

Anomale Zerstreuung von α -Strahlen

Von der

Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich

zur Erlangung der

Würde eines Doktors der Mathematik

genehmigte

Promotionsarbeit

vorgelegt von

Willy Hardmeier

aus Mönchaltorf (Zürich)

Referent: Herr Prof. Dr. P. Debye

Korreferent: Herr Prof. Dr. P. Scherrer

Nr. 489.



Leipzig 1927

Druck von August Pries

Leer - Vide - Empty

Meinen lieben Eltern

gewidmet

Veröffentlicht in *Physikalische Zeitschrift* 1927,
Seite 181–195

Anomale Zerstreuung von α -Strahlen.

In den letzten Jahren lenkten verschiedene experimentelle Untersuchungen über Abweichungen von der zuerst von Rutherford und seinen Mitarbeitern bestimmten Zerstreuung der α -Strahlen beim Durchgang durch Materie das Interesse auf sich. Es soll hier versucht werden, darüber Aufschluß zu erhalten, inwieweit es möglich ist, jene Abweichungen im Rahmen der bisher anerkannten Voraussetzungen zu deuten.

1. Passiert ein Bündel von α -Strahlen (d. h. doppelt positiv geladener Heliumatome mit Geschwindigkeiten bis 20000 km/sec) eine dünne Schicht Materie, so zeigt sich bekanntlich die interessante Tatsache, daß weitaus der größte Teil dieser materiellen Teilchen bei geringer Geschwindigkeitsverminderung kaum abgelenkt wird. Die α -Strahlen durchdringen also in ihrer Mehrzahl selbst das Innere der Atome ohne wesentlich beeinflußt zu werden. Daneben zeigen sich freilich in allen Richtungen einzelne sehr stark abgelenkte Teilchen. Die Wahrscheinlichkeit für eine solche starke Ablenkung als Resultat mehrerer im gleichen Sinne aufeinanderfolgender kleinerer ist viel zu klein zur Deutung des beobachteten Effektes. Wir müssen uns vielmehr eine solche starke Ablenkung durch einen einzigen Vorgang entstanden denken, worauf ja auch die bei α -Strahlbahnen in Luft oft beobachteten Knicke mit nachheriger gradliniger Fortsetzung weisen.

Will man aber diese starken Richtungsänderungen durch eine einmalige Wirkung eines Atoms auf das sehr schnelle α -Teilchen erklären, so muß diese Wirkung eine derartig intensive sein, wie sie, wenn wir bloß elektrostatische Kräfte annehmen, nur bei sehr kleinen Distanzen (10^{-12} cm) zwischen den in Betracht kommenden

Ladungen auftreten können. Diese Überlegungen hauptsächlich führten ja zu der heutigen Auffassung über die Konzentrierung der Masse eines Atoms in einem gegenüber der Größe desselben fast verschwindend kleinen Bereich, dem Kern.

Quantitative Schlüsse können aus solchen Beobachtungen nur gezogen werden bei einer genauen Berechnung der Wahrscheinlichkeit dieser starken Ablenkungen unter Annahme einer bestimmten Kraftwirkung zwischen α -Teilchen und Kern. Es gelang Rutherford (1) und seinen Mitarbeitern (2) unter Annahme einer positiven Ladung des Kernes ihre experimentellen Resultate darzustellen, ohne weitere Kräfte als die elektrostatischen vorauszusetzen. Darüber hinaus gelangten sie zur Messung dieser jedem Element eigenen Ladung des Kernes, in voller Übereinstimmung mit anderweitigen, zum Beispiel aus Röntgenspektren gewonnenen Resultaten (3).

2. Die vorliegenden neueren Messungen von Bieler (4) und Rutherford und Chadwick (5) zeigen, daß bei den Leichtmetallen Aluminium und Magnesium als zerstreue Substanz, unter einem bestimmten Winkel zum Primärstrahl im allgemeinen weniger α -Teilchen erhalten werden, als nach der einfachen Voraussetzung elektrostatischer Kräfte zwischen den Ladungen von Kern und α -Teilchen erwartet werden müßte. Da die Teilchenzahlen mit wachsendem Ablenkungswinkel sehr rasch abnehmen, so wird man diesen Effekt in erster Linie einer Verkleinerung der Ablenkungswinkel zuschreiben, die durch eine Verringerung der abstoßenden Kräfte des Kernes gedeutet werden kann.

Ein solcher Effekt läßt sich nun bei den Schwermetallen Gold und Silber auch in den neueren genauen Messungen nicht nachweisen. Ebenso verschwindet er bei Aluminium und Magnesium für kleine Ablenkungen oder bei α -Teilchen geringer Reichweite. Er tritt merkbar nur auf, wenn das α -Teilchen auf seiner Bahn in die unmittelbare Nähe des Kernes gelangt. Dort scheinen also neben den nach dem Coulombschen Gesetz unter der Annahme von Punktladungen für Kern und α -Teilchen berechneten Kräften noch irgendwelche zusätzliche Anziehungskräfte aufzutreten.

Es würde natürlich wenig befriedigen, durch irgendeine ad hoc gemachte Hypothese solche anziehende Kräfte einzuführen. Man wird vielmehr versuchen, im Rahmen der bisherigen Anschauungen über Kern und α -Teilchen bleiben zu können. Eine einfache Deutung jenes Effektes läßt sich nach einem Vorschlage von Debye (6) geben. Nach unseren heutigen Vorstellungen muß der Kern ein kompliziertes System von positiven und negativen elektrischen Ladungen sein. Kommen nun zu den inneren gegenseitigen Kräften, welche das ganze Gebilde im Gleichgewicht halten, starke äußere hinzu, wie sie bei großer Annäherung des α -Teilchens an den Kern auftreten müssen, so werden diese letzteren wohl eine gewisse Deformation des Kernes zur Folge haben¹⁾. Es würde sich also darum handeln, ein Maß für diese Beweglichkeit der Ladungen im Kern zu finden. Debye setzt nun, analog wie er das bei seinen Betrachtungen über die Molekularkräfte gemacht hat, das durch die Verschiebung der Kernladungen gegeneinander entstehende elektrische Moment m des Kernes der äußeren Feldstärke \mathcal{E} proportional:

$$m = \alpha \cdot \mathcal{E}.$$

Das Moment α , das der Kern im elektrischen Felde von der Feldstärke 1 annimmt, wäre damit ein Maß für die Beweglichkeit der Kernbestandteile. Von dieser Polarisierbarkeit α des Kernes, die also jene anomale Zerstreuung der α -Strahlen bei Aluminium und Magnesium erklären soll, werden wir vielleicht vermuten dürfen, daß ihre Größenordnung mit den Dimensionen des Kernes einen gewissen Zusammenhang zeigt. Bei den Atomen und Molekülen ist nämlich diese Polarisierbarkeit, wie die Er-

1) Die ähnliche Annahme einer Induktionswirkung des α -Teilchens auf den Kern, unter der Voraussetzung, daß dessen Ladungen auf einer Kugeloberfläche beweglich seien, ist schon früher von Pettersson (Wien. Ber. [IIa] 133, 509, 1924) gemacht worden, um die Verringerung der Abstoßung in unmittelbarer Kernnähe zu erklären.

fahrungen über die absolute Größe des optischen Brechungsquotienten dartun, von der Größenordnung des Atomvolumens (10^{-24} cm³). Diese Tatsache dürfte nach Debye darauf beruhen, daß das Atom ein dynamisches System ist, dessen Elementarteilchen sich unter der Wirkung von Coulombschen Kräften bewegen. Obwohl es schwer scheint, einen genügenden Beweis für eine solche Behauptung zu liefern, mag doch eine Andeutung dafür in dem Resultat der folgenden einfachen Ähnlichkeitsbetrachtung liegen:

Ein dynamisches System, Rutherford-Bohrscher Art, das durch ein äußeres elektrisches Feld gestört wird, sei in seinem Bewegungszustand vollkommen bekannt. Sind dann für diese Bewegungen die mechanischen Gleichungen maßgebend, so kann sofort ein anderer Bewegungszustand angegeben werden, welcher die Gleichungen ebenfalls befriedigt. In der Tat ist dies der Fall, wenn alle Koordinaten

mit einem Faktor λ , die Zeit mit dem Faktor $\lambda^{\frac{3}{2}}$ und die äußere Feldstärke mit dem Faktor λ^{-2} multipliziert werden, und wenn die Kräfte zwischen den bewegten Teilen dem Quadrat der Entfernungen umgekehrt proportional sind. Da das erzeugte Moment linear in den Koordinaten ist, so bedeutet das Ähnlichkeitsgesetz, daß für eine λ^2 mal kleinere Feldstärke das System mit λ mal größeren Dimensionen ein λ mal größeres Moment annimmt. Solange also Moment und Feldstärke einander proportional sind, ist in der hier betrachteten speziellen Reihe von Systemen das Moment λ^3 und damit dem Volumen proportional.

Ganz abgesehen von der Unzulänglichkeit dieser Betrachtungsweise soll überdies nicht vergessen werden, daß auch noch die Anwendbarkeit der mechanischen Grundgleichungen in Frage steht. Trotzdem darf vielleicht vermutet werden, daß die Polarisierbarkeit α des Kernes von der Größenordnung des Kernvolumens sein werde. Eine experimentelle Bestätigung dieser Vermutung dürfte dann vielleicht als ein Hinweis auf die Weiterexistenz des Coulombschen Gesetzes selbst im Kerninnern angesehen werden.

3. Im folgenden soll nun die Bahn eines α -Teilchens bei Ablenkung durch einen Kern mit den eben geschilderten Eigenschaften bestimmt werden. Das α -Teilchen habe die als unveränderlich angenommene Masse m , die positive Ladung e und die Anfangsgeschwindigkeit v . Davon, daß wir ihm eine gewisse räumliche Ausdehnung und damit wohl auch eine eigene Polarisierbarkeit zuschreiben sollten, wird hier abgesehen. Ferner setzen wir die Gültigkeit von Energie- und Impulssatz voraus; un-

elastische Stöße, bei denen eine dauernde Deformation des Kernes eintreten würde, sollen also ausgeschlossen sein. Vom Kern setzen wir eine positive Ladung E und die oben definierte Polarisierbarkeit α voraus. Seine endliche Masse lassen wir vorläufig unberücksichtigt; wir betrachten die ganze Bewegung relativ zu einem ruhend gedachten Kern.

Welche Kraft erfährt nun das α -Teilchen in einem Abstand r vom Kern? Sie setzt sich zusammen aus der Abstoßung der Kernladung E auf die Ladung e des α -Teilchens und der Anziehung, die das durch das letztere im Kern erzeugte elektrische Moment ausübt. Die Größe desselben ist nach der bereits gemachten Annahme über die Beweglichkeit der Ladungen im Kern

$$m = \alpha \cdot \mathcal{E} = \alpha \frac{e}{r^2}.$$

Man erhält somit für die Kraft P und die potentielle Energie V des α -Teilchens im Felde des Kernes

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{eE}{r^2} - 2\alpha \frac{e^2}{r^5} \\ V &= \frac{eE}{r} - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{e^2}{r^4} \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Die Annahme eines polarisierbaren Kernes bedingt somit eine zusätzliche Anziehungskraft, die mit der fünften Potenz der Entfernung vom Kern abnimmt. Nach einem phänomenologischen Ansatz für Zusatzkräfte, die mit der dritten oder der vierten Potenz abnehmen, hat Bieler (7) den Einfluß auf die Zerstreung von α -Strahlen bereits bestimmt. Die Annahme der mit der vierten Potenz variierenden Kraft ergibt sich im Gegensatz zu der dritten Potenz als experimentell zulässig. Auf Grund unseres bestimmten physikalischen Bildes kommt die fünfte Potenz in Frage. Es ist indessen nach den Bielierschen Untersuchungen möglich, daß auch diese letztere Potenz mit den Experimenten verträglich ist.

Daß jene anomale α -Strahlstreuung bei leichten Elementen nicht durch allfällige magnetische Momente der Atomkerne erklärbar ist, wurde kürzlich von Wessel (8) gezeigt.

4. Zur Bestimmung der Bahnkurve benutzen wir Polarkoordinaten r, φ . Nach Energie- und Impulssatz ist dann

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{eE}{r} - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{e^2}{r^4} &= \frac{m}{2} v^2 \\ mr^2 \dot{\varphi} &= mav \end{aligned} \right\}$$

a bedeutet dabei den Abstand, in dem das α -Teilchen am Kern vorbeikommen würde, falls keine Kräfte wirkten und die Bahn somit grad-

linig wäre. Durch Einsetzen von $\dot{\varphi}$ aus der 2. Gleichung in die erste und Elimination der Zeit erhält man für die Bahnkurve:

$$\left(\frac{1}{a} \cdot \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{r^4}{a^4} - 2 \frac{eE/a}{mv^2} \cdot \frac{r^3}{a^3} - \frac{r^2}{a^2} + \frac{e^2/a}{mv^2} \cdot \frac{\alpha}{a^3} \quad (2)$$

Bildet man daraus

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{d^2 r}{d\varphi^2} = 2 \frac{r^3}{a^3} - 3 \frac{eE/a}{mv^2} \cdot \frac{r^2}{a^2} - \frac{r}{a},$$

so erhält man, unter Berücksichtigung, daß

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{2}{r^3} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\varphi^2},$$

die Differentialgleichung der Bahnkurve

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{a}{r} \right) = - \frac{eE/a}{mv^2} - \frac{a}{r} + 2 \frac{e^2/a}{mv^2} \cdot \frac{\alpha}{r^3} \quad (3)$$

Nun setzen wir

$$a_0 = \frac{eE}{mv^2} \quad (4a)$$

und führen die dimensionslosen Größen ein:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{a}{r} & s &= \frac{eE/a}{mv^2} = \frac{a_0}{a} \\ q &= \alpha \frac{e}{E} \cdot \frac{(mv^2)^3}{(eE)} = \frac{\alpha}{a^3} \cdot \frac{e}{E} \end{aligned} \right\} \quad (4b)$$

a_0 ist dabei eine den Bedingungen des Problems angepaßte Länge und bedeutet, wir wir später sehen werden, jenen Abstand a der Anfangsrichtung des α -Teilchens vom Kern, bei dem dieses ohne Polarisationswirkung um einen rechten Winkel abgelenkt würde.

Jetzt erhält Gleichung (3) die Form

$$\frac{d^2 \sigma}{d\varphi^2} + \sigma + s = 2q s^4 \sigma^3. \quad (5)$$

σ ist also eine elliptische Funktion von φ . Umgekehrt werden wir φ als elliptisches Integral in σ darstellen können.

5. Für eine vorläufige Übersicht über den Einfluß der von uns vorausgesetzten Polarisierbarkeit des Kernes auf die Bewegung des α -Teilchens verzichten wir zunächst auf eine genaue Integration und begnügen uns mit einer Näherung, indem wir die zusätzlichen Anziehungskräfte bloß als Störung und nicht als wesentlich bestimmend für den Ablauf der Bewegung betrachten. Wir untersuchen dazu zunächst die Bahn für den Fall, daß die Polarisation überhaupt vernachlässigt werden kann. Das wird

dort der Fall sein, wo eine hohe Kernladungszahl dem α -Teilchen eine Annäherung in jenen Bereich um den Kern verwehrt, in dem die zusätzlichen Anziehungskräfte einen merklichen Beitrag an die Gesamtkraftwirkung zu liefern beginnen. Tatsächlich sind auch Abweichungen von der einfachen Annahme Coulombscher Abstoßungskräfte zwischen Kern und α -Teilchen nur bei leichten Elementen beobachtet worden, während auch die neuesten Messungen an Gold und Silber jener Annahme innerhalb der Meßgenauigkeit vollkommen genügen.

Bewegt sich ein Massenpunkt unter dem Einfluß einer Zentralkraft, die der 2. Potenz der Entfernung umgekehrt proportional ist, so sind die auftretenden Bahnen Kegelschnitte mit dem Kraftzentrum als Brennpunkt. Im vorliegenden Falle bewegt sich also das α -Teilchen auf einem Hyperblast mit dem abstoßenden Kern im äußeren Brennpunkt. Zur Bestimmung der Konstanten der Hyperbel aus den Bedingungen unseres Problems vernachlässigen wir in Gleichung (5) die Polarisierarbeit α des Kernes und setzen damit $q = 0$. Dementsprechend bezeichnen wir in der Folge alle Größen, die sich auf diesen Spezialfall beziehen mit dem Index Null.

Die Differentialgleichung (5) erhält dadurch die Form

$$\frac{d^2 \sigma_0}{d\varphi^2} + \sigma_0 + s = 0. \quad (6)$$

Lassen wir die Koordinatenachse $\varphi = 0$ mit der Symmetrieachse der Bahn zusammenfallen und berücksichtigen wir, daß der Abstand der Bahnasymptoten vom Kern a sein soll, so wird

$$\sigma_0 = \sqrt{1 + s^2} \cos \varphi - s \quad (7)$$

das gesuchte Integral von (6).

Damit kennen wir für diesen Spezialfall ($\alpha = 0$) die Bahn. Wie groß wird nun die Ablenkung Φ_0 , die das α -Teilchen durch die Abstoßung des Kernes erfährt? Das Teilchen nähert sich dem Kern zuerst in der Richtung der einen Asymptote und verläßt ihn schließlich in der Richtung der andern. Bezeichnen wir mit φ_0 den Winkel zwischen einer Asymptote und der Symmetrieachse der Bahn, so wird offenbar die totale Ablenkung

$$\Phi_0 = \pi - 2\varphi_0. \quad (8)$$

Den Wert φ_0 aber liefert Gleichung (7); es ist derjenige Wert von φ , für den $r = \infty$, und somit $\sigma = 0$ wird, also

$$\cos \varphi_0 = \frac{s}{\sqrt{1 + s^2}} \quad \text{oder} \quad \cotg \varphi_0 = s \quad (9)$$

und somit

$$\Phi_0 = 2 \arctg \frac{eE/a}{mv^2} \quad (10)$$

6. Um nun zu einer Näherung über den Einfluß der Polarisierbarkeit des Kernes auf die Ablenkungen der α -Teilchen zu kommen, berechnen wir uns das Integral der Differentialgleichung (5), indem wir dort in der rechten Seite σ durch den Wert σ_0 aus Gleichung (7) ersetzen. Wir wollen dabei zur Vereinfachung der Darstellung noch

$$t = \sqrt{1 + s^2} \quad (11)$$

setzen. Dann wird nach (7)

$$\sigma_0 = t \cdot \cos \varphi - s$$

und die zu integrierende Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \sigma}{d\varphi^2} + \sigma = -s + 2qs^4(t \cdot \cos \varphi - s)^3. \quad (12)$$

Macht man den Ansatz

$$\sigma = \sigma_0 + 2qs^4 \cdot \psi(\varphi), \quad (13)$$

so erhält man für $\psi(\varphi)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} + \psi = (t \cdot \cos \varphi - s)^3,$$

und daraus durch Integration

$$\left. \begin{aligned} \psi = & -\frac{t^3}{8} \cos^3 \varphi + st^2 \cos^2 \varphi \\ & + \frac{3}{2} t \left(s^2 + \frac{t^2}{4} \right) \cos \varphi - s^3 - 2st^2 \\ & + \frac{3}{2} t \left(s^2 + \frac{t^2}{4} \right) \varphi \cdot \sin \varphi \\ & + A \cos \varphi + B \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

worin A und B aus den Anfangsbedingungen noch bestimmt werden müssen. Dies geschieht am besten durch direkte Bestimmung von σ und $\frac{d\sigma}{d\varphi}$ für das Perihel der Bahn, also für $\varphi = 0$. Nach dem Impulssatz ist dort die Geschwindigkeit $v_p = \sigma v$, während nach dem Energiesatz

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \sigma^2 + \frac{eE}{a} \sigma - \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha}{a^3} \cdot \frac{e^2}{a} \sigma^4$$

oder unter Benutzung der durch (4) definierten Größen

$$1 = \sigma^2 + 2s\sigma - qs^4 \sigma^4.$$

Da σ während der Bewegung zuerst von Null ($r = \infty$) an steigt, brauchen wir hier die erste positive Wurzel dieser Gleichung; wir verschaffen sie uns durch eine Näherung analog wie bei der Integration der Differentialgleichung (5) und erhalten damit

$$\sigma = t - s + \frac{qs^4}{2} \cdot \frac{(t-s)^4}{t}$$

Für $\varphi = 0$ ergibt sich damit aus Gleichung (13)

$$A = \frac{s^4}{4t}$$

Im Perihel der Bahn ist ferner $\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0$, woraus durch Differentiation von (13) nach φ , $B = 0$ folgt. Man erhält so schließlich

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= t \cos \varphi - s + 2qs^4 \left\{ -\frac{t^3}{8} \cos^3 \varphi \right. \\ &+ st^2 \cos^2 \varphi - s^3 - 2st^2 \\ &+ \left[\frac{s^4}{4t} + \frac{3}{2}t \left(s^2 + \frac{t^2}{4} \right) \right] \cos \varphi \\ &+ \left. \frac{3}{2}t \left(s^2 + \frac{t^2}{4} \right) \varphi \sin \varphi \right\}. \end{aligned} \right\} (15)$$

Zur Berechnung der Ablenkung des α -Teilchens benötigen wir nunmehr den Winkel zwischen Bahnasymptote und Koordinatenachse, d. h. den Wert φ_1 von φ , für den $r = \infty$, also $\sigma = 0$ wird. Eine erste Näherung für φ_1 haben wir in φ_0 , dem entsprechenden Wert bei Vernachlässigung der Polarisationswirkung; wir setzen daher

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \delta \quad (16)$$

und werden nun diesen Winkel δ , der angibt, um wieviel flacher die Bahn unter dem Einfluß der Polarisation nach beiden Seiten hin wird, als Funktion von s , t und q zu berechnen suchen. Mathematisch einfacher ist es, statt s und t , den Asymptotenwinkel für $\alpha = 0$, φ_0 neben q als unabhängige Variable einzuführen. Den Zusammenhang zwischen s und t und φ_0 liefert Gleichung (9)

$$s = \cotg \varphi_0, \quad t = \sqrt{1 + s^2} = \frac{1}{\sin \varphi_0}$$

In dem Bereich, in dem diese ganze Näherung Gültigkeit haben wird, dürfen wir δ als kleinen Winkel betrachten. Es wird daher

$$t \cos \varphi_1 - s = t \left(\frac{s}{t} \cos \delta - \frac{1}{t} \sin \delta \right) - s = -\delta$$

Aus dem gleichen Grunde werden wir in dem Klammerausdruck in (15) statt φ_1 überall φ_0 setzen dürfen und erhalten so für $\varphi = \varphi_1$

$$0 = -\delta + 2qs^4 \cdot \psi(\varphi_0)$$

Ersetzt man noch s und t wie angegeben durch φ_0 , so wird schließlich

$$\left. \begin{aligned} \delta &= q \left[\varphi_0 \cotg^4 \varphi_0 \left(\frac{15}{4} \cotg^2 \varphi_0 + \frac{3}{4} \right) \right. \\ &+ \left. \cotg^5 \varphi_0 \left(\frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 + \frac{13}{4} \right) \right] \end{aligned} \right\} (17)$$

und somit der Ablenkungswinkel

$$\Phi = \pi - 2\varphi_1 = \Phi_0 - 2\delta. \quad (18)$$

Eine Darstellung des Verlaufs von δ als Funktion von φ_0 für $q = 1$ gibt Fig. 1. Die berechneten Funktionswerte finden sich in Tabelle I.

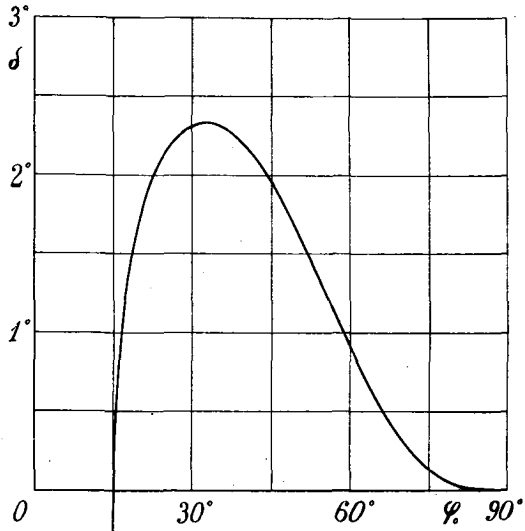


Fig. 1.

7. Nunmehr können wir daran gehen, den Einfluß der Polarisation auf die Verteilung der α -Teilchen bei der Zerstreung über die verschiedenen Ablenkungswinkel zu berechnen. Bei bestimmter zerstreuer Substanz und α -Teilchen bestimmter Reichweite ist der Ablenkungswinkel Φ nur Funktion des Abstandes a der Anfangsrichtung des α -Teilchens vom ablenkenden Kern. Alle Teilchen, die ohne Kraftwirkung in einem Abstände zwischen a und $a + da$ an einem Kern vorbeikommen würden, werden so um einen Winkel zwischen Φ und $\Phi + d\Phi$ abgelenkt. Die Wahrscheinlichkeit einer solchen Ablenkung ist somit proportional $2\pi a da$. Diese Teilchen verteilen sich aber über einen Raumwinkel $2\pi \sin \Phi d\Phi$. Die Wahrscheinlichkeit der Ablenkung in einen konstanten Raumwinkel unter dem Winkel Φ zur Richtung des Primärstrahles wird daher proportional

$$\frac{2\pi a da}{2\pi \sin \Phi d\Phi}$$

Wir wollen diesen Quotienten die relative Wahrscheinlichkeit w für die Ablenkung um Φ nennen. Es ist also

$$w = \frac{a}{\sin \Phi} \cdot \frac{da}{d\Phi} \quad (19)$$

Die Berechnung dieser relativen Wahrscheinlichkeit erfordert die Kenntnis des funktionalen

Zusammenhanges zwischen a und Φ . Diesen letzteren haben wir aber in den vorhergehenden Abschnitten ermittelt.

So ist, wenn wir bloß die Abstoßungskräfte der Punktladungen von Kern und α -Teilchen berücksichtigen, nach (4) und (9)

$$a = \frac{eE}{mv^2} \operatorname{tg} \varphi_0,$$

und da nach (8)

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} (\pi - \Phi),$$

so wird

$$a = \frac{eE}{mv^2} \operatorname{cotg} \frac{\Phi}{2}$$

und somit

$$w_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{eE}{mv^2} \right)^2 \frac{\operatorname{cotg} \frac{\Phi}{2}}{\sin \Phi \sin^2 \frac{\Phi}{2}}$$

$$w_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{eE}{mv^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Phi}{2}} \quad (20)$$

In diesem Fall nehmen also die Teilchenzahlen mit zunehmendem Ablenkungswinkel Φ wie $\frac{1}{\sin^4 \frac{\Phi}{2}}$ ab und variieren bei konstanter Ablenkung umgekehrt mit der vierten Potenz der Anfangsgeschwindigkeit. Diese beiden Zusammenhänge sind bei schweren Elementen als zerstreuende Substanz stets in weitestem Umfange experimentell bestätigt gefunden worden¹⁾.

Analog können wir uns die relative Wahrscheinlichkeit w berechnen bei Berücksichtigung der Polarisation des Kernes durch das α -Teilchen. Hier ist nach (16) und (18)

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} (\pi - \Phi) - \delta$$

somit

$$a = \frac{eE}{mv^2} \operatorname{cotg} \left(\frac{\Phi}{2} + \delta \right)$$

und es wird also

$$w = \frac{1}{2} \left(\frac{eE}{mv^2} \right)^2 \frac{\operatorname{cotg} \left(\frac{\Phi}{2} + \delta \right)}{\sin \Phi \sin^2 \left(\frac{\Phi}{2} + \delta \right)} \cdot \frac{d \left(\frac{\Phi}{2} + \delta \right)}{d \frac{\Phi}{2}} \quad (21)$$

Um ein Maß zu haben für den Einfluß der Polarisation des Kernes auf die Zerstreuung

1) Kürzlich hat G. Wentzel (Zeitschr. f. Phys. 40, 590, 1926) gezeigt, daß diese Verteilung der zerstreuten α -Teilchen auch aus einer näherungsweise Berechnung nach der Schrödingerschen Quantenmechanik folgt.

der α -Teilchen, bilden wir den Quotienten V der relativen Wahrscheinlichkeiten einer Ablenkung um Φ mit oder ohne Polarisationswirkung:

$$V = \frac{w}{w_0} = \frac{\operatorname{cotg} \left(\frac{\Phi}{2} + \delta \right)}{\operatorname{cotg} \frac{\Phi}{2}} \cdot \frac{d \left(\frac{\Phi}{2} + \delta \right)}{d \frac{\Phi}{2}} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\Phi}{2}}{\sin^2 \left(\frac{\Phi}{2} + \delta \right)} \quad (22)$$

Für die Rechnung erweist es sich nun bequemer, alle vorkommenden Größen als Funktion von φ_0 auszudrücken, wie das auch für δ geschah. Man erhält so

$$V = \frac{\frac{\sin \varphi_0}{\cos^3 \varphi_0}}{\frac{\sin (\varphi_0 + \delta)}{\cos^3 (\varphi_0 + \delta)}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{d\delta}{d\varphi_0}} \quad (23)$$

Tabelle I.

φ_0	q	δ	φ_1	$\frac{d\delta}{d\varphi_0}$	V	Φ
30°	1	0,0405	32° 20'	+ 0,013	0,86	123° 20'
	2	0,0810	34° 39'	+ 0,025	0,74	110° 42'
	4	0,1620	39° 18'	+ 0,050	0,54	101° 24'
	6	0,2430	43° 57'	+ 0,076	0,38	92° 6'
45°	1	0,0343	46° 58'	- 0,055	0,92	86° 4'
	2	0,0686	48° 57'	- 0,111	0,85	82° 6'
	4	0,1372	52° 54'	- 0,221	0,71	74° 12'
	6	0,2057	56° 51'	- 0,332	0,58	66° 18'
60°	1	0,0162	60° 55'	- 0,071	0,98	58° 10'
	2	0,0324	61° 51'	- 0,143	0,96	56° 18'
	4	0,0648	63° 42'	- 0,286	0,94	52° 36'
	6	0,0972	65° 33'	- 0,429	0,94	48° 54'
75°	1	0,0023	75° 8'	- 0,028	1,00	29° 44'
	2	0,0047	75° 16'	- 0,056	1,00	29° 28'
	4	0,0094	75° 32'	- 0,113	1,01	28° 56'
	6	0,0140	75° 48'	- 0,169	1,02	28° 24'

Die zweitletzte Kolonne in Tabelle I gibt die nach dieser Formel berechneten Werte von V bei Variation von q und φ_0 an, während in Fig. 2 V als Funktion von Φ für $q = 1, 2, 4$ und 6 aufgetragen ist.

Die hier berechnete Funktion V gibt die Abweichungen, wie sie von Bieler (4) bestimmt wurden (siehe Fig. 9), in ihrem wesentlichen Verlauf gut wieder. Eine mit der fünften Potenz der Entfernung vom Kern abnehmende zusätzliche Anziehungskraft steht also durchaus nicht im Widerspruch mit den experimentellen Erfahrungen. Ebenso lassen sich die Messungen von Rutherford und Chadwick (5) über die

Abweichungen der α -Teilchenzahlen bei konstanter Ablenkung um 90° und Variation der Anfangsgeschwindigkeit auf Grund dieser Näherungsrechnung gut darstellen, wie in einer vorläufigen Mitteilung (6) gezeigt wurde.

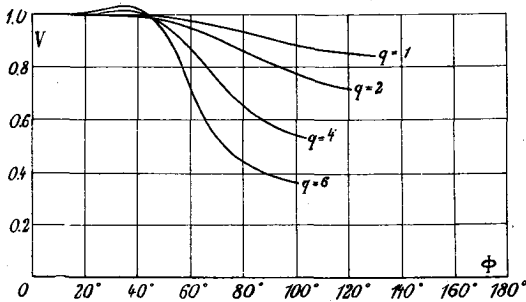


Fig. 2.

8. Wir gehen nunmehr zur genauen Berechnung der Bahnkurven über. Diese könnten erhalten werden durch Untersuchung der durch die Differentialgleichung (5) gegebenen elliptischen Funktion $\sigma(\varphi)$. Relativ einfacher aber gestaltet sich die Rechnung, wenn wir φ als Funktion von σ und damit von r darzustellen suchen; wir kommen damit auf ein elliptisches Integral.

Ähnlich wie bei der Näherung werden wir auch hier an Stelle der Variablen r und der 4 Parameter a, mv^2, E und α gewisse dimensionslose Kombinationen derselben einführen, und zwar setzen wir hier

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{r} \cdot \frac{eE}{mv^2} & p &= a \frac{mv^2}{eE} \\ q &= \alpha \frac{e}{E} \left(\frac{mv^2}{eE} \right)^3 \end{aligned} \quad (24)$$

Führen wir wie früher $a_0 = \frac{eE}{mv^2}$ ein, den Abstand der Anfangsrichtung des α -Teilchens vom Kern, bei dem dieses ohne Polarisationswirkung um einen rechten Winkel abgelenkt würde, so ist

$$\rho = \frac{a_0}{r} \quad p = \frac{a}{a_0} \quad q = \frac{\alpha}{a_0^3} \frac{e}{E} \quad (24a)$$

Im Vergleich mit den bei der Näherung verwendeten Größen σ, s und q ist hier

$$\rho = \frac{a_0}{a} \sigma = s \sigma \quad p = \frac{1}{s} \quad (24b)$$

Zur Bestimmung der gesuchten Funktion $\varphi(r)$ gehen wir aus von Gleichung (2)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 &= \frac{r^4}{a^4} - 2 \frac{eE/a}{mv^2} \cdot \frac{r^3}{a^3} - \frac{r^2}{a^2} \\ &+ \frac{e^2/a}{mv^2} \cdot \frac{\alpha}{a^3} \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von (24) erhält man daraus

$$\left(p \frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 = 1 - 2\rho - p^2 \rho^2 + q\rho^4 \quad (25)$$

und somit

$$\varphi = \int_0^\rho \frac{p d\rho}{\sqrt{1 - 2\rho - p^2 \rho^2 + q\rho^4}} \quad (26)$$

wenn wir uns die Koordinatenachse $\varphi = 0$ parallel der Anfangsrichtung der Bewegung durch den Kern gelegt denken. Im Verlaufe der Bewegung nimmt der Abstand r des α -Teilchens vom Kern von ∞ an ab. Infolge der Abstoßung durch die Kernladung wird dabei im allgemeinen ein bestimmter Minimalabstand existieren, von dem aus sich die Bewegung, da die wirkenden Kräfte zentralsymmetrischer Natur sind, symmetrisch fortsetzt. Der diesem Minimalabstand entsprechende Maximalwert von ρ bestimmt sich aus der Gleichung

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = 0,$$

oder nach (25) aus

$$1 - 2\rho - p^2 \rho^2 + q\rho^4 = 0. \quad (27)$$

Da ρ während der Bewegung von Null an wächst, entspricht die erste positive Wurzel dieser Gleichung dem gesuchten Maximalwert von ρ . Durch Integration von (26) bis zu diesem Maximalwert erhalten wir den Winkel φ_1 zwischen der Bahnasymptote und der Symmetrieachse der Bahn, und es wird daher jetzt der totale Ablenkungswinkel

$$\Phi = \pi - 2 \int_0^{\rho_{\max}} \frac{p d\rho}{\sqrt{1 - 2\rho - p^2 \rho^2 + q\rho^4}} \quad (28)$$

Bei Vernachlässigung der Polarisationswirkung, das heißt für $q=0$ läßt sich auch hier die Integration sofort durchführen; man erhält

$$\Phi_0 = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}}$$

oder, entsprechend Gleichung (10) und (24)

$$\Phi_0 = 2 \operatorname{arctg} \frac{eE/a}{mv^2}.$$

9. Vor der näheren Berechnung des Integrals (28) fragen wir nach den Werten, die für die beiden dimensionslosen Parameter p und q in Frage kommen, von denen der Ablenkungswinkel und damit die Form der Bahnkurve abhängt. Wir untersuchen dazu die unter der Wurzel im Integranden auftretende Funktion

$$s = 1 - 2\rho - p^2 \rho^2 + q\rho^4. \quad (29)$$

Sie nimmt, wenn ρ von Null an wächst, vorerst von 1 an ab, bis bei größeren Werten von ρ der Einfluß des Gliedes $p\rho^4$ überwiegt und ein Wiederanwachsen von s bedingt. Während der zu untersuchenden Bewegung des α -Teilchens wächst ρ , wie wir sahen, von Null an bis zu einem Maximalwert ρ_{\max} , der nach (27) durch die erste positive Nullstelle von s bestimmt ist. Es wird nun von den Werten von p und q abhängen, ob ein reeller Wert für diese Nullstelle

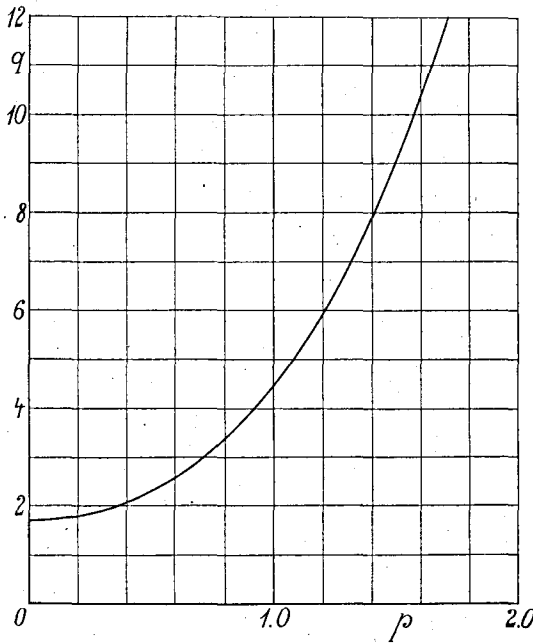


Fig. 3.

auftritt oder nicht; jenachdem wird nach unseren Voraussetzungen bei der Bewegung ein bestimmter Minimalabstand des α -Teilchens vom Kern existieren, oder aber das α -Teilchen sich dem Kern unbeschränkt nähern, das heißt von demselben eingefangen werden.

Denken wir uns s als Funktion von ρ aufgetragen, so wird im ersten Fall die Kurve die Abszissenachse schneiden, und zwar zweimal, da für große Werte von ρ das stets positive Glied $q\rho^4$ überwiegt. Der Übergang zum zweiten Fall des Einfangens des α -Teilchens aber wird dadurch gekennzeichnet sein, daß die Kurve die ρ -Achse gerade berührt. Hierfür müssen gleichzeitig die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} 1 - 2\rho - p^2\rho^2 + q\rho^4 &= 0 \\ -2 - 2p^2\rho + 4q\rho^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

erfüllt sein. Durch Elimination von ρ erhält man hieraus die Beziehung, die p und q für den Grenzfall des Einfangens befriedigen müssen. Sie ist dargestellt in Tabelle II und Fig. 3.

Tabelle II.

q	p
1,6875	0,00000
1,70	0,07449
1,80	0,22238
1,90	0,30422
2,00	0,36727
2,10	0,42011
4,41	1,00000
8,00	1,41421
17,54	2,00000

Erst wenn q den Wert $1,6875 = 27/16$ überschreitet, kann somit bei kleinen Werten von p , also bei fast zentralen Stößen, die Anziehung infolge der Polarisationswirkung die Abstoßung durch die Kernladung übertreffen. Andererseits werden aber zum Beispiel bereits für $q = 4,41$ alle α -Teilchen eingefangen, die ohne Polarisationswirkung um mehr als einen rechten Winkel ($p = 1$) abgelenkt würden.

10. Die Berechnung der Bahnkurven und der Ablenkungswinkel mittels des Integrals (28) geschah nun in folgender Weise: Zuerst wurde nach (27) der Wert ρ_{\max} der oberen Integrationsgrenze bestimmt und darauf das Integrationsgebiet in 6—8 Intervalle geteilt, wobei, um eine gleichmäßige Genauigkeit zu erzielen, die Größe der Intervalle mit wachsenden Werten des Integranden entsprechend kleiner gewählt wurde. Die Werte dieser Teilintegrale wurde nach der Simpsonschen Formel bestimmt. In der Nähe von ρ_{\max} aber, wo der Integrand unbeschränkt zunimmt, wurde eine Näherung benutzt. Es wurde dazu die Funktion

$$s = 1 - 2\rho - p^2\rho^2 + q\rho^4$$

für einen Wert ρ_0 in der Mitte des letzten Intervalles entwickelt. Für eine erste Näherung setzten wir dabei

$$s = s(\rho_0) + 2a(\rho - \rho_0),$$

wobei

$$2a = \left(\frac{ds}{d\rho} \right)_{\rho_0} = 4q\rho_0^3 - 2p^2\rho_0 - 2.$$

Dann erhält man unter Berücksichtigung, daß $s(\rho_{\max}) = 0$ für das Intervall von ρ_1 bis ρ_{\max}

$$\int_{\rho_1}^{\rho_{\max}} \frac{d\rho}{\sqrt{s}} = - \frac{\sqrt{s(\rho_1)}}{a}. \quad (31)$$

Diese Näherung hat aber bloß dann einen Sinn, wenn a und damit der erste Differentialquotient von s nach ρ in der Umgebung von ρ_{\max} wesentlich von Null verschieden ist. Wie Überlegungen ähnlich denen im vorigen Abschnitt zeigen, ist

das aber gerade dann nicht mehr der Fall, wenn die Polarisierung des Atomkernes von wesentlichem Einfluß auf die Bewegung des α -Teilchens wird. Dann muß noch ein weiteres Glied in der Entwicklung von s berücksichtigt werden:

$$s = s_0 + 2a(\varrho - \varrho_0) + b(\varrho - \varrho_0)^2,$$

wobei

$$2a = \left(\frac{ds}{d\varrho}\right)_{\varrho_0} = 4q\varrho_0^3 - 2p^2\varrho_0 - 2$$

$$b = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2s}{d\varrho^2}\right)_{\varrho_0} = 6q\varrho_0^2 - p^2.$$

Berücksichtigt man wiederum, daß $s(\varrho_{\max}) = 0$, so wird jetzt

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_{\max}} \frac{d\varrho}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln \frac{a + b(\varrho_{\max} - \varrho_0)}{a + b(\varrho_1 - \varrho_0) + \sqrt{b \cdot s(\varrho_1)}}. \quad (32)$$

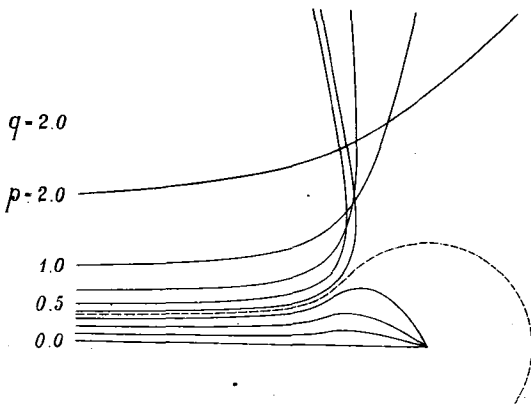


Fig. 4.

In dieser Art und Weise wurden die Bahnkurven und damit die totalen Ablenkungswinkel berechnet. Die Genauigkeit, die dabei erreicht wurde, betrug im Mittel etwa eine Bogenminute.

Um ein Beispiel für die unter der Wirkung der Polarisierung des Atomkernes auftretenden Bahnkurven der α -Teilchen zu geben, mögen hier die Resultate der Berechnungen für

$$q = \alpha \frac{e}{E} \left(\frac{mv^2}{eE}\right)^3 = 2$$

in Fig. 4 veranschaulicht werden. Es entspricht das etwa den Verhältnissen, wie sie bei der Zerstreuung der schnellen α -Strahlen von Radium C (7 cm Reichweite) durch Aluminium auftreten. Die Figur zeigt hier die Bahnen von α -Teilchen bestimmter Geschwindigkeit, bei denen der Anfangsabstand variiert wird. Bei großen Werten desselben, d. h., wenn $p = a \frac{mv^2}{eE} > 1$, ergeben sich keine wesentlichen Unterschiede gegenüber den Verhältnissen bei Vernachlässigung der Polarisationswirkung. Mit abnehmenden

Werten des Anfangsabstandes nimmt der Ablenkungswinkel zu; doch ist die Zunahme geringer, als wenn bloß die Abstoßung der Kernladung berücksichtigt wird. Um eine bestimmte Ablenkung zu erfahren, müssen die α -Teilchen hier ihre Bewegung bei einem kleineren Anfangsabstand beginnen, woraus sich bei Berücksichtigung der räumlichen Verteilung eine geringere Teilchenzahl in der betreffenden Richtung ergibt. Bei weiterer Abnahme des Anfangsabstandes kann nun die Verringerung der Ablenkung infolge der Polarisationswirkung die Zunahme der Ablenkung durch die Abstoßung der Kernladung sogar kompensieren; der Ablenkungswinkel nimmt jetzt nicht mehr zu, sondern wieder ab. In unserem Beispiel erkennt man das deutlich daran, daß die Kurve für $p = 0,4$ diejenige für $p = 0,5$ nicht mehr schneidet, sondern ihr schon fast wieder parallel verläuft, während man die größte hier mögliche Ablenkung für den Zwischenwert $p = 0,437$ erhalten würde.

Hier macht sich nun die Polarisationswirkung auch bereits in der Form der Bahnkurve bemerkbar; die Kurve für $p = 0,4$ verläuft in der Kernnähe bedeutend flacher als eine ähnlich liegende Hyperbel. Lassen wir den Anfangsabstand weiter abnehmen, so kommen wir in jenes Gebiet hinein, in dem die Abstoßung durch die Kernladung von der Anziehung infolge der Polarisierung des Kernes übertroffen wird. Zwar können unter dem Einfluß der Trägheitskräfte noch Bahnen zustande kommen, in denen das α -Teilchen, evtl. nach mehrmaliger Umschlingung des Kernes, sich von diesem wieder entfernt und wobei Zerstreuungen über alle möglichen Winkel auftreten. Doch ist der Bereich für die Möglichkeit solcher Bahnen nur ein schmaler. Schon für den Wert $p = 0,367$ erhält man nach den Berechnungen des vorigen Abschnittes den Grenzfall für das Einfangen des α -Teilchens durch den Kern; das α -Teilchen würde sich jetzt, sofern man auch in diesem geringen Abstand vom Kern noch nach dem bisherigen Ansatz rechnen dürfte, asymptotisch einer Kreisbahn nähern, wie sie in der Figur durch die gestrichelte Kurve dargestellt ist. Völliges Einfangen in den Kern hätte man dann schließlich für die noch zentraler gegen diesen auftreffenden α -Teilchen; des Interesses wegen seien auch ihre Bahnen, wie sie sich nach diesen Berechnungen ergeben würden, bis ins Kraftzentrum hinein eingezeichnet.

Für die Verteilung der gestreuten α -Teilchen über die verschiedenen Ablenkungswinkel, die ja allein experimentell geprüft werden kann, würde sich hiernach neben der schon weiter oben erwähnten unternormalen Streuung bei kleineren

Ablenkungswinkeln, eine erneute Zunahme im Gebiete des maximalen Ablenkungswinkels ergeben, wie sie in der Figur durch die Parallelität der Kurven für $\phi = 0,5$ und $0,4$ anschaulich zum Ausdruck kommt. Jenseits des maximalen

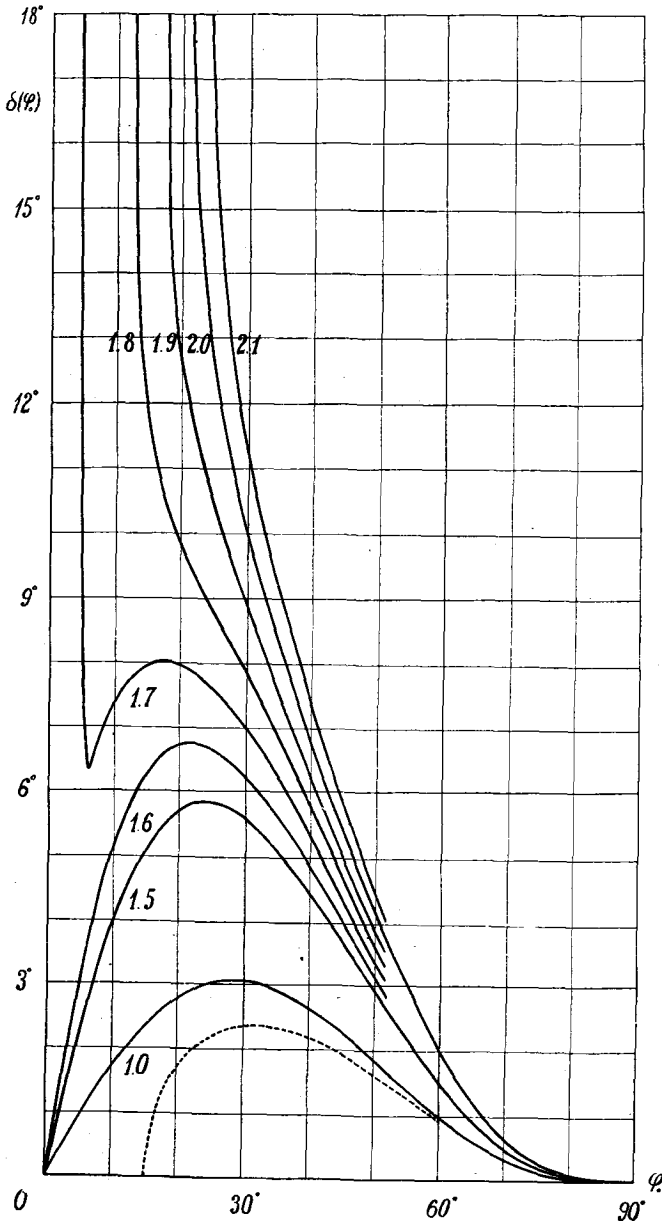


Fig. 5.

Ablenkungswinkels aber wären hiernach nur jene wenigen α -Teilchen zu erwarten, die an der Grenze des Eingefangenwerdens über alle möglichen Winkel zerstreut werden.

11. Da die genaue Berechnung der Ablenkungswinkel nach (28), wie aus dem vorigen Abschnitt hervorgeht, eine ziemlich zeitraubende

war, konnte nicht daran gedacht werden, diese Berechnungen für ein vollständiges System der in Betracht kommenden Werte von ϕ und q durchzuführen; es wurden daher nur jene Werte berechnet die einen Überblick über die charakteristischen Abweichungen von der einfachen Theorie zu geben versprochen. Um weiterhin den Anschluß an die mit der Näherungsmethode gewonnenen Resultate zu erhalten, wurde auch hier die halbe Differenz der Ablenkungswinkel mit und ohne Polarisationswirkung

$$\delta = \frac{1}{2} (\Phi_0 - \Phi)$$

als Funktion von $\varphi_0 = \arctg \phi$ aufgetragen. Fig. 5 stellt die Resultate dar. Vollständig berechnet sind nur die Kurven für $q = 1,0, 1,5$ und $2,0$, während für die übrigen bloß einzelne Punkte bestimmt wurden.

Zum Vergleich ist auch noch die mittels der Näherung gefundene Kurve $\delta(q = 1)$ gestrichelt eingezeichnet. Man kann daraus erkennen, inwieweit diese Näherung den charakteristischen Verlauf der Abweichungen darstellen kann.

Zur Berechnung des Verhältnisses V der mit und ohne Polarisationswirkung gestreuten α -Teilchen nach (23) benötigen wir noch die Werte von $\frac{d\delta}{d\varphi_0}$; sie wurden graphisch ermittelt. Tabelle III gibt Aufschluß über die numerischen Werte von δ und $\frac{d\delta}{d\varphi_0}$, mittels deren das Verhältnis V in Abhängigkeit von Ablenkungs-

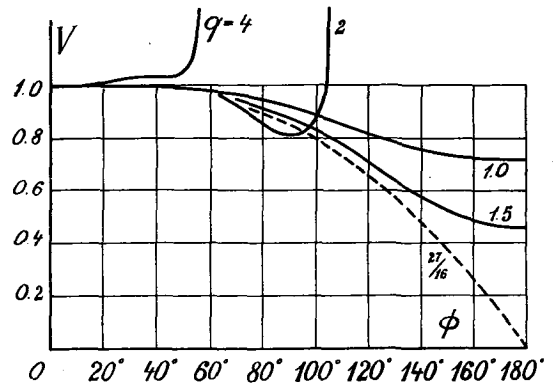


Fig. 6.

winkel und Anfangsgeschwindigkeit der α -Teilchen berechnet wurde; eine graphische Darstellung des Verlaufs von V als Funktion von Φ und q gibt Fig. 6.

Für kleine Ablenkungswinkel ergibt sich hiernach für V keine Änderung gegenüber den bei der Näherungsrechnung gewonnenen Resultate.

Tabelle III.

	φ_0	δ	$\frac{d\delta}{d\varphi_0}$	V	Φ
$q = 1,0$	0,00	0,0000	+ 0,185	0,712	180° 0'
	0,15	0,0260	+ 0,150	0,733	159° 50'
	0,25	0,0393	+ 0,114	0,754	146° 52'
	0,40	0,0512	+ 0,046	0,796	128° 18'
	0,50	0,0533	-- 0,002	0,833	116° 36'
	0,75	0,0423	-- 0,074	0,914	89° 14'
	1,00	0,0207	-- 0,084	0,979	63° 2'
	1,30	0,0026	-- 0,032	1,000	30° 44'
$q = 1,5$	0,00	0,0000	+ 0,480	0,451	180° 0'
	0,15	0,0623	+ 0,327	0,517	155° 40'
	0,25	0,0870	+ 0,175	0,589	141° 24'
	0,40	0,1016	+ 0,012	0,691	122° 32'
	0,50	0,0988	-- 0,067	0,760	111° 22'
	0,75	0,0696	-- 0,146	0,886	86° 6'
	1,00	0,0323	-- 0,135	0,969	61° 42'
	1,30	0,0039	-- 0,043	1,003	30° 36'
$q = 2,0$	0,50	0,1844	-- 0,405	0,877	101° 34'
	0,75	0,1036	-- 0,271	0,899	82° 12'
	1,00	0,0444	-- 0,198	0,975	60° 18'
	1,30	0,0052	-- 0,058	1,004	30° 26'

taten (Fig. 2). Man erhält überhaupt in diesem Gebiete nur unmerkliche Abweichungen von den Resultaten der einfachen Theorie, in völliger Übereinstimmung mit den Messungen von Bie-ler (4) an Aluminium und Magnesium.

Erst bei Ablenkungen über 45° sinkt V merklich unter 1, behält aber auch für große Ablenkungen stets einen endlichen Wert, solange $q < \frac{27}{16}$. Für $\Phi = 180^\circ$ sinkt dort, wie Fig. 5 zeigt, $\delta(\varphi_0)$ auf Null, nicht aber $\frac{d\delta}{d\varphi_0}$,

so daß für kleine Werte von φ_0 $\delta = \frac{d\delta}{d\varphi_0} \varphi_0$ gesetzt werden kann. Daher erhält man für

$$V_{180} = \lim_{\varphi_0 \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \varphi_0 \cdot \cos^3(\varphi_0 + \delta)}{\cos^3 \varphi_0 \cdot \sin(\varphi_0 + \delta)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{d\delta}{d\varphi_0}} \right)$$

den endlichen Grenzwert

$$V_{180} = \frac{1}{\left(1 + \frac{d\delta}{d\varphi_0}\right)^2} \tag{33}$$

Sobald jedoch q den Wert $\frac{27}{16} = 1,6875$ übersteigt, wird der Verlauf des Verhältnisses V der α -Teilchenzahlen mit und ohne Polarisationswirkung bei großen Ablenkungswinkeln ein wesentlich anderer. Da mit abnehmendem φ_0 , das heißt wachsender Ablenkung, δ jetzt unbeschränkt zunimmt, so sinkt hier $\frac{d\delta}{d\varphi_0}$ rasch nach negativen Werten. Der Ausdruck $1 + \frac{d\delta}{d\varphi_0}$ im Nen-

ner von Formel (23) für V wird dabei klein und bewirkt für V einen Wiederanstieg zu großen Werten für $\frac{d\delta}{d\varphi_0} = -1$. Hierin zeigt sich nun der Unterschied gegenüber den durch die Näherung gelieferten Resultaten; dort entsprach bei großen Werten der Ablenkung einer Zunahme von

$$q = \alpha \frac{e}{E} \left(\frac{mv^2}{eE} \right)^3$$

stets eine Abnahme des Verhältnisses V , da bei der Näherung alle Kurven vom Typus $q < \frac{27}{16}$ sind. Die genaue Rechnung aber zeigt, daß in Übereinstimmung mit den an Fig. 4 auf anschaulichem Wege gewonnenen Resultaten, für einen bestimmten maximalen Ablenkungswinkel,

gegeben durch $\frac{d\delta}{d\varphi_0} = -1$, ein Wiederanstieg

des Verhältnisses V auftreten muß. Jenseits dieses Grenzwinkels aber verliert die Formel (23) ihren Sinn; wir erhalten dort aber nur noch einige jener wenigen α -Teilchen, die infolge der Polarisationswirkung an der Grenze des Einge-fangenwerdens durch den Kern über alle mög-lichen Winkel zerstreut werden. Sie können in ihrer kleinen Anzahl in der Darstellung in Fig. 6 ohne weiteres vernachlässigt werden.

Schließlich soll das Verhältnis V noch dar-gestellt werden, wie es sich ergibt bei Beobach-tung unter einem konstanten Ablenkungswinkel Φ und Variation der Anfangsgeschwindigkeit der α -Teilchen. Da nach (18)

$$\Phi = \pi - 2(\varphi_0 + \delta),$$

so muß dafür in Formel (23) für $V \varphi_0 + \delta$ konstant gehalten werden, während q variiert; das heißt, man bestimmt aus Fig. 5 die Werte von δ und φ_0 , die bei Variation von q zu konstanten Werten von $\varphi_0 + \delta$ gehören, also auf der Geraden

$$\varphi_0 + \delta = \frac{1}{2}(\pi - \Phi) \quad (34)$$

liegen. Da die vorliegenden Messungen von Rutherford und Chadwick (5) V in diesem Fall als Funktion der reziproken anfänglichen kinetischen Energie des α -Teilchens darstellen, so wählen wir als Abszisse

$$q^{-\frac{1}{3}} = \frac{eE}{mv^2} \left(\alpha \frac{e}{E} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

Dann läßt sich der Verlauf von V bei Variation der Anfangsbedingungen für jeden Ablenkungswinkel durch eine bestimmte Kurve darstellen, wie dies in Fig. 7 für die Ablenkungen um 60° , 90° und 135° geschehen ist.

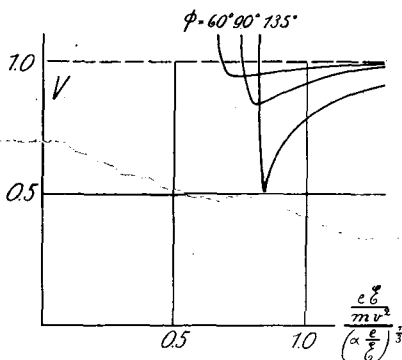


Fig. 7.

Abszissenwerte für die Asymptoten des Wiederanstieges sind dabei jene Werte q , deren Kurve $\delta(\varphi_0)$ in Fig. 5 die Gerade

$$\varphi_0 + \delta = \frac{1}{2}(\pi - \Phi) \quad (34)$$

berührt. Die Abszissenwerte der Minima von V hingegen ergeben sich aus der Gleichung $\frac{dV}{dq^{-\frac{1}{3}}} = 0$ mit der Nebenbedingung (34). Daraus erhält man schließlich als Bedingung für den Minimalwert von V

$$\cotg \varphi_0 + 3 \operatorname{tg} \varphi_0 - \frac{\frac{d^2 \delta}{d\varphi_0^2}}{1 + \frac{d\delta}{d\varphi_0}} = 0. \quad (35)$$

Das Wertepaar (φ_0, δ) , das dieser Differentialgleichung und der Nebenbedingung (34) genügt, bestimmt dann nach dem durch Fig. 5 gege-

benen Zusammenhang zwischen φ_0, δ und q die Abszisse q , für die das Minimum von V eintritt.

12. Bisher wurde bei der Bewegung des α -Teilchens stets der Kern als ruhend betrachtet und die Bewegung, in die dieser selber durch den Stoß des α -Teilchens versetzt wird, nicht berücksichtigt. Das kann aber leicht geschehen. Ist die Masse des Kernes M und setzen wir in bekannter Weise statt der Masse m des α -Teilchens eine durch die Gleichung

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}$$

definierte Masse μ in die Bewegungsgleichungen ein, so liefern sie den Ablenkungswinkel Φ , relativ zu einem Koordinatensystem, das sich mit dem Kern bewegt. Da für Kern und α -Teilchen zusammen, solange wir unelastische Stöße ausschließen, Energie- und Impulssatz erfüllt sein müssen, hängt die Bewegung des Kernes und damit auch die durch sie hervorgerufene Änderung des Ablenkungswinkels gar nicht ab von dem zwischen den beiden Massen wirkenden Kraftgesetz, sondern nur vom Ablenkungswinkel und dem Verhältnis der beiden Massen. Bezeichnen wir wie bisher mit Φ den Ablenkungswinkel des α -Teilchens in einem Koordinatensystem, das sich mit dem Kern bewegt, mit Φ' aber die Ablenkung für einen ruhenden Beobachter, so ist nach Darwin (9) und Bieler (7)

$$\cotg \Phi' = \cotg \Phi + \frac{m}{M} \frac{1}{\sin \Phi}, \quad (36)$$

wobei m und M die Massen von α -Teilchen und Kern bedeuten.

Alle α -Teilchen, die früher mit oder ohne Polarisationswirkung um Φ abgelenkt wurden, erfahren bei Berücksichtigung der endlichen Kernmasse die Ablenkung Φ' . Das Verhältnis V der α -Teilchenzahlen für den beobachteten Ablenkungswinkel Φ' ist daher gleich dem früher für den Winkel Φ berechneten, der nach Gleichung (36) für das betreffende Massenverhältnis zu Φ gehört.

Als Beispiel für den Einfluß der Mitbewegung des Kernes wurde dieser für Aluminium als zerstreuende Substanz, für die die besten Beobachtungen vorliegen, berechnet. Das Massenverhältnis ist in diesem Fall $\frac{m}{M} = \frac{4}{27}$; man erhält damit für den Zusammenhang zwischen Φ und Φ' für Aluminium Tabelle IV.

Da Φ' stets kleiner als Φ ist, bekommt man für einen bestimmten Ablenkungswinkel Φ' bei Berücksichtigung der Mitbewegung des Kernes im allgemeinen eine weitere Verkleinerung des Verhältnisses V .

Tabelle IV.

Φ'	0^0	15^0	30^0	45^0	60^0	75^0	90^0
Φ	0^0	$17^0 12'$	$34^0 14'$	$51^0 0'$	$67^0 22'$	$83^0 13'$	$98^0 31'$
Φ'	90^0	105^0	120^0	135^0	150^0	165^0	180^0
Φ	$98^0 31'$	$113^0 13'$	$127^0 22'$	$141^0 0'$	$154^0 14'$	$167^0 12'$	180^0

Es ergibt sich daraus aber keine wesentliche Änderung für den Verlauf von V . Wir wollen dies für den Ablenkungswinkel 90^0 zeigen, für den der Unterschied zwischen Φ und Φ' ein Maximum erreicht. Wir berechnen dazu V nach den Angaben am Schlusse des vorigen Abschnittes als Funktion von $q^{-\frac{1}{3}}$ einmal für $\Phi = 90^0$ und dann für $\Phi' = 90^0$, das heißt nach dem Zusammenhang zwischen Φ und Φ' , für $\Phi = 98^0 31'$. Fig. 8 gibt die Resultate; die gestrichelte Kurve zeigt den Verlauf von V ohne, die ausgezogene denjenigen mit Berücksichtigung der Mitbewegung des Kernes, beidemal unter der Annahme, daß auch die ohne Polarisationswirkung berechneten Teilchenzahlen, mit denen wir vergleichen, entsprechend berechnet sind.

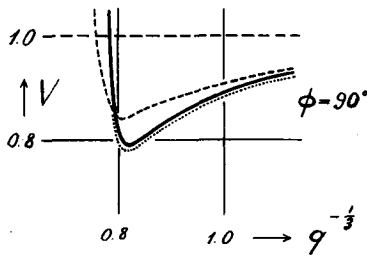


Fig. 8.

Ist dies nicht der Fall, dann wäre das Verhältnis der α -Teilchenzahlen mit Polarisationswirkung und Mitbewegung des Kernes zu den nach dem einfachen Grundgesetz (20) gegebenen zu berechnen. Dieses ergibt sich, indem man die Ordinaten der ausgezogenen Kurve in Fig. 8 mit dem Verhältnis der Teilchenzahlen mit und ohne Berücksichtigung der Kernbewegung beim einfachen Grundgesetz multipliziert. Das letztere ist dabei nach Darwin (9) in erster Näherung gegeben durch

$$1 - 2 \left(\frac{m}{M}\right)^2 \sin^4 \frac{\Phi}{2}$$

Die hierdurch erhaltenen Werte für V sind durch die punktierte Kurve in Fig. 8 dargestellt.

13. Aus den vorstehenden Rechnungen kennen wir nunmehr den Einfluß der Polarisierbarkeit der Atomkerne auf die Zerstreuung der α -Strahlen. Es bleibt uns nun noch, diese Resultate mit den bisher bekannten Experimenten zu vergleichen, um daraus zu entnehmen,

inwieweit die hier benutzten Grundlagen zu einem zutreffenden Bilde führen können. Die Voraussetzungen der ganzen Rechnung waren, nochmals kurz zusammengefaßt, die folgenden:

1. Der Atomkern erfährt im elektrischen Felde des herannahenden α -Teilchens eine Verschiebung seiner Ladungen; das dadurch hervorgerufene elektrische Moment erzeugt eine zusätzliche, umgekehrt mit der fünften Potenz des Abstandes vom Kern variierende Anziehungskraft.
2. Das α -Teilchen wird in seiner Kraftwirkung nach außen als Punktladung betrachtet.
3. Für seine Bewegung gelten Energie- und Impulsatz; unelastische Stöße, bei denen Energie auf das Kerninnere übertragen würde, sollen ausgeschlossen sein.
4. Es gelten die Gesetze der klassischen Mechanik.

Zusammenhängende Messungen über Abweichungen von der normalen α -Strahlzerstreuung sind, wie schon gelegentlich erwähnt wurde, von Bieler (4) und von Rutherford und Chadwick (5) durchgeführt worden. Als geeignete zerstreue Substanzen wurden Aluminium- und Magnesiumfolien verwendet. Von Bieler wurde das Verhältnis V bestimmt für α -Teilchen konstanter Geschwindigkeit, bei Variation der Ablenkung, von Rutherford und Chadwick hingegen für einen bestimmten Ablenkungswinkel bei Variation der Geschwindigkeit. Beide Gruppen von Messungen zeigen im wesentlichen den Verlauf, wie er nach unseren Rechnungen und Fig. 6 und 7 zu erwarten ist. Doch sind Unterschiede da, die wohl kaum experimentellen Fehlerquellen zugeschrieben werden können. Als Beispiel hierfür seien die Meßresultate von Bieler an Aluminium in Fig. 9 wiedergegeben. Es ist nicht leicht, aus diesen Resultaten die Werte von q zu bestimmen, die eine befriedigende Darstellung ermöglichen. Für die langsamen α -Teilchen mit der Reichweite 3,4 cm (gestrichelt angegeben) erhält man etwa $q = 0,7$, für die schnelleren mit der Reichweite 6,6 cm $q = 2,5$. Daraus ergäbe sich für die Polarisierbarkeit des Aluminiumkernes $\alpha = 0,37 \cdot 10^{-36} \text{ cm}^3$, während eine analoge Auswertung der Messungen an Magnesium $\alpha = 0,31 \cdot 10^{-31} \text{ cm}^3$ ergibt. Sowohl bei Aluminium als auch bei Magnesium liegen die experimentellen Werte des Verhältnisses V bei den schnellen α -Teilchen merklich tiefer als

die berechneten; dagegen decken sich für die langsamen Teilchen die Meßresultate mit den theoretischen Kurven.

Über ein Wiederansteigen des Verhältnisses V , wie unsere Theorie es bei schnellen α -Teilchen mit zunehmendem Ablenkungswinkel erfordern

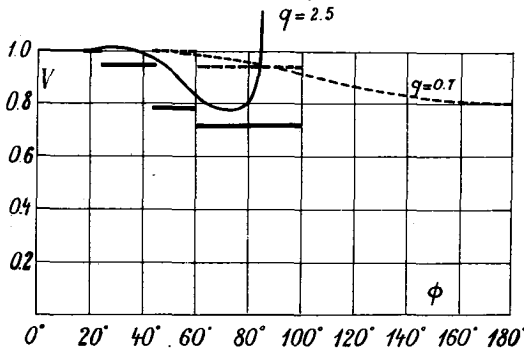


Fig. 9.

würde, liegen noch keine direkten Beobachtungen vor. Dagegen findet sich bei Pettersson (10) die Bemerkung, daß unter 150° bei Aluminium, Magnesium und Kohlenstoff überhaupt keine merkliche Anzahl schneller α -Teilchen reflektiert wird, was wir vielleicht als eine weitere experimentelle Andeutung zugunsten der hier berechneten α -Strahlerzerstreuung betrachten dürfen, nach der jenseits eines noch von der Geschwindigkeit des α -Teilchens abhängigen Grenzwinkels nur noch verschwindend wenige α -Teilchen auftreten.

Die experimentellen Resultate von Rutherford und Chadwick liegen nur graphisch vor. Für den Ablenkungswinkel 135° wurde die gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie schon in einer früheren Arbeit (11) ge-

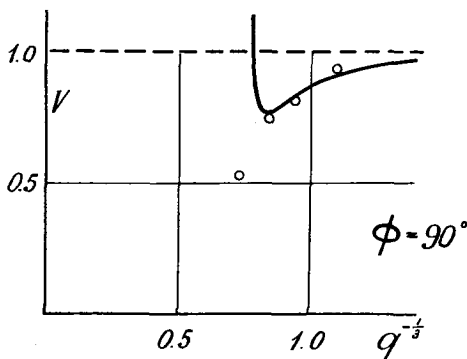


Fig. 10.

zeigt. Zwar liegt auch dort das Minimum des Verhältnisses V mit 0,35 tiefer als der theoretische Wert von 0,47; aber die experimentellen Resultate zeigen durchaus den Verlauf, wie er nach unserer Theorie zu erwarten ist. Insbesondere ist eine Wiederzunahme des Verhältnisses V

mit zunehmender Geschwindigkeit der α -Teilchen einwandfrei nachgewiesen.

Für die Messungen unter 90° aber erhält man bei schnellen α -Teilchen wieder Abweichungen, die im gleichen Sinne wie bei den Bielerischen Messungen liegen, während für langsame α -Teilchen die Übereinstimmung eine gute ist. Fig. 10 zeigt die berechnete Kurve und die experimentellen Resultate für Aluminium. Für die Polarisierbarkeit von Aluminium- und Magnesiumkern ergibt sich aus diesen Experimenten

$$\alpha = 0,48 \cdot 10^{-36} \text{ cm}^3 \text{ (Al)}$$

$$\alpha = 0,42 \cdot 10^{-36} \text{ cm}^3 \text{ (Mg)}$$

Der Differenz gegenüber den aus den Bielerischen Messungen gewonnenen Resultaten ist kein Gewicht beizulegen, da die Abszissenwerte bei Rutherford und Chadwick bloß graphisch vorliegen und jeder Fehler in der dritten Potenz in α eingeht; wenn man sich die Abszissenwerte aus vereinzelt Angaben über die Reichweite der verwendeten α -Teilchen berechnet, erhält man eher kleinere Werte, die dann mit den nach den Bielerischen Messungen gewonnenen übereinstimmen.

Nach den Überlegungen des zweiten Abschnittes müßten die Polarisierbarkeiten der Atomkerne von der Größenordnung ihres Volumens erwartet werden. Es ist nun wohl von Wichtigkeit, daß dieser Zusammenhang tatsächlich besteht. Wie früher erwähnt, könnte sich daraus vielleicht schließen lassen, daß auch für die Zusammenhangskräfte der Kernbestandteile die Coulombschen elektrostatischen Kräfte in Frage kommen.

14. Man wird versuchen, eine Erklärung für die hier erwähnten Differenzen zwischen Experiment und Theorie zu geben. Eine völlige Übereinstimmung darf allerdings zum Vornherein nicht erwartet werden, wenn man die Bedingungen, unter denen der Experimentator arbeiten muß mit den Voraussetzungen der Theorie vergleicht. Berechnet wurde die Zerstreuung von α -Strahlen bestimmter Geschwindigkeit in einen unendlich kleinen Raumwinkel. Im Experiment hingegen muß, um eine meßbare Ausbeute zu erhalten, ein größerer Winkelbereich gewählt werden; Bieler bestimmt zum Beispiel die α -Teilchenzahlen für einen Winkelbereich von 60° – 100° . Ferner ist die Geschwindigkeit des α -Teilchens beim Stoß, die ja allein für die Ablenkung maßgebend ist, verschieden je nach der Tiefe in der Folie, an der der Kerntreffer zustandekommt. Da die Polarisationswirkung, gegeben durch den Parameter q , der 6. Potenz der Geschwindigkeit proportional ist, so könnte auch diese Unbestimmtheit der Geschwindigkeit eventuell merkbar werden.

Doch kann man die erwähnten Unterschiede der experimentellen Resultate gegenüber den berechneten höchstens zu einem kleinen Teil auf Rechnung dieser Umstände setzen. Viel wahrscheinlicher ist, daß eine oder auch mehrere der gemachten Voraussetzungen nicht vollständig erfüllt sind. So machen es zum Beispiel Messungen von Pettersson (12) über die Reichweite der gestreuten α -Teilchen wahrscheinlich, daß bei den Stoßvorgängen unter Umständen mehr Energie auf den Kern übertragen wird, als nach den Gesetzen des elastischen Stoßes zu erwarten wäre. Man kann versuchen, auf Grund einer ganz rohen Überlegung den Einfluß solcher unelastischer Stöße abzuschätzen. Nach Pettersson (13) könnte ein Energieverlust des α -Teilchens als Bremsung im Kernfeld angesehen werden, etwa dadurch hervorgerufen, daß sich das elektrische Moment des Kernes nicht momentan, sondern mit einer gewissen Phasenverschiebung gegenüber der wirksamen Feldstärke einstellt. Das anziehende elektrische Moment des Kernes wäre dann im Mittel beim Herannahen des α -Teilchens kleiner als beim Wegfliegen, woraus eine Bremswirkung resultieren würde. Die Möglichkeit einer solchen endlichen Phasenverschiebung zwischen Feldstärke und Induktion wäre verständlich, da die Zeit der wirksamen Beeinflussung des Kernes von der Größenordnung der mutmaßlichen Umlaufzeit der Kernbestandteile ist.

Hiernach würde das α -Teilchen auf dem 2. Teil seiner Bahn eine kleinere Geschwindigkeit besitzen und daher unter dem Einfluß der abstoßenden Kernladung eine größere Ablenkung erfahren. Merkbar würde ein solcher Effekt seiner Natur nach erst, wenn die Polarisation stark geworden ist; die Kurven $\delta(\varphi_0)$ in Fig. 5 würden dann bei großem Ablenkungswinkel und schnellen α -Teilchen weniger steil verlaufen und der daraus resultierende kleinere Wert von

$\frac{d\delta}{d\varphi_0}$ ergäbe nach (23) eine Verkleinerung der früher gefundenen Werte von V im Gebiete des Beginns der unelastischen Stöße. Ob hierin eine Erklärungsmöglichkeit für Unterschiede zwischen Experiment und Rechnung liegt, können nur Beobachtungen über Energieverluste der α -Teilchen bei verschiedenen Ablenkungen lehren.

Eine Ergänzung der vorliegenden Rechnung wäre noch in einer anderen Richtung möglich. Sobald man den Heliumkern als ein komplexes Gebilde betrachtet, wird eventuell auch ihm eine gewisse Polarisierbarkeit zugeschrieben werden müssen. Wie die Rechnung zeigt, setzt sich in erster Näherung die Wirkung dieser gegenseitigen Polarisation additiv aus den einfachen Wirkungen zusammen. Der Nachweis der Ver-

schiebungsmöglichkeit von elektrischen Ladungen im α -Teilchen läßt sich daher aus den bisher bekannten experimentellen Tatsachen nicht erbringen. Für eine Entscheidung hierüber müßten Messungen durchgeführt werden, bei denen Heliumkerne zu gegenseitiger Wirkung gelangen, also Bestimmungen der α -Strahlzerstreung beim Durchgang durch Helium.

Bei einer genaueren Berechnung der gegenseitigen Polarisationswirkung, wie sie bei größerer Annäherung nötig würde, müßten noch zusätzliche Abstoßungskräfte berücksichtigt werden, die der achten Potenz des Abstandes der beiden Gebilde umgekehrt proportional sind. Nach ähnlichen Überlegungen wie bei der Berücksichtigung der unelastischen Stöße würde die dadurch hervorgerufene Vergrößerung der Ablenkung wiederum zuerst zu einer weiteren Abnahme des Verhältnisses V der α -Teilchenzahlen mit und ohne Polarisationswirkung vor dem endgültigen Wiederansteigen führen.

Doch sind alle diese Berücksichtigungen von möglicherweise noch wirksamen Nebenumständen nur weitere Näherungen, die den Verlauf der α -Strahlzerstreung, wie er aus der einfachen Annahme der Polarisierbarkeit des Atomkernes hervorgeht, nicht mehr wesentlich zu ändern vermögen. Als Hauptergebnis der ganzen Rechnung dürfen wir daher vielleicht die Tatsache betrachten, daß es auf Grund der Annahme einer Verschiebungsmöglichkeit der Kernladungen möglich ist, die bisher bekannten Experimente über anomale Zerstreung von α -Strahlen im wesentlichen zu deuten, ohne neue, unbekannte Kräfte oder eine spezielle Struktur des Kernes voraussetzen zu müssen.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. P. Debye möchte ich hier noch meinen herzlichsten Dank aussprechen für die Anregung zu dieser Arbeit und das Interesse, das er ihr stets entgegenbrachte.

Literaturverzeichnis.

- 1) E. Rutherford, Phil. Mag. **21**, 669, 1911.
- 2) H. Geiger u. E. Marsden, Phil. Mag. **25**, 604, 1913.
- 3) I. Chadwick, Phil. Mag. **40**, 734, 1920.
- 4) E. S. Bieler, Proc. Roy. Soc. A. **105**, 434, 1924.
- 5) E. Rutherford u. I. Chadwick, Phil. Mag. **50**, 889, 1925.
- 6) P. Debye u. W. Hardmeier, Physik. Zeitschr. **27**, 196, 1926.
- 7) E. S. Bieler, Proc. Cambridge Phil. Soc. **21**, 686, 1923.
- 8) W. Wessel, Ann. d. Physik **78**, 757, 1925.
- 9) C. G. Darwin, Phil. Mag. **17**, 499, 1914.
- 10) H. Pettersson, Wien. Ber. (IIa) **133**, 510, 1924.
- 11) W. Hardmeier, Physik. Zeitschr. **27**, 574, 1926.
- 12) G. Kirsch u. H. Pettersson, Wien. Ber. (IIa) **134** 501, 1926.
- 13) H. Pettersson u. G. Kirsch, Atomzertrümmerung, S. 188.

Zürich, den 17. Januar 1927.

(Eingegangen 24. Januar 1927.)

Lebenslauf.

Ich wurde geboren am 22. Oktober 1901 in Zürich als Sohn des Rudolf Hardmeier, Lehrer, und der Ida, geb. Bosshard und besuchte nach Absolvierung der städtischen Primarschule 1914–1920 das Kantonale Gymnasium (Realabteilung) in Zürich. Nach erlangter Maturität studierte ich 1920–1924 an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Mathematik und Physik. Ich besuchte dabei Vorlesungen, Seminarien und Übungen der Herren Professoren: Amberg, Debye, Franel, Grossmann, Kollros, Marchand, Plancherel, Polya, Scherrer, Schrödinger, Seiler, Tank, Weyl und Wolfer. Als ersten Abschluß meiner Studien erwarb ich mir im Sommer 1924 das Fachlehrer-Diplom der E. T. H. Seither betätige ich mich als Hilfslehrer für Mathematik und Physik am Kantonalen Gymnasium und an der Höheren Töchterschule der Stadt Zürich.