+1,46	+0,02	+0,20	+1,45 ⁵	"	+0,00	+1,50 ⁵	+0,02 ⁵	+0,19 ⁵
V ₂	12,5	-6,1 ⁵	-1,18	-0,07 ⁵	+0,30	-1,17	±0,00	+0,00	-1,14 ⁵	-0,07 ⁵	+0,29
	"	-3,6	-0,70	-0,06 ⁵	+0,18	-0,66	"	+0,19 ⁵	-0,66	-0,04 ⁵	+0,19
	"	-1,0	-0,14	-0,05	+0,11	-0,14 ⁵	"	+0,28	-0,13 ⁵	+0,00	+0,13
	"	+1,6	+0,39	-0,04 ⁵	+0,15 ⁵	+0,35	"	+0,26 ⁵	+0,36 ⁵	+0,00 ⁵	+0,16
	"	+4,2	+0,89	+0,02	+0,24 ⁵	+0,87	"	+0,15	+0,88	+0,04 ⁵	+0,22 ⁵
	"	+6,1 ⁵	+1,23	+0,06	+0,33	+1,27	"	±0,00	+1,23 ⁵	+0,07 ⁵	+0,29 ⁵

Zu B) Tabelle 5 und Fig. 16, 17, 18 und 19.

Von neuem ist zu bemerken, daß die gemessenen $\sigma_{x'}$ -Spannungen mit den beiden theoretischen Werten schön übereinstimmen, und wieder werden die $\sigma_{y'}$ - und die τ_{xy}' -Spannungen nur durch die Airysche Spannungsfunktion richtig beschrieben. Die

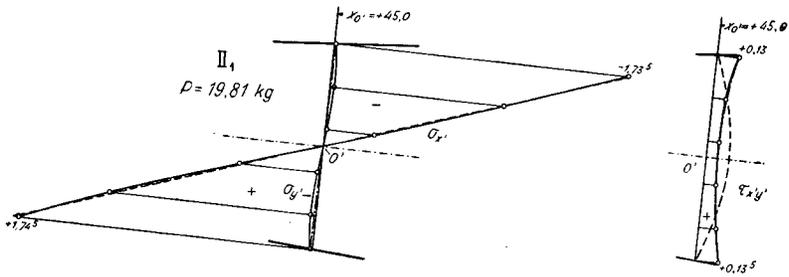


Fig. 16.

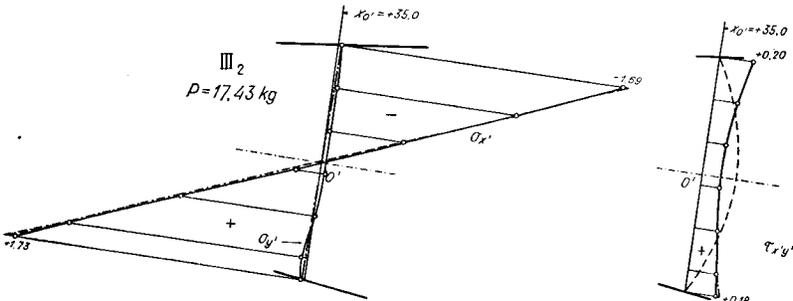


Fig. 17.

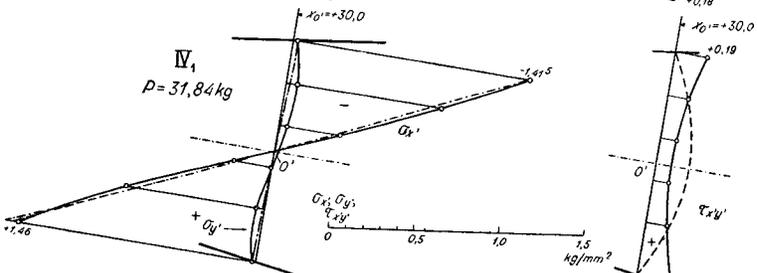


Fig. 18.

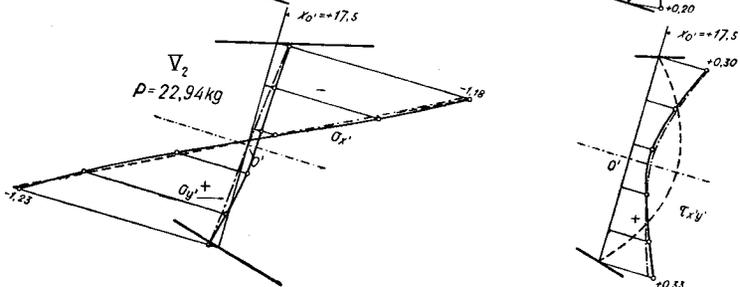


Fig. 19.

Spannungsverteilung für Querschnitte $q-q$ der Zone I.

- — — — = Meßwerte,
- - - - = Elementare Festigkeitslehre,
- · - · - = Airysche Spannungsfunktion.

elementare Festigkeitslehre, auf Querschnitte $q-q$ angewendet, die mit beiden Rändern gleiche Winkel einschließen, liefert aber bessere Werte als ihre Anwendung in bezug auf senkrechte Querschnitte. Dies können wir uns leicht erklären, denn der Winkel zwischen den Rändern und der Achse beträgt diesmal nur ω , statt 0 und 2ω wie bei A).

Immerhin ist aber die Differenz in beiden Fällen noch so groß, daß es sich für die genaue Berechnung der Spannungen in Balken mit geneigten Rändern lohnen wird, die Airysche Spannungsfunktion zu verwenden, sobald der Winkel $2\omega > 5^\circ$ bis 10° ist.

Es kann also geschlossen werden, daß nur die Theorie der Airyschen Spannungsfunktion mit den Meßwerten in den parabolischen Teilen der Modelle gut übereinstimmt. Diese Theorie wird auch erfüllt sein, wenn die Berandung anders als parabolisch ist, sofern die Krümmung des Randes nicht zu groß wird, und dies ist weiter nicht erstaunlich, denn die Gleichgewichtsbedingungen $\int \sigma_x \cdot df = N'$, $\int \sigma_x \cdot y' \cdot df = M'$ und $\int \tau_{xy'} \cdot df = Q'$ und die Randbedingungen sind erfüllt.

Wir möchten hier noch auf einen weiteren Punkt aufmerksam machen. In der Tabelle 6 haben wir die gemessenen und die nach der Airyschen Spannungsfunktion berechneten *unteren Randspannungen* zusammengestellt. Vergleichen wir diese beiden Werte, so stellen wir fest, daß die Messung immer einen etwas kleineren Betrag gibt als die Theorie.

Der Grund hierfür liegt darin, daß die Parabel des Profiles für die Berechnung durch die Tangente im betrachteten Querschnitt ersetzt worden ist. Da die Parabeln ihre konvexen Seiten nach außen kehren, haben wir es hier mit flachen „ausspringenden Ecken“ zu tun, im Gegensatz zu den Kreisbögen des Radius r , wo „einspringende Kerben“ vorhanden sind. Wir wissen aber, daß in ausspringenden Ecken die Spannungen absinken. Folglich ist es richtig, daß die Meßwerte, welche die Krümmung des Randes berücksichtigen, für die Spannungen kleinere Werte geben als die eine gerade Berandung voraussetzende Theorie.

Tabelle 6.
Gemessene und nach der Airyschen Spannungsfunktion berechnete Spannungen am unteren Rand.

Modell No. II ₁		Modell No. III ₂		Modell No. IV ₁		Modell No. V ₂	
Randspannung		Randspannung		Randspannung		Randspannung	
gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet	gemessen	berechnet
kg : mm ²	kg : mm ²	kg : mm ²	kg : mm ²	kg : mm ²	kg : mm ²	kg : mm ²	kg : mm ²
+1,76	+1,79	+1,79	+1,96	+1,46	+1,57	+1,35	+1,39
+1,75	+1,78	+1,74	+1,89	+1,46	+1,53	+1,32	+1,34
+1,74	+1,78	+1,71	+1,84	+1,45	+1,49	+1,28	+1,28
+1,73	+1,79	+1,72	+1,81	+1,44	+1,48	+1,21	+1,25
+1,72	+1,79	+1,72	+1,78	+1,44	+1,47		
+1,74	+1,77	+1,71	+1,76	+1,45	+1,47		
+1,74	+1,77	+1,68	+1,73	+1,40	+1,45		

Durch die Messung haben wir die Möglichkeit erhalten, die Genauigkeit der Theorie zu prüfen. Die Abweichungen zwischen den beiden Werten sind klein und betragen im Mittel $0,058 \text{ kg/mm}^2$, oder auf die mittlere Randspannung der Modelle von $1,58 \text{ kg/mm}^2$ bezogen, rund 3,7%. Der Fehler beschränkt sich übrigens auf eine kleine Zone von einigen Millimetern Breite längs des unteren Randes.

Es sei hier noch darauf hingewiesen, daß es bei unseren Modellen selbstverständlich ist, eine Zone I zu finden, wo mindestens eine Theorie gültig ist. Wir wissen nämlich nach dem Prinzip von *de Saint-Venant*, daß in einer gewissen Entfernung von den äußeren Diskontinuitäten (Kraftangriffsstellen, unregelmäßige Berandung) die Spannungsverteilung der Theorie entsprechen muß. Die Zone I schließt aber gerade diese Gebiete aus. Wir möchten hier festhalten, daß die Ausdehnung dieser Störzonen nur dank der photoelastischen Messung der Modelle bestimmt werden konnte.

Zone II.

Sie umfaßt die Gebiete um die Angriffsstellen der Belastungskräfte P und ist durch zwei Geraden parallel zur y^* -Achse und durch den oberen und unteren Rand des Modelles begrenzt. Sie ist in der Fig. 1 für jeden Balken definiert. Ihre horizontale

Ausdehnung ist konstant und annähernd gleich der Höhe der Balken in der Mitte h_M .

In dieser Zone ist keine Theorie erfüllt, wie der Vergleich der Messungen mit den Theorien in den Tafeln 2, 4, 6, 8, 10 und 12 zeigt.

Die *Hauptspannungstrajektorien* sind dadurch charakterisiert, daß die Drucktrajektorien gegen die Kraftangriffsstelle hin zusammenlaufen. Sie weisen bei allen Modellen einen oder zwei Wendepunkte auf, während die Zugtrajektorien nur beim Belastungsfall 2 (Doppelkraft P, P) Wendepunkte besitzen. Bei diesem Belastungsfall tritt ein *singulärer Punkt S zweiter Ordnung auf*¹⁶⁾. Seine Lage ist auf den Tafeln 3, 7 und 11 angegeben. Es handelt sich um einen „abstoßenden“ Punkt. Die Trajektorien wenden ihm ihre konvexe Seite zu.

Die *Diagramme der Hauptspannungen* sind unregelmäßig. Am unteren Rand der Profile weisen die Zugspannungen bei I_1 und I_2 in dieser Zone ihren maximalen, bei II_1, III_2, IV_1 und V_2 im Punkt A der Fig. 1 einen minimalen Wert auf.

Die größte Druckspannung des ganzen Modelles tritt gerade unterhalb der kleinen Angriffsfläche der Kraft P auf. Ihr mittlerer Wert ist gleich der Kraft P dividiert durch die Angriffsfläche, die jedoch schwer abzuschätzen ist. Auf alle Fälle wird aber diese Fläche kleiner sein als bei den Lagern, weil dort der die Reaktion übertragende Aluminiumzylinder einen Durchmesser von 5 mm besitzt, währenddem er bei den Kräften P nur 3 mm beträgt.

Zone III.

Sie umfaßt denjenigen Teil der Balken, welcher unter dem direkten Einfluß der Lagerreaktion steht und ist durch den Rand des Modelles und durch eine Gerade parallel zur y^* -Achse begrenzt. Die Ausdehnung dieser Zone ist in der Fig. 1 für jedes Modell definiert.

¹⁶⁾ Wir verwenden hier die ältere, aber dafür einfachere Klassifikation, die *A. Mesnager* in [20] gegeben hat. Für eine eingehende Untersuchung dieser singulären Punkte, die sich z. B. auf das Studium der Airy'schen Spannungsfunktion in der Umgebung dieser Punkte stützt, verweisen wir auf [21], [22] und [23].

In dieser Zone ist keine Theorie erfüllt, wie der Vergleich der Messungen mit den Theorien auf den Tafeln 2, 4, 6, 8, 10 und 12 zeigt.

Die horizontale Ausdehnung wurde als Funktion der Höhe der Modelle an den Enden h_E angegeben und variiert von $1 \cdot h_E$ (Profile I_1 und I_2) bis $3,4 \cdot h_E$ (II_1). Es ist aber klar, daß sie nicht nur von h_E abhängt, sondern auch von der Kraftangriffsstelle, von der Lage des Mittelpunktes und der Länge des kleinen Kreisbogens, sowie von dessen Radius r und von der Gleichung der Parabel.

Bei den *Hauptspannungstrajektorien* konzentrieren sich die Drucktrajektorien gegen die Kraftangriffsstelle hin. Die Zug- und Drucktrajektorien weisen verschiedene Wendepunkte auf.

Die *Hauptspannungsdiagramme* sind im allgemeinen gekrümmt und die Randspannungen nicht konstant, sondern fallen gegen 0 ab. Am unteren Rand durchschreitet die Zugspannung bei den Modellen II_1 , III_2 , IV_1 und V_2 vor dem Absinken ihren maximalen Wert ungefähr an der Stelle, wo der kleine Kreisbogen vom Radius r in die Parabel übergeht. Am oberen Rand fällt einzig bei IV_1 das Minimum der Randspannung noch in die Zone III. Dieses Minimum ist übrigens viel flacher als das Maximum an der Zugseite.

Die größte Spannung der Zone III tritt gerade oberhalb der kleinen Angriffsstelle der Lagerreaktion auf. Sie ist eine Druckspannung, deren mittlerer Wert gleich dem Quotienten der Reaktion durch die Berührungsfläche ist, wobei es aber wieder schwer fällt, letztere richtig abzuschätzen.

Zone IV.

Diese Zone liegt zwischen den beiden Störzonen II des Belastungsfalles 2 (I_2 , III_2 und V_2), ist durch den Rand der Modelle und durch zwei Geraden parallel zur y^* -Achse begrenzt und in der Fig. 1 definiert. Beim Belastungsfall 1 ist sie nicht vorhanden.

Diese Zone ist dadurch charakterisiert, daß die *Gleichungen der elementaren Festigkeitslehre in bezug auf senkrechte Querschnitte gültig sind*.

Da die Querkraft $Q = 0$ ist, haben wir es mit einer reinen Biegung zu tun. Der Spannungszustand ist einachsigt und die *Hauptspannungstrajektorien* werden durch zwei Familien von Geraden gebildet, von denen die eine parallel, die andere senkrecht zu den Rändern steht.

Die *Diagramme der Hauptspannungen* sind linear mit dem Wert Null in der halben Höhe des Querschnittes. Die neutrale Achse fällt also in die Mitte der Höhe h_M , was wieder beweist, daß keine horizontalen Komponenten der Kräfte auftraten. Die *Randspannungen* besitzen auf der Zug- und Druckseite fast die gleiche, konstante absolute Größe.

Tabelle 7.

Extremale Werte der Spannungen am unteren Rand.

Modell No.	x^* mm	y^* mm	β	2ω	L kg	σ_g kg/mm ²	σ_e kg/mm ²	σ_a kg/mm ²	$\zeta = \frac{\sigma_g}{\sigma_e}$	$\zeta' = \frac{\sigma_g}{\sigma_a}$	Bemerkungen	
Maximale Werte												
II ₁	+12,0	+13,0	19°00'	—	9,91	+2,00	+1,75	+1,87	1,14	1,07	Das Maximum liegt auf dem Kreisbogen	
III ₂	+ 9,0	+13,0	30°45'	—	17,43	+2,30	+1,71	+2,16	1,34	1,06		
IV ₁	+12,0	+11,0	26°00'	—	15,92	+2,02	+1,41	+1,80	1,43	1,12		
V ₂	+ 9,3	+10,5	39°30'	—	22,94	+2,06	+1,13	+1,55	1,82	1,33		
Minimale Werte												
II ₁	+95,0	±0,0	Messung unmöglich, wegen einer kleinen Scharte im Glase.									Das Minimum liegt im Punkt A der Fig. 1
III ₂	+55,0	±0,0	—	10°12'	17,43	+1,24	+1,71	+1,73	0,73	0,72		
IV ₁	+50,0	±0,0	Messung unmöglich, wegen einer kleinen Scharte im Glase.									
V ₂	+30,0	±0,0	—	19°46'	22,94	+0,60	+1,13	+1,18	0,53	0,51		

In obiger Tabelle bedeuten:

- x^*, y^* = Koordinaten des Punktes extremaler Spannung (s. Fig. 1),
- β = Winkel zwischen den senkrechten auf die Enden des Kreisbogens vom Radius r ,
- 2ω = Winkel zwischen der Tangente an die Parabel und der Horizontalen,
- L = Lagerreaktion,
- σ_g = gemessene Spannung,
- σ_e = nach der elementaren Festigkeitslehre in bezug auf senkrechte Querschnitte berechnete Spannung,
- σ_a = nach der Airyschen Spannungsfunktion berechnete Spannung,
- $\zeta = \frac{\sigma_g}{\sigma_e}$ = Verhältnis der gemessenen Spannung zu der Spannung der elementaren Festigkeitslehre,
- $\zeta' = \frac{\sigma_g}{\sigma_a}$ = Verhältnis der gemessenen Spannung zu der Spannung der Airyschen Spannungsfunktion.

In der Tabelle 7 tragen wir nun noch die maximale bzw. minimale Zugspannung am unteren Rande zusammen, sowie die Größe dieser Spannungen, die nach der elementaren Festigkeitslehre in bezug auf senkrechte Querschnitte und nach der Airyschen Spannungsfunktion berechnet wurden und bilden das Verhältnis ζ bzw. ζ' der gemessenen zu den beiden theoretischen Werten. Bei den Modellen II₁ und IV₁ konnten wir leider die minimale Zugspannung in den ausspringenden Ecken *A* der Fig. 1 nicht messen, da dort die Modelle kleine Scharten im Glase aufwiesen (siehe Fig. 2d).

Die obige Tabelle zeigt, daß an den einspringenden Kerben eine Erhöhung der Spannungen, an den ausspringenden Ecken ein Absinken derselben in bezug auf die theoretischen Werte auftritt, wie es zu erwarten war. Die Spannungserhöhung nimmt in gewissen Fällen beträchtliche Werte an (siehe z. B. V₂, wo sie in bezug auf die genaue Theorie der Airyschen Spannungsfunktion 33% beträgt).

Wir sehen, daß eine eindeutige Beziehung zwischen dem Winkel β und den ζ -Werten nicht besteht. Es machen sich eben noch andere Einflüsse geltend, die das Ergebnis stark beeinflussen. Sie wurden bei der Besprechung der Zone III erwähnt.

Schließlich sei noch bemerkt, daß der ζ -Wert mit zunehmendem Winkel ω abnimmt.

§ 7. Schlußbetrachtungen

1. Wir haben gesehen, daß ein Profil, das nach der Anwendung der elementaren Festigkeitslehre in bezug auf einen senkrechten Querschnitt eine *konstante Randspannung* aufweisen sollte, diese in Wirklichkeit nicht besitzt.

Wir können nun fragen, wie der Balken aussehen müßte, damit diese Bedingung erfüllt wäre. Experimentell haben wir diese Berandung nicht bestimmt; wir können aber aus den Messungen schon ziemlich genau auf die Form des Profiles konstanter Randspannung schließen. Dabei müssen wir berücksichtigen, daß *keine ein- oder ausspringende Ecken auftreten dürfen*. Wenn

wir also die Ecken in den Punkten *A* der Fig. 1 schön abrunden und die so gewonnene Fläche bei den Kreisbögen des Radius *r* hinzufügen, indem wir diesen vergrößern, so werden wir mit guter Näherung die Konstanz der Randspannungen erzielen¹⁷⁾.

2. Wie groß ist die *Materialersparnis*? Um diese Frage zu beantworten, haben wir in der letzten Tabelle 8 die Flächen der Profile II₁ bis V₂, sowie die Fläche des Rechteckes angegeben, welches die Modelle umschließt. Da die Dicke der Modelle *e* konstant ist, können wir daraus die prozentuale Materialersparnis in bezug auf den Balken konstanter Höhe *h_M* berechnen.

Tabelle 8.

Modell No.	Fläche des Modelles	Fläche des umschließenden Rechteckes	Materialersparnis
	cm ²	cm ²	
II ₁	202	342	40,9 %
III ₂	275	342	19,5 %
IV ₁	119	180	33,9 %
V ₂	142	180	21,2 %

Die Materialersparnis erreicht z. T. beträchtliche Werte. Das Streben des Ingenieurs, möglichst Profile variabler Höhe zu verwenden, ist also sehr berechtigt.

3. Wir haben in dieser Untersuchung 2 Gruppen von Modellen ausgemessen, die dadurch charakterisiert sind, daß das Verhältnis der maximalen Höhe *h_M* zur Spannweite *l_M* ¹/₁₀ bzw. ¹/₅ betrug. Wird nun *h_M/l_M* kleiner, der Balken somit schlanker, so wird die elementare Festigkeitslehre für die Teile mit veränderlicher Höhe immer besser stimmen. Zudem werden sich die Zonen I und IV immer mehr ausdehnen. Das Umgekehrte wird im Falle der Zunahme von *h_M/l_M* eintreten. Beim Balken V₂ wird z. B. bei *h_M/l_M* $\sim \frac{1}{3}$ die Zone I ganz verschwunden sein.

Es wäre interessant, die Untersuchung in dieser Richtung weiterzuführen, doch glauben wir nicht, daß sich die allgemeinen Folgerungen wesentlich ändern würden.

¹⁷⁾ Vergl. [10] und [24].

§ 8. Zusammenfassung

Die photoelastische Ausmessung der Modelle I_1 bis V_2 hat uns ermöglicht, *experimentell die Spannungsverteilung* für den betreffenden Belastungszustand in den freiaufliegenden Balken der Fig. 1 *vollständig zu bestimmen*.

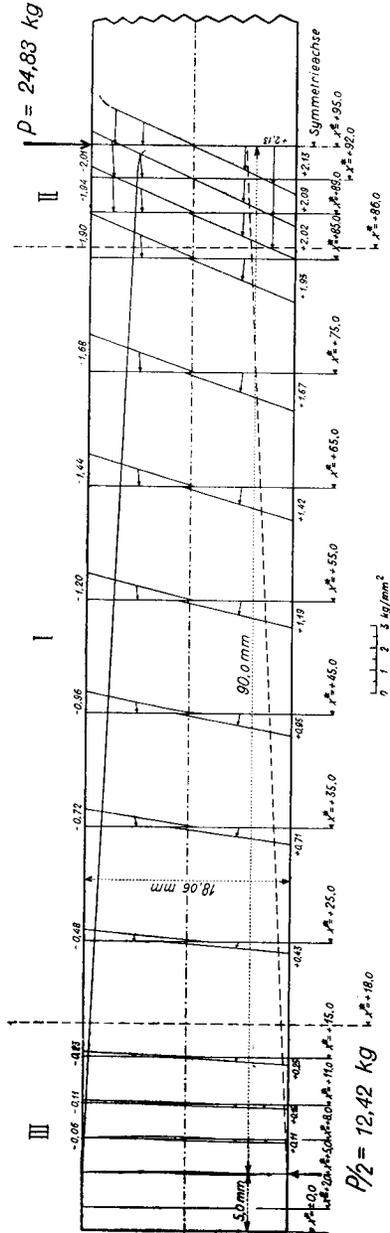
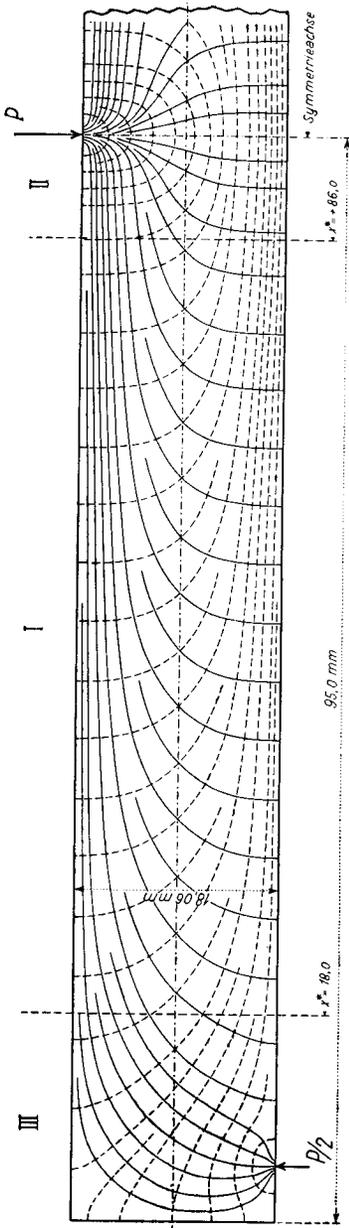
Als Ergebnis dieser Messungen sind im Anhang für jedes Modell die *Hauptspannungstrajektorien*, die *Diagramme der Haupt- und Randspannungen*, sowie die *Diagramme der σ_x -, σ_y - und τ_{xy} -Spannungen* für senkrechte Querschnitte in 12 Tafeln angegeben. Die Tabellen I bis VI im Anhang enthalten für jeden Meßpunkt die drei Größen α (Winkel zwischen der Hauptspannung und der Senkrechten), σ_1 und σ_2 (Hauptspannungen).

In § 5 ist gezeigt worden, wie man die *Spannungen* in den Balken *berechnen* kann und insbesondere, wie man einige Theorien zur Bestimmung der Spannungen in den *parabolischen Teilen* der Modelle II bis V anwenden kann. Der Vergleich mit den Messungen läßt erkennen, daß die Theorie der Airyschen Spannungsfunktion für diese Teile auf einige % genau ist.

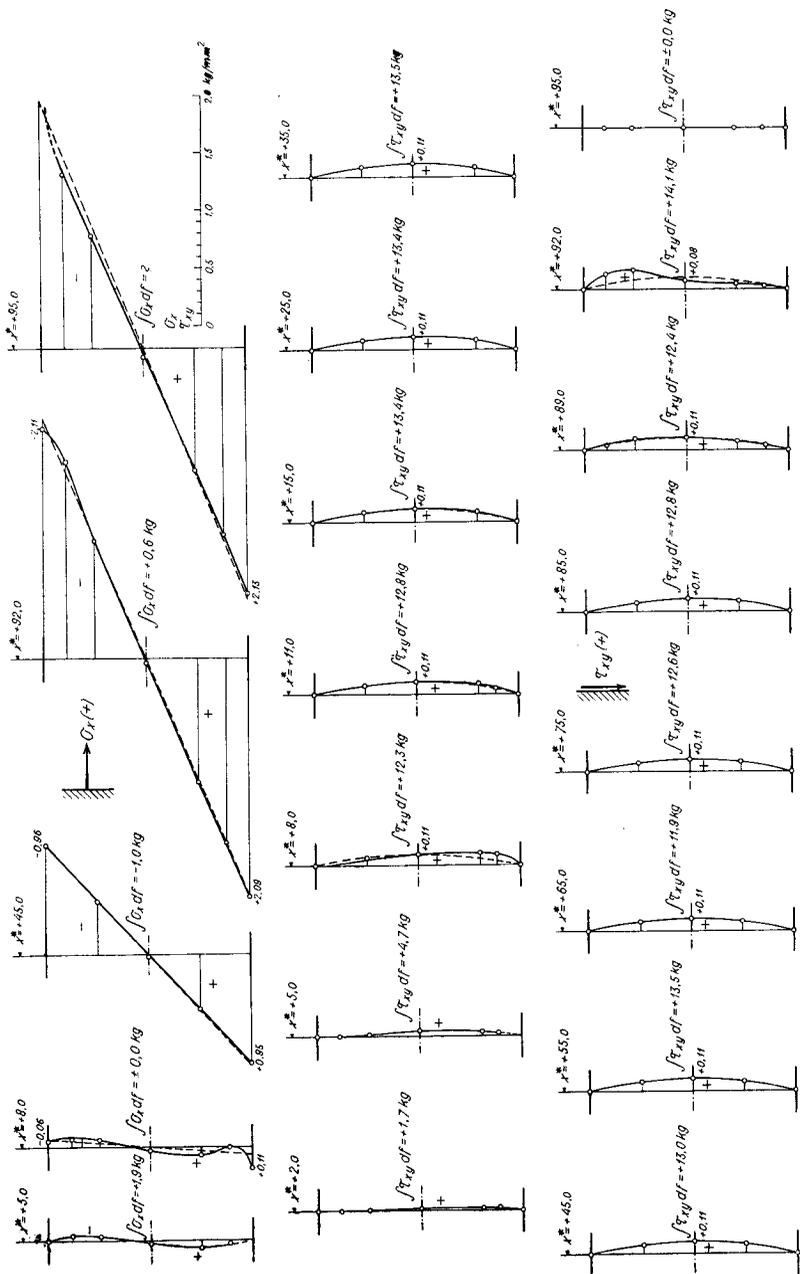
Bei der Diskussion der Resultate haben wir *4 Zonen* festgestellt (I bis IV). In der *Zone I* (zwischen dem Lager und der Belastungskraft P) ist für den *Balken konstanter Höhe die elementare Festigkeitslehre*, für die *Balken mit parabolischer Bemandung die Theorie der Airyschen Spannungsfunktion richtig*. In den Gebieten um die Kraftangriffsstellen (*Zone II*) und um die Lager (*Zone III*) *stimmt keine Theorie*. Schließlich ist in *Zone IV* (zwischen den Kräften P, P des Belastungsfalles 2) *wieder die elementare Festigkeitslehre in bezug auf senkrechte Querschnitte gültig*.

ANHANG

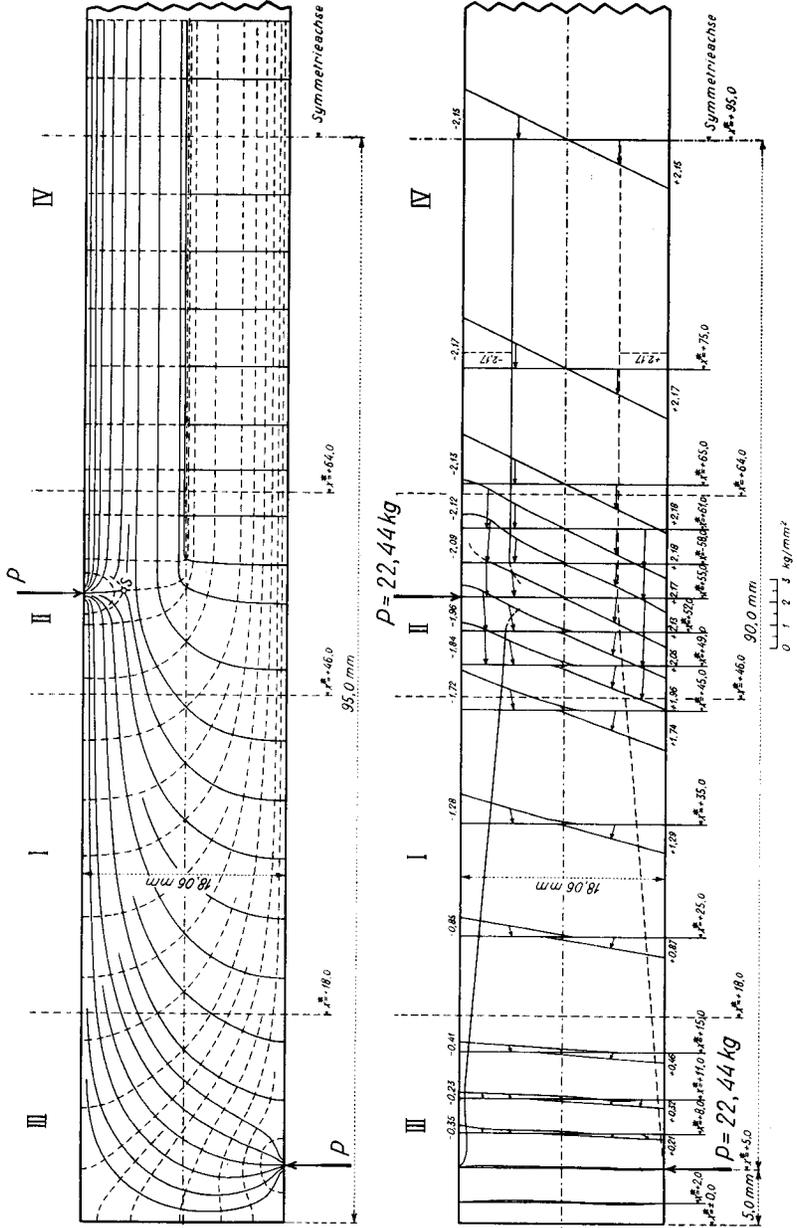
Tafeln und Tabellen



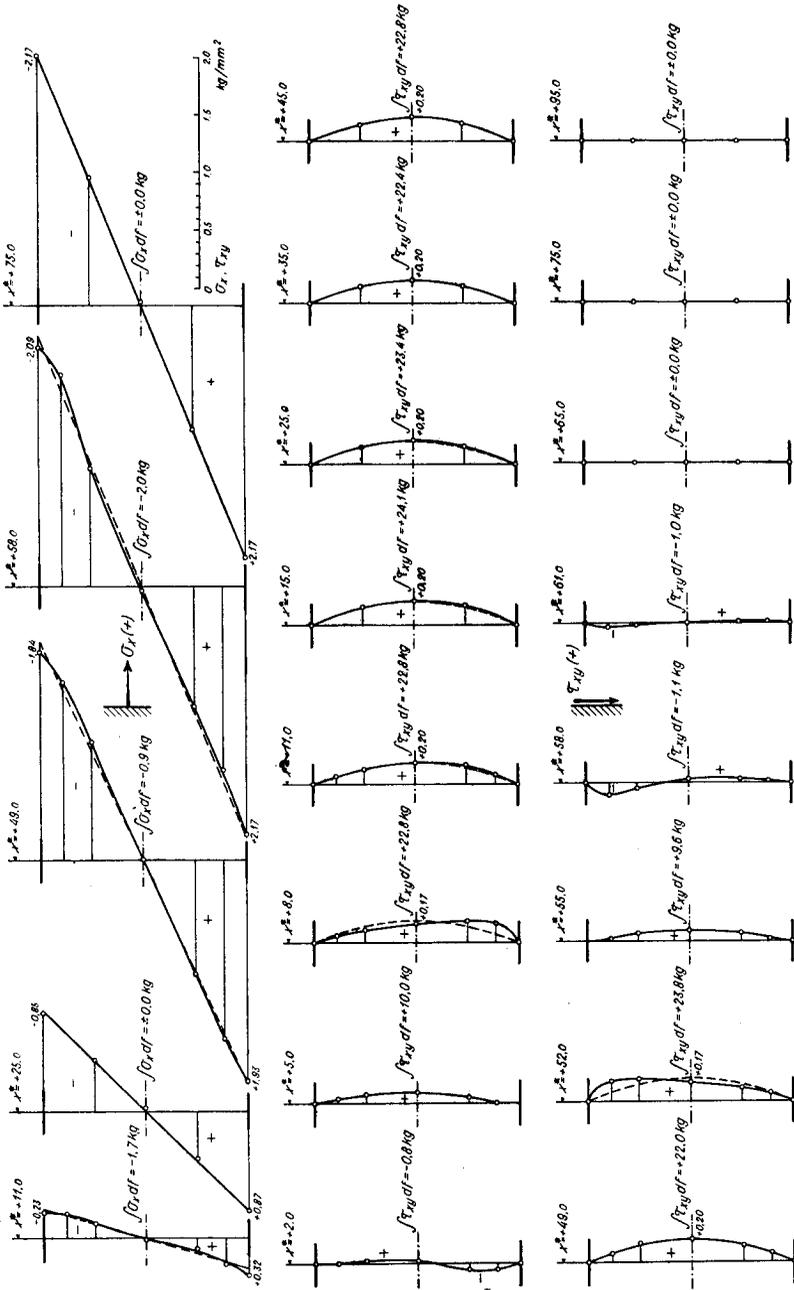
Tafel I. Freiauflegender Balken I — Belastungsfall 1.
Hauptspannungstrajektorien.
Diagramme der Haupt- und Randspannungen ($e = 9,413 \text{ mm}$).



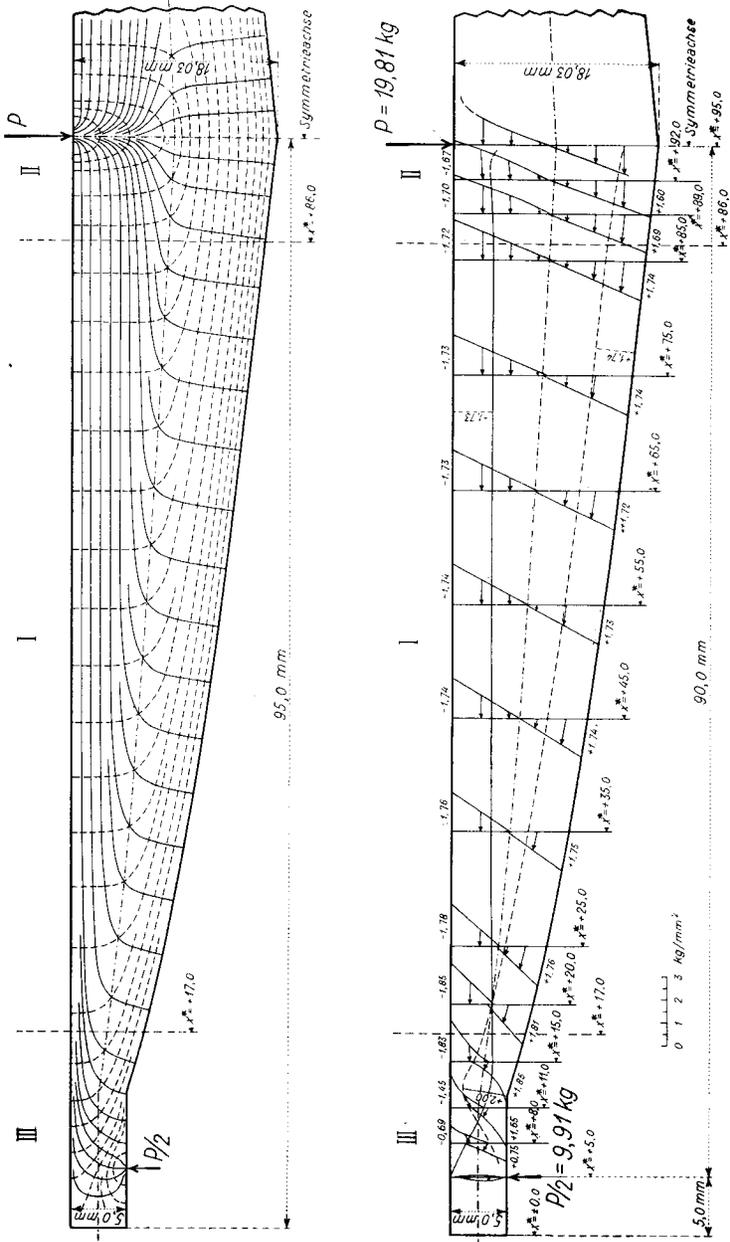
Tafel 2. Freiaufliegender Balken I — Belastungsfall 1.
 Diagramme der Normalspannungen und der Schubspannungen in einigen senkrechten Querschnitten.
 $P = 24.83 \text{ kg}$ ○ ——— = Meßwerte, ----- = Elementare Festigkeitslehre.



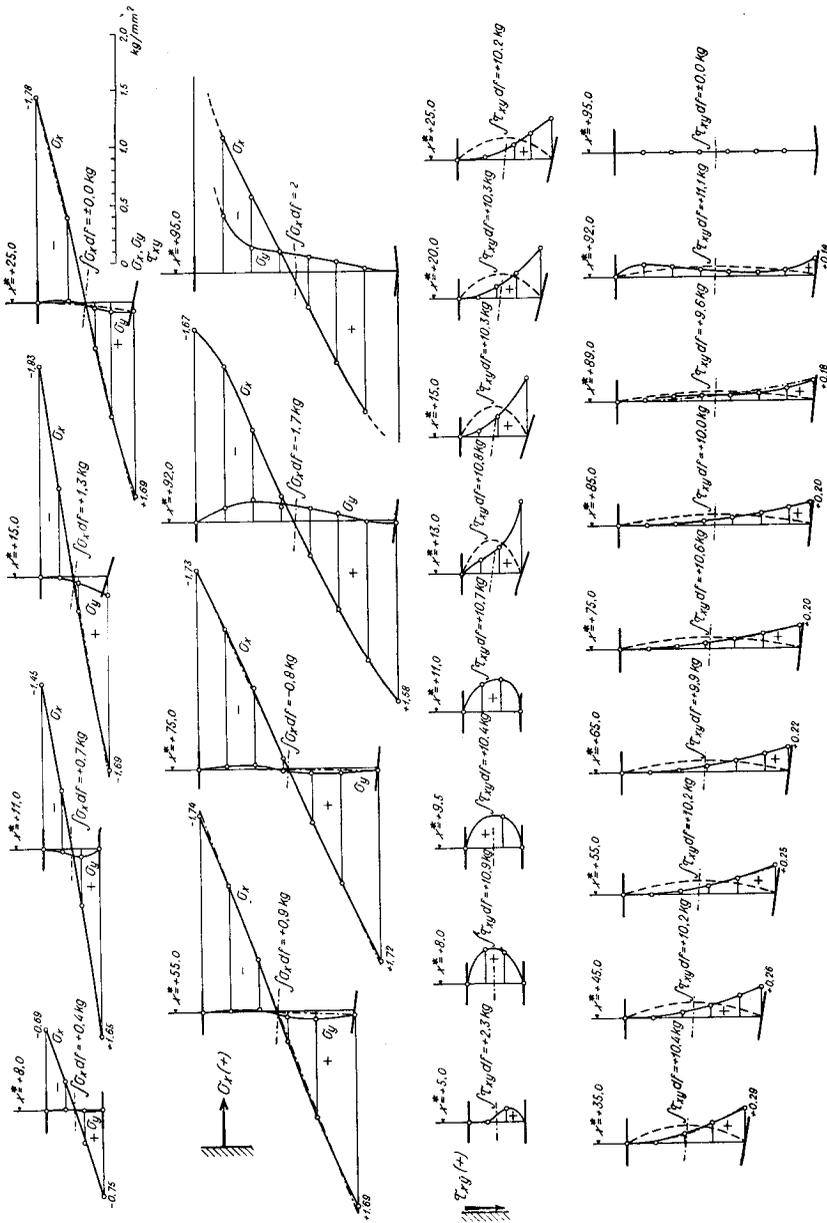
Tafel 3. Freiaufliegender Balken I — Belastungsfall 2.
 Hauptspannungstrajektorien.
 Diagramme der Haupt- und Randspannungen ($e = 9.413 \text{ mm}$).



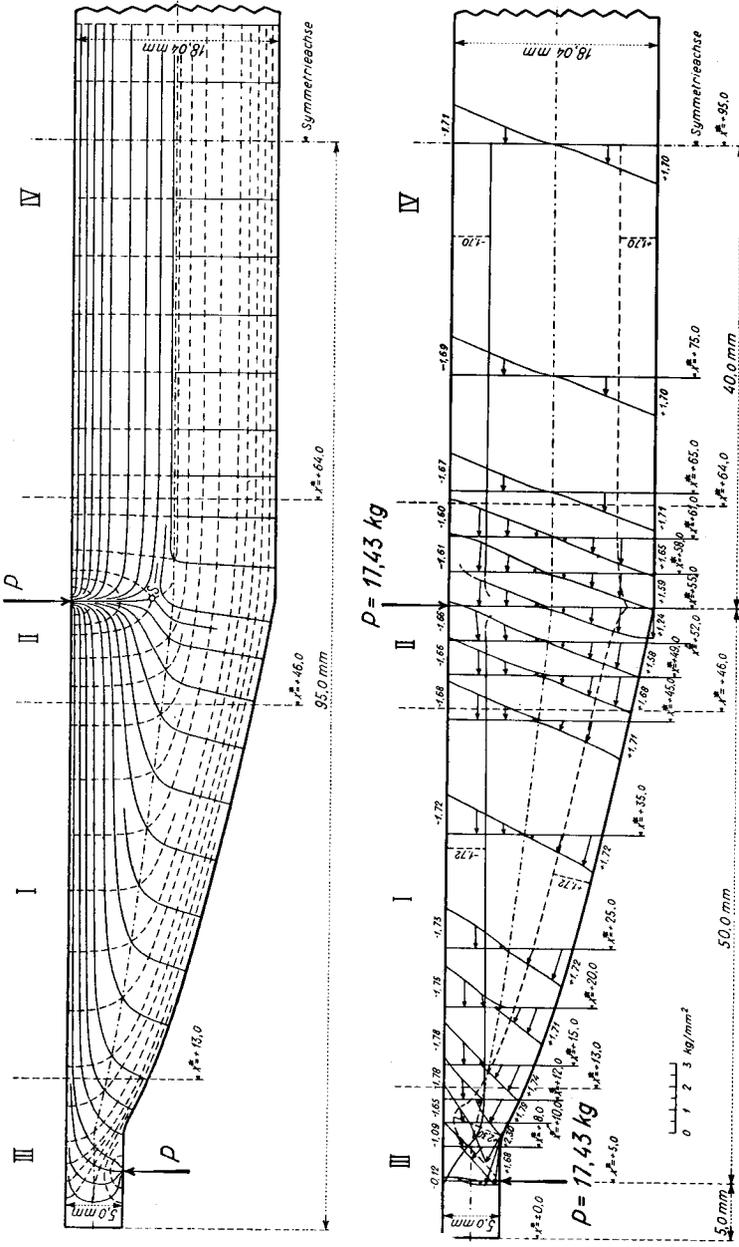
Tafel 4. Freiaufhängender Balken I — Belastungsfall 2.
 Diagramme der Normalspannungen und der Schubspannungen in einigen senkrechten Querschnitten.
 $P = 22,44 \text{ kg}$. ○ ———— = Meßwerte, ----- = Elementare Festigkeitslehre.



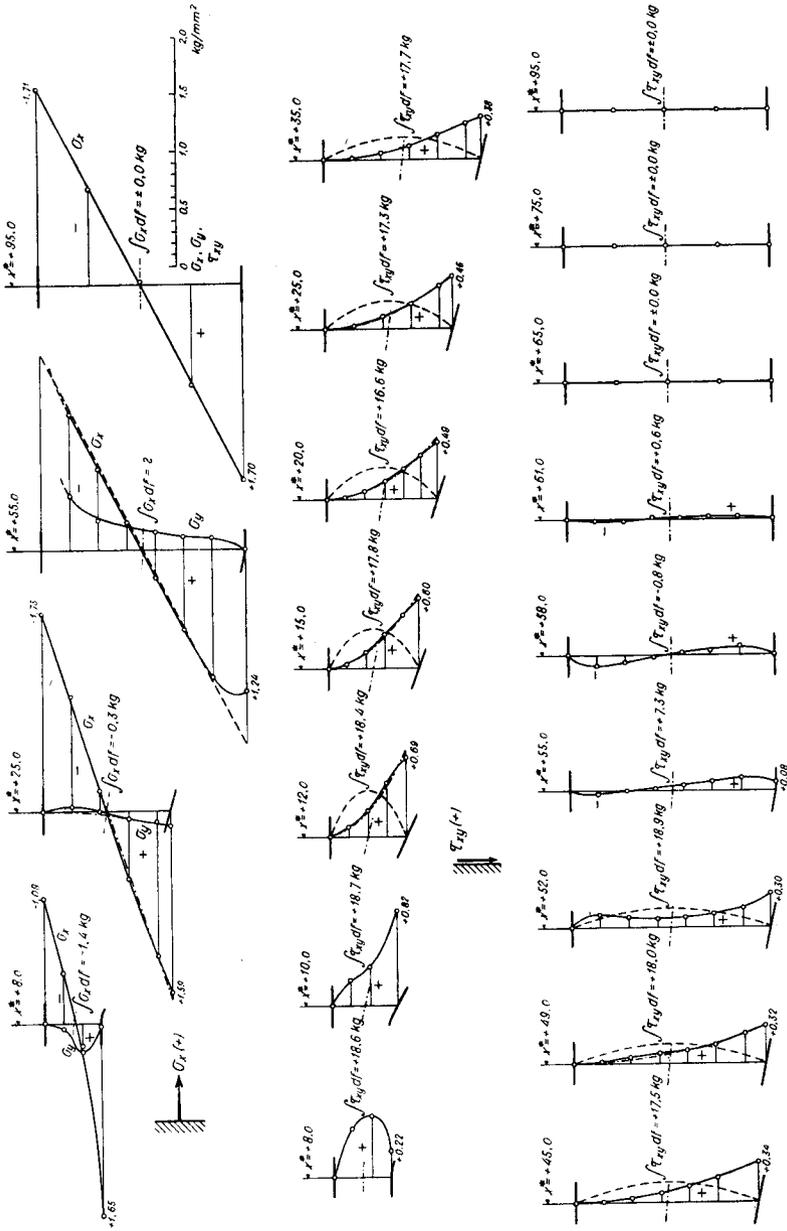
Tafel 5. Freiauflegender Balken II — Belastungsfall 1.
 Hauptspannungstrajektorien.
 Diagramme der Haupt- und Randspannungen ($e = 9,413 \text{ mm}$).



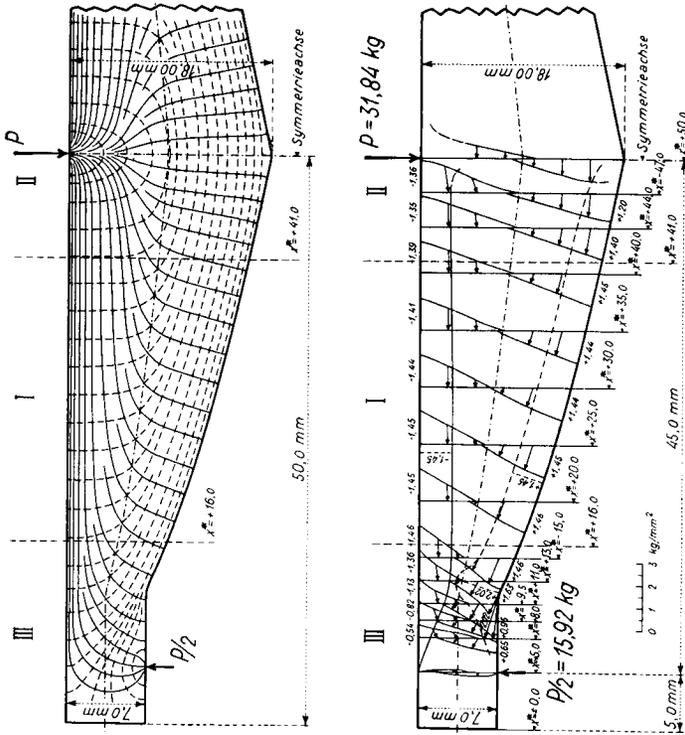
Tafel 6. Freiaufliegender Balken II — Belastungsfall 1.
 Diagramme der Normalspannungen und der Schubspannungen in einigen senkrechten Querschnitten.
 $P = 19,81 \text{ kg}$. ———— = Meßwerte, - - - - - = Elementare Festigkeitslehre,
 - - - - - = Airysche Spannungsfunktion.



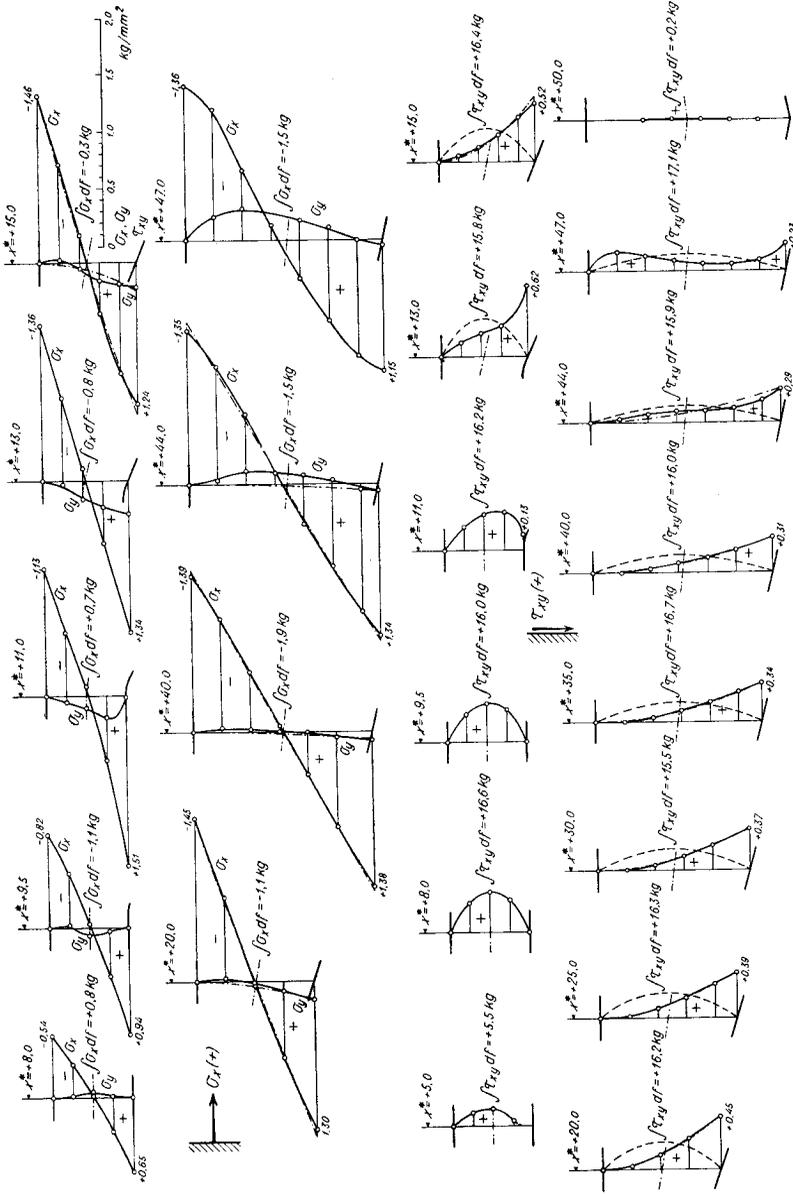
Tafel 7. Freiaufliegender Balken III — Belastungsfall 2.
 Hauptspannungstrajektorien.
 Diagramme der Haupt- und Randspannungen ($e = 9,413 \text{ mm}$).



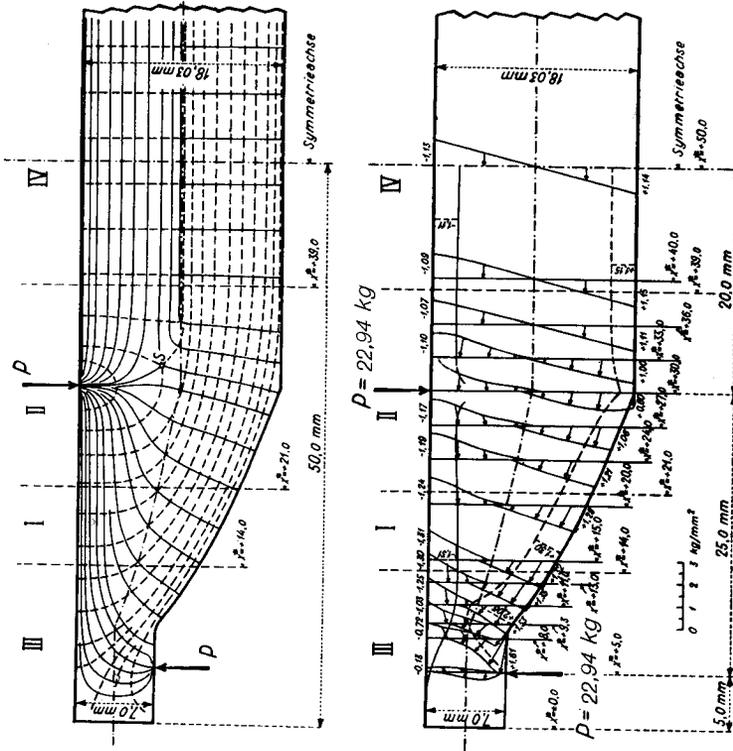
Tafel 8. Freiaufliegender Balken III — Belastungsfall 2.
 Diagramme der Normalspannungen und der Schubspannungen in einigen senkrechten Querschnitten.
 $P = 17,43 \text{ kg}$. \circ ————— = Meßwerte, - - - - - = Airysche Spannungsfunktion.



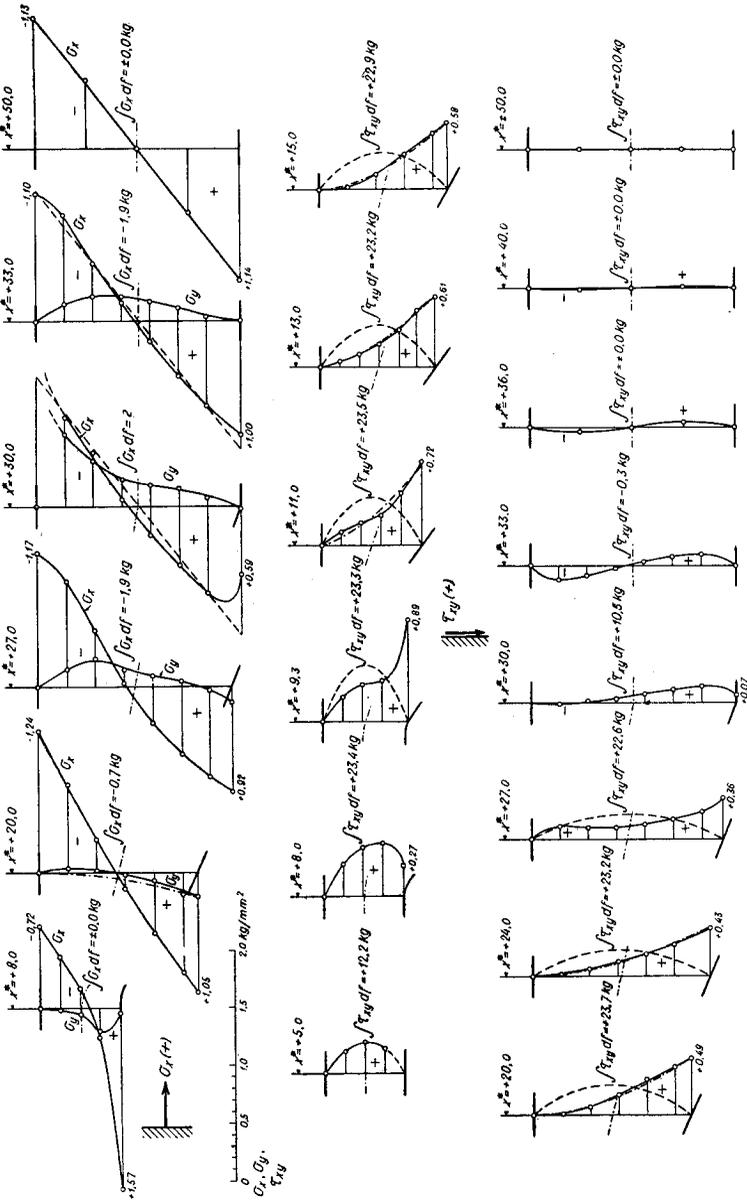
Tafel 9. Freiaufliedender Balken IV — Belastungsfall 1.
 Hauptspannungstrajektorien.
 Diagramme der Haupt- und Randspannungen ($e = 9,413 \text{ mm}$).



Tafel 10. Freiauflegender Balken IV — Belastungsfall 1.
 Diagramme der Normalspannungen und der Schubspannungen in einigen senkrechten Querschnitten.
 $P = 31,84$ kg. ——— = Messwerte, - - - - - = Elementare Festigkeitslehre,
 ○ = Airy'sche Spannungsfunktion.



Tafel 11. Freiaufhängender Balken V — Belastungsfall 2.
Hauptspannungstrajektorien.
Diagramme der Haupt- und Randspannungen ($e = 9,413 \text{ mm}$).



Tafel 12. Freiauflegender Balken V — Belastungsfall 2.
 Diagramme der Normalspannungen und der Schubspannungen in einigen senkrechten Querschnitten.
 $P = 22,94$ kg. \circ ——— = Meßwerte, - - - - - = Elementare Festigkeitslehre,
 - - - - - = Airysche Spannungsfunktion.

Allgemeine Bemerkungen zu den Tabellen I bis VI

α stellt immer den Winkel zwischen der Hauptspannungsrichtung und der Senkrechten dar. Er nimmt von 0^0 bis 360^0 im Uhrzeigersinn zu.

In einigen Punkten war eine genaue Messung nicht möglich (zu schwache Spannungen, lokale Glasfehler). In diesen Fällen wurde statt des Meßwertes ein Fragezeichen (?) in die Tabelle eingetragen.

Tabelle I.

Freiaufliegender Balken I. — Belastungsfall 1.
Richtung und Größe der Hauptspannungen.

y^*	x^*	α	σ_1	σ_2	y^*	x^*	α	σ_1	σ_2
mm	mm		kg : mm ²	kg : mm ²	mm	mm		kg : mm ²	kg : mm ²
± 0,0	+ 8,0	1°30'	+0,00	+0,11	+ 9,0	+35,0	315°00'	+0,10	-0,12 ⁵
± 0,0	+11,0	0°38'	+0,00	+0,18 ⁵	+ 9,0	+65,0	316°00'	+0,10	-0,12
± 0,0	+15,0	0°30'	+0,00	+0,25	+ 9,0	+75,0	316°45'	+0,10 ⁵	-0,12
± 0,0	+25,0	0°15'	+0,00	+0,47 ⁵	+ 9,0	+85,0	316°15'	+0,08	-0,15 ⁵
± 0,0	+35,0	0°23'	+0,00	+0,70 ⁵	+ 9,0	+89,0	39°30'	-0,14	+0,08
± 0,0	+65,0	0°00'	+0,00	+1,42	+ 9,0	+92,0	25°15'	-0,13	+0,06 ⁵
± 0,0	+75,0	0°00'	+0,00	+1,67	+ 9,0	+95,0	359°30'	-0,10 ⁵	+0,06 ⁵
± 0,0	+85,0	0°00'	+0,00	+1,93	+13,5	+ 2,0	301°15'	+0,01	-0,02
± 0,0	+89,0	0°00'	+0,00	+2,02 ⁵	+13,5	+ 5,0	312°38'	+0,00	-0,07 ⁵
± 0,0	+92,0	0°00'	+0,00	+2,09	+13,5	+ 8,0	319°00'	-0,01 ⁵	-0,12 ⁵
± 0,0	+95,0	0°00'	+0,00	+2,13	+13,5	+11,0	326°00'	+0,02	-0,15 ⁵
+ 2,0	+ 2,0	324°00'	-0,04 ⁵	+0,01 ⁵	+13,5	+15,0	332°30'	+0,04 ⁵	-0,17
+ 2,0	+ 5,0	0°23'	-0,42	+0,03 ⁵	+13,5	+25,0	343°08'	+0,02 ⁵	-0,27 ⁵
+ 2,0	+ 8,0	303°45'	+0,07	-0,14 ⁵	+13,5	+35,0	348°00'	+0,01	-0,40 ⁵
+ 2,0	+11,0	289°00'	+0,14	-0,01 ⁵	+13,5	+65,0	354°00'	+0,04	-0,70 ⁵
+ 2,0	+89,0	1°30'	-0,04 ⁵	+1,53 ⁵	+13,5	+75,0	355°00'	+0,01	-0,87 ⁵
+ 2,0	+92,0	0°53'	+0,05	+1,67	+13,5	+85,0	355°38'	-0,02	-1,02
+ 2,0	+95,0	0°00'	+0,00	+1,62	+13,5	+89,0	354°30'	-0,03	-1,06 ⁵
+ 4,5	+ 2,0	346°23'	-0,07	+0,03 ⁵	+13,5	+92,0	351°45'	-0,13 ⁵	-1,06
+ 4,5	+ 5,0	8°00'	-0,17	+0,07 ⁵	+13,5	+95,0	0°00'	-0,34 ⁵	-0,98 ⁵
+ 4,5	+ 8,0	298°30'	+0,13 ⁵	-0,12	+16,0	+ 2,0	302°00'	+0,00	+0,00
+ 4,5	+11,0	303°00'	+0,13 ⁵	-0,07	+16,0	+ 5,0	322°45'	-0,04 ⁵	-0,04 ⁵
+ 4,5	+15,0	26°45'	-0,03 ⁵	+0,17 ⁵	+16,0	+ 8,0	334°00'	-0,06	-0,06 ⁵
+ 4,5	+25,0	17°00'	+0,00	+0,28 ⁵	+16,0	+11,0	340°45'	+0,00	-0,14
+ 4,5	+35,0	12°30'	-0,00 ⁵	+0,40	+16,0	+89,0	358°30'	-0,01 ⁵	-1,61 ⁵
+ 4,5	+65,0	6°30'	+0,02	+0,74 ⁵	+16,0	+92,0	355°15'	-0,07 ⁵	-1,73
+ 4,5	+75,0	6°00'	+0,02 ⁵	+0,86 ⁵	+16,0	+95,0	2°15'	-0,74 ⁵	-1,52
+ 4,5	+85,0	5°00'	+0,02	+0,98	+18,0	+ 8,0	0°00'	+0,00	-0,05 ⁵
+ 4,5	+89,0	4°00'	+0,03	+1,04	+18,0	+11,0	0°00'	+0,00	-0,11
+ 4,5	+92,0	2°30'	+0,02 ⁵	+1,08 ⁵	+18,0	+15,0	359°15'	+0,00	-0,23
+ 4,5	+95,0	0°00'	-0,01	+1,06	+18,0	+25,0	0°00'	+0,00	-0,48
+ 9,0	+ 2,0	13°23'	-0,05	+0,02 ⁵	+18,0	+35,0	0°00'	+0,00	-0,72
+ 9,0	+ 5,0	295°00'	+0,04 ⁵	-0,10 ⁵	+18,0	+65,0	0°00'	+0,00	-1,43 ⁵
+ 9,0	+ 8,0	305°15'	+0,06 ⁵	-0,13 ⁵	+18,0	+75,0	0°15'	+0,00	-1,68
+ 9,0	+11,0	311°45'	+0,10 ⁵	-0,12	+18,0	+85,0	0°00'	+0,00	-1,90
+ 9,0	+15,0	315°00'	+0,13	-0,10	+18,0	+89,0	0°23'	+0,00	-1,94
+ 9,0	+25,0	315°00'	+0,11 ⁵	-0,10 ⁵	+18,0	+92,0	0°15'	+0,00	-2,00 ⁵

Tabelle II.

Freiaufliegender Balken I. — Belastungsfall 2.
Richtung und Größe der Hauptspannungen.

y^*	x^*	α	σ_1	σ_2	y^*	x^*	α	σ_1	σ_2
mm	mm		kg : mm ²	kg : mm ²	mm	mm		kg : mm ²	kg : mm ²
± 0,0	+ 8,0	0°45'	±0,00	+0,20 ⁵	+ 9,0	+35,0	315°45'	+0,17 ⁵	-0,23 ⁵
± 0,0	+11,0	1°00'	±0,00	+0,32 ⁵	+ 9,0	+45,0	315°30'	+0,17	-0,25 ⁵
± 0,0	+15,0	0°45'	±0,00	+0,46 ⁵	+ 9,0	+49,0	42°15'	-0,23	+0,17
± 0,0	+25,0	0°30'	±0,00	+0,86 ⁵	+ 9,0	+52,0	36°23'	-0,24 ⁵	+0,10 ⁵
± 0,0	+35,0	0°00'	±0,00	+1,29	+ 9,0	+55,0	26°45'	-0,15 ⁵	+0,08
± 0,0	+45,0	0°00'	±0,00	+1,74	+ 9,0	+58,0	17°00'	-0,08 ⁵	+0,03
± 0,0	+49,0	0°00'	±0,00	+1,96	+ 9,0	+61,0	3°45'	-0,04	-0,02
± 0,0	+52,0	0°00'	±0,00	+2,05	+ 9,0	+65,0	2°30'	-0,01	-0,02 ⁵
± 0,0	+55,0	0°00'	±0,00	+2,13	+ 9,0	+75,0	359°00'	-0,02	-0,04
± 0,0	+58,0	0°00'	±0,00	+2,17	+ 9,0	+95,0	0°00'	-0,04 ⁵	-0,02 ⁵
± 0,0	+61,0	0°00'	±0,00	+2,17 ⁵	+13,5	+ 2,0	302°30'	-0,01	-0,07
± 0,0	+65,0	0°00'	±0,00	+2,18	+13,5	+ 5,0	313°30'	+0,01 ⁵	-0,14
± 0,0	+75,0	0°08'	±0,00	+2,17	+13,5	+ 8,0	320°15'	+0,02 ⁵	-0,20 ⁵
± 0,0	+95,0	0°00'	±0,00	+2,15	+13,5	+11,0	326°00'	+0,07	-0,22 ⁵
+ 2,0	+ 2,0	51°15'	-0,02 ⁵	-0,13	+13,5	+15,0	332°30'	+0,07 ⁵	-0,31
+ 2,0	+ 3,5	333°00'			+13,5	+25,0	343°00'	-0,04	-0,49 ⁵
+ 2,0	+ 5,0	0°00'	-0,72	+0,11 ⁵	+13,5	+35,0	348°30'	+0,07 ⁵	-0,65
+ 2,0	+ 6,5	26°38'			+13,5	+45,0	351°15'	+0,04 ⁵	-0,90
+ 2,0	+ 8,0	34°30'	-0,25	+0,12 ⁵	+13,5	+49,0	350°45'	-0,06 ⁵	-1,08
+ 2,0	+11,0	20°00'	-0,00 ⁵	+0,25 ⁵	+13,5	+52,0	348°00'	-0,16 ⁵	-1,13 ⁵
+ 2,0	+49,0	3°00'	+0,10 ⁵	+1,57 ⁵	+13,5	+55,0	354°00'	-0,30 ⁵	-1,02 ⁵
+ 2,0	+52,0	2°30'	+0,13	+1,69 ⁵	+13,5	+58,0	3°15'	-0,08 ⁵	-1,04
+ 2,0	+55,0	0°45'	-0,05 ⁵	+1,57	+13,5	+61,0	0°45'	+0,00 ⁵	-1,08 ⁵
+ 2,0	+58,0	0°45'	-0,06 ⁵	+1,59 ⁵	+13,5	+65,0	0°00'	+0,05 ⁵	-1,05 ⁵
+ 2,0	+61,0	0°30'	+0,00 ⁵	+1,67 ⁵	+13,5	+75,0	0°30'	-0,00 ⁵	-1,11
+ 4,5	+ 2,0	346°00'	-0,19 ⁵	-0,00 ⁵	+13,5	+95,0	0°08'	-0,05	-1,15
+ 4,5	+ 3,5	355°30'			+16,0	+ 2,0	307°00'	+0,00 ⁵	-0,01
+ 4,5	+ 5,0	7°23'	-0,36	+0,09	+16,0	+ 5,0	325°30'	+0,02	-0,05
+ 4,5	+ 6,5	20°00'			+16,0	+ 8,0	334°45'	-0,04	-0,20 ⁵
+ 4,5	+ 8,0	28°53'	-0,29	+0,17 ⁵	+16,0	+11,0	340°38'	-0,02 ⁵	-0,26 ⁵
+ 4,5	+11,0	303°23'	+0,20 ⁵	-0,18 ⁵	+16,0	+49,0	357°15'	-0,07	-1,58 ⁵
+ 4,5	+15,0	27°30'	-0,10	+0,27	+16,0	+52,0	353°45'	-0,09 ⁵	-1,73 ⁵
+ 4,5	+25,0	17°15'	-0,07	+0,45 ⁵	+16,0	+55,0	358°45'	-0,77 ⁵	-1,62
+ 4,5	+35,0	12°45'	-0,05	+0,65	+16,0	+58,0	3°45'	-0,15	-1,86
+ 4,5	+45,0	10°00'	-0,01	+0,88 ⁵	+16,0	+61,0	1°00'	-0,03	-1,73 ⁵
+ 4,5	+49,0	8°15'	+0,06 ⁵	+1,04	+18,0	+ 8,0	358°30'	±0,00	-0,34 ⁵
+ 4,5	+52,0	6°23'	+0,04 ⁵	+1,08	+18,0	+11,0	359°30'	±0,00	-0,23
+ 4,5	+55,0	4°15'	-0,03	+1,03 ⁵	+18,0	+15,0	359°45'	±0,00	-0,41
+ 4,5	+58,0	2°00'	-0,03	+1,04 ⁵	+18,0	+25,0	0°00'	±0,00	-0,85
+ 4,5	+61,0	0°30'	+0,02	+1,06 ⁵	+18,0	+35,0	0°00'	±0,00	-1,28
+ 4,5	+65,0	0°00'	+0,02	+1,07	+18,0	+45,0	0°15'	±0,00	-1,72
+ 4,5	+75,0	0°00'	+0,01	+1,07	+18,0	+49,0	0°00'	±0,00	-1,84
+ 4,5	+95,0	0°08'	+0,00 ⁵	+1,06 ⁵	+18,0	+52,0	0°00'	±0,00	-1,96
+ 9,0	+ 2,0	13°45'	-0,15	-0,01 ⁵	+18,0	+58,0	0°23'	±0,00	-2,09
+ 9,0	+ 5,0	25°30'	-0,17 ⁵	+0,07	+18,0	+61,0	0°00'	±0,00	-2,12
+ 9,0	+ 8,0	305°30'	+0,10	-0,25 ⁵	+18,0	+65,0	0°00'	±0,00	-2,13
+ 9,0	+11,0	312°15'	+0,19	-0,22	+18,0	+75,0	0°00'	±0,00	-2,17
+ 9,0	+15,0	315°15'	+0,18	-0,24	+18,0	+95,0	0°00'	±0,00	-2,15
+ 9,0	+25,0	315°38'	+0,23 ⁵	-0,18					

Tabelle III.
 Freiaufliegender Balken II. — Belastungsfall 1.
 Richtung und Größe der Hauptspannungen.

y^*	x^*	α	σ_1	σ_2	y^*	x^*	α	σ_1	σ_2
mm	mm		kg : mm ²	kg : mm ²	mm	mm		kg : mm ²	kg : mm ²
+ 0,3	+92,0	5° 08'	±0,00	+1,59 ⁵	+13,0	+65,0	358° 00'	-0,05	-0,60 ⁵
+ 0,6	+89,0	6° 00'	±0,00	+1,69 ⁵	+13,0	+75,0	358° 30'	-0,04	-0,71
+ 1,1	+85,0	6° 30'	±0,00	+1,74	+13,0	+85,0	358° 45'	-0,04 ⁵	-0,77 ⁵
+ 2,1	+75,0	6° 30'	±0,00	+1,74	+13,0	+89,0	356° 30'	-0,09 ⁵	-0,81 ⁵
+ 3,0	+85,0	6° 08'	+0,05	+1,40	+13,0	+92,0	352° 30'	-0,18	-0,80 ⁵
+ 3,0	+89,0	4° 45'	+0,03	+1,28	+13,0	+95,0	0° 00'	-0,21 ⁵	-0,65 ⁵
+ 3,0	+92,0	2° 15'	+0,00 ⁵	+1,23	+14,7	+ 3,5	347° 30'		
+ 3,0	+95,0	0° 00'	-0,03	+1,22	+14,7	+ 5,0	12° 15'	-0,38 ⁵	+0,18
+ 3,3	+65,0	7° 15'	±0,00	+1,72	+14,7	+ 6,5	33° 30'		
+ 4,6	+55,0	8° 30'	±0,00	+1,73	+14,7	+ 8,0	31° 15'	-0,16	+0,45 ⁵
+ 5,5	+65,0	7° 15'	+0,03	+1,26	+14,7	+ 9,5	26° 30'	-0,13	+0,57
+ 5,5	+75,0	7° 30'	+0,03	+1,04	+14,7	+11,0	26° 38'	-0,07 ⁵	+0,64 ⁵
+ 5,5	+85,0	7° 00'	+0,02	+0,86 ⁵	+14,7	+13,0	27° 30'	+0,03	+0,57 ⁵
+ 5,5	+89,0	4° 45'	-0,02	+0,80	+14,7	+15,0	27° 30'	-0,04	+0,38 ⁵
+ 5,5	+92,0	2° 00'	-0,07	+0,77 ⁵	+14,7	+20,0	330° 00'	-0,00 ⁵	-0,24 ⁵
+ 5,5	+95,0	0° 00'	-0,08 ⁵	+0,79	+15,5	+25,0	358° 00'	-0,02	-0,73
+ 6,0	+45,0	8° 45'	±0,00	+1,74	+15,5	+35,0	359° 30'	+0,01	-0,91
+ 7,6	+35,0	9° 45'	±0,00	+1,75	+15,5	+45,0	359° 45'	-0,02	-1,03
+ 8,0	+45,0	9° 00'	+0,02	+1,23	+15,5	+55,0	0° 00'	-0,00 ⁵	-1,11 ⁵
+ 8,0	+55,0	8° 45'	+0,05	+0,93 ⁵	+15,5	+65,0	0° 00'	-0,01	-1,17 ⁵
+ 8,0	+65,0	9° 00'	+0,04 ⁵	+0,70	+15,5	+75,0	0° 00'	-0,02 ⁵	-1,22 ⁵
+ 8,0	+75,0	10° 00'	+0,03	+0,51	+15,5	+85,0	0° 15'	-0,01	-1,25
+ 8,0	+85,0	11° 00'	-0,01 ⁵	+0,33 ⁵	+15,5	+89,0	359° 15'	-0,03 ⁵	-1,28 ⁵
+ 8,0	+89,0	8° 30'	-0,03 ⁵	+0,32 ⁵	+15,5	+92,0	355° 15'	-0,11	-1,36
+ 8,0	+92,0	4° 45'	-0,12	+0,30	+15,5	+95,0	0° 00'	-0,49	-1,16 ⁵
+ 8,0	+95,0	0° 00'	-0,13	+0,31 ⁵	+16,3	+ 3,5	20° 30'		
+ 9,5	+25,0	12° 00'	±0,00	+1,76	+16,3	+ 5,0	306° 30'	+0,09	+0,09
+10,5	+35,0	11° 45'	+0,04 ⁵	+0,89	+16,3	+ 6,5	318° 15'		
+10,5	+45,0	12° 45'	+0,01	+0,49	+16,3	+ 8,0	325° 45'	+0,20	-0,45 ⁵
+10,5	+55,0	17° 15'	+0,03	+0,28	+16,3	+ 9,5	352° 00'	(?)	(?)
+10,5	+65,0	304° 30'	+0,09	-0,03	+16,3	+11,0	338° 30'	+0,11 ⁵	-0,61 ⁵
+10,5	+75,0	338° 30'	+0,05	-0,11	+16,3	+13,0	349° 45'	+0,04	-0,70 ⁵
+10,5	+85,0	349° 15'	-0,04	-0,26 ⁵	+16,3	+15,0	356° 00'	+0,01	-0,77
+10,5	+89,0	345° 00'	-0,05 ⁵	-0,26 ⁵	+16,3	+20,0	359° 30'	-0,01	-0,99
+10,5	+92,0	333° 15'	-0,09 ⁵	-0,23 ⁵	+18,0	+ 6,5	359° 30'	+0,00	-0,31
+10,5	+95,0	0° 00'	-0,18 ⁵	-0,18 ⁵	+18,0	+ 8,0	0° 00'	+0,00	-0,69 ⁵
+10,7	+20,0	14° 15'	±0,00	+1,81	+18,0	+ 9,5	0° 00'	+0,00	-1,10 ⁵
+11,5	+25,0	13° 30'	+0,02 ⁵	+1,05 ⁵	+18,0	+11,0	0° 00'	+0,00	-1,44 ⁵
+12,0	+15,0	17° 00'	±0,00	+1,85	+18,0	+13,0	0° 00'	±0,00	-1,75
+12,6	+13,0	19° 45'	±0,00	+1,99	+18,0	+15,0	0° 00'	+0,00	-1,83
+13,0	+ 6,5	1° 00'	±0,00	+0,43	+18,0	+20,0	0° 00'	+0,00	-1,85
+13,0	+ 8,0	0° 30'	±0,00	+0,74 ⁵	+18,0	+25,0	0° 00'	+0,00	-1,78 ⁵
+13,0	+ 9,5	0° 00'	±0,00	+1,11	+18,0	+35,0	0° 00'	±0,00	-1,75 ⁵
+13,0	+11,0	2° 00'	±0,00	+1,64 ⁵	+18,0	+45,0	0° 00'	+0,00	-1,74
+13,0	+12,0	7° 45'	±0,00	+2,00	+18,0	+55,0	0° 00'	+0,00	-1,73 ⁵
+13,0	+20,0	16° 30'	+0,03 ⁵	+0,84	+18,0	+65,0	0° 00'	+0,00	-1,73
+13,0	+25,0	19° 15'	+0,00 ⁵	+0,44	+18,0	+75,0	0° 00'	+0,00	-1,73
+13,0	+35,0	322° 30'	+0,06	-0,10 ⁵	+18,0	+85,0	0° 00'	+0,00	-1,72
+13,0	+45,0	351° 30'	+0,00 ⁵	-0,30	+18,0	+89,0	1° 00'	+0,00	-1,70
+13,0	+55,0	356° 15'	-0,02	-0,47 ⁵	+18,0	+92,0	1° 00'	±0,00	-1,67

Tabelle IV.
Freiauflegender Balken III. — Belastungsfall 2.
Größe und Richtung der Hauptspannungen.

y^*	x^*	α	σ_1	σ_2	y^*	x^*	α	σ_1	σ_2
mm	mm		kg : mm ²	kg : mm ²	mm	mm		kg : mm ²	kg : mm ²
± 0,0	+55,0	3°30'	+0,00	+1,24 ⁵	+13,0	+ 8,0	7°30'	+0,00	+1,68
± 0,0	+58,0	0°08'	+0,00	+1,58 ⁵	+13,0	+ 9,0	19°45'	+0,00	+2,30
± 0,0	+61,0	0°45'	+0,00	+1,65	+13,0	+12,0	27°00'	-0,04 ⁵	+1,11 ⁵
± 0,0	+65,0	0°00'	+0,00	+1,71	+13,0	+15,0	27°30'	-0,07	+0,63 ⁵
± 0,0	+75,0	0°00'	+0,00	+1,70	+13,0	+20,0	309°30'	+0,19	-0,12 ⁵
± 0,0	+95,0	0°00'	+0,00	+1,70	+13,0	+35,0	353°45'	+0,01	-0,48
+ 0,6	+52,0	11°00'	+0,00	+1,58	+13,0	+45,0	357°00'	-0,01 ⁵	-0,65
+ 1,1	+49,0	11°15'	+0,00	+1,68	+13,0	+49,0	355°15'	-0,01	-0,66 ⁵
+ 1,9	+45,0	11°45'	+0,00	+1,71	+13,0	+52,0	352°00'	-0,18 ⁵	-0,76 ⁵
+ 3,0	+49,0	10°15'	-0,01 ⁵	+1,31	+13,0	+55,0	0°00'	-0,26	-0,70 ⁵
+ 3,0	+52,0	7°30'	-0,03 ⁵	+1,18 ⁵	+13,0	+58,0	6°00'	-0,14	-0,75 ⁵
+ 3,0	+55,0	5°15'	-0,11	+1,12 ⁵	+13,0	+61,0	2°30'	-0,06 ⁵	-0,78 ⁵
+ 3,0	+58,0	3°38'	-0,07	+1,08 ⁵	+13,5	+65,0	0°00'	+0,01 ⁵	-0,81 ⁵
+ 3,0	+61,0	1°30'	+0,01	+1,20 ⁵	+13,5	+75,0	0°00'	+0,01	-0,82
+ 4,1	+35,0	13°00'	+0,00	+1,72	+13,5	+95,0	0°00'	+0,00 ⁵	-0,83
+ 4,5	+65,0	0°00'	+0,04	+0,88	+14,7	+ 5,0	9°00'	-0,59 ⁵	+0,25
+ 4,5	+75,0	0°00'	+0,06 ⁵	+0,88	+14,7	+ 8,0	311°15'	+0,73	-0,30 ⁵
+ 4,5	+95,0	0°00'	+0,06	+0,88 ⁵	+14,7	+10,0	314°45'	+0,54	-0,12 ⁵
+ 5,5	+35,0	13°30'	+0,02	+1,41 ⁵	+14,7	+12,0	316°30'	+0,28 ⁵	-0,16 ⁵
+ 5,5	+45,0	12°30'	+0,00 ⁵	+0,98	+14,7	+15,0	335°00'	+0,05 ⁵	-0,30
+ 5,5	+49,0	10°15'	-0,03 ⁵	+0,85 ⁵	+14,7	+20,0	352°15'	-0,05	-0,57 ⁵
+ 5,5	+52,0	7°30'	-0,09	+0,77	+15,5	+35,0	359°15'	-0,02	-1,12
+ 5,5	+55,0	5°30'	-0,12	+0,70 ⁵	+15,5	+45,0	0°00'	+0,04	-1,15
+ 5,5	+58,0	3°15'	-0,08	+0,66	+15,5	+49,0	359°00'	+0,02 ⁵	-1,19 ⁵
+ 5,5	+61,0	1°45'	-0,05 ⁵	+0,63	+15,5	+52,0	354°45'	-0,12 ⁵	-1,32 ⁵
+ 8,0	+35,0	16°00'	-0,03	+0,79 ⁵	+15,5	+55,0	2°30'	-0,47	-1,18
+ 8,0	+45,0	17°00'	-0,03	+0,45 ⁵	+15,5	+58,0	4°30'	-0,08 ⁵	-1,30 ⁵
+ 8,0	+49,0	15°08'	-0,09	+0,35	+15,5	+61,0	0°30'	-0,03	-1,25 ⁵
+ 8,0	+52,0	11°00'	-0,16	+0,27	+16,3	+ 5,0	306°15'	+0,14 ⁵	-0,31 ⁵
+ 8,0	+55,0	6°38'	-0,16	+0,25 ⁵	+16,3	+ 8,0	330°15'	+0,28	-0,67
+ 8,0	+58,0	3°15'	-0,09	+0,25	+16,3	+10,0	344°45'	+0,10	-0,78 ⁵
+ 8,0	+61,0	1°00'	-0,06	+0,17	+16,3	+12,0	354°00'	-0,02	-0,89 ⁵
+ 8,1	+20,0	17°30'	+0,00	+1,71	+16,3	+15,0	358°15'	-0,02 ⁵	-1,03 ⁵
+ 9,0	+65,0	0°00'	-0,03 ⁵	-0,03 ⁵	+16,3	+20,0	359°15'	-0,07	-1,20
+ 9,0	+75,0	0°00'	-0,02 ⁵	-0,02 ⁵	+18,0	+ 5,0	358°00'	+0,00	-0,12
+ 9,0	+95,0	0°00'	-0,03	-0,03	+18,0	+ 6,5	357°30'	+0,00	-0,52 ⁵
+10,0	+15,0	22°00'	+0,00	+1,74	+18,0	+ 8,0	359°15'	+0,00	-1,09
+10,0	+20,0	19°15'	-0,02	+1,19	+18,0	+10,0	359°30'	+0,00	-1,65
+10,5	+35,0	300°30'	+0,20	-0,07 ⁵	+18,0	+12,0	0°00'	+0,00	-1,78 ⁵
+10,5	+45,0	331°30'	+0,02	-0,17 ⁵	+18,0	+15,0	0°00'	+0,00	-1,78 ⁵
+10,5	+49,0	334°00'	-0,03	-0,24	+18,0	+20,0	0°00'	+0,00	-1,75
+10,5	+52,0	325°00'	-0,12 ⁵	-0,27 ⁵	+18,0	+35,0	0°00'	+0,00	-1,71 ⁵
+10,5	+55,0	325°30'	-0,21 ⁵	-0,25 ⁵	+18,0	+45,0	0°45'	+0,00	-1,68
+10,5	+58,0	8°45'	-0,06	-0,18 ⁵	+18,0	+49,0	1°00'	+0,00	-1,66
+10,5	+61,0	4°30'	-0,08 ⁵	-0,32	+18,0	+52,0	0°15'	+0,00	-1,66 ⁵
+11,3	+12,0	25°15'	+0,00	+1,78 ⁵	+18,0	+58,0	359°15'	+0,00	-1,61
+11,5	+15,0	23°15'	-0,04 ⁵	+1,22 ⁵	+18,0	+61,0	0°00'	+0,00	-1,60
+11,5	+20,0	22°30'	-0,03 ⁵	+0,70 ⁵	+18,0	+65,0	0°00'	+0,00	-1,67
+12,3	+10,0	29°00'	+0,00	+1,94	+18,0	+75,0	0°00'	+0,00	-1,69
+13,0	+ 6,5	6°45'	+0,00	+0,72 ⁵	+18,0	+95,0	0°00'	+0,00	-1,71

Tabelle V.
Freiauflegender Balken IV. — Belastungsfall 1.
Größe und Richtung der Hauptspannungen.

y^*	x^*	α	σ_1	σ_2	y^*	x^*	α	σ_1	σ_2
mm	mm		kg : mm ²	kg : mm ²	mm	mm		kg : mm ²	kg : mm ²
+ 0,6	+47,0	11°30'	±0,00	+1,19 ⁵	+13,0	+20,0	318°30'	+0,14 ⁵	-0,09 ⁵
+ 1,3	+44,0	12°00'	±0,00	+1,40	+13,0	+25,0	341°15'	+0,02 ⁵	-0,24
+ 2,1	+40,0	12°30'	±0,00	+1,45	+13,0	+30,0	351°45'	-0,02	-0,38 ⁵
+ 3,0	+44,0	10°00'	+0,01	+1,15	+13,0	+35,0	355°30'	-0,01 ⁵	-0,47
+ 3,0	+47,0	5°00'	-0,01	+1,03	+13,0	+40,0	356°23'	-0,02	-0,54
+ 3,0	+50,0	0°00'	-0,09	+0,98	+13,0	+44,0	351°45'	-0,10 ⁵	-0,63
+ 3,3	+35,0	14°00'	±0,00	+1,44	+13,0	+47,0	341°00'	-0,22 ⁵	-0,65 ⁵
+ 4,6	+30,0	15°15'	±0,00	+1,43 ⁵	+13,0	+50,0	359°15'	-0,52 ⁵	-0,57
+ 5,5	+35,0	14°30'	+0,03 ⁵	+1,10	+14,5	+ 3,5	8°45'		
+ 5,5	+40,0	13°15'	±0,00	+0,89	+14,5	+ 5,0	22°00'	-0,30 ⁵	+0,13
+ 5,5	+44,0	9°00'	-0,06	+0,73 ⁵	+14,5	+ 6,5	35°30'		
+ 5,5	+47,0	4°00'	-0,11 ⁵	+0,70 ⁵	+14,5	+ 8,0	43°45'	-0,40	+0,33 ⁵
+ 5,5	+50,0	0°00'	-0,15 ⁵	+0,71 ⁵	+14,5	+ 9,5	318°30'	+0,38 ⁵	-0,32 ⁵
+ 6,0	+25,0	16°30'	±0,00	+1,44 ⁵	+14,5	+11,0	323°45'	+0,34	-0,32
+ 7,6	+20,0	19°15'	±0,00	+1,46	+14,5	+13,0	331°30'	+0,27	-0,22
+ 8,0	+25,0	17°15'	+0,06 ⁵	+1,11 ⁵	+14,5	+15,0	338°45'	+0,10	-0,30
+ 8,0	+30,0	17°00'	+0,03 ⁵	+0,83	+15,5	+20,0	357°45'	-0,02 ⁵	-0,75 ⁵
+ 8,0	+35,0	17°00'	+0,05 ⁵	+0,66	+15,5	+25,0	359°00'	-0,04 ⁵	-0,87 ⁵
+ 8,0	+40,0	17°00'	-0,03 ⁵	+0,42 ⁵	+15,5	+30,0	0°00'	-0,05	-0,94 ⁴
+ 8,0	+44,0	12°30'	-0,10	+0,36 ⁵	+15,5	+35,0	0°00'	-0,04	-0,97 ⁵
+ 8,0	+47,0	6°30'	-0,18	+0,34 ⁵	+15,5	+40,0	0°00'	-0,04	-1,00 ⁵
+ 8,0	+50,0	0°30'	-0,23	+0,34	+15,5	+44,0	358°15'	-0,03	-1,04
+ 9,5	+15,0	22°45'	±0,00	+1,45 ⁵	+15,5	+47,0	350°30'	-0,17 ⁵	-1,18 ⁵
+10,5	+13,0	25°00'	±0,00	+1,63	+15,5	+50,0	(?)	(?)	(?)
+10,5	+20,0	21°15'	-0,02	+0,77	+16,3	+ 3,5	301°30'		
+10,5	+25,0	22°15'	±0,00	+0,51	+16,3	+ 5,0	312°30'	+0,07 ⁵	-0,17
+10,5	+30,0	27°08'	-0,04	+0,25 ⁵	+16,3	+ 6,5	321°15'		
+10,5	+35,0	39°00'	-0,06	+0,13 ⁵	+16,3	+ 8,0	329°00'	+0,15	-0,45 ⁵
+10,5	+40,0	324°30'	+0,05 ⁵	-0,12 ⁵	+16,3	+ 9,5	336°15'	+0,09	-0,60
+10,5	+44,0	316°45'	±0,00	-0,19 ⁵	+16,3	+11,0	343°00'	+0,12	-0,62
+10,5	+47,0	25°45'	-0,25 ⁵	-0,04 ⁵	+16,3	+13,0	351°00'	+0,04 ⁵	-0,75
+10,5	+50,0	1°30'	-0,31 ⁵	-0,08	+16,3	+15,0	356°00'	-0,02 ⁵	-0,86 ⁵
+11,0	+ 6,5	4°15'	±0,00	+0,36	+18,0	+ 6,5	357°00'	±0,00	-0,26
+11,0	+ 8,0	0°30'	±0,00	+0,65	+18,0	+ 8,0	359°15'	±0,00	-0,53 ⁵
+11,0	+ 9,5	1°00'	±0,00	+0,94	+18,0	+ 9,5	0°00'	±0,00	-0,82 ⁵
+11,0	+11,0	5°00'	±0,00	+1,52 ⁵	+18,0	+11,0	0°00'	±0,00	-1,13
+11,0	+12,0	16°45'	±0,00	+2,02	+18,0	+13,0	0°00'	±0,00	-1,35 ⁵
+11,0	+15,0	22°30'	+0,02 ⁵	+1,14	+18,0	+15,0	0°00'	±0,00	-1,46
+12,8	+ 3,5	338°15'			+18,0	+20,0	0°00'	±0,00	-1,45 ⁵
+12,8	+ 5,0	4°00'	-0,55	+0,19	+18,0	+25,0	0°00'	±0,00	-1,45 ⁵
+12,8	+ 6,5	30°00'			+18,0	+30,0	0°00'	±0,00	-1,44 ⁵
+12,8	+ 8,0	31°00'	-0,19	+0,48	+18,0	+35,0	0°00'	±0,00	-1,41
+12,8	+ 9,5	28°00'	-0,12	+0,59	+18,0	+40,0	0°00'	±0,00	-1,38 ⁵
+12,8	+11,0	29°45'	-0,00 ⁵	+0,76	+18,0	+44,0	0°00'	±0,00	-1,35
+12,8	+13,0	29°30'	+0,08	+0,70	+18,0	+47,0	0°00'	±0,00	-1,35 ⁵
+12,8	+15,0	28°30'	+0,03 ⁵	+0,57					

Tabelle VI.
Freiaufliegender Balken V. — Belastungsfall 2.
Größe und Richtung der Hauptspannungen.

y^*	x^*	α	σ_1	σ_2	y^*	x^*	α	σ_1	σ_2
mm	mm		kg : mm ²	kg : mm ²	mm	mm		kg : mm ²	kg : mm ²
± 0,0	+30,0	7°00'	+0,00	+0,59 ⁵	+12,8	+ 8,0	43°00'	-0,24	+0,70
± 0,0	+33,0	1°00'	+0,00	+0,99 ⁵	+12,8	+ 9,3	46°00'	-0,04	+0,67 ⁵
± 0,0	+36,0	0°00'	+0,00	+1,11	+12,8	+11,0	44°15'	-0,03 ⁵	+0,49 ⁵
± 0,0	+40,0	0°00'	+0,00	+1,15	+12,8	+13,0	45°00'	-0,09 ⁵	+0,31
± 0,0	+50,0	0°00'	+0,00	+1,13 ⁵	+13,0	+15,0	326°30'	+0,13	-0,16 ⁵
+ 1,1	+27,0	21°15'	+0,00	+1,06	+13,0	+20,0	347°15'	+0,00 ⁵	-0,31
+ 2,3	+24,0	22°30'	+0,00	+1,21	+13,0	+24,0	348°45'	-0,08 ⁵	-0,47
+ 3,0	+27,0	15°30'	-0,04 ⁵	+0,86 ⁵	+13,0	+27,0	340°08'	-0,21	-0,53 ⁵
+ 3,0	+30,0	10°30'	-0,10 ⁵	+0,77 ⁵	+13,0	+30,0	353°30'	-0,39 ⁵	-0,46 ⁵
+ 3,0	+33,0	7°15'	-0,05 ⁵	+0,74 ⁵	+13,0	+33,0	15°00'	-0,18 ⁵	-0,52
+ 4,1	+20,0	25°00'	+0,00	+1,27 ⁵	+13,5	+36,0	4°45'	-0,06 ⁵	-0,60
+ 4,5	+36,0	4°15'	-0,07 ⁵	+0,54	+13,5	+40,0	0°45'	-0,05 ⁵	-0,61
+ 4,5	+40,0	1°00'	-0,01	+0,54	+13,5	+50,0	0°00'	-0,04 ⁵	-0,60
+ 4,5	+50,0	0°00'	+0,01	+0,55	+14,5	+ 3,5	12°30'		
+ 5,5	+20,0	25°00'	+0,00 ⁵	+1,07	+14,5	+ 5,0	27°15'	-0,44 ⁵	+0,22 ⁵
+ 5,5	+24,0	20°30'	-0,04 ⁵	+0,79 ⁵	+14,5	+ 6,5	311°30'		
+ 5,5	+27,0	14°30'	-0,09	+0,63 ⁵	+14,5	+ 8,0	322°00'	+0,39	-0,50 ⁵
+ 5,5	+30,0	10°00'	-0,17 ⁵	+0,52	+14,5	+ 9,3	329°30'	+0,36	-0,39
+ 5,5	+33,0	7°15'	-0,13	+0,48 ⁵	+14,5	+11,0	337°00'	+0,21	-0,34 ⁵
+ 6,6	+15,0	30°15'	+0,00	+1,32 ⁵	+14,5	+13,0	345°15'	+0,08	-0,38
+ 7,0	+13,0	32°00'	+0,00	+1,35	+15,5	+15,0	357°15'	+0,00 ⁵	-0,68
+ 8,0	+15,0	30°15'	-0,02	+1,09 ⁵	+15,5	+20,0	0°00'	-0,04	-0,78
+ 8,0	+20,0	26°45'	-0,05 ⁵	+0,66	+15,5	+24,0	359°00'	-0,06 ⁵	-0,86
+ 8,0	+24,0	22°30'	-0,08 ⁵	+0,46	+15,5	+27,0	351°38'	-0,14	-0,94 ⁵
+ 8,0	+27,0	16°15'	-0,13 ⁵	+0,35 ⁵	+15,5	+30,0	2°30'	-0,62	-0,76 ⁵
+ 8,0	+30,0	10°00'	-0,20	+0,26	+15,5	+33,0	9°00'	-0,13	-0,94 ⁵
+ 8,0	+33,0	5°00'	-0,17 ⁵	+0,18	+16,3	+ 3,5	305°30'		
+ 9,0	+36,0	357°30'	-0,11	+0,00	+16,3	+ 5,0	316°00'	+0,08	-0,31
+ 9,0	+40,0	(?)	+0,00	+0,00	+16,3	+ 6,5	325°45'		
+ 9,0	+50,0	(?)	+0,00	+0,00	+16,3	+ 8,0	334°30'	+0,15	-0,57 ⁵
+ 9,2	+11,0	34°45'	+0,00	+1,53 ⁵	+16,3	+ 9,3	342°30'	+0,13	-0,62 ⁵
+ 9,5	+13,0	31°45'	-0,02 ⁵	+1,06 ⁵	+16,3	+11,0	350°45'	+0,01 ⁵	-0,75
+10,0	+10,0	34°45'	+0,00	+1,63	+16,3	+13,0	356°30'	-0,00 ⁵	-0,81 ⁵
+10,5	+ 9,3	30°00'	+0,00	+2,06	+18,0	+ 5,0	356°30'	+0,00	-0,12 ⁵
+10,5	+15,0	31°30'	-0,07 ⁵	+0,60 ⁵	+18,0	+ 6,5	0°00'	+0,00	-0,38 ⁵
+10,5	+20,0	35°30'	-0,10 ⁵	+0,26 ⁵	+18,0	+ 8,0	0°00'	+0,00	-0,72
+10,5	+24,0	38°00'	-0,16	+0,11	+18,0	+ 9,3	0°00'	+0,00	-1,02 ⁵
+10,5	+27,0	30°00'	-0,21	+0,02 ⁵	+18,0	+11,0	0°00'	+0,00	-1,25
+10,5	+30,0	11°38'	-0,24	-0,05 ⁵	+18,0	+13,0	0°00'	+0,00	-1,30
+10,5	+33,0	340°00'	-0,22 ⁵	-0,16 ⁵	+18,0	+15,0	0°00'	+0,00	-1,30 ⁵
+11,0	+ 3,5	358°00'	+0,00	+0,05	+18,0	+20,0	0°00'	+0,00	-1,24
+11,0	+ 6,5	0°30'	+0,00	+0,69	+18,0	+24,0	0°30'	+0,00	-1,18 ⁵
+11,0	+ 8,0	9°45'	+0,00	+1,61 ⁵	+18,0	+27,0	1°00'	+0,00	-1,17
+11,0	+11,0	31°15'	+0,04	+1,05 ⁵	+18,0	+33,0	359°30'	+0,00	-1,10
+11,0	+13,0	32°00'	-0,04	+0,73	+18,0	+36,0	0°00'	+0,00	-1,07
+12,8	+ 3,5	344°23'			+18,0	+40,0	0°00'	+0,00	-1,09
+12,8	+ 5,0	11°15'	-0,81	+0,34	+18,0	+50,0	0°00'	+0,00	-1,13
+12,8	+ 6,5	35°00'							

Leer - Vide - Empty

2. Teil

Theoretische Untersuchungen über die Eigenfrequenz parallelogrammförmiger Platten

Einleitung

Bei der Berechnung und Dimensionierung von Platten hat der Ingenieur meistens auf zwei Probleme zu achten:

1. Auf die *Festigkeit* der Platte, d. h. er muß die *Durchbiegungen* und die *inneren Spannungen* bestimmen, wenn die Platte durch *zeitlich konstante Kräfte* beansprucht wird.

2. Wenn diese *Kräfte* zeitlich nicht konstant sind und insbesondere, wenn sie *periodisch* auftreten, wird neben dem ersten Problem ein zweites von sehr großer Wichtigkeit sein: das *Schwingungsproblem*. Bei ihm wird es dem Ingenieur hauptsächlich darauf ankommen, die *Eigenfrequenzen* (Grundton und eventuell höhere harmonische Schwingungen) der Platte zu kennen, wohl meistens wegen der gefährlichen Resonanzfälle.

Wir werden uns im Folgenden mit diesem Problem befassen.

Entsprechend der Wichtigkeit der Plattenschwingungen haben sich schon viele Theoretiker mit ihm abgegeben. Wir erwähnen hier nur einige Abhandlungen über dieses Gebiet: [25], [26], [27], [28], [29], [30] und [31]. In diesen Veröffentlichungen werden Platten von rechteckiger, quadratischer oder runder Form untersucht.

In der Praxis, besonders beim Brückenbau, trifft man aber auch Platten an, deren Rand ein Parallelogramm ist. Wir wollen sie, zum Unterschied von den rechteckigen Platten, als „schiefe Platten“ bezeichnen.

Die Bestimmung der Eigenfrequenz dieser schiefen Platten bildet den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung. Wir haben uns dabei zur *Aufgabe gestellt, theoretisch die Grundfrequenz schiefer Platten als Funktion der ihre Form definierenden Parameter zu bestimmen*. Diese sind einmal das Seitenverhältnis a/b und dann aber auch der von zwei anliegenden Seiten des Parallelogramms gebildete Winkel α .

Unseres Wissens wurde dieses Problem noch nie in Angriff genommen, wohl daher, weil man bis vor kurzem für die Behandlung schiefer Platten auf ganz beträchtliche mathematische Schwierigkeiten stieß, die sich aber durch ein geeignetes Achsensystem teilweise beheben lassen. *H. Favre* hat in zwei Artikeln [32] und [33] den großen Vorteil aufgezeigt, den die Einführung eines kartesisch-schiefwinkligen Achsensystemes für die Berechnung der Durchbiegungen und der Spannungen in schiefen Platten mit sich bringt. Die Vermutung lag also nahe, daß auch für die Bestimmung der Eigenfrequenz ein solches Achsensystem günstig sei.

Wir haben von Anfang an auf eine strenge mathematische Lösung verzichtet und uns dagegen bemüht, das Problem durch *Näherungsverfahren* so zu lösen, daß die Genauigkeit der Resultate für den Ingenieur genügend ist.

In § 1 rekapitulieren wir die wichtigsten Gleichungen der Plattentheorie für kartesisch-rechtwinklige Koordinaten.

§ 2 führt das kartesisch-schiefwinklige Achsensystem ein, stellt die Transformationsgleichungen auf und rechnet die wichtigsten Gleichungen der Plattentheorie auf schiefe Koordinaten um.

§ 3 beschreibt die Näherungsmethode von Rayleigh und zeigt die Anwendung dieser Methode auf den Fall einer am Rande eingespannten, schiefen Platte.

§ 4 erklärt die Näherungsmethode von Ritz und bestimmt die Eigenfrequenz einer am Rande eingespannten, schiefen Platte.

§ 5 enthält die Berechnung der Grundfrequenz einer am Rande eingespannten, schiefen Platte mit einer Einzelmasse M

in der Mitte. Die gleichmäßig über die Fläche verteilte Masse, die von der Platte selber herrührt, wird dabei gegenüber der Einzelmasse in der Mitte vernachlässigt.

§ 6 ergänzt den vorherigen Paragraphen, indem er die Masse der Platte mitberücksichtigt.

§ 7 behandelt den Fall einer am Rande freiaufliegenden, schiefen Platte und gibt vorerst eine Lösung nach der Methode von Rayleigh an, die allerdings nur im Gebiet $80^{\circ} \leq \alpha \leq 100^{\circ}$ gut stimmt.

§ 8 beschreibt eine neue Methode für die Berechnung der Eigenfrequenz mit Hilfe der Differenzenrechnung.

§ 9 berechnet nacheinander die vier ersten Näherungen dieser Methode und diskutiert die Resultate.

§ 10 enthält einige Schlußbetrachtungen und § 11 eine Zusammenfassung der ganzen Untersuchung.

§ 1. Rekapitulation der wichtigsten Gleichungen der Plattentheorie für kartesisch-rechtwinklige Koordinaten¹⁾

Betrachten wir eine Platte der Dicke h , die durch äußere Kräfte beansprucht wird, die senkrecht zu den Flächen der Platte stehen. Sie sei am Rande eingespannt oder freiauflegend gedacht²⁾ (siehe Fig. 1). Wir wählen ein kartesisch-rechtwinkliges, festes Achsensystem, von dem die x - und y -Achse in derjenigen Ebene liegen, die von den beiden unverformten Flächen der Platte gleichen Abstand besitzt. $\zeta = \overline{PP'}$ sei die Verschiebung eines Punktes $P(x, y)$ dieser Ebene parallel zur z -Achse. Der geo-

1) Die Ausführungen der ersten beiden Paragraphen sind dem Artikel von *H. Favre* [32] entnommen.

2) Wir bezeichnen als Platte einen Körper, der aus einem Prisma oder einem Zylinder durch zwei Ebenen, die senkrecht zu den Mantellinien stehen, herausgeschnitten wird. Der Abstand der beiden parallelen Ebenen, der die Dicke der Platte h darstellt, sei gegenüber den anderen Abmessungen als klein vorausgesetzt. Die Basis und die obere Begrenzung der Platte wird die untere bzw. obere Fläche genannt. Da die Dicke klein ist, wird sie oft durch eine Linie dargestellt, die den Rand der Platte bildet.

metrische Ort der Punkte P' (x, y, ζ) wird die „elastische Fläche“ genannt.

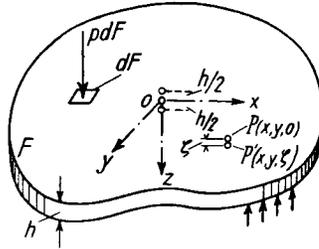


Fig. 1.

In der Theorie der Platten zeigt man, daß die Spannungen $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots$ in einem Punkt (x, y, z) durch folgende Beziehungen mit den Deformationen verknüpft sind ³⁾:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= -\frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{E}{1+\nu} z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}, \\ \sigma_z &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Darin ist E der Elastizitätsmodul, $\nu = 1/m$ die Poissonsche Zahl.

Die Formeln (1) erlauben uns, die Spannungen zu berechnen, wenn wir die Funktion $\zeta(x, y)$ kennen. Diese Funktion muß

1. der partiellen Differentialgleichung 4. Grades genügen:

$$\Delta \Delta \zeta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = \frac{12(1-\nu^2)}{E h^3} p, \quad (2)$$

wobei $p(x, y)$ die Belastung pro Flächeneinheit und Δ der Laplacesche Operator ist und

2. die Randbedingungen erfüllen.

³⁾ Siehe z. B. [34], S. 125 u. ff.

Die innere Deformationsarbeit ist durch das doppelte Integral über die Fläche F der Platte gegeben:

$$A = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \iint_{(F)} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dF. \quad (3)$$

Da die Deformationsarbeit A in Form von potentieller Energie V in der Platte aufgespeichert ist, so ist diese

$$V = A. \quad (4)$$

§ 2. Die wichtigsten Gleichungen der Plattentheorie für kartesisch-schiefwinklige Koordinaten

Um die Gleichungen aufzustellen, benützen wir die Beziehungen (1) bis (4) und führen eine Koordinatentransformation durch.

Es sei x, y, z das vorher definierte Achsensystem. Wir führen jetzt ein zweites System u, v, z so ein, daß die Achsen u und z mit den Achsen x bzw. z zusammenfallen und die in der (x, y) -Ebene liegende v -Achse mit u den Winkel α einschließt (Fig. 2).

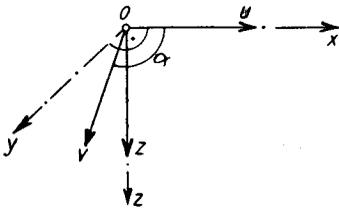


Fig. 2.

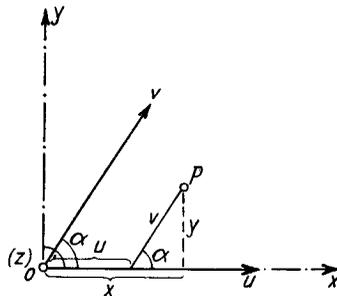


Fig. 3.

Die Transformationsgleichungen lauten (Fig. 3):

$$x = u + v \cos \alpha, \quad y = v \sin \alpha, \quad z = z. \quad (5)$$

Daraus folgt: $u = x - \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad v = \frac{y}{\sin \alpha} \quad \text{und} \quad (6)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Wenn wir bemerken, daß wir ζ als zusammengesetzte Funktion der unabhängigen Variablen x, y betrachten können,

$$\zeta = \zeta [u(x,y), v(x,y)],$$

so werden nach den Differenzationsregeln für diese Funktionen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= \frac{\partial \zeta}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial v} \cdot 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{aligned} \quad (7)$$

und analog $\frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial u} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial v}.$ (8)

Ferner wird: $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2},$ (9)

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} - \frac{2}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \quad \text{und} \quad (11)$$

$$\Delta \zeta = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right). \quad (12)$$

Unter Berücksichtigung von (9), (10) und (11) wird aus (1) nach einigen Umbildungen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{\nu Ez}{(1 - \nu^2) \sin^2 \alpha} \left[\left(\cos^2 \alpha + \frac{1}{\nu} \sin^2 \alpha \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right], \\ \sigma_y &= -\frac{\nu Ez}{(1 - \nu^2) \sin^2 \alpha} \left[\left(\frac{1}{\nu} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\nu} \cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right], \\ \tau_{xy} &= \frac{Ez}{(1 + \nu) \sin \alpha} \left(\cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right), \\ \sigma_z &= \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

Wenn wir zweimal (12) anwenden, so wird aus (2):

$$\frac{1}{\sin^4 \alpha} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right) = \frac{12(1-\nu^2)p}{Eh^3}$$

$$\boxed{\frac{\partial^4 \zeta}{\partial u^4} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial v^4} - 4 \cos \alpha \left(\frac{\partial^4 \zeta}{\partial u^3 \partial v} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial u \partial v^3} \right) + 2(1+2\cos^2 \alpha) \frac{\partial^4 \zeta}{\partial u^2 \partial v^2} = \frac{12(1-\nu^2)\sin^4 \alpha p}{Eh^3}} \quad (2')$$

Dies ist die Differentialgleichung der elastischen Fläche in schiefwinkligen Koordinaten.

Wenn wir bemerken, daß $dF = \sin \alpha \, du \, dv$ ist, so wird die potentielle Energie aus (3) und (4) nach einigen Umstellungen:

$$\boxed{V = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)\sin^3 \alpha} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right)^2 + 2(\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} + 2[2\cos^2 \alpha + (1-\nu)\sin^2 \alpha] \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right)^2 - 4 \cos \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right\} du \, dv.} \quad (3')$$

Kehren wir zum System (1') zurück. Auf der rechten Seite der drei ersten Gleichungen treten nur die Variablen u, v, z auf, währenddem auf der linken Seite die Spannungen noch die Indices x, y, z tragen. Um auch dort die Indices u, v, z einzuführen, *definieren wir die Komponenten der Spannungen in schiefwinkligen Koordinaten.*

Zu diesem Zweck betrachten wir zwei Flächenelemente, die parallel zu den Achsen u, z und v, z liegen (Fig. 4).

Wenn wir die totale Spannung, welche auf das erste Element wirkt, nach den beiden Richtungen v und u zerlegen, so erhalten wir zwei Komponenten, die wir durch σ_v und τ_{vu} bezeich-

nen werden. In analoger Weise definieren wir σ_u und τ_{uv} , indem wir die totale Spannung in bezug auf das zweite Flächenelement wiederum nach den Richtungen u und v zerlegen.

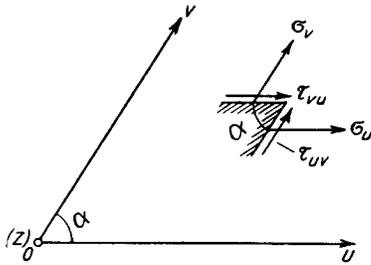


Fig. 4.

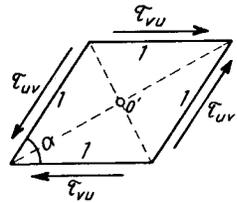


Fig. 5.

Bemerkung: Die Spannungen σ_u und σ_v sind im allgemeinen nicht mehr senkrecht zu den Flächenelementen. Nur im Spezialfall $\alpha = \frac{\pi}{2}$ fallen die neuen Komponenten der Spannungen mit den alten zusammen. Wir dürfen in diesem Falle die Indices u, v durch x, y ersetzen.

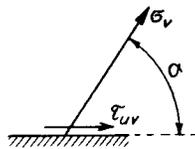
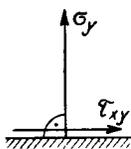
Durch Anwendung des Momentensatzes in bezug auf die Achse O' , parallel zu z , sieht man aus der Fig. 5, daß

$$\tau_{uv} = \tau_{vu} \quad (13)$$

ist, für beliebige Winkel α .

Was die Spannungen $\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ anbetrifft, so werden sie durch $\sigma_z, \tau_{vz}, \tau_{zu}$ ersetzt, deren Definition nun selbstverständlich ist. Die Indices der Spannungen τ_{vz} und τ_{zu} können ebenfalls vertauscht werden.

Suchen wir jetzt die Beziehungen zwischen den neuen und den alten Spannungen, so liefert der Vergleich zwischen dem linken und rechten Teil der Fig. 6:



$$\begin{aligned} \sigma_y &= \sigma_v \sin \alpha, \\ \tau_{xy} &= \tau_{uv} + \sigma_v \cos \alpha. \end{aligned}$$

Fig. 6.

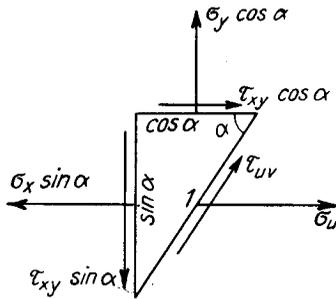


Fig. 7.

Andererseits muß die Summe der Projektionen der Kräfte auf die u-Achse, die auf das Volumenelement der Fig. 7 wirken, null sein:

$$\sigma_u + \tau_{uv} \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha - \sigma_x \sin \alpha = 0.$$

Aus den drei letzten Gleichungen folgt:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_u &= \sin \alpha \sigma_x + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \sigma_y - 2 \cos \alpha \tau_{xy}, \\ \sigma_v &= \frac{1}{\sin \alpha} \sigma_y, \quad \tau_{uv} = \tau_{xy} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \sigma_y. \end{aligned} \right\}$$

Wenn wir schließlich σ_x , σ_y , τ_{xy} durch die Werte von (1') ersetzen, so erhalten wir die Ausdrücke für die schiefen Spannungen als Funktion der Deformationen:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_u &= -\frac{Ez}{(1-\nu^2)\sin^3\alpha} \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} + \right. \\ &\quad \left. + (\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right], \\ \sigma_v &= -\frac{Ez}{(1-\nu^2)\sin^3\alpha} \left[(\cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right], \\ \tau_{uv} &= \frac{Ez}{(1-\nu^2)\sin^3\alpha} \left[\cos \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \{ (1 + \nu) \sin^2 \alpha - 2 \} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right], \\ \sigma_z &= \tau_{vz} = \tau_{zu} = 0. \end{aligned}} \quad (1'')$$

Die rechte Seite von (1'') ist viel symmetrischer als die von (1'). Als Kontrolle sei hier erwähnt, daß wir die Gleichungen (1), (2), (3) und (4) aus (1''), (2'), (3') und (4') erhalten, wenn wir darin setzen:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad u = x, \quad v = y.$$

Wir wollen jetzt die Randbedingungen für zwei bestimmte Fälle aufschreiben: 1. für die am Rande eingespannte und 2. für die am Rande freiaufliegende, schiefe Platte.

Zu diesem Zweck betrachten wir eine Platte, deren Rand ein Parallelogramm mit den Seiten $2a$ und $2b$ bildet, welche einen Winkel α miteinander einschließen.

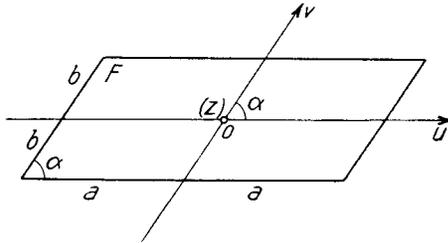


Fig. 8.

Wir wählen in der Mittelebene der Platte das Achsensystem u, v, z , welches in der Fig. 8 dargestellt ist. Dank der geschickten Wahl dieser Koordinaten, werden wir die Randbedingungen ohne Mühe in eine Formel fassen können. Sie lauten:

1. Eingespannte Platte:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } u = \pm a: \quad \zeta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial u} = 0 \\ \text{für } v = \pm b: \quad \zeta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v} = 0 \end{array} \right\} \quad (14)$$

2. Freiaufliegende Platte:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } u = \pm a: \quad \zeta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} = 0 \\ \text{für } v = \pm b: \quad \zeta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} = 0 \end{array} \right\} \quad (15)$$

Die Bedingungen für die eingespannte Platte sagen aus, daß längs des ganzen Randes die Verschiebung in der z -Richtung $\zeta = 0$ sein muß, und daß ferner längs des Randes die verformte Platte überall eine horizontale Tangente besitzen muß.

Die Bedingungen für die freiaufliegende Platte zeigen vorerst einmal, daß wiederum am Rande die Verschiebungen in der z -Richtung $\zeta = 0$ sein müssen. Die Bedingungen der zweiten Ableitungen drücken aus, daß $\sigma_u = 0$ sein muß, für $u = \pm a$ und ferner $\sigma_v = 0$, für $v = \pm b$. Um dies einzusehen, bemerken wir, daß für $u = \pm a$ nach der ersten Bedingung (15) $\zeta = 0$ und damit auch $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} = 0$ sein muß. Gehen wir mit diesem Wert in die erste Gleichung (1''), so wird $\sigma_u = 0$, falls $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} = 0$ ist. In ganz analoger Weise folgt die Bedingung für $\sigma_v = 0$ an den Rändern $v = \pm b$.

Weitere Bedingungen für die freiaufliegende Platte sind nicht vorhanden. Insbesondere weiß man seit den Arbeiten von Kirchhoff, daß es nicht nötig ist, die Schubspannungen am Rande 0 zu setzen. Diese können nämlich durch äquivalente Einzelkräfte in den vier Ecken ersetzt werden⁴⁾.

Kehren wir nochmals zu der potentiellen Energie V zurück. Wir haben für V den allgemeinen Ausdruck (3') gefunden, der für eine beliebige Form des Randes und für beliebige Randbedingungen gültig ist.

Falls nun die Platte die Form eines Parallelogrammes besitzt und ζ längs des ganzen Randes null ist, vereinfacht sich dieser Ausdruck, denn es ist:

$$\iint_{(F)} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} du dv = \iint_{(F)} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right)^2 du dv. \quad (16)$$

Der Beweis hierfür wird durch zweimalige partielle Integration erbracht:

$$\iint_{(F)} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} du dv = \int_{-b}^{+b} dv \int_{-a}^{+a} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u} \right) du =$$

⁴⁾ Siehe z. B. [34], S. 160 u. ff.

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-b}^{+b} dv \left\{ \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \frac{\partial \zeta}{\partial u} \right]_{-a}^{+a} - \int_{-a}^{+a} \frac{\partial \zeta}{\partial u} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial u \partial v^2} du \right\} = \\
 &= - \int_{-a}^{+a} du \int_{-b}^{+b} \frac{\partial \zeta}{\partial u} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial u \partial v^2} dv = - \int_{-a}^{+a} du \int_{-b}^{+b} \frac{\partial \zeta}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right) dv = \\
 &= - \int_{-a}^{+a} du \left\{ \left[\frac{\partial \zeta}{\partial u} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right]_{-b}^{+b} - \int_{-b}^{+b} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right)^2 dv \right\} = \iint_{(F)} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right)^2 du dv.
 \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (3') wird unter Berücksichtigung von (16):

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 V &= \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)\sin^3\alpha} \iint_{(F)} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right)^2 + \right. \\
 &+ 2(1+2\cos^2\alpha) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right)^2 - 4\cos\alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \left. \right\} du dv.
 \end{aligned}
 } \quad (3'')$$

Dies ist der Ausdruck der potentiellen Energie einer schiefen Platte, deren Rand (eingespannt oder freiauflegend) der folgenden Bedingung genügt:

$$\zeta = 0 \text{ für } u = \pm a \text{ und } v = \pm b.$$

§ 3. Die Näherungsmethode von Rayleigh und ihre Anwendung zur Berechnung der Eigenfrequenz der allseitig eingespannten, schiefen Platte

Wir machen folgende Voraussetzungen, die für alle Theorien gültig sein sollen:

1. Das Plattenmaterial sei vollkommen elastisch.
2. Es sei homogen und isotrop.
3. Die Dicke der Platte h sei konstant und klein gegenüber den andern Abmessungen.
4. Die Amplitude der Schwingung soll sehr klein sein.
5. Die Umsetzung der kinetischen Energie in Lagenenergie und umgekehrt sei verlustlos.

Lord Rayleigh hat in seinem Werk [35] eine Näherungsmethode für die Berechnung der Eigenfrequenz schwingender Kör-

per angegeben. Wir wollen diese Methode in ihrer Anwendung auf die Platten erläutern.

Sie besteht in der Wahl eines Ansatzes $\zeta = f(u, v)$ für die Durchbiegung der Platte und in der Untersuchung der Plattenenergie. Dabei wird die *potentielle Energie V im Umkehrpunkt der Schwingung* (Moment der maximalen Auslenkung der Platte) berechnet und ferner ihre *kinetische Energie T im Moment des Durchganges durch die Nullage*, d. h. im Augenblick, in dem die Durchbiegung ζ ihr Vorzeichen ändert. Diese beiden Energien müssen einander gleich sein, denn nach der Voraussetzung 5 ist die Energieumsetzung verlustlos. Aus der Gleichung

$$(T)_{0\text{-Lage}} = (V)_{\text{Umkehrpunkt}}$$

oder kurz:
$$T = V \quad (17)$$

wird die Eigenfrequenz der Platte bestimmt.

Den Ausdruck der potentiellen Energie V kennen wir mit (3") bereits. Die kinetische Energie in der Nullage finden wir durch folgende Überlegung:

Schwingt eine Platte mit ihrer Eigenfrequenz, so wissen wir, daß diese Schwingung harmonisch ist und daß sich die Durchbiegung $z_0 = f(u, v, t)$ wie folgt schreiben läßt:

$$z_0 = \cos(\omega t) \cdot \zeta(u, v). \quad (18)$$

$\omega =$ Kreisfrequenz,
 $t =$ Zeit.

Aus dieser Gleichung können wir die Zeitpunkte bestimmen, in denen die Platte durch ihre Nullage geht. Es wird:

$$z_0 = 0 \quad \text{für} \quad t_q = \frac{(2q + 1)\pi}{2\omega},$$

wobei q eine beliebige, positive ganze Zahl bedeutet.

Die kinetische Energie eines unendlich kleinen Elementes der Platte mit der Fläche dF und der Höhe h ist:

$$dT = \rho h dF \frac{\dot{z}_0^2}{2}. \quad (19)$$

$\rho =$ spezifische Masse,
 $\rho h dF =$ Masse des Elementes,
 $\dot{z}_0 = \frac{dz_0}{dt} =$ Geschwindigkeit des Elementes in der z -Richtung.

Berechnen wir aus (18) \dot{z}_0 und setzen den Wert in (19) ein, so wird:

$$dT = \frac{1}{2} \rho h dF \sin^2(\omega t) \omega^2 \zeta^2.$$

Für die Momente des Durchganges durch die Nullage wird mit $t = t_q$:

$$dT = \frac{1}{2} \rho h dF \underbrace{\sin^2(\omega t_q)}_{=1} \omega^2 \zeta^2 = \frac{1}{2} \rho h dF \omega^2 \zeta^2.$$

Bemerken wir noch, daß für schiefwinklige Koordinaten $dF = \sin \alpha du dv$ ist, und integrieren wir über die ganze Fläche F der Platte, so wird:

$$T = \frac{1}{2} \rho h \sin \alpha \omega^2 \iint_{(F)} \zeta^2 du dv. \quad (20)$$

Dies ist der Ausdruck der kinetischen Energie der Platte in der Nullage, für schiefe Koordinaten.

Die ganze Schwierigkeit wird nun darin bestehen, für die Funktion $\zeta = f(u, v)$, welche die Form der Platte während der Schwingung bestimmt, günstige Ansätze zu finden und ferner die bestimmten Integrale (3") und (20) zu berechnen.

Was können wir über die Funktion $\zeta = f(u, v)$ aussagen?

1. Sie muß die Randbedingungen (14) oder (15) befriedigen, je nachdem es sich um eine eingespannte oder freiaufliegende Platte handelt.

2. Die Funktion muß punktsymmetrisch in bezug auf den Nullpunkt sein (siehe Fig. 8); sie muß also folgende Bedingung erfüllen:

$$\zeta(-u, -v) \equiv \zeta(u, v). \quad (21)$$

3. Verschiedene Ansätze $\zeta = f(u, v)$ werden uns verschiedene Eigenfrequenzen geben, von denen im allgemeinen die tiefste die beste sein wird⁵⁾.

Durch die Wahl des Ansatzes $\zeta = f(u, v)$ haben wir nämlich auf die Form der Platte während der Schwingung bereits einen

⁵⁾ Wir werden im nächsten Paragraphen sehen, wie *Ritz* diese Aussage dazu benützen konnte, um seine Näherungsmethode darauf aufzubauen.

Zwang ausgeübt, haben für die Form eine Bedingung formuliert, haben sie gleichsam in ein mathematisches Kleid gedrängt. Wir wissen aber, daß jeder Zwang oder jede zusätzliche Bindung, die wir einem frei schwingenden Körper zufügen, seine Eigenfrequenz nur erhöhen kann. Daher die Aussage, daß der tiefste Wert der Frequenz der beste sein wird⁶⁾.

Zur Berechnung der Grundfrequenz einer parallelogrammförmigen, eingespannten Platte, versuchen wir einen

$$1. \text{ Ansatz: } \quad \zeta = \frac{f}{4} \left(\cos \frac{\pi u}{a} + 1 \right) \left(\cos \frac{\pi v}{b} + 1 \right). \quad (22)$$

Wir bemerken sofort, daß dieser Ansatz die Randbedingungen (14) und die Symmetriebedingung (21) befriedigt. Die Konstante f ist nichts anderes als der Biegungs Pfeil in der Mitte der Platte, denn es ist $(\zeta)_{\substack{u=0 \\ v=0}} = f$. Wir werden gleich sehen, daß diese Konstante bei der Berechnung der Eigenfrequenz herausfällt, wie es auch sein muß⁷⁾.

Einige elementare Rechnungen liefern:

$$\iint_{(F)} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \right)^2 du dv = \frac{3}{16} ab \left(\frac{\pi}{a} \right)^4 f^2,$$

$$\iint_{(F)} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right)^2 du dv = \frac{3}{16} ab \left(\frac{\pi}{b} \right)^4 f^2,$$

$$\iint_{(F)} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right)^2 du dv = \frac{1}{16} ab \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 f^2,$$

$$\iint_{(F)} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} du dv = 0. \quad 8)$$

⁶⁾ Vergl. [27], S. 272 u. ff., ferner [37], S. 274 u. ff.

⁷⁾ Die Eigenfrequenz der kleinen Schwingungen muß nämlich unabhängig von der Amplitude sein.

⁸⁾ Dieses letzte Integral ist null, wenn wir ζ in der Form $P_1(u) \cdot P_2(v)$ schreiben können, wobei P_1 eine Funktion von u allein ist, die für $u = \pm a$ null wird, P_2 eine Funktion von v allein, welche die Wurzeln $\pm b$ besitzt.

Diese Werte in (3'') eingesetzt, geben für die potentielle Energie V :

$$V = \frac{Eh^3 \pi^4}{24(1-\nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{f^2}{ab} \left[\frac{3}{16} \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + \frac{1}{8} (1 + 2 \cos^2 \alpha) \right].$$

Die kinetische Energie wird aus (20) und (22):

$$T = \frac{9}{32} \rho h \sin \alpha ab f^2 \omega^2.$$

Setzen wir diese Ausdrücke nach (17) einander gleich, so sehen wir vorerst einmal, daß f herausfällt. Bemerken wir ferner, daß:

$$\left. \begin{array}{l} \text{die Fläche der Platte } F = 4ab \sin \alpha, \\ \text{die Masse der Platte } m = \rho h F \end{array} \right\} \quad (23)$$

ist, und führen wir zur Abkürzung ein:

$$\text{die „Plattensteifigkeit“ } N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (24)$$

$$\text{und das „Seitenverhältnis“ } n = \left(\frac{a}{b}\right)^2, \quad (25)$$

so wird:

$$\omega = \sqrt{\frac{N}{Fm}} \frac{4\pi^2}{3 \sin \alpha} \sqrt{3 \left(\frac{n^2 + 1}{n}\right) + 2(1 + 2 \cos^2 \alpha)}.$$

Da die Frequenz

$$p = \frac{\omega}{2\pi} \quad (26)$$

ist, so wird:

$$\boxed{p = \sqrt{\frac{N}{Fm}} \Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)} \quad (27)$$

wobei:

$$\boxed{\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right) = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{13,160 \left(\frac{n^2 + 1}{n}\right) + 8,773 (1 + 2 \cos^2 \alpha)} \quad (28)}$$

mit $n = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

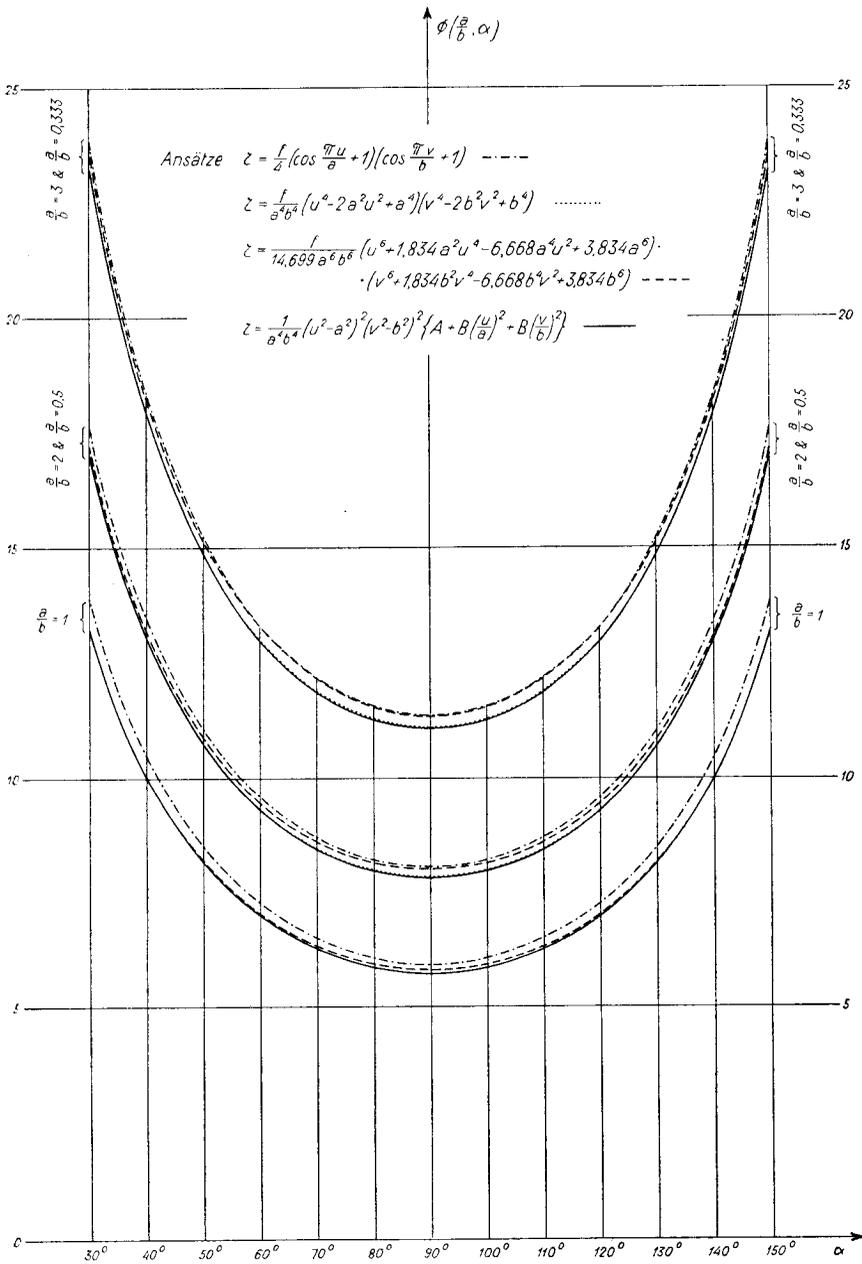


Fig. 9.

Eingespannte, schiefe Platte. Graphische Darstellung der Funktionen $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$.

Die Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ ist ein numerischer Faktor, der nur vom Verhältnis $\frac{a}{b}$ und vom Winkel α , d. h. allein von der *Form* der Platte abhängt.

In der Fig. 9 wurde diese Funktion für das Gebiet

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a}{b} \leq 3 \text{ und } 30^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$$

strichpunktiert aufgetragen.

Einen zweiten Ansatz werden wir finden, wenn wir ζ in der folgenden Form anschreiben:

$$\zeta = \varepsilon (u^4 + \bar{\alpha} a^2 u^2 + \bar{\beta} a^4) (v^4 + \bar{\alpha} b^2 v^2 + \bar{\beta} b^4). \quad (29)$$

Diese Funktion, die aus einem Produkt von zwei Polynomen vierten Grades in u und v besteht und demnach ganz anders aufgebaut ist als der erste Ansatz, genügt der Symmetriebedingung (21), wie man sofort sieht.

$\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$ sind Konstanten, die wir durch die Randbedingungen (14) bestimmen:

$$\left. \begin{aligned} \zeta = 0 \quad \text{für } u = \pm a \quad \text{liefert } 0 = 1 + \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial u} = 0 \quad \text{für } u = \pm a \quad \text{liefert } 0 = 4 + 2\bar{\alpha}. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Aus diesen beiden Gleichungen folgt: } \bar{\alpha} = -2 \\ \bar{\beta} = +1 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Ersetzen wir ferner } \varepsilon \text{ durch } \frac{f}{\bar{\beta}^2 a^4 b^4} = \frac{f}{a^4 b^4},$$

so wird aus (29):

$$2. \text{ Ansatz: } \zeta = \frac{f}{a^4 b^4} (u^4 - 2a^2 u^2 + a^4) (v^4 - 2b^2 v^2 + b^4). \quad (30)$$

f ist wiederum der Biegungspfeil in der Mitte der Platte.

Eine analoge Rechnung, wie für den ersten Ansatz, führt auf die potentielle Energie:

$$V = \frac{E h^3}{24 (1 - \nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{f^2}{a b} \left[20,805 \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + 11,889 (1 + 2 \cos^2 \alpha) \right]$$

und auf die kinetische Energie:

$$T = 0,33024 \rho h \sin \alpha a b f^2 \omega^2.$$

Setzen wir diese Werte in (17) ein und berücksichtigen wir (23), (24), (25) und (26), so wird die Frequenz p wieder:

$$p = \sqrt{\frac{N}{Fm}} \Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right) \quad (27)$$

wobei aber diesmal:

$$\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right) = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{12,766 \left(\frac{n^2+1}{n}\right) + 7,295 (1 + 2 \cos^2 \alpha)} \quad (31)$$

mit $n = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

Diese Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ ist wieder nur von der Form der Platte abhängig. Sie wurde für das Gebiet $\frac{1}{3} \leq \frac{a}{b} \leq 3$ und $30^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$ punktiert in die Fig. 9 eingetragen⁹⁾.

Einen dritten Ansatz werden wir durch Erweiterung des Polynomes (29) erhalten. Wir schreiben für die Funktion ζ folgenden Wert an:

$$\zeta = \varepsilon (u^6 + \bar{\alpha} a^2 u^4 + \bar{\beta} a^4 u^2 + \bar{\gamma} a^6) (v^6 + \bar{\alpha} b^2 v^4 + \bar{\beta} b^4 v^2 + \bar{\gamma} b^6). \quad (32)$$

Wie man sofort sieht, genügt diese Funktion der Symmetriebedingung (21). *H. Favre* hat in seinem Artikel [32] bewiesen, daß diese Funktion den Randbedingungen (14) und der Krümmungsbedingung:

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}\right)_{u=\pm a} : \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}\right)_{u=0} = -2,900$$

für folgende Werte der Konstanten genügt¹⁰⁾:

⁹⁾ Die Kurve für $\frac{a}{b} = 1$ fällt mit derjenigen des 4. Ansatzes zusammen (ausgezogener Strich).

¹⁰⁾ *H. Favre* hat diesen Ansatz benützt, um den statischen Pfeil f in der Mitte einer eingespannten, gleichmäßig belasteten, schiefen Platte zu bestimmen.

M. Nadai fand nämlich [36], daß für eine statisch gleichmäßig be-

$$\bar{\alpha} = +1,834, \quad \bar{\beta} = -6,668, \quad \bar{\gamma} = +3,834, \quad \varepsilon = \frac{f}{\bar{\gamma}^2 a^6 b^6} = \frac{f}{14,699 a^6 b^6}.$$

Mit diesen Werten der Konstanten erhalten wir aus (32):

3. Ansatz:

$$\zeta = \frac{f}{14,699 a^6 b^6} \cdot (u^6 + 1,834 a^2 u^4 - 6,668 a^4 u^2 + 3,834 a^6) \cdot (v^6 + 1,834 b^2 v^4 - 6,668 b^4 v^2 + 3,834 b^6). \quad (33)$$

Eine ganz analoge Rechnung, wie beim 1. und 2. Ansatz, führt auf:

$$V = \frac{E h^3}{24 (1 - \nu^2) \sin \alpha} \frac{f^2}{ab} \left[24,083 \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + 12,036 (1 + 2 \cos^2 \alpha) \right],$$

$$T = 0,36328 \rho h \sin \alpha ab f^2 \omega^2$$

und schließlich unter Berücksichtigung von (23), (24), (25) und (26) auf:

$$p = \sqrt{\frac{N}{Fm}} \Phi \left(\frac{a}{b}, \alpha \right) \quad (27)$$

wobei:

$$\Phi \left(\frac{a}{b}, \alpha \right) = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{13,434 \left(\frac{n^2 + 1}{n} \right) + 6,714 (1 + 2 \cos^2 \alpha)} \quad (34)$$

mit $n = \left(\frac{a}{b} \right)^2$.

Auch diese Werte der Funktion $\Phi \left(\frac{a}{b}, \alpha \right)$ haben wir für dasselbe Gebiet berechnet und gestrichelt in die Fig. 9 eingetragen.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß die Methode von Rayleigh für die drei verschiedenen Ansätze immer auf dieselbe

lastete, quadratische Platte das Verhältnis der Krümmung an den Enden eines achsialen Profiles zu der Krümmung in der Mitte = - 2,900 beträgt, und *H. Favre* hat diese Tatsache benützt, um eine weitere Bedingung für die Konstanten zu erhalten.

Wir möchten hier ausdrücklich festhalten, daß diese zusätzliche Krümmungsbedingung für die Bestimmung des statischen Pfeiles *f* wohl berechtigt ist, daß sie aber für die Berechnung der Eigenfrequenz kaum taugen wird.

Formel für die Frequenz p führt (27), wobei nur $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ je nach dem Ansatz verschieden ist.

Auch die Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ läßt sich aber immer in der Form schreiben:

$$\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right) = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{k_1 \left(\frac{n^2 + 1}{n}\right) + k_2 (1 + 2 \cos^2 \alpha)}. \quad (35)$$

Die untenstehende Tabelle 1 gibt die Größe der Konstanten k_1 und k_2 für die verschiedenen Ansätze an, sowie den Wert der Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ für den Spezialfall der quadratischen Platte $\left(\frac{a}{b} = 1, \alpha = 90^\circ\right)$ und die Differenz zwischen den $\Phi(1, 90^\circ)$ -Werten.

Tabelle 1.

Ansatz für ζ	k_1	k_2	$\Phi(1, 90^\circ)$ quadratische Platte	Differenz zwischen den $\Phi(1, 90^\circ)$ - Werten
$\frac{f}{4} \left(\cos \frac{\pi u}{a} + 1\right) \left(\cos \frac{\pi v}{b} + 1\right)$	13,160	8,773	5,92	$\left. \begin{array}{l} 3,2\% \\ \\ 1,2\% \end{array} \right\} 2,0\%$
$\frac{f}{a^4 b^4} (u^4 - 2a^2 u^2 + a^4) (v^4 - 2b^2 v^2 + b^4)$	12,766	7,295	5,73	
$\frac{f}{14,699 a^6 b^6} (u^6 + 1,834 a^2 u^4 - 6,668 a^4 u^2 + 3,834 a^6) \cdot (v^6 + 1,834 b^2 v^4 - 6,668 b^4 v^2 + 3,834 b^6)$	13,434	6,714	5,80	

Diese Tabelle und ein Blick auf die Fig. 9 zeigen uns sofort, daß die Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ für die drei ganz verschiedenen Ansätze (22), (30) und (33) Werte ergibt, die wenig voneinander abweichen, was uns bestätigt, daß die gewählten Ansätze vermutlich gut sind.

Eine eingehende Besprechung der Resultate werden wir erst am Schluß des nächsten Paragraphen folgen lassen, nachdem wir noch eine weitere Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ nach der Methode von Ritz berechnet haben werden.

§ 4. Die Näherungsmethode von Ritz und ihre Anwendung zur Berechnung der Eigenfrequenz der allseitig eingespannten, schiefen Platte

Es sollen wiederum die 5 Voraussetzungen des § 3 gültig sein.

Die *Näherungsmethode von Ritz* besteht darin, die Form der Platte während der Schwingung durch eine Funktion mit gewissen *Parametern* darzustellen, die so bestimmt werden, daß die *Frequenz zu einem Minimum wird*. Sie benützt also die dritte Aussage des letzten Paragraphen über die Funktion ζ , die dadurch begründet ist, daß jeder der Schwingungsform angetane Zwang, sei es durch Wahl der Funktion selber, sei es durch bestimmte Parameter, die Frequenz nur erhöhen kann.

Um das praktische Verfahren darzustellen, betrachten wir die Gleichungen (3'') und (20), setzen diese Werte nach (17) einander gleich und berechnen daraus ω^2 , unter Berücksichtigung der Abkürzung (24):

$$\omega^2 = \frac{N \iint_{(F)} \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right)^2 + 2(1 + 2 \cos^2 \alpha) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right)^2 - 4 \cos \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right) \right] du dv}{\rho h \sin^4 \alpha \iint_{(F)} \zeta^2 du dv} \quad (35)$$

ζ soll gewisse Parameter enthalten, die wir allgemein mit c_i anschreiben wollen.

Ritz sagt nun, daß diese Parameter c_i so gewählt werden sollen, daß (35) zu einem Minimum wird, d. h.

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \left\{ \frac{\iint_{(F)} \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right)^2 + 2(1 + 2 \cos^2 \alpha) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right)^2 - 4 \cos \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right) \right] du dv}{\iint_{(F)} \zeta^2 du dv} \right\} = 0,$$

oder indem wir nach der Quotientenregel differenzieren:

$$\begin{aligned} & \iint_{(F)} \zeta^2 du dv \cdot \frac{\partial}{\partial c_i} \left\{ \iint_{(F)} \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right)^2 + 2(1 + 2 \cos^2 \alpha) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right)^2 - \right. \right. \\ & - 4 \cos \alpha \left. \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right) \right] du dv \left. \right\} - \iint_{(F)} \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right)^2 + 2(1 + 2 \cos^2 \alpha) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 4 \cos \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right) \right] du dv \cdot \frac{\partial}{\partial c_i} \left\{ \iint_{(F)} \zeta^2 du dv \right\} = 0. \end{aligned}$$

Aus der Gleichung (35) folgt aber:

$$\begin{aligned} \omega^2 \frac{\rho h}{N} \sin^4 \alpha \iint_{(F)} \zeta^2 du dv &= \iint_{(F)} \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right)^2 + \right. \\ & \left. + 2(1 + 2 \cos^2 \alpha) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right)^2 - 4 \cos \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right) \right] du dv, \end{aligned}$$

sodaß schließlich wird:

$$\boxed{\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial c_i} \iint_{(F)} \left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right)^2 + 2(1 + 2 \cos^2 \alpha) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right)^2 - \right. \\ & \left. - 4 \cos \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} \right) - \omega^2 \frac{\rho h}{N} \sin^4 \alpha \zeta^2 \right] du dv = 0. \end{aligned}} \quad (36)$$

Wenn im Ansatz für ζ die *Parameter* c_i in *linearer Form* auftreten, so wird (36) ein *homogenes und in c_i lineares Gleichungssystem* darstellen. Die Zahl der Gleichungen wird gleich derjenigen der Parameter sein. Dieses System kann aber für die c_i nur dann von null verschiedene Werte geben, wenn die Determinante null ist. Diese Aussage wird uns die Gleichung für die Frequenz liefern.

Nachdem wir die zweite Näherungsmethode beschrieben haben, fassen wir kurz die Bedingungen zusammen, welche die Funktion ζ erfüllen muß:

1. Randbedingungen (14),
2. Symmetriebedingung (21),
3. Die Parameter c_i müssen in linearer Form auftreten.

Zur Berechnung der Grundfrequenz einer parallelogrammförmigen, eingespannten Platte, versuchen wir den

4. Ansatz:

$$\zeta = \frac{1}{a^4 b^4} (u^2 - a^2)^2 (v^2 - b^2)^2 \left\{ A + B \left(\frac{u}{a} \right)^2 + B \left(\frac{v}{b} \right)^2 \right\}. \quad (37)$$

A und B sind die beiden Parameter, die wir so bestimmen werden, daß die Frequenz zu einem Minimum wird.

Beide Randbedingungen (14), sowie die Symmetriebedingung (21) sind erfüllt, wie wir sofort sehen.

Indem wir (37) in (36) einführen, die bestimmten Integrale ausrechnen und hierauf partiell nach A und B ableiten, erhalten wir aus (36) zwei homogene und in A und B lineare Gleichungen, deren Determinante verschwinden muß. Diese lautet:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{9} m + Q - \frac{2}{567} \Omega \right), & \left(\frac{2}{77} m - \frac{4}{6237} \Omega \right) \\ \left(\frac{1}{175} m - \frac{2}{14175} \Omega \right), & \left(\frac{1}{91} m + \frac{1}{25} Q - \frac{2}{61425} \Omega \right) \end{vmatrix} = 0, \quad (38)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{wobei: } m &= \left(\frac{n^2 + 1}{n} \right), \quad n = \left(\frac{a}{b} \right)^2, \quad Q = \frac{4}{63} (1 + 2 \cos^2 \alpha) \\ \Omega &= \frac{q h}{N} a^2 b^2 \sin^4 \alpha \omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Die Auflösung dieser Determinante zweiten Grades führt mit (39) und unter Berücksichtigung von (23) und (26) auf die Frequenz:

$$p = \sqrt{\frac{N}{Fm}} \Phi \left(\frac{a}{b}, \alpha \right) \quad (27)$$

wobei:

$$\Phi \left(\frac{a}{b}, \alpha \right) = \frac{3\sqrt{2}}{\pi\sqrt{7} \sin \alpha} \sqrt{\frac{1368 \left(\frac{n^2+1}{n} \right) + 352 (1 + 2 \cos^2 \alpha) - \sqrt{1741217 \left(\frac{n^2+1}{n} \right)^2 + 850344 \left(\frac{n^2+1}{n} \right) (1 + 2 \cos^2 \alpha) + 107888 (1 + 2 \cos^2 \alpha)^2}}{2}}$$

mit $n = \left(\frac{a}{b} \right)^2$.

(40)

Wir haben die Werte dieser Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ mit einem ausgezogenen Strich in die Fig. 9 eingetragen.

Es ist sehr interessant festzustellen, daß auch die Näherungsmethode von Ritz auf dieselbe Formel für die Frequenz p führt (27).

Besprechung der Resultate.

Die Fig. 9 zeigt, daß alle vier Ansätze (22), (30), (33) und (37) Funktionen $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ ergeben, die sehr wenig voneinander verschieden und somit vermutlich gut sind.

Die Funktionen $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ weisen für $\frac{a}{b} = \text{konst.}$ ein ausgesprochenes Minimum bei $\alpha = 90^\circ$ auf und werden wegen des Faktors $\frac{1}{\sin \alpha}$ für $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 180^\circ$ unendlich groß. Sie sind in bezug auf die Gerade $\alpha = 90^\circ$ symmetrisch und geben dieselben Werte, wenn wir $\frac{a}{b}$ durch $\frac{b}{a}$ ersetzen, wie es sein muß. Von allen parallelogrammförmigen Platten weist die *quadratische* die *tiefste Grundfrequenz* auf. Je mehr sich α von 90° entfernt und je mehr $\frac{a}{b}$ von 1 verschieden ist, umso mehr nehmen die Funktionen zu.

Der genaueste Ansatz wird (37) sein, denn

1. enthält er zwei Parameter, statt nur einen, wie die andern,
2. liefert er die tiefsten Werte für die Eigenfrequenz.

Da aber die Funktionen (31) und (40) praktisch dieselben Werte geben, *schlagen wir für die Berechnung die einfachere, (31), vor.*

Wir dürfen erwarten, daß sie die Frequenz im Gebiet $\frac{1}{3} \leq \frac{a}{b} \leq 3$ und $30^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$ auf einige % genau bestimmt.

In der Tafel I des Anhanges ist der genaueste Φ -Wert für $\frac{a}{b} = 1,0, 1,5, 2,0, 2,5$ und $3,0$ eingetragen.

§ 5. Die Eigenfrequenz der allseitig eingespannten, schiefen Platte mit einer konzentrierten Einzelmasse in der Mitte

Bezeichnen wir die Masse der Platte mit m , die konzentrierte Einzelmasse in der Mitte ($u = 0, v = 0$) mit M , so haben wir in den letzten beiden Paragraphen die Grundfrequenz für den Fall $M/m = 0$ bestimmt, da $M = 0$ und m endlich war.

In diesem Paragraphen werden wir den anderen extremen Fall $M/m = \infty, m = 0$ und M endlich, mit praktisch sehr wenig Rechenarbeit erhalten. Wir denken uns also jetzt M so groß, daß m bei der Berechnung vernachlässigt werden darf und werden die gleichen Ansätze wie in den Paragraphen 3 und 4 verwenden.

Die potentielle Energie V wird dabei unverändert bleiben, dagegen muß für die kinetische Energie statt (20) jetzt stehen:

$$T_M = \frac{M}{2} \omega^2 (\zeta)_{\substack{u=0 \\ v=0}}^2. \quad (41)$$

Die Methode von Rayleigh liefert für den

$$1. \text{ Ansatz: } \zeta = \frac{f}{4} \left(\cos \frac{\pi u}{a} + 1 \right) \left(\cos \frac{\pi v}{b} + 1 \right) \quad (22)$$

wieder

$$V = \frac{E h^3 \pi^4}{24 (1 - \nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{f^2}{ab} \left[\frac{3}{16} \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + \frac{1}{8} (1 + 2 \cos^2 \alpha) \right],$$

dagegen aus (41) mit (22):

$$T = \frac{M}{2} \omega^2 f^2.$$

Setzen wir diese beiden Werte nach (17) einander gleich, so folgt nach Berücksichtigung von (23), (24), (25) und (26) die Frequenz p zu:

$$p = \sqrt{\frac{N}{FM}} \Phi \left(\frac{a}{b}, \alpha \right) \quad (42)$$

wobei:

$$\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right) = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{1,8506 \left(\frac{n^2 + 1}{n}\right) + 1,2337 (1 + 2 \cos^2 \alpha)} \quad (43)$$

mit $n = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

Der 2. Ansatz:

$$\zeta = \frac{f}{a^4 b^4} (u^4 - 2a^2 u^2 + a^4) (v^4 - 2b^2 v^2 + b^4) \quad (30)$$

führt wieder auf p nach (42), wobei aber diesmal:

$$\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right) = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{2,1080 \left(\frac{n^2 + 1}{n}\right) + 1,2046 (1 + 2 \cos^2 \alpha)} \quad (44)$$

mit $n = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

Der 3. Ansatz:

$$\zeta = \frac{f}{14,699 a^6 b^6} (u^6 + 1,834 a^2 u^4 - 6,668 a^4 u^2 + 3,834 a^6) \cdot (v^6 + 1,834 b^2 v^4 - 6,668 b^4 v^2 + 3,834 b^6) \quad (33)$$

führt wieder auf p nach (42), wobei:

$$\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right) = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{2,4401 \left(\frac{n^2 + 1}{n}\right) + 1,2195 (1 + 2 \cos^2 \alpha)} \quad (45)$$

mit $n = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

Zusammenfassend stellen wir fest, daß sich die Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ immer in folgender Form schreiben läßt:

$$\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right) = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{K_1 \left(\frac{n^2 + 1}{n}\right) + K_2 (1 + 2 \cos^2 \alpha)}. \quad (35)$$

Die untenstehende Tabelle 2 gibt für die verschiedenen Ansätze die Größe der Konstanten K_1 und K_2 an, sowie den Wert der Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ für den Spezialfall der quadratischen Platte $\left(\frac{a}{b} = 1, \alpha = 90^\circ\right)$ und die Differenz zwischen den $\Phi(1, 90^\circ)$ -Werten.

Tabelle 2.

Ansatz für ζ	K_1	K_2	$\Phi(1, 90^\circ)$ quadratische Platte	Differenz zwischen den $\Phi(1, 90^\circ)$ - Werten
$\frac{f}{4} \left(\cos \frac{\pi u}{a} + 1 \right) \left(\cos \frac{\pi v}{b} + 1 \right)$	1,8506	1,2337	2,22	$\left. \begin{array}{l} 4,7\% \\ 10,1\% \\ 5,7\% \end{array} \right\}$
$\frac{f}{a^4 b^4} (u^4 - 2a^2 u^2 + a^4) (v^4 - 2b^2 v^2 + b^4)$	2,1080	1,2046	2,33	
$\frac{f}{14,699 a^6 b^6} (u^6 + 1,834 a^2 u^4 - 6,668 a^4 u^2 + 3,834 a^6) \cdot (v^6 + 1,834 b^2 v^4 - 6,668 b^4 v^2 + 3,834 b^6)$	2,4401	1,2195	2,47	

Die Methode von Ritz führt mit dem

4. Ansatz:

$$\zeta = \frac{1}{a^4 b^4} (u^2 - a^2)^2 (v^2 - b^2)^2 \left\{ A + B \left(\frac{u}{a} \right)^2 + B \left(\frac{v}{b} \right)^2 \right\} \quad (37)$$

auf die Determinante:

$$\left| \begin{array}{cc} \left(\frac{1}{9} m + Q - \frac{175}{32768} \Omega \right), & \left(\frac{2}{77} m \right) \\ \left(\frac{1}{175} m \right) & , \left(\frac{1}{91} m + \frac{1}{25} Q \right) \end{array} \right| = 0 \quad (46)$$

$$m \text{ und } Q \text{ nach (39),} \quad \Omega = \frac{M}{N} ab \sin^3 \alpha \omega^2$$

und schließlich auf p nach (42), wobei:

$$\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right) = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{15219\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^2 + 13904\left(\frac{n^2+1}{n}\right)(1+2\cos^2\alpha) + 2288(1+2\cos^2\alpha)^2}{8218,7\left(\frac{n^2+1}{n}\right) + 1899,4(1+2\cos^2\alpha)}} \quad (47)$$

mit $n = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

Ein 5. Ansatz:

$$\zeta = \frac{1}{a^4 b^4} (u^2 - a^2)^2 (v^2 - b^2)^2 \left\{ A + B \left(\frac{u}{a}\right)^2 + B \left(\frac{v}{b}\right)^2 + C \left(\frac{u}{a}\right)^2 \left(\frac{v}{b}\right)^2 \right\} \quad (48)$$

mit den drei Parametern A , B und C führt auf die Determinante dritten Grades:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{9}m + Q - \frac{175}{32768}\Omega\right), & \left(\frac{2}{77}m\right), & \left(\frac{2}{693}m\right) \\ \left(\frac{1}{175}m\right), & \left(\frac{1}{91}m + \frac{1}{25}Q\right), & \left(\frac{1}{975}m\right) \\ \left(\frac{2}{63}m\right), & \left(\frac{2}{39}m\right), & \left(\frac{1}{91}m + \frac{1}{11}Q\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (49)$$

$$m \text{ und } Q \text{ nach (39),} \quad \Omega = \frac{M}{N} ab \sin^3 \alpha \omega^2$$

und auf p nach (42), wobei:

$$\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right) = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{847143\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^3 + 1711252\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^2(1+2\cos^2\alpha) + 949520\left(\frac{n^2+1}{n}\right)(1+2\cos^2\alpha)^2 + 118976(1+2\cos^2\alpha)^3}{459261\left(\frac{n^2+1}{n}\right)^2 + 615417\left(\frac{n^2+1}{n}\right)(1+2\cos^2\alpha) + 98771(1+2\cos^2\alpha)^2}}$$

mit $n = \left(\frac{a}{b}\right)^2$. (50)

Alle diese Funktionen $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ wurden berechnet und in Fig. 10 eingetragen. Dabei wurden die praktisch zusammenfallenden Werte von (43), (47) und (50) durch eine ausgezogene

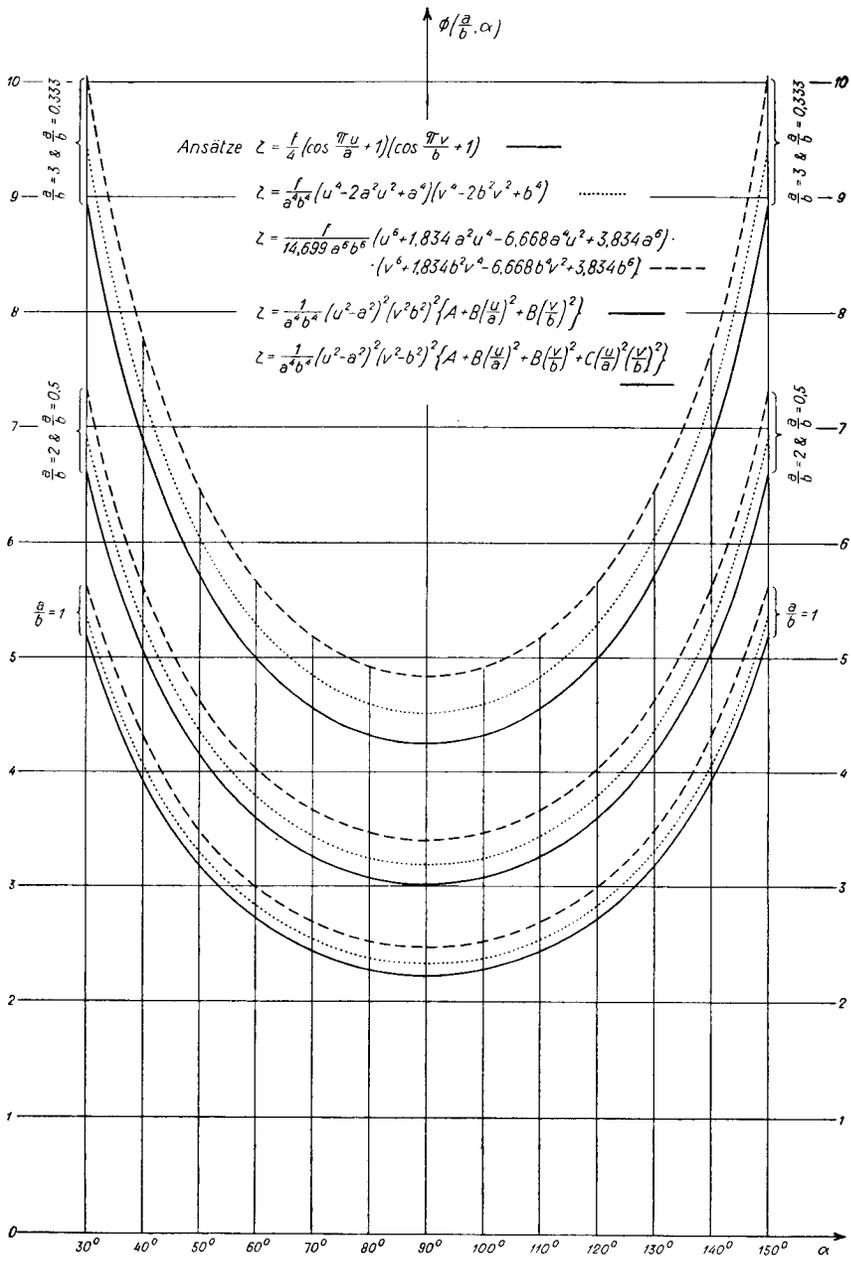


Fig. 10. Eingespannte, schiefe Platte mit einer konzentrierten Masse in der Mitte. Graphische Darstellung der Funktionen $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$.

Kurve dargestellt, dagegen (44) punktiert und (45) gestrichelt eingezeichnet.

Besprechung der Resultate.

Wir stellen fest, daß beide Näherungsmethoden für die Frequenz auf dieselbe Formel führen (42).

Aus der Fig. 10 ersehen wir, daß (43), (47) und (50) fast dieselben Resultate geben; dagegen weicht (44) ziemlich und (45) stark davon ab. Daraus läßt sich schließen, daß die Ansätze (22), (37) und (48) vermutlich gut sind.

Über den allgemeinen Verlauf von $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ können wir die gleichen Aussagen machen wie am Schluß des letzten Paragraphen, weil $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ nur von der Form der Platte abhängt.

Der genaueste Ansatz wird (48) sein, denn er enthält 3 Parameter und liefert die kleinsten Werte der Frequenz. Da aber die Werte von (43), (47) und (50) praktisch dieselben sind, *schlagen wir für die Berechnung von Φ die Gleichung (43) vor, welche die einfachste ist.*

Es ist zu erwarten, daß im Gebiete $\frac{1}{3} \leq \frac{a}{b} \leq 3$ und $30^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$ die Genauigkeit von einigen % erreicht wird.

Bemerkung: Es ist sehr interessant festzustellen, daß die Methode von Ritz, trotz mehrerer Parameter, immer auf eine *lineare* Gleichung für die Frequenz führt: in den Determinanten (46) und (49) kommt Ω , für den Fall der konzentrierten Einzelmasse in der Mitte, nur im obersten Glied links vor. Der Grund dafür liegt darin, daß die kinetische Energie T_M nur von einem Parameter A abhängt, wie man sofort aus (41) und (37) oder (41) und (48) sieht. Dies bedeutet aber nichts anderes, als daß die höheren harmonischen Schwingungen nicht existieren, was auch erklärlich ist, denn die Masse ist punktförmig in der Mitte konzentriert.

§ 6. Die Eigenfrequenz der allseitig eingespannten, schiefen Platte mit einer konzentrierten Einzelmasse M in der Mitte bei Berücksichtigung der Masse der Platte m

Wir kennen jetzt die Lösungen für die zwei extremen Fälle:

$$\begin{aligned} M/m &= 0 && (M = 0, m \text{ endlich}) \text{ und} \\ M/m &= \infty && (m = 0, M \text{ endlich}). \end{aligned}$$

Haben wir es mit einem Zwischenfall zu tun, d. h. dürfen wir weder M gegenüber m , noch m gegenüber M vernachlässigen, so können wir die Frequenz mit den gleichen Methoden und Ansätzen finden.

Die Fig. 9 und 10 zeigen uns, daß der Ansatz (22) für die beiden extremen Fälle $M/m = 0$ und $M/m = \infty$ gute Φ -Werte liefert. Wir dürfen also erwarten, daß er auch für den Zwischenfall

$$M/m = \text{endlich}$$

gute Werte für die Frequenz gibt und können damit auf den Vergleich mit anderen Ansätzen verzichten.

Die Methode von Rayleigh liefert für den

1. Ansatz:
$$\zeta = \frac{f}{4} \left(\cos \frac{\pi u}{a} + 1 \right) \left(\cos \frac{\pi v}{b} + 1 \right) \quad (22)$$

wieder

$$V = \frac{E h^3 \pi^4}{24 (1 - \nu^2) \sin^3 \alpha} \frac{f^2}{ab} \left[\frac{3}{16} \frac{a^4 + b^4}{a^2 b^2} + \frac{1}{8} (1 + 2 \cos^2 \alpha) \right],$$

dagegen setzt sich die kinetische Energie T aus derjenigen der konzentrierten Masse T_M und derjenigen der Platte T_m zusammen:

$$T = T_M + T_m = \frac{1}{2} M \omega^2 f^2 + \frac{9}{32} q h \sin \alpha ab \omega^2 f^2$$

oder mit (23):

$$T = \frac{1}{2} \left(M + \frac{9}{64} m \right) \omega^2 f^2.$$

Setzen wir diese beiden Werte nach (17) einander gleich, so folgt nach Berücksichtigung von (23), (24), (25) und (26) die Frequenz p zu:

$$p = \sqrt{\frac{N}{\left(M + \frac{9}{64} m\right) F}} \Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right) \quad (51)$$

wobei:

$$\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right) = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{1,8506 \left(\frac{n^2 + 1}{n}\right) + 1,2337 (1 + 2 \cos^2 \alpha)} \quad (43)$$

mit $n = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

Kontrollen: Wir erhalten ohne weiteres die Spezialfälle $M/m = 0$ (27), (28) und $M/m = \infty$ (42), (43) aus obigen Gleichungen, wenn wir darin $M = 0$ bzw. $m = 0$ setzen. Insbesondere bekommen wir die gleiche Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ (43), wie für den Fall $M/m = \infty$; dies wird auch für die anderen Ansätze der Fall sein.

Aus (51) tritt die untergeordnete Rolle, die m bei großem Verhältnis M/m spielt, schön hervor; z. B. darf man für $M/m \geq 10$ ohne weiteres m vernachlässigen: der dadurch begangene Fehler ist kleiner als 0,63%.

Die Masse m der Platte hat also nach (51) die gleiche Wirkung auf die Frequenz, wie eine konzentrierte Masse von ungefähr $\frac{1}{7} m$.

In der Tafel II des Anhanges ist der genaueste Φ -Wert nach (50) und (51) für $\frac{a}{b} = 1,0, 1,5, 2,0, 2,5$ und $3,0$ eingetragen.

Bemerkungen zu den Paragraphen 3, 4, 5 und 6.

Alle Ansätze dieser Paragraphen weisen einen gemeinsamen Fehler auf: sie erfüllen nicht nur die Punktsymmetriebedingung (21), sondern sind sogar achsensymmetrisch in bezug auf die u - und v -Achse, eine Bedingung, die nicht notwendig ist. Dieser Fehler wird für Werte von α um 90° kaum feststellbar sein und wird zunehmen, je mehr wir uns von $\alpha = 90^\circ$ entfernen.

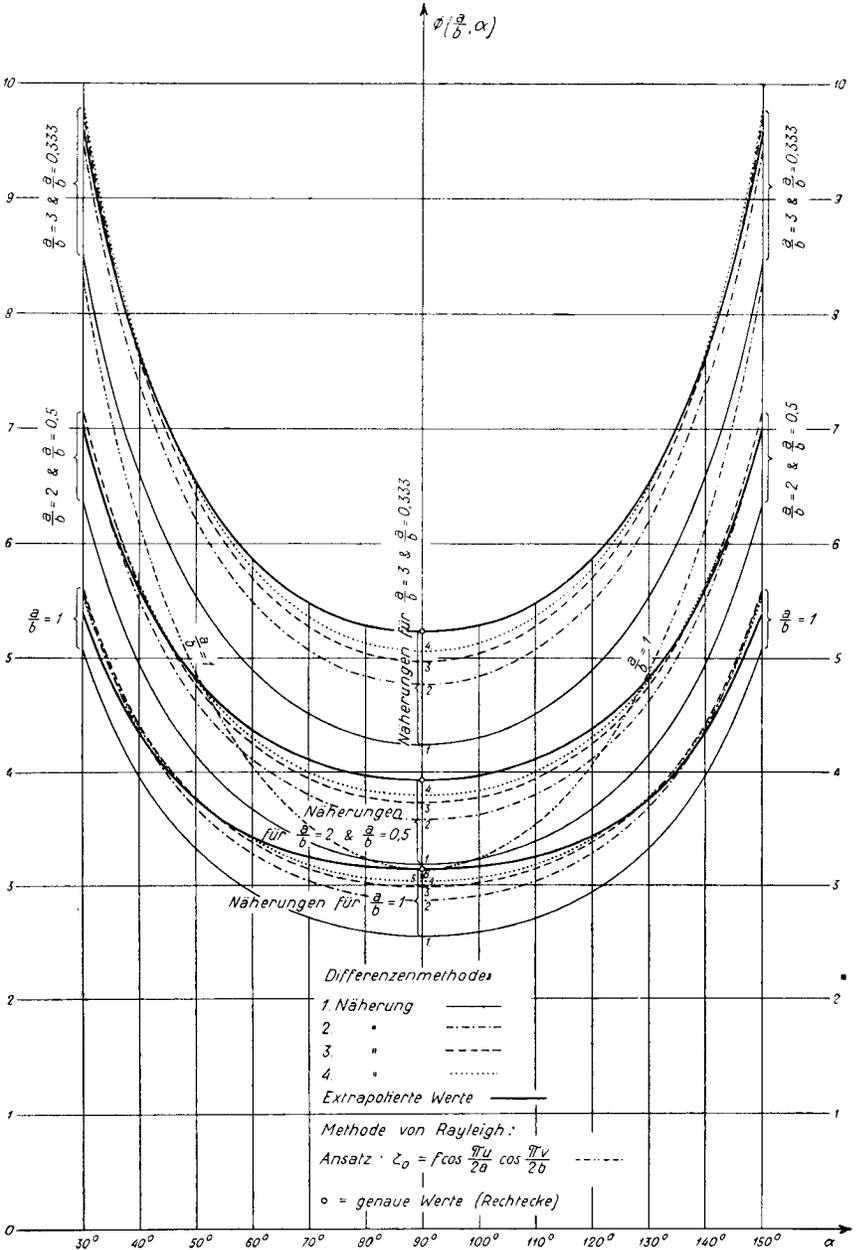


Fig. 11. Freiaufliegende, schiefe Platte. Graphische Darstellung der Funktionen $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$.

Da aber die Randbedingungen (14) streng erfüllt sind und diese die Form der Platte während der Schwingung stark bestimmen, so glauben wir nicht, daß die zu große Achsensymmetrie das Resultat im erwähnten Gebiet um mehr als einige %o beeinträchtigen kann.

§ 7. Die Eigenfrequenz der allseitig freiaufliegenden, schiefen Platte. Lösung nach der Methode von Rayleigh

Die freiaufliegende, schiefe Platte ist mathematisch wegen den komplizierten Randbedingungen (15) viel schwieriger zu behandeln als die eingespannte. Wir haben zur Verwendung mit der Methode von Rayleigh und Ritz sehr viele Ansätze für ζ versucht, ohne einen zu finden, der (15) befriedigt. Von allen diesen Versuchen wollen wir nur einen wiedergeben, der wenigstens für den Spezialfall $\alpha = 90^\circ$ die Randbedingung (15) erfüllt. In diesem Fall wird nämlich aus (15):

$$\left. \begin{array}{l} u = \pm a : \zeta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} = 0 \\ v = \pm b : \zeta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} = 0 \end{array} \right\} \quad (52)$$

Da vor dem Glied $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v}$ in (15) der Faktor $\cos \alpha$ steht, ist zu erwarten, daß ein Ansatz, der (52) befriedigt, wenigstens um $\alpha = 90^\circ$ herum gute Werte für die Frequenz liefern wird.

Der Ansatz:

$$\zeta = f \left(\cos \frac{\pi u}{2a} \right) \left(\cos \frac{\pi v}{2b} \right), \quad (53)$$

befriedigt (21) und (52) und führt nach der Methode von Rayleigh auf die Frequenz:

$$p = \sqrt{\frac{N}{Fm}} \Phi \left(\frac{a}{b}, \alpha \right) \quad (27)$$

wobei:

$$\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right) = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{2,4674 \left(\frac{n^2 + 1}{n}\right) + 4,9348 (1 + 2 \cos^2 \alpha)} \quad (54)$$

mit $n = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

Diese Funktion wurde nur für $\frac{a}{b} = 1$ berechnet und in die Fig. 11 eingetragen. Wir werden auf Grund des Vergleiches mit den Resultaten der Differenzenmethode erkennen, daß (54) nur im schmalen Gebiet $80^\circ \leq \alpha \leq 100^\circ$ gute Werte ergibt.

§ 8. Die Differenzenmethode und ihre Anwendung zur Berechnung der Eigenfrequenz der freiaufliegenden, schiefen Platte

Um das Problem der Eigenschwingungen einer freiaufliegenden, schiefen Platte zu lösen, müssen wir es von einem neuen Gesichtspunkt aus betrachten.

Wir gehen von der Differentialgleichung der Plattenschwingung aus, die lautet:

$$\rho h \ddot{z} + N \Delta z = 0. \quad (55)$$

Darin bedeuten: ρ = spezifische Maße
 h = Dicke der Platte
 z = $f(u, v, t)$ Verschiebung senkrecht zur Plattenebene
 \ddot{z} = $\frac{d^2 z}{dt^2}$ = Beschleunigung in z-Richtung
 t = Zeit
 N = Plattensteifigkeit (siehe (24))
 Δ = Laplacescher Operator.

¹¹⁾ Vergleiche z. B. [26] oder [27]. Man erhält diese Gleichung ohne weiteres aus der Differentialgleichung für die Durchbiegung einer gleichmäßig belasteten Platte (2), indem man die Belastung pro Flächeneinheit p durch die d'Alembertschen Trägheitskräfte pro Flächeneinheit $-\rho h \ddot{z}$ ersetzt.

Für *harmonische* Eigenschwingungen besitzt z die Form:

$$z = \sin(\omega t) \cdot \zeta(u, v). \quad (56)$$

$\omega =$ Kreisfrequenz,

$\zeta =$ Durchbiegung parallel zur z -Achse.

Aus (56) folgt:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z} &= -\omega^2 \sin(\omega t) \cdot \zeta(u, v), \\ \Delta \Delta z &= \sin(\omega t) \cdot \Delta \Delta \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Führen wir (57) in (55) ein, so wird:

$$\frac{\rho h}{N} \omega^2 \zeta = \Delta \Delta \zeta. \quad (58)$$

Schreiben wir zur Abkürzung:

$$k^2 = \omega \sqrt{\frac{\rho h}{N}}, \quad (59)$$

so wird aus (58):

$$\boxed{k^4 \zeta = \Delta \Delta \zeta.} \quad (60)$$

Dies ist die Differentialgleichung zur Bestimmung der Eigenfrequenz.

H. Bouasse zeigt in seinem Buche [29], daß Lösungen der beiden Gleichungen:

$$\pm k^2 \zeta = \Delta \zeta \quad (61)$$

auch Lösungen von (60) sind. Führen wir nämlich die Operationen Δ an beiden Seiten von (61) durch, so wird:

$$\pm k^2 \Delta \zeta = \Delta \Delta \zeta.$$

Ersetzen wir auf der linken Seite dieser Gleichung $\Delta \zeta$ durch $\pm k^2 \zeta$ nach (61), so erhalten wir wiederum (60).

Wir werden also nicht gezwungen sein, Lösungen von (60) zu suchen, sondern können uns mit solchen von (61) begnügen.

Schreiben wir (61) aus, so wird mit (12):

$$\boxed{k^2 \sin^2 \alpha \zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} = 0.} \quad (62)$$

Das Problem ist also jetzt, Lösungen der partiellen Differentialgleichung (62) zu finden.

Wie schon früher, so werden wir auch hier zugunsten eines Näherungsverfahrens, der sogenannten Differenzenmethode, auf eine strenge mathematische Lösung verzichten. Indem wir nämlich die *Differentialquotienten* von (62) durch die *Differenzenquotienten* ersetzen, werden wir aus (62) ein System von linearen, homogenen, algebraischen Gleichungen erhalten, aus dem wir die Frequenz bestimmen können.

Die Differenzenmethode wurde zur Bestimmung des statischen Biegungs Pfeiles einer freiaufliegenden, schiefen Platte benutzt [33]. Unseres Wissens wurde aber diese Methode noch nie für die Schwingungsprobleme und insbesondere für die Lösung der Differentialgleichung (62) verwendet.

Betrachten wir das Netz der Fig. 12, das in der Ebene u, v liegt und von äquidistanten Geraden $u = \text{konst.}$ und $v = \text{konst.}$ gebildet wird.

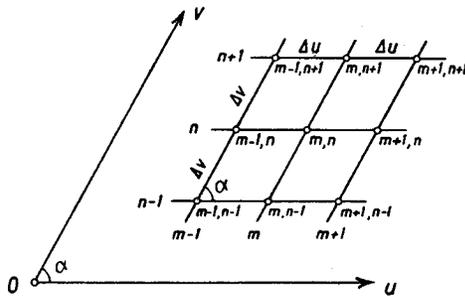


Fig. 12.

Die Maschen des Netzes sind gleichgroße Parallelogramme mit den Seiten Δu und Δv . Die Geraden $u = \text{konst.}$ sind numeriert $\dots m-1, m, m+1 \dots$, die Geraden $v = \text{konst.}$ $\dots n-1, n, n+1 \dots$. Die Eckpunkte der Parallelogramme erhalten die Nummern der Geraden, die sie erzeugen, z. B. wird der Schnittpunkt der Geraden m und n mit m, n bezeichnet, und ebenso wird jede Größe in diesem Punkt den Index m, n tragen.

Je kleiner Δu und Δv sind, umso genauer werden folgende Gleichungen stimmen¹²⁾:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial u}\right)_{m,n} &= \frac{\zeta_{m+1,n} - \zeta_{m-1,n}}{2\Delta u}, \\ \left(\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right)_{m,n} &= \frac{\zeta_{m,n+1} - \zeta_{m,n-1}}{2\Delta v}, \\ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2}\right)_{m,n} &= \frac{\zeta_{m+1,n} - 2\zeta_{m,n} + \zeta_{m-1,n}}{\Delta u^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2}\right)_{m,n} &= \frac{\zeta_{m,n+1} - 2\zeta_{m,n} + \zeta_{m,n-1}}{\Delta v^2}, \\ \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v}\right)_{m,n} &= \frac{\zeta_{m+1,n+1} + \zeta_{m-1,n-1} - \zeta_{m+1,n-1} - \zeta_{m-1,n+1}}{4\Delta u \Delta v}. \end{aligned} \right\} (63)$$

Führen wir diese Ausdrücke in (62) ein, so erhalten wir die Differenzengleichung für den Punkt m, n :

$$\boxed{\begin{aligned} k^2 \sin^2 \alpha \zeta_{m,n} + \frac{\zeta_{m+1,n} - 2\zeta_{m,n} + \zeta_{m-1,n}}{\Delta u^2} - \\ - 2 \cos \alpha \frac{\zeta_{m+1,n+1} + \zeta_{m-1,n-1} - \zeta_{m+1,n-1} - \zeta_{m-1,n+1}}{4\Delta u \Delta v} + \frac{\zeta_{m,n+1} - 2\zeta_{m,n} + \zeta_{m,n-1}}{\Delta v^2} = 0. \end{aligned}} \quad (64)$$

Zu jedem Netzknoten innerhalb des Plattenrandes gehört eine Gleichung (64), die alle homogen und linear in den ζ -Werten sind. Ihre Anzahl wird gleich der Zahl der Punkte innerhalb des Randes sein.

Nun können wir aber die Größen $\zeta_{m,n}$ als Parameter auffassen, welche die Form der Platte während der Schwingung beschreiben und sagen, daß nur dann das System (64) eine Lösung verschieden von null für die Parameter $\zeta_{m,n}$ geben wird, wenn die Determinante von (64) null ist. Diese Aussage wird uns die Gleichung für die Bestimmung der Frequenz liefern.

¹²⁾ Diese Ausdrücke sind die gleichen, ob wir es mit schief- oder rechtwinkligen Koordinaten zu tun haben. Für letztere siehe [36], S. 216 u. ff. oder [38], S. 18.

Untersuchen wir die Randbedingungen der freiaufliegenden Platte (15). Sie verlangen, daß ζ längs des ganzen Randes null ist. Wir werden also den Punkten des Netzes, die auf dem Rande liegen, den Wert $\zeta = 0$ geben. Nach (62) folgt aber daraus, daß dort auch

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} = 0 \quad \text{ist.}$$

Andererseits wissen wir, daß für $u = \pm a$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} = 0$ und für $v = \pm b$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} = 0$ ist. Gehen wir mit diesen Werten in obige Gleichung, so wird:

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } u = \pm a: \quad \zeta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} = 0 \\ \text{für } v = \pm b: \quad \zeta = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} - 2 \cos \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u \partial v} = 0 \end{array} \right\} (15)$$

Dies sind aber die Randbedingungen der freiaufliegenden Platte.

Wir sehen also, daß *allein durch die Bedingung $\zeta = 0$ am Rande schon sämtliche Randbedingungen befriedigt sind* und insbesondere auch diejenigen, die verlangen, daß die σ -Spannungen am Rande verschwinden müssen. Hierin liegt der große Vorteil der Anwendung der Gleichung (62), die uns auf sehr einfache Weise die komplizierten Randbedingungen (15) zu befriedigen erlaubt.

§ 9. Berechnung der ersten vier Näherungen nach der Differenzenmethode. Diskussion der Resultate

Betrachten wir die parallelogrammförmige, freiaufliegende Platte mit den Seiten $2a$ und $2b$ und wählen wir das Achsensystem u, v der Fig. 13. α ist der Winkel, den zwei anliegende Seiten miteinander bilden.

1. Näherung für die Frequenz.

Das einfachste Netz, das wir uns denken können, wird durch den Rand und durch die Achsen u und v definiert (Fig. 13). Dieses Netz enthält nur vier Parallelogramme mit den Seiten $\Delta u = a$ und $\Delta v = b$. Bezeichnen wir den Schnittpunkt der Achsen mit 0. Die anderen Punkte brauchen wir nicht zu numerieren, da sie alle auf dem Rande liegen, wo $\zeta = 0$ ist.

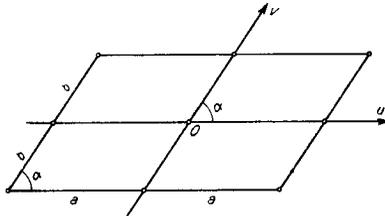


Fig. 13.

Das System (64) wird aus einer einzigen Gleichung bestehen, derjenigen für den Punkt 0. Sie lautet:

$$\frac{0 - 2\zeta_0 + 0}{a^2} - 2 \cos \alpha \frac{0 + 0 - 0 - 0}{4ab} + \frac{0 - 2\zeta_0 + 0}{b^2} + k^2 \sin^2 \alpha \zeta_0 = 0$$

d. h.
$$\left\{ -2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + k^2 \sin^2 \alpha \right\} \zeta_0 = 0. \quad (65)$$

Da $\zeta_0 \neq 0$ ist, muß die geschweifte Klammer zu null werden:

$$\therefore k^2 = \frac{2}{\sin^2 \alpha} \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \right).$$

Berücksichtigen wir (59), (23) und (26) und führen wir zur Abkürzung ein:

$$\sqrt{n} = \frac{a}{b}, \quad (66)$$

so wird aus der letzten Gleichung die Frequenz p :

$$p = \sqrt{\frac{N}{Fm}} \Phi \left(\frac{a}{b}, \alpha \right) \quad (27)$$

wobei:

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right) &= \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sin \alpha} \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ \text{mit } \sqrt{n} &= \frac{a}{b}. \end{aligned}} \quad (67)$$

Die Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ hängt wieder nur von der Form der Platte ab. Sie wurde für das Gebiet $\frac{1}{3} \leq \frac{a}{b} \leq 3$ und für $30^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$ berechnet und in der Fig. 11 durch einen dünn ausgezogenen Strich dargestellt.

2. Näherung für die Frequenz.

Die Formel (67) besitzt den Vorteil großer Einfachheit, sie wird aber nicht sehr genau sein, da die Maschen des Netzes noch recht groß sind. Um eine größere Genauigkeit zu erzielen, wählen wir als 2. Näherung das Netz der Fig. 14. Dieses teilt die Platte in 9 gleichgroße Parallelogramme ein mit den Seiten $\Delta u = \frac{2}{3} a$ und $\Delta v = \frac{2}{3} b$. Da die Platte in bezug auf den Ursprung des Achsensystemes 0 zentrisch-symmetrisch ist, werden nur zwei Schnittpunkte der Netzgeraden mit verschiedenen ζ -Werten vorkommen, die wir mit 1 und 2 bezeichnen wollen.

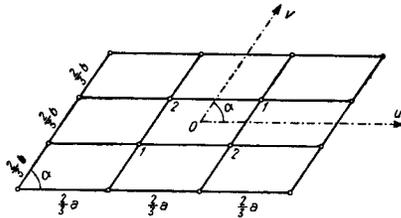


Fig. 14.

Das System (64) liefert uns diesmal zwei Gleichungen, die eine für den Punkt 1, die andere für 2. Sie lauten:

$$\left. \begin{aligned} \text{Punkt 1: } (A - \frac{1}{2} \cos \alpha ab) \zeta_1 + (a^2 + b^2) \zeta_2 &= 0 \\ \text{„ 2: } (a^2 + b^2) \zeta_1 + (A + \frac{1}{2} \cos \alpha ab) \zeta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

wobei die Abkürzung verwendet wurde:

$$A = -2(a^2 + b^2) + 4/9 a^2 b^2 \sin^2 \alpha k^2. \quad (69)$$

Das homogene, in den Parametern ζ_1 und ζ_2 lineare Gleichungssystem (68) gibt aber nur dann für ζ_1 und ζ_2 eine von null verschiedene Lösung, wenn die Determinante des Systems 0 ist.

$$\begin{vmatrix} (A - 1/2 \cos \alpha ab), & (a^2 + b^2) \\ (a^2 + b^2) & , (A + 1/2 \cos \alpha ab) \end{vmatrix} = 0.$$

Die Auflösung der Determinante führt auf die quadratische Gleichung für A :

$$A^2 - 1/4 \cos^2 \alpha a^2 b^2 - (a^2 + b^2)^2 = 0$$

mit den Lösungen:

$$A = \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 1/4 \cos^2 \alpha a^2 b^2}. \quad (70)$$

Vor der Wurzel (70) muß das negative Vorzeichen stehen, denn diese Lösung liefert uns die tiefere Frequenz, wie wir aus (69) sofort sehen. Das positive Vorzeichen entspricht einer höheren Schwingungsform, die wir hier nicht untersuchen wollen.

Führen wir (70) in (69) ein und berücksichtigen wir (59), (23), (25), (26) und (66), so wird die Frequenz wieder die Form (27) annehmen, wobei:

$$\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right) = \frac{9}{2\pi} \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ 2\left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n+2 + \frac{1}{n} + \frac{\cos^2 \alpha}{4}} \right\} \quad (71)$$

mit $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, $n = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

Diese Funktion wurde für das Gebiet $1/3 \leq \frac{a}{b} \leq 3$ und für $30^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$ strichpunktiert in die Fig. 11 eingetragen.

3. Näherung für die Frequenz.

Für die 3. Näherung wählen wir das Netz der Fig. 15. Dieses teilt die Platte in 16 gleichgroße Parallelogramme ein mit den Seiten $\Delta u = a/2$ und $\Delta v = b/2$. Die 9 Punkte innerhalb des Ran-

des, welche gleichsam die Platte „abtasten“, werden wieder zentrisch-symmetrisch in bezug auf den Punkt 0 numeriert.

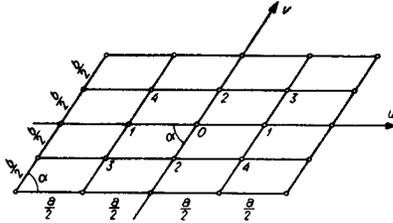


Fig. 15.

Das System (64) besteht jetzt aus 5 Gleichungen, eine für jeden Punkt 0, 1, 2, 3 und 4. Sie sind in den Parametern $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ und ζ_4 homogen und linear. Die Determinante des Systemes muß verschwinden, wenn die Parameter eine nichttriviale Lösung besitzen sollen. Die Determinante ist:

$$\begin{array}{l} \text{Punkt 0:} \\ \text{„ 1:} \\ \text{„ 2:} \\ \text{„ 3:} \\ \text{„ 4:} \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} A & , & 2b^2 & , & 2a^2 & , & -ab \cos \alpha & , & ab \cos \alpha \\ b^2 & , & A & , & - & , & a^2 & , & a^2 \\ a^2 & , & - & , & A & , & b^2 & , & b^2 \\ -\frac{1}{2}ab \cos \alpha & , & a^2 & , & b^2 & , & A & , & - \\ \frac{1}{2}ab \cos \alpha & , & a^2 & , & b^2 & , & - & , & A \end{array} \right| = 0, \quad (72)$$

wobei für A stehen sollte:

$$A = -2(a^2 + b^2) + \frac{a^2 b^2}{4} \sin^2 \alpha k^2. \quad (73)$$

Die Auflösung der Determinante (72) führt auf die Gleichung 5. Grades in A:

$$A^5 - [4(a^4 + b^4) + a^2 b^2 \cos^2 \alpha] A^3 + [4(a^4 - b^4)^2 + 2a^2 b^2 \cos^2 \alpha (a^4 + b^4)] A = 0.$$

Die Lösung $A=0$ interessiert uns nicht, denn sie liefert uns für die Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ einen Wert, der viermal so groß ist, wie $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ der ersten Näherung, wie wir sofort aus (73) und (65) sehen. $A=0$ wird also nicht die Grundschwingung sein. Durch Division der homogenen Gleichung 5. Grades durch A wird

aus ihr eine biquadratische Gleichung in A, deren Lösungen folgender Ausdruck zukommt:

$$A = \pm \sqrt{2(a^4 + b^4) + \frac{1}{2}a^2b^2 \cos^2 \alpha \pm \sqrt{16a^4b^4 + \frac{1}{4}a^4b^4 \cos^4 \alpha}}. \quad (74)$$

Vor der inneren Wurzel müssen wir das positive, vor der äußeren das negative Vorzeichen wählen, denn dies gibt uns den tiefsten Wert für die Frequenz, wie wir sofort aus (73) sehen.

Unter Berücksichtigung von (73), (74), (59), (23), (25), (26) und (66) erhält die Frequenz p die Form (27), wobei:

$$\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right) = \frac{8}{\pi} \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ 2\left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{2\left(n + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha + \sqrt{16 + \frac{1}{4} \cos^4 \alpha}\right)} \right\} \quad (75)$$

mit $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, $n = \left(\frac{a}{b}\right)^2$.

Diese Funktion wurde gestrichelt in die Fig. 11 eingezeichnet.

4. Näherung für die Frequenz.

Das nächstfeinere Netz ist in der Fig. 16 dargestellt. Es teilt die Platte in 25 gleichgroße Parallelogramme ein mit den Seiten $\Delta u = \frac{2}{5}a$ und $\Delta v = \frac{2}{5}b$. Die 16 Punkte innerhalb des Randes werden zentrisch-symmetrisch in bezug auf den Ursprung des Achsensystemes 0 numeriert.

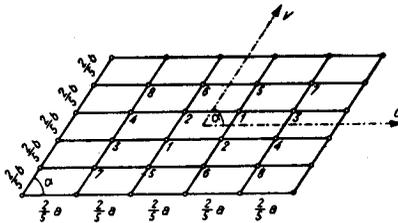


Fig. 16.

Das System (64) besteht aus 8 Gleichungen, eine für jeden Punkt 1 bis 8. Die Determinante des Systemes, die verschwinden muß, lautet:

$$\begin{array}{l}
 1: \\
 2: \\
 3: \\
 4: \\
 5: \\
 6: \\
 7: \\
 8:
 \end{array}
 \left| \begin{array}{cccccccc}
 A-e, a^2+b^2, b^2, e, a^2, e, -e, - \\
 a^2+b^2, A+e, -e, b^2, -e, a^2, -, e \\
 b^2, -e, A, a^2, e, -, a^2, - \\
 e, b^2, a^2, A, -, -e, -, a^2 \\
 a^2, -e, e, -, A, b^2, b^2, - \\
 e, a^2, -, -e, b^2, A, -, b^2 \\
 -e, -, a^2, -, b^2, -, A, - \\
 -, e, -, a^2, -, b^2, -, A
 \end{array} \right| = 0, \quad (76)$$

wobei für A und e stehen sollte:

$$\left. \begin{array}{l}
 A = -2(a^2 + b^2) + \frac{4}{25} a^2 b^2 \sin^2 \alpha k^2 \\
 e = \frac{1}{2} ab \cos \alpha
 \end{array} \right\} \quad (77)$$

Wir haben in (76) eine Determinante vor uns, die in bezug auf ihre Hauptdiagonale (—) symmetrisch ist. Die Auflösung hat eine lange Rechnungsarbeit verlangt, bot aber keine prinzipiellen Schwierigkeiten¹³⁾.

Mit den Abkürzungen:

$$\left. \begin{array}{l}
 B = -2(n+1) + \frac{4}{25} a^2 \sin^2 \alpha k^2 \\
 r = \frac{1}{2} \cos \alpha \sqrt{n}
 \end{array} \right\} \quad (78)$$

ergab die Ausrechnung von (76) die Gleichung 8. Grades in B :

¹³⁾ Im Anhang geben wir den Weg an, den wir für die Ausrechnung der Determinante (76) beschrritten haben.

$$\begin{aligned}
 & + B^8 - \\
 - B^6 & \cdot \left\{ \begin{array}{c} + 9r^2 + \\ + 6n^2 + 2n + 6 \end{array} \right\} + \\
 + B^4 & \cdot \left\{ \begin{array}{c} + 16r^4 + \\ + r^2 \cdot (33n^2 + 18n + 33) + \\ + 11n^4 + 4n^3 + 11n^2 + 4n + 11 \end{array} \right\} - \\
 - B^2 & \cdot \left\{ \begin{array}{c} + 9r^6 + \\ + r^4 \cdot (33n^2 + 34n + 33) + \\ + r^2 \cdot (27n^4 - 6n^3 + 13n^2 - 6n + 27) + \\ + 6n^6 - 4n^5 + 5n^4 + 30n^3 + 5n^2 - 4n + 6 \end{array} \right\} + \\
 & + r^8 + \\
 & + r^6 \cdot (6n^2 + 18n + 6) + \\
 & + r^4 \cdot (11n^4 - 4n^3 - 21n^2 - 4n + 11) + \\
 & + r^2 \cdot (6n^6 - 12n^5 - 11n^4 + 14n^3 - 11n^2 - 12n + 6) + \\
 & + n^8 - 2n^7 - 7n^6 + 6n^5 + 20n^4 + 6n^3 - 7n^2 - 2n + 1 = 0. \quad (79)
 \end{aligned}$$

An eine allgemeine Auflösung von (79) ist natürlich nicht mehr zu denken. Wir haben aber B für einige spezielle Wertepaare (r, n) aus (79) berechnet und mit der Gleichung:

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right) &= \frac{25}{2\pi\sqrt{n}} \frac{1}{\sin\alpha} \{2(n+1) + B\} \\
 \text{mit } \sqrt{n} &= \frac{a}{b}, \quad n = \left(\frac{a}{b}\right)^2.
 \end{aligned}
 } \quad (80)$$

die aus (78) mit (66), (59), (23), (25) und (26) folgt, die zugehörigen Φ -Werte bestimmt (Tabelle 2).

Tabelle 2.
Einige Werte der Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$, 4. Näherung.

$\frac{a}{b} \backslash \alpha$	90°	60° und 120°	40° und 140°	30° und 150°
1	3,040	3,412	4,409	5,544
2 und $\frac{1}{2}$	3,799	4,309	5,654	7,171
3 und $\frac{1}{3}$	5,066	5,791	7,689	9,811

Die Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ 4. Näherung wurde punktiert in die Fig. 11 eingetragen.

Die genaue Lösung für die freiaufliegende, rechteckige Platte ist bekannt und lautet¹⁴⁾: p nach (27), wobei:

$$\Phi\left(\frac{a}{b}, 90^\circ\right) = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad (81)$$

mit $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$.

Diese genauen Werte wurden durch kleine Kreise in die Fig. 11 eingezeichnet.

Weiter wurde die 5. und 6. Näherung für den Spezialfall des Quadrates durch sukzessive Verfeinerung des Netzes auf analoge Weise berechnet, um die *Konvergenz* der Differenzenmethode schön hervortreten zu lassen.

Die nächste Tabelle 3 gibt als Zusammenfassung der Resultate der Differenzenmethode, die Funktionen $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ für die verschiedenen Näherungen und für die vier Fälle: Quadrat, Rechteck, Rhombus und Parallelogramm an.

Wir sehen, wie sich bei fortschreitender Näherung einerseits die Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ rasch kompliziert, andererseits aber auch immer bessere Werte liefert.

¹⁴⁾ Siehe [30], S. 435.

Tabelle 3.

Näherung	Quadrat	Rechteck ($r=0$)	Rhombus ($\sqrt{n} = n=1$)	Parallelogramm
1. $\phi = 2,546$	$\phi = \frac{4}{\pi} \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$	$\phi = \frac{8}{\pi} \frac{1}{\sin \alpha}$	$\phi = \frac{8}{2\pi} \frac{1}{\sin \alpha}$	$\phi = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sin \alpha} \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$
2. $\phi = 2,865$	$\phi = \frac{9}{2\pi} \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$	$\phi = \frac{9}{2\pi} \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ 4 - \sqrt{4 + \frac{\cos^2 \alpha}{4}} \right\}$	$\phi = \frac{9}{2\pi} \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ 4 - \sqrt{4 + \frac{\cos^2 \alpha}{4}} \right\}$	$\phi = \frac{9}{2\pi} \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ 2 \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \sqrt{n+2 + \frac{1}{n} \cos^2 \alpha} \right\}$
3. $\phi = 2,983$	$\phi = \frac{8}{\pi} \left\{ 2 \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \sqrt{2 \left(n + \frac{1}{n} \right) + 4} \right\}$	$\phi = \frac{8}{\pi} \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ 4 - \sqrt{4 + \frac{\cos^2 \alpha}{2}} + \sqrt{16 + \frac{\cos^2 \alpha}{4}} \right\}$	$\phi = \frac{8}{\pi} \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ 4 - \sqrt{4 + \frac{\cos^2 \alpha}{2}} + \sqrt{16 + \frac{\cos^2 \alpha}{4}} \right\}$	$\phi = \frac{8}{\pi} \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ 2 \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \sqrt{2 \left(n + \frac{1}{n} \right) + \frac{\cos^2 \alpha}{2}} + \sqrt{16 + \frac{\cos^4 \alpha}{4}} \right\}$
4. $\phi = 3,040$	$\phi = \frac{25}{2\pi} \sqrt{n} \left\{ 2(n+1) + B \right\}$ wobei $B =$ kleinste Lösung der Gleichung: $B^4 + B^3(2n+2) + B^2(-n^2+3n-1) - B(2n^3+n^2+n+2) + n^4 - n^3 - 4n^2 - n + 1 = 0$	$\phi = \frac{25}{2\pi} \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ 4 + B \right\}$ wobei $B =$ kleinste Lösung der Gleichung: $B^6 - B^4(8r^2+13) + B^2(8r^4+63r^2+28) - r^6 - 29r^4 + 36r^2 - 16 = 0$	$\phi = \frac{25}{2\pi} \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ 4 + B \right\}$ wobei $B =$ kleinste Lösung der Gleichung: $B^8 - B^6\{9r^2+6n^2+2n+6\} + B^4\{16r^4+r^2(33n^2+18n+33)\} + 11n^4+4n^3+11n^2+4n+11\} - B^2\{9r^6+r^4(33n^2+34n+33)\} + r^2(27n^3-6n^3+13n^2-6n+27) + 6n^6-4n^5+5n^4+30n^3 + 5n^2-4n+6\} + r^8+r^6(6n^2+18n+6) + r^4(11n^4-4n^3-21n^2-4n+1) + r^2(6n^6-12n^5-11n^4+14n^3-11n^2-12n+6) + n^8-2n^7-7n^6+6n^5+20n^4+6n^3-7n^2-2n+1 = 0$	
5. $\phi = 3,071$	$\phi = \frac{8}{\pi} \frac{1}{\sin \alpha}$	$\phi = \frac{8}{\pi} \frac{1}{\sin \alpha}$	$\phi = \frac{8}{\pi} \frac{1}{\sin \alpha}$	$\phi = \frac{8}{\pi} \frac{1}{\sin \alpha}$
6. $\phi = 3,088$	$\phi = \frac{9}{2\pi} \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$	$\phi = \frac{9}{2\pi} \frac{1}{\sin \alpha}$	$\phi = \frac{9}{2\pi} \frac{1}{\sin \alpha}$	$\phi = \frac{9}{2\pi} \frac{1}{\sin \alpha}$
genaue Lösung	$\phi = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$	$\phi = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin \alpha}$	$\phi = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin \alpha}$	$\phi = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin \alpha}$

Um die Größe der Fehler bei den einzelnen Näherungen abschätzen zu können, tragen wir in der Tabelle 4 die Φ -Werte der einzelnen Näherungen, sowie die genauen Φ -Werte für das Quadrat und zwei Rechtecke zusammen und berechnen daraus die prozentualen Fehler der Näherungen.

Tabelle 4.

Näherung	Quadrat $\frac{a}{b} = 1$			Rechteck $\frac{a}{b} = 2$ und $\frac{1}{2}$			Rechteck $\frac{a}{b} = 3$ und $\frac{1}{3}$		
	Φ -Wert der Nähe- rung	genauer Φ -Wert	Fehler	Φ -Wert der Nähe- rung	genauer Φ -Wert	Fehler	Φ -Wert der Nähe- rung	genauer Φ -Wert	Fehler
1.	2,546	3,142	19,0 %	3,183	3,927	18,9 %	4,244	5,236	18,9 %
2.	2,865	3,142	8,8 %	3,581	3,927	8,8 %	4,775	5,236	8,8 %
3.	2,983	3,142	5,1 %	3,729	3,927	5,0 %	4,973	5,236	5,0 %
4.	3,040	3,142	3,2 %	3,799	3,927	3,3 %	5,066	5,236	3,2 %
5.	3,071	3,142	2,3 %	?	3,927	?	?	5,236	?
6.	3,088	3,142	1,7 %	?	3,927	?	?	5,236	?

Es ist interessant, festzustellen, daß die Fehler unabhängig von $\frac{a}{b}$ sind!

Extrapolation: Sie rechtfertigt sich aus folgenden Gründen:

1. Aus den ersten vier Näherungen können wir schon ziemlich genau auf die Werte der Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ bei höheren Näherungen schließen.

2. Wir kennen mit (81) den genauen Wert der Funktion für Rechtecke mit beliebigen Seitenverhältnissen.

3. Die prozentualen Fehler der Näherungen sind für das Rechteck unabhängig von $\frac{a}{b}$.

Die vorsichtig extrapolierte Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ wurde durch einen dick ausgezogenen Strich in der Fig. 11 dargestellt und geht natürlich durch die genauen Punkte, die wir für $\alpha = 90^\circ$ aus (81) bestimmt haben.

Wir dürfen erwarten, daß die Genauigkeit von 1 bis 2% im Gebiet $\frac{1}{5} \leq \frac{a}{b} \leq 5$ und $30^\circ \leq \alpha \leq 150^\circ$ erreicht wird.

In der Tafel III des Anhangs ist die extrapolierte Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ für $\frac{a}{b} = 1,0, 1,5, 2,0, 2,5, 3,0, 3,5, 4,0, 4,5$ und $5,0$ eingetragen.

Diskussion der Resultate: Über den allgemeinen Verlauf der Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ können wir dieselben Aussagen wie am Schluß des Paragraphen 4 machen. Wir wollen sie hier nicht wiederholen.

Interessant sind folgende drei Punkte:

1. Die Entwicklung der Funktion durch die einzelnen Näherungen. Die Funktion nimmt im Gebiet um $\alpha = 90^\circ$ bei steigender Näherung ständig zu, dagegen fällt sie im Gebiet um $\alpha = 30^\circ$ und $\alpha = 150^\circ$ nach anfänglichem Anstieg bei höheren Näherungen wieder ab. Dies können wir einwandfrei feststellen, wenn wir die Φ -Werte der einzelnen Näherungen für den Fall $\frac{a}{b} = 1$, $\alpha = 30^\circ$ oder 150° vergleichen. Sie betragen:

1. Näherung $\Phi = 5,093$
2. „ $\Phi = 5,597$
3. „ $\Phi = 5,618$
4. „ $\Phi = 5,544$

Es ist sehr wahrscheinlich, daß die Funktionswerte in den Gebieten um $\alpha = 30^\circ$ und 150° bei höheren Näherungen weiter absinken. Daher liegt der vorsichtig extrapolierte Wert etwas tiefer als derjenige der 4. Näherung.

2. Wir können uns jetzt fragen, ob zwischen der Aussage, daß die Frequenz kleiner werden soll bei wachsender Parameterzahl und der Tatsache, daß die Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ im Gebiet um $\alpha = 90^\circ$ bei steigender Näherung ständig zunimmt, nicht ein Widerspruch besteht.

Dazu ist zu bemerken, daß obige Überlegung durchaus richtig ist: je besser wir die Gestalt der Platte während der Schwingung der tatsächlich auftretenden Form anpassen, umso kleiner muß p und damit auch Φ werden.

Neben diesem Einfluß kommt aber bei der Differenzenmethode noch ein anderer dazu, der in umgekehrter Richtung wirkt: die Randbedingungen. *Bei der Differenzenmethode erfüllen wir nämlich die Bedingung (15) nur in den Randpunkten des Netzes streng.* Bei der ersten Näherung (siehe Fig. 13) wird das in den vier Eckpunkten der Platte und in der Mitte der Seiten, also insgesamt in 8 Punkten des Randes der Fall sein. Bei der 2. Näherung (Fig. 14) werden es 12 Randpunkte sein, bei der 4. Näherung 20, bei der 6. Näherung bereits 28, usw.

Allgemein können wir die Anzahl der Randpunkte Z , in denen die Bedingungen (15) streng erfüllt sind, durch folgende Formel ausdrücken:

$$Z = 4(j + 1),$$

wobei j die Näherung bedeutet.

Wir sehen, daß Z bei steigender Näherung ständig zunimmt. Dies hat aber zur Folge, daß wir bei jeder höheren Näherung zusätzliche Bedingungen am Rande hinzufügen, was uns die Frequenz natürlich erhöht.

3. Die Funktion (54), die nach der Methode von Rayleigh gefunden wurde, gibt nur im schmalen Gebiet $80^\circ \leq \alpha \leq 100^\circ$ gute Werte. Der Vergleich mit den extrapolierten Werten in der Fig. 11 zeigt nämlich im Falle des Rhombus, daß (54) bald viel zu große Φ -Werte liefert, wenn wir uns aus dem erwähnten Gebiet entfernen. Für den Fall $\frac{a}{b} = 1$, $\alpha = 30^\circ$ oder 150° beträgt der Fehler von (54) bereits 54%! Der Grund liegt darin, daß der Ansatz (53) im allgemeinen die Randbedingungen *nicht* erfüllt. Wir sehen daraus, wie wichtig es ist, diese Bedingungen richtig zu befriedigen.

§ 10. Schlußbetrachtungen

1. Bei der statischen Deformation der rechteckigen, freiaufliegenden Platte müssen in den vier Eckpunkten vier Einzelkräfte auftreten, damit ein Aufbiegen der Ecken vermieden wird. Es ist zu erwarten, daß dies auch bei der Eigenschwingung der schiefen, freiaufliegenden Platte der Fall ist. Die angegebenen Lösungen werden also nur dann gelten, wenn ξ längs des ganzen Randes null ist.

2. Bei der Berechnung der Eigenfrequenz haben wir uns immer auf die Bestimmung der *Grundfrequenz* beschränkt. Wohl liefert die Methode von Ritz bei mehreren Parametern auch mehrere Eigenfrequenzen; desgleichen erhalten wir aus der Differenzenmethode immer mehr Eigenfrequenzen, je weiter wir die Näherung treiben. Es dürfte aber recht schwer sein, die Schwingungsformen (Knotenlinien usw.) zu bestimmen, welche diesen höheren Eigenfrequenzen entsprechen, und noch schwieriger wird die Frage zu beantworten sein, ob gerade diese höheren Schwingungsformen beim Versuch auch tatsächlich auftreten; zudem wäre die Genauigkeit der Lösung sehr in Frage gestellt.

3. Die *Differenzenmethode* hat uns erlaubt, die Eigenfrequenz der freiaufliegenden, schiefen Platte zu berechnen. Es ist sehr wahrscheinlich, daß diese Methode auch für freiaufliegende Platten anderer Form angewendet werden kann, wie z. B. Dreieck, Kreis, Kreissektor etc. oder sogar auf die Balkenschwingungen.

Es wäre interessant, die Untersuchung in dieser Richtung weiter auszubauen. Wir haben jedoch darauf verzichtet, da dies den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen würde.

§ 11. Zusammenfassung

Die Grundfrequenz parallelogrammförmiger Platten wurde durch Näherungsverfahren für folgende Fälle berechnet:

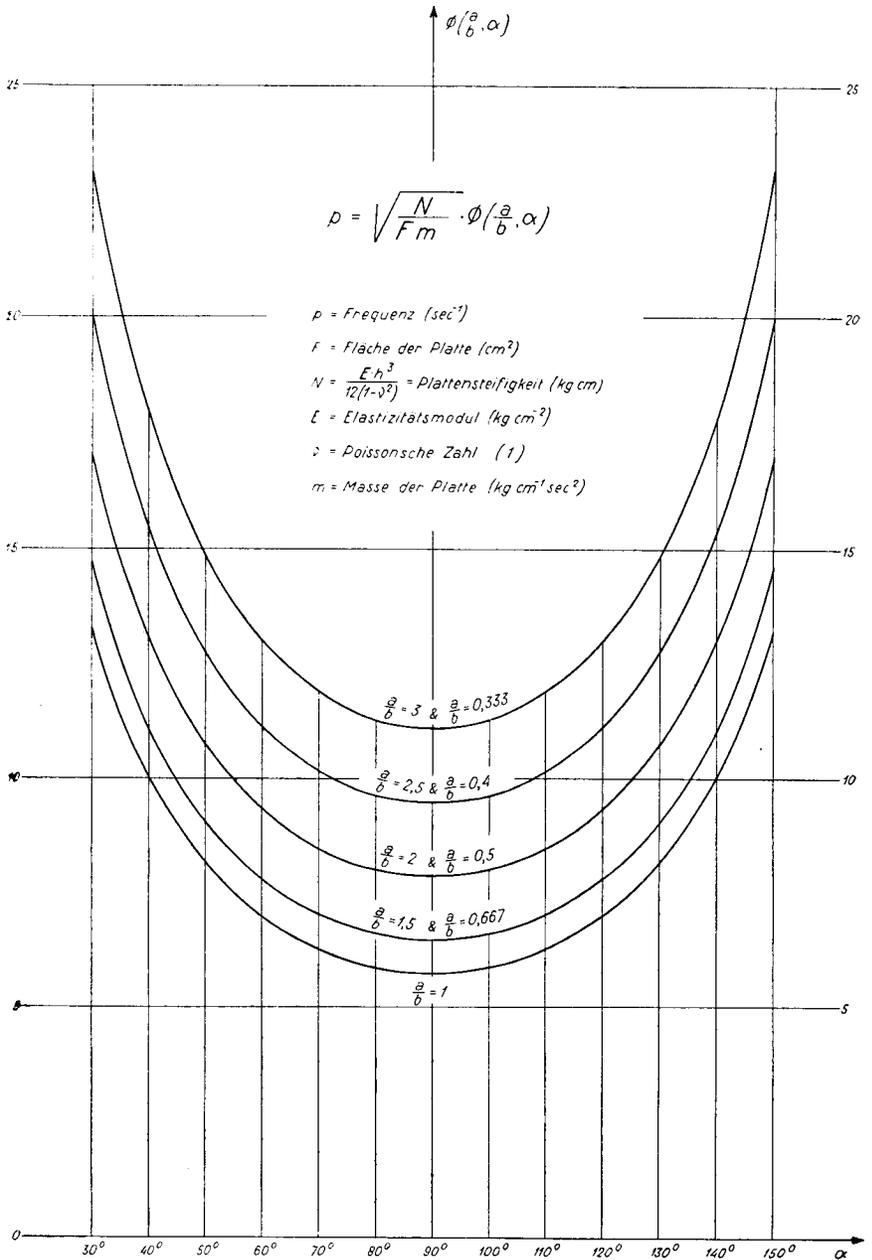
1. Eingespannte Platte,
2. Eingespannte Platte mit einer konzentrierten Einzelmasse in der Mitte, wobei das Verhältnis der Einzelmasse zu der Masse der Platte beliebige Werte von 0 bis ∞ annehmen kann,
3. Freiaufliegende Platte.

Dabei wurden für 1. und 2. die Methoden von Rayleigh und Ritz verwendet und für 3. eine Differenzenmethode entwickelt.

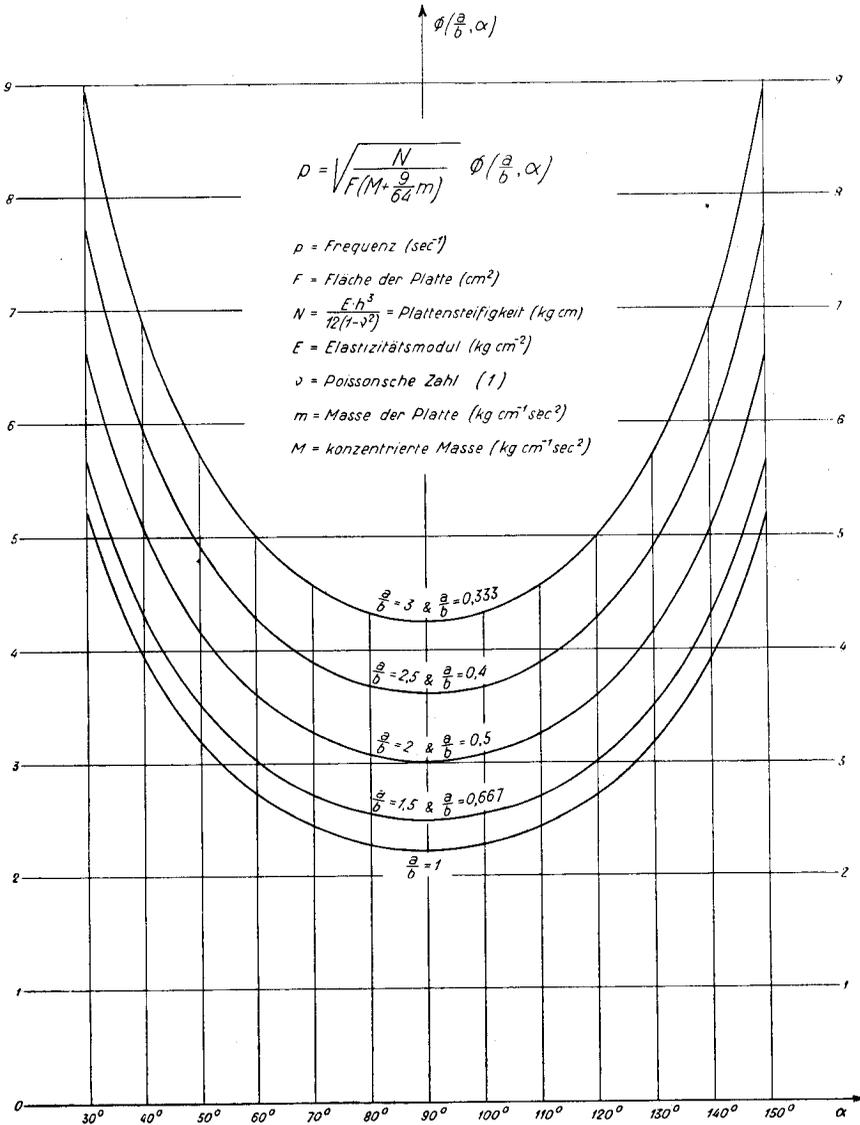
Diese Näherungsmethoden haben uns erlaubt, die Frequenz als Funktion der Form der Platte auf einige % genau zu bestimmen. Als Resultat dieser Untersuchung geben wir im Anhang für jeden der drei Fälle 1., 2. und 3. eine Tafel I, II und III an, aus welcher der Ingenieur sehr rasch die Formfunktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$ ablesen und mit einfachen Formeln die Frequenz berechnen kann.

ANHANG

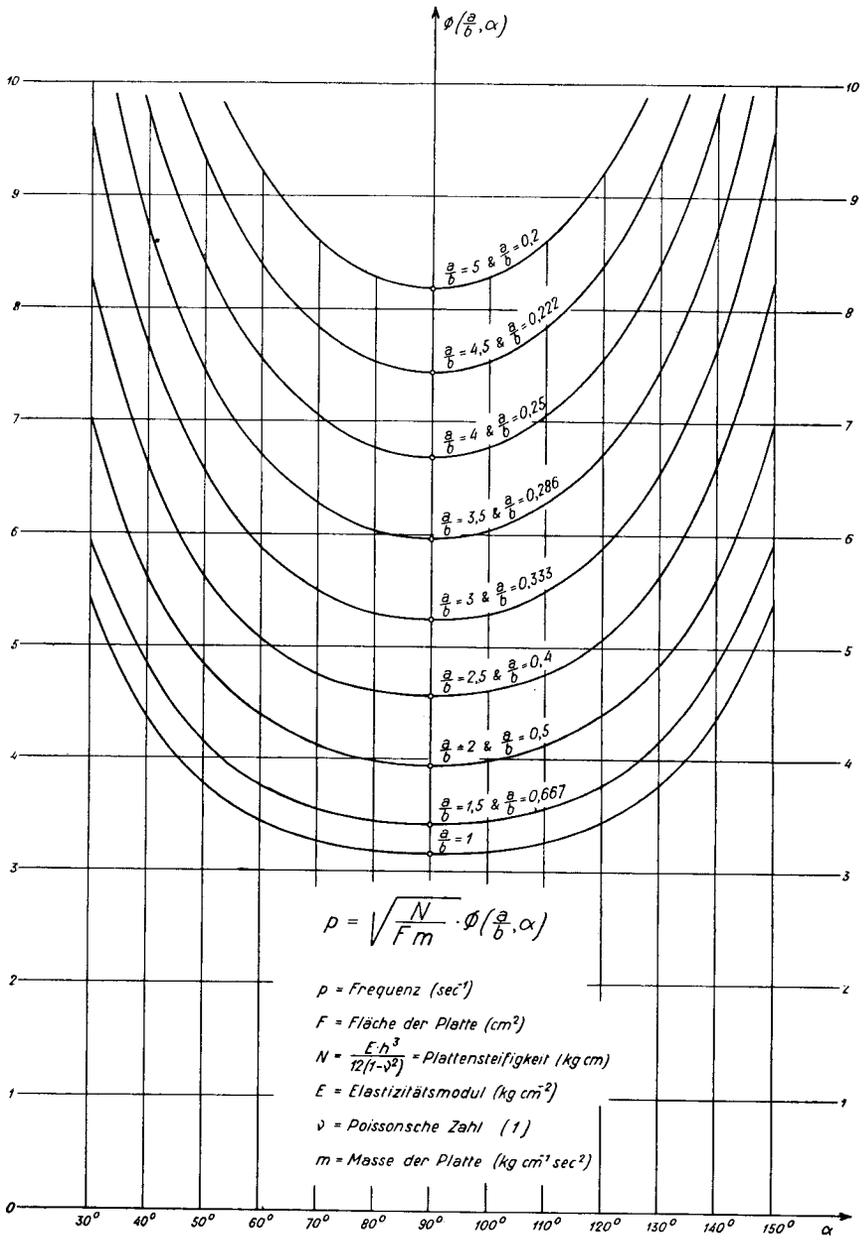
Tafeln. Ausrechnung der Determinante (76)



Tafel I. Eingespannte, schiefe Platte. Graphische Darstellung der Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$.



Tafel II. Eingespannte, schiefe Platte mit einer konzentrierten Masse in der Mitte (M/m beliebig). Graphische Darstellung der Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$.



Tafel III. Freiaufliegende, schiefe Platte. Graphische Darstellung der Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$.

Ausrechnung der Determinante (76).

Sie lautet:

$$\begin{array}{l}
 1: \\
 2: \\
 3: \\
 4: \\
 5: \\
 6: \\
 7: \\
 8:
 \end{array}
 \left| \begin{array}{cccccccc}
 A-e, a^2+b^2, b^2, e, a^2, e, -e, - \\
 a^2+b^2, A+e, -e, b^2, -e, a^2, -, e \\
 b^2, -e, A, a^2, e, -, a^2, - \\
 e, b^2, a^2, A, -, -e, -, a^2 \\
 a^2, -e, e, -, A, b^2, b^2, - \\
 e, a^2, -, -e, b^2, A, -, b^2 \\
 -e, -, a^2, -, b^2, -, A, - \\
 -, e, -, a^2, -, b^2, -, A
 \end{array} \right| = 0, \quad (76)$$

wobei für A und e stehen sollte:

$$\left. \begin{array}{l}
 A = -2(a^2 + b^2) + \frac{4}{25} a^2 b^2 \sin^2 \alpha k^2 \\
 e = \frac{1}{2} ab \cos \alpha
 \end{array} \right\}^{15)} \quad (77)$$

Bevor wir zur Auflösung der Determinante geschritten sind, haben wir sie folgendermaßen umgebildet: zuerst haben wir jedes Glied von (76) durch b^2 dividiert und sofort die Abkürzung (25), $n = \left(\frac{a}{b}\right)^2$, eingeführt, hierauf die Determinante neu geschrieben in der Reihenfolge 1. 3. 5. 7. 2. 4. 6. 8. Zeile. Diese neue Determinante wurde nochmals in der Reihenfolge 1. 3. 5. 7. 2. 4. 6. 8. Kolonne umgeschrieben. Wir dürfen die Zeilen und Kolonnen untereinander vertauschen, denn dies hat nur einen keine Rolle spielenden Vorzeichenwechsel zur Folge, da die Determinante 0 ist. Nach diesen Umformungen lautet sie:

¹⁵⁾ Siehe S. 114.

$$\begin{array}{l}
 \text{Zeile 1} \\
 \text{„ 2} \\
 \text{„ 3} \\
 \text{„ 4} \\
 \text{„ 5} \\
 \text{„ 6} \\
 \text{„ 7} \\
 \text{„ 8}
 \end{array}
 \left| \begin{array}{cccc|cccc}
 B-r, & 1, & n, & -r & n+1, & r, & r, & - \\
 & 1, & B, & r, & n & -r, & n, & -, & - \\
 & n, & r, & B, & 1 & -r, & -, & 1, & - \\
 & -r, & n, & 1, & B & -, & -, & -, & - \\
 n+1, & -r, & -r, & - & B+r, & 1, & n, & r \\
 r, & n, & -, & - & 1, & B, & -r, & n \\
 r, & -, & 1, & - & n, & -r, & B, & 1 \\
 -, & -, & -, & - & r, & n, & 1, & B
 \end{array} \right| = 0. \quad (76)$$

Darin bedeutet:

$$\left. \begin{array}{l}
 B = -2(n+1) + \frac{4}{25} a^2 \sin^2 \alpha k^2 \\
 r = \frac{1}{2} \cos \alpha \sqrt{n}
 \end{array} \right\} \quad (78)$$

Wir haben in (76) eine Determinante vor uns, die in bezug auf ihre Hauptdiagonale (— —) symmetrisch ist und deren Nullstellen für die Berechnung recht günstig liegen, wie wir sehen werden.

Die Auflösung von (76) hat eine sehr lange Rechenarbeit verlangt, bot aber keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

1. An eine Entwicklung nach Zeilen oder Kolonnen ist wegen der viel zu großen Rechenarbeit nicht zu denken.

2. Die Auflösung von (76) führt auf eine sogenannte „Säkulargleichung“ 8. Grades in B , die ihren Namen daher erhalten hat, weil man bei der Berechnung der Säkularbewegung von Planeten auch auf symmetrische Determinanten geführt wird¹⁶⁾. Auch nach dieser Methode ist aber die Berechnung von (76) wegen der enormen Rechenarbeit fast unmöglich.

3. Dagegen bietet uns der *Laplacesche Entwicklungssatz* ganz erhebliche Vorteile. Nach ihm haben wir (76) berechnet. Er sagt folgendes aus:

¹⁶⁾ Vgl. [39], S. 125 u. ff.

Ist ganz allgemein a_{ik} die zu berechnende Determinante:

$$|a_{ik}| = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1p}, a_{1p+1}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2p}, a_{2p+1}, \dots, a_{2n} \\ \vdots \\ a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{pp}, a_{pp+1}, \dots, a_{pn} \\ \vdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{np}, a_{np+1}, \dots, a_{nn} \end{vmatrix},$$

so kann man a_{ik} immer in der Form schreiben¹⁷⁾:

$$|a_{ik}| = \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \\ (\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p)}} (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p + \varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_p} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{\alpha_1 \varrho_1}, a_{\alpha_1 \varrho_2}, \dots, a_{\alpha_1 \varrho_p} \\ a_{\alpha_2 \varrho_1}, a_{\alpha_2 \varrho_2}, \dots, a_{\alpha_2 \varrho_p} \\ \vdots \\ a_{\alpha_p \varrho_1}, \dots, a_{\alpha_p \varrho_p} \end{vmatrix}}_{D^*} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{\alpha_{p+1} \varrho_{p+1}}, \dots, a_{\alpha_{p+1} \varrho_n} \\ \vdots \\ a_{\alpha_n \varrho_{p+1}}, \dots, a_{\alpha_n \varrho_n} \end{vmatrix}}_{D^{**}}$$

oder in Worten ausgedrückt:

Eine Determinante läßt sich immer als Summe aller möglichen Produkte zweier komplementärer Determinanten schreiben, wobei man diese Produkte so berechnet, daß man von der $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_p$ -Kolonne (oder Zeile) alle möglichen Determinanten p -ten Grades bildet und jede mit der komplementären Determinante der $\varrho_{p+1}, \varrho_{p+2}, \dots, \varrho_n$ -Kolonne (oder Zeile) multipliziert. Das Vorzeichen dieser Produkte wird vom Ausdruck bestimmt:

$$(-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p + \varrho_1 + \varrho_2 + \dots + \varrho_p}.$$

D^* und D^{**} sind nämlich zwei komplementäre Determinanten, weil D^{**} nur diejenigen Zeilen (oder Kolonnen) enthält, die in D^* fehlen.

Wir werden also jetzt (76) in eine linke und rechte Hälfte spalten (durch einen doppelten, senkrechten Strich in $(\overline{76})$ an-

¹⁷⁾ Vergl. [40]. Der Index p kann beliebige Werte $1 < p < n$ annehmen. Mit Vorteil wird man aber $p = n/2$ wählen.

gedeutet). Von der linken Hälfte (1., 2., 3. und 4. Kolonne) werden wir alle möglichen Determinanten 4. Grades D^* bilden und jede mit der komplementären Determinante D^{**} der rechten Seite von (76) (5., 6., 7. und 8. Kolonne) multiplizieren.

Im allgemeinen Fall haben wir $\binom{8}{4} = 70$ Produkte von je zwei Determinanten 4. Grades zu berechnen, in unserem Fall dagegen, wegen der Nullstellen, ganz bedeutend weniger. Wir müssen nämlich *nur diejenigen Produkte berechnen, bei denen D^* die 4. Zeile enthält und die 8. Zeile nicht enthält*¹⁸⁾. Diese Tatsache reduziert uns die Zahl der Produkte auf 20. Wir bezeichnen sie mit:

$$\begin{aligned}
 &+ D_{1234}, + D_{1245}, - D_{1246}, + D_{1247}, - D_{1345}, + D_{1346}, - D_{1347}, \\
 &+ D_{1456}, - D_{1457}, + D_{1467}, + D_{2345}, - D_{2346}, + D_{2347}, - D_{2456}, \\
 &+ D_{2457}, - D_{2467}, + D_{3456}, - D_{3457}, + D_{3467}, + D_{4567},
 \end{aligned}$$

wobei die Indices von D die Zeilen angeben, die in D^* vorkommen. Für das Vorzeichen gilt folgende Regel:

Ist die Quersumme der Indices gerade, so ist das $+$ Zeichen zu nehmen, ist sie ungerade, so muß man das $-$ Zeichen wählen; z. B. wird:

$$\begin{aligned}
 + D_{1467} &= + \begin{vmatrix} B-r, & 1, & n, & -r \\ -r, & n, & 1, & B \\ r, & n, & -, & - \\ r, & -, & 1, & - \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -r, & n, & -, & - \\ -r, & -, & 1, & - \\ B+r, & 1, & n, & r \\ r, & n, & 1, & B \end{vmatrix} = \\
 &= (-B^2n + Brn^2 + Brn + Br + 3r^2n) \cdot (-B^2n - Brn^2 - Brn - Br + 3r^2n).
 \end{aligned}$$

Auf die gleiche Weise wurden die 19 anderen Produkte von je zwei komplementären Determinanten 4. Grades berechnet, die Klammern ausmultipliziert und die 1692 Glieder geordnet und addiert. Dies führte uns auf die Gleichung 8. Grades in B :

¹⁸⁾ Die 8. Zeile darf in D^* nicht vorkommen, denn sie besteht aus lauter Nullen und macht auch das Produkt $D^* \cdot D^{**}$ zu null. Dagegen muß die 4. Zeile in D^* auftreten, sonst kommt die 4. Zeile von D^{**} vor, die wieder aus lauter Nullen besteht und somit ebenfalls das Produkt $D^* \cdot D^{**}$ zu null macht.

$$\begin{aligned}
 & + B^8 - \\
 - B^6 \cdot & \left\{ \begin{array}{c} + 9r^2 + \\ + 6n^2 + 2n + 6 \end{array} \right\} + \\
 + B^4 \cdot & \left\{ \begin{array}{c} + 16r^4 + \\ + r^2 \cdot (33n^2 + 18n + 33) + \\ + 11n^4 + 4n^3 + 11n^2 + 4n + 11 \end{array} \right\} - \\
 - B^2 \cdot & \left\{ \begin{array}{c} + 9r^6 + \\ + r^4 \cdot (33n^2 + 34n + 33) + \\ + r^2 \cdot (27n^4 - 6n^3 + 13n^2 - 6n + 27) + \\ + 6n^6 - 4n^5 + 5n^4 + 30n^3 + 5n^2 - 4n + 6 \end{array} \right\} + \\
 & + r^8 + \\
 & + r^6 \cdot (6n^2 + 18n + 6) + \\
 & + r^4 \cdot (11n^4 - 4n^3 - 21n^2 - 4n + 11) + \\
 + r^2 \cdot & (6n^6 - 12n^5 - 11n^4 + 14n^3 - 11n^2 - 12n + 6) + \\
 + n^8 - 2n^7 - 7n^6 + 6n^5 + 20n^4 + 6n^3 - 7n^2 - 2n + 1 = 0. &^{19)} \quad (79)
 \end{aligned}$$

Kontrollen:

1. Die Gleichung (79) enthält nur gerade Potenzen von B .
2. Sie enthält ebenfalls nur gerade Potenzen von $r = \frac{1}{2} \frac{a}{b} \cos \alpha$, wie es auch sein muß, denn die Funktion Φ muß in bezug auf die Gerade $\alpha = 90^\circ$ symmetrisch sein.
3. Die Zahlenfaktoren sind in bezug auf die senkrechte, gestrichelte Linie in (79) symmetrisch. Das hat zur Folge, daß wir $n = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ durch $\frac{1}{n}$ ersetzen können, ohne daß wir die Wurzeln von (79) verändern, wie wir sofort aus (78) und (79) sehen, und wie es auch sein muß.

¹⁹⁾ Siehe S. 115.

4. *Rhombus*: Wir haben den Spezialfall des Rhombus direkt berechnet. Er gab uns die Gleichung 6. Grades in B :

$$B^6 - B^4(8r^2 - 13) + B^2(8r^4 + 63r^2 + 28) - r^6 - 29r^4 + 36r^2 - 16 = 0. \quad (79')$$

Da (79) im Spezialfall $n = 1$ (Rhombus) dieselben Wurzeln wie (79') besitzen muß, soll die algebraische Division der zwei Polynome aufgehen. Sie ergab: $B^2 - r^2 - 1$ mit dem Restglied 0, wie es sein muß.

5. *Rechteck*: Analog haben wir den Fall des Rechteckes direkt ausgerechnet. Er führte uns auf die Gleichung 4. Grades in B :

$$B^4 + B^3(2n + 2) + B^2(-n^2 + 3n - 1) - B(2n^3 + n^2 + n + 2) + n^4 - n^3 - 4n^2 - n + 1 = 0. \quad (79'')$$

Aus denselben Gründen wie oben muß das Polynom von (79), spezialisiert auf den Fall $r = 0$, durch das Polynom von (79'') teilbar sein. Die algebraische Division ergab:

$$B^4 - B^3(2n + 2) + B^2(-n^2 + 3n - 1) + B(2n^3 + n^2 + n + 2) + n^4 - n^3 - 4n^2 - n + 1$$

mit dem Restglied 0, wie es sein muß.

6. *Quadrat*: Für das Quadrat erhielten wir die Gleichung 3. Grades in B :

$$B^3 + 3B^2 - 2B - 4 = 0. \quad (79''')$$

Die algebraische Division des auf den Fall $r = 0$, $n = 1$ spezialisierten Polynomes von (79) durch das Polynom von (79''') gab:

$$B^5 - 3B^4 - 3B^3 + 7B^2 + 2B - 4$$

mit dem Restglied 0, wie es sein muß.

7. Die Funktion $\Phi\left(\frac{a}{b}, \alpha\right)$, 4. Näherung wurde aus der Gleichung (79) berechnet und gab Werte, wie sie aus der 1., 2. und 3. Näherung zu erwarten waren.

Literaturverzeichnis

(Die unten stehenden Zahlen sind im Text eingeklammert [])

1. *Publikationen des photoelastischen Laboratoriums, Institut für Physik der E.T.H., Prof. Dr. F. Tank.*

(1927—1940)

1. *Favre, H.*: Méthode purement optique de détermination des tensions intérieures se produisant dans les constructions. Schweiz. Bauzeitung, Bd. 90, 1927.
2. — Sur une nouvelle méthode optique de détermination des tensions intérieures. (Diss. E. T. H.). Editions de la Revue d'Optique théorique et instrumentale. Paris 1929.
3. *Tank, F. u. Müller, J.*: Spannungsoptische Untersuchung eines kurzen auf Biegung beanspruchten Stabes. Denkschrift 50 Jahre Eidg. Mat.-Prüf. Anst., Zürich 1930.
4. *Tank, F., Favre, H. u. Jenny-Dürst, H.*: Aus dem Laboratorium für photoelastische Untersuchungen an der E. T. H. Zürich. Die Bau-technik, Bd. 8, Berlin 1930.
5. *Müller, J.*: Etude de trois profils de murs encastrés sollicités à la compression et à la flexion. Rev. Opt., Paris 1930.
6. *Favre, H.*: Sur une nouvelle méthode optique de détermination des tensions intérieures dans les solides à trois dimensions. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Paris 1930.
7. — Communications. Compte rendu des troisième et quatrième Réunions de l'Institut d'Optique, Paris 1930.
8. — La détermination optique des tensions intérieures. Rev. Opt., Paris 1932.
9. *Rajnfeld, S.*: Studio di alcuni problemi elastici a due dimensioni. (Diss. E. T. H.). Energia elettrica, Milano 1933.
10. *Baud, R. V.*: Beiträge zur Kenntnis der Spannungsverteilung in prismatischen und keilförmigen Konstruktionselementen mit Querschnittsübergängen. (Diss. E. T. H.) Zürich 1934.
11. *Tank, F.*: Die Tätigkeit des photoelastischen Laboratoriums der E. T. H. 1927 bis 1933. Schweiz. Bauzeitung, Bd. 104, 1934.
12. *Meyer, H. u. Tank, F.*: Über ein verbessertes elektrisches Verfahren zur Auswertung der Gleichung $\Delta\varphi = 0$ und seine Anwendung bei photoelastischen Untersuchungen. Helv. Phys. Acta, Bd. 8, 1935.
13. *Meyer, H.*: Spannungsoptische Untersuchung ebener Schwingungsvorgänge. (Diss. E. T. H.) Ing. Arch., Bd. 7, Heft 5, 1936.

14. *Tank, F.*: Eine neue Methode der interferometrischen Spannungsmessung. *Helv. Phys. Acta*, Bd. 9, 1936.
15. *Tank, F., Baud, R. V. u. Schiltknecht, E.*: Die neuen Einrichtungen des photoelastischen Laboratoriums an der E. T. H. und an der E. M. P. A. *Schweiz. Bauzeitung*, Bd. 109, 1937.
16. *Baud, R. V. u. Tank, F.*: Ermittlung von zweidimensionalen Potentialfeldern bei beliebigen Randbedingungen. *Schweiz. Bauzeitung*, Bd. 111, 1938.

2. *Publikationen des photoelastischen Laboratoriums, Lehrstuhl für Mechanik in französischer Sprache, Prof. Dr. H. Favre.*
(Seit 1941)

17. *Robert, M.*: Etude expérimentale et théorique de la répartition des tensions dans les poutres encastrées. (Diss. E. T. H.) Publication No. 1. Edition S. A. Leemann frères & Cie., Zurich 1943.
18. *Favre, H. u. Bereuter, R.*: Etude de la répartition des tensions dans une pièce encastrée en fonction de l'angle d'incidence. Publication No. 2. Edition S. A. Leemann frères & Cie., Zurich 1944.

3. *Allgemeine Literatur zum 1. Teil.*

19. *Akira Miura*: Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern. Julius Springer, Berlin 1928.
20. *Mesnager, A.*: Détermination expérimentale des efforts intérieurs dans les solides. *Mémorial des Sciences Physiques*. Paris 1929.
21. *Mesmer, G.*: Spannungsoptik. Julius Springer, Berlin 1939.
22. *Föppl, L.*: Über singuläre Punkte 1. Ordnung des ebenen Spannungszustandes. *Mitt. des mech. techn. Labor. München*, Heft 34, 1930.
23. — Der singuläre Punkt 2. Ordnung. *Mitt. des mech. techn. Labor. München*, Heft 35, 1931.
24. *Mustafa Inan*: Photoelastische und mechanische Untersuchungen an Rahmenträgern mit besonderer Berücksichtigung der Knotenpunkte. Diss. E. T. H., Zürich 1941.

4. *Allgemeine Literatur zum 2. Teil.*

25. *Kirchhoff, G.*: Gesammelte Abhandlungen. Johann Ambrosius Barth, Leipzig 1882.
26. *Ritz, W.*: Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern. *Annalen der Physik* 28, 1909.
27. — Gesammelte Werke. Gauthier-Villars, Paris 1911.
28. *Stodola, A.*: *Schweiz. Bauzeitung*, Bd. 63, 1914.
29. *Bouasse, H.*: Verges et plaques, cloches et carillons. Delagrave, Paris 1927.

30. *Timoshenko, S.*: Théorie des vibrations. Ch. Béranger, Paris et Liège 1939.
31. *v. Freudenreich, J.*: Engineering, vol. 119, 1925.
32. *Favre, H.*: Contribution à l'étude des plaques obliques. Schweiz. Bauzeitung 25. Juli und 1. Aug. 1942.
33. — Le calcul des plaques obliques par la méthode des équations aux différences. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, 7. Bd. der „Abhandlungen“.
34. *Föppl, A. u. L.*: Drang und Zwang. Oldenburg, München u. Berlin 1941.
35. *Lord Rayleigh*: Theory of sound. Macmillan and Co., London 1926.
36. *Nadai, M.*: Elastische Platten. Julius Springer, Berlin 1925.
37. *Riemann-Weber*: Die partiellen Differentialgleichungen der Physik. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1912.
38. *Marcus, H.*: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. Julius Springer, Berlin 1932.
39. *Kowalewski, G.*: Einführung in die Determinantentheorie. Veit & Co., Leipzig 1909.
40. *Schreier, O. u. Sperner, E.*: Einführung in die analytische Geometrie und Algebra. 1. Bd., B. G. Teubner, Berlin-Leipzig 1931.

Curriculum vitae

Am 7. Januar 1920 wurde ich in Mailand als Sohn des Hans Bereuter, Kaufmann, und der Annita Bereuter-Pfeiffer geboren, besuchte daselbst die Schweizer-schule und trat 1935 in die Kantonsschule Trogen (Ap-penzell A.-Rh.) ein. Nach Ablegung der Maturität be-gann ich 1938 meine Studien an der Eidg. Techn. Hoch-schule in Zürich, Abteilung für Maschineningenieur-wesen und schloß diese 1942 mit dem Diplom als Maschineningenieur ab.

Seither bin ich Assistent am Lehrstuhl für Mecha-nik in französischer Sprache. Während dieser Zeit habe ich im Photoelastischen Laboratorium der E.T.H. die Forschungen ausgeführt, wovon in dieser Arbeit und in [18] berichtet wird.