

Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Grundströmung

Von der

**Eidgenössischen Technischen Hochschule
in Zürich**

zur Erlangung der

Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte

Nr. 652

Promotionsarbeit

vorgelegt von

Alfred Buri, Dipl. Ing.

aus **Burgdorf.**

Referent: Herr Prof. Dr. G. Eichelberg.

Korreferent: Herr Prof. Dr. P. Scherrer.

1931

Buchdruckerei A.-G. Jean Frey
Zürich.

IV. Abschnitt. Zusammenfassung.

17. Gedankengang der Methode und Rechnungsdurchführung.

In dieser Abhandlung ist versucht, eine Berechnungsmöglichkeit für den Reibungseinfluss in der turbulenten Strömung um beliebige Körper oder in Düsen abzuleiten aus Messungsergebnissen über den Strömungsverlauf einer speziellen Versuchsdüse.

Zunächst werden die Annahmen und Ergebnisse der allgemeinen Grenzschichttheorie übernommen. Unter Voraussetzung einer technischen Flüssigkeit mit kleiner Zähigkeit (Wasser, Luft etc.) und einer gegenüber dem Wandkrümmungsradius und der Kanalbreite kleinen Grenzschichtdicke liefert dieselbe das wichtige Ergebnis, dass, abgesehen von der sogenannten Grenzschicht in unmittelbarer Wandnähe, der Strömungsvorgang den Gesetzen der reibungslosen idealen Flüssigkeit sehr gut gehorcht und dass ferner der Druck über die Grenzschichtbreite konstant und gleich demjenigen in der angrenzenden ungestörten Strömung ist.

Daher lassen sich dieser Druck und die Grundströmungsgeschwindigkeit nach den Regeln der Potentialtheorie (in einfachen Fällen nach dem Satz von Bernoulli und der Kontinuitätsgleichung) berechnen und ist damit gewissermassen als Zustandsgrösse der Grundströmung gleich wie irgend eine physikalische Zustandsgrösse der Flüssigkeit für die Berechnung des Reibungseinflusses vorgegeben.

Die Aufgabe besteht nun darin, mit Hilfe des Impulssatzes den Impulsverlust gegenüber der ungestörten Strömung infolge des Reibungseinflusses zu bestimmen. Vorerst muss als Funktion dieses Impulsverlustes und als Funktion der Rechnungsgrössen die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht und die Grösse der Wandreibung ermittelt werden. Das Wesentliche der vorliegenden Methode besteht nun darin, dass nicht etwa irgend eine analytische Profilfunktion für diese Geschwindigkeitsverteilung vorausgesetzt werden soll, sondern es sollen die in der Versuchsdüse gemessenen und graphisch vorliegenden Profile verwendet und dem zu berechnenden Grenzschichtverlauf richtig zugeordnet werden. Als Parameter für die Profilerie, also als Kriterium für das Auftreten eines gemessenen Profils in der zu berechnenden Grenzschicht dient eine gewisse Funktion der Zustandsgrössen und des Impulsverlustes, nämlich die dimensionslos gemachte Schubspannungstangente im Wandpunkt. Es bleibt noch die Grösse der Wandreibung zu bestimmen, und zwar für beschleunigte und verzögerte Strömungen, also veränderliche Profilverformen. In Anlehnung an das Blasius'sche Gesetz wird

zunächst für glatte Oberflächen die Abhängigkeit von der Reynold'schen Kennzahl zu $1/R^{1/4}$ angesetzt und später auch experimentell bestätigt, während die Abhängigkeit von der veränderlichen Profilform durch einen variablen Faktor ζ berücksichtigt wird, der als Funktion des Profilparameters durch Messungen zu bestimmen ist.

Die Einführung dieser Abhängigkeiten in die Impuls-gleichung liefert eine Differentialgleichung für den Impuls-verlust in Abhängigkeit von den Zustandsgrössen. Nachdem noch durch Auswertung der Messergebnisse in der Versuchs-düse die in dieser Differentialgleichung auftretenden Koeffi-zienten als Funktionen des Profilparameters ermittelt sind, lässt sich diese Differentialgleichung in allgemeiner Form in-tegrieren und somit der Impulsverlust explizite aus den Zu-standsgrössen berechnen. Da damit auch der Wert des Para-meters ermittelt ist, ist nun auch die Geschwindigkeitsver-teilung in der Grenzschicht bekannt und somit die Aufgabe gelöst.

Für die Anwendung dieser Methode zur Berechnung der turbulenten Strömungsvorgänge sind im nächsten Abschnitt noch kurz die notwendigen Formeln, Voraussetzungen und Einschränkungen für die Benützung zusammengestellt.

Im weitem wird gezeigt, dass auch für rotationssymmetri-sche Körper oder Düsen dieselbe Rechnungsweise zum Ziele führt, obwohl hierbei als neuer Effekt eine seitliche Aus-weitung, resp. Zusammendrückung der Grenzschichtflüssigkeit bei Zu-, resp. Abnahme des Meridianradius des Körpers hin-zukommt. Ferner gestattet diese Rechnungsweise, den Ein-fluss der Veränderlichkeit von Dichte und Zähigkeit, insbeson-dere bei kompressiblen Flüssigkeiten zu berücksichtigen.

In Bezug auf die Rechnungsdurchführung muss auf die Zweckmässigkeit der Verwendung von Δ und d als Rechnungsgrössen hingewiesen werden, da die-selbe ganz allgemein bei irgendwelchen Grenzschichtrech-nungen in Erscheinung treten wird. Diese beiden Grössen sind mathematisch eindeutig und physikalisch anschaulich definiert und lassen sich aus einer Integration für eine vor-liegende Profilform leicht bestimmen. In ihnen ist die für den Impulssatz wesentliche Aussage über die Geschwindigkeits-verteilung in der Grenzschicht restlos enthalten. Dies zeigt sich darin, dass die allgemeine Impulsgleichung in eine Form gebracht werden kann, bei der die variable Grenzschicht-geschwindigkeit ausschliesslich in den beiden Funktionen d und Δ enthalten ist. In dieser neuen Form der Impulsgleichung treten also, abgesehen von den Zustandsgrössen und der Wandreibung, nur noch diese beiden Grössen auf, und zwar d nur im Koeffizienten d/Δ . Es erscheint demnach Δ als

Variable und muss deshalb als zweckmässiges Mass für den Impulsverlust infolge des Reibungseinflusses angesehen werden, während die ganze grosse Variationsmöglichkeit der Profilformen durch einen einzigen Koeffizienten d/Δ für die Impulsbetrachtung erschöpfend erfasst wird.

18. Zusammenfassung der Resultate für die Berechnung der turbulenten Grenzschicht.

Es seien hier nochmals kurz die Voraussetzungen und Formeln für die Grenzschichtrechnung zusammengestellt.

Die Rechnungsgrundlage gilt für «glatte Oberflächen», welche Bedingung durch die gebräuchlichen technischen Oberflächen weitgehend erfüllt wird. In Bezug auf die Reynold'sche Zahl fällt der Gültigkeitsbereich mit dem technisch wichtigen Gebiet zwischen $\frac{U l}{\nu} = 200$ bis 4000 zusammen.

Die Rechnungsgrundlage ist mit den für die Grenzschichttheorie erforderlichen Einschränkungen behaftet. So muss die Wandkrümmung in der Strömungsrichtung vernachlässigbar sein. Weiter darf die Grenzschichtausbildung auf die Grundströmung keinen Einfluss haben. Es dürfen sich z. B. die Störungsgebiete von zwei gegenüberliegenden Wandflächen nicht überdecken. Auch das Gebiet nach einer Grenzschichtablösung ist aus diesem Grunde von der rechnerischen Behandlung ausgeschlossen.

Für ein vorliegendes Problem muss zunächst nach den Regeln und Methoden der Potentialtheorie (in einfachen Fällen mit der Kontinuitätsgleichung und dem Satz von Bernoulli) die Grundströmung in Funktion von x ermittelt werden. Damit ist für die eigentliche Grenzschichtrechnung U und U' bekannt. Weiter ist r_w aus den Körperabmessungen zu entnehmen und die Werte der Konstanten ν_w ; ϱ_w ; ϱ_u für die betreffende Flüssigkeit zu bestimmen. Dann lässt sich mit einer einfachen Integration die Grenzschicht berechnen, womit auch der Strömungsverlauf der technischen reibungsbehafteten Flüssigkeit ermittelt ist.

Bei vorliegenden Zustandsgrössen lassen sich im allgemeinen Fall einer rotationssymmetrischen Grenzschicht bei kompressibler Flüssigkeit nach den Gleichungen

$$\Gamma = \frac{U'}{U} \left[\frac{\varrho_u}{U^b \nu_w^{1/4} r_w^{5/4} \varrho_w^{9/4}} \left(a \int_{x_0}^x \frac{U^b \nu_w^{1/4} r_w^{5/4} \varrho_w^{9/4}}{\varrho_u} dx + c \right) \right]$$

$$l = \frac{\varepsilon}{r_w \varrho_w} = \frac{1}{r_w \varrho_w} \frac{1}{U^{1/5}} \left[\frac{1}{U^b} \left(a \int_{x_0}^x \frac{U^b \nu_w^{1/4} r_w^{5/4} \varrho_w^{9/4}}{\varrho_u} dx + c \right) \right]^{4/5}$$

durch graphische Auswertung des bestimmten Integrals über x die beiden massgebenden Werte Γ und $\frac{\varepsilon}{r_w \varrho_w}$ berechnen.

Für beschleunigte Grundströmung gelten dabei die Werte

$$a = 0,01475 \qquad b = 3,945$$

für verzögerte annähernd

$$a = 0,0175 \qquad b = 4,15$$

Spezialisierung auf einfachere Fälle ist leicht möglich durch Herausnehmen der nunmehr konstanten Grössen aus dem Integral und Wegkürzen gegen die entsprechenden, vor dem Integral stehenden Werte. Dies ergibt beispielsweise für die ebene Grenzschicht bei inkompressibler Flüssigkeit

$$\Gamma = \frac{U'}{U} \left[\frac{1}{U^b} \left(a \int_{x_0}^x U^b dx + c \right) \right]$$

$$l = \Delta = \left(\frac{\nu}{U} \right)^{1/5} \left[\frac{1}{U_b} \left(a \int_{x_0}^x U_b dx + c \right) \right]^{1/5}$$

Weiter können leicht aus Abb. 7 bei bekanntem Γ die zugehörigen Profilformen und Koeffizienten $\frac{e}{\varepsilon}$ (resp. $\frac{d}{\Delta}$); $\frac{E(D)}{\varepsilon(\Delta)}$; $\frac{\delta}{l}$ entnommen werden, woraus sich dann alle interessierenden Werte und Geschwindigkeitsverteilungen berechnen lassen. Beispielsweise ergeben sich bei einer rotationssymmetrischen Düse und kleinem Verhältnis von Strömungsbreite zu Radius der

$$\text{Düsenkoeffizient} \quad \varrho = 1 - \frac{2}{r_w} \left(\frac{\varepsilon}{r_w \varrho_w} \right) \frac{e}{\varepsilon}$$

$$\text{Impulswirkungsgrad} \quad \eta = 1 - \frac{2}{r_w} \left(\frac{\varepsilon}{r_w \varrho_w} \right)$$

$$\text{Energiewirkungsgrad} \quad \Phi = 1 - \frac{2}{r_w} \left(\frac{\varepsilon}{r_w \varrho_w} \right) \frac{E}{\varepsilon}$$

wenn das Integral über die ganze Düsenlänge erstreckt wird.

Die x -Komponente der Wandreibung für einen Rotationskörper zwischen den Stellen x_0 und x bestimmt sich aus

$$W = U^2 2 \pi \varepsilon$$

wenn bei x_0 die Entwicklung der Grenzschicht beginnt und die Konstante $C = 0$ ist.

Für die verzögerte Strömung muss beachtet werden, dass beim Wert

$$\Gamma_{abl} = -0,06$$

die Grenzschicht unmittelbar vor der Ablösung steht.

In Bezug auf die mit dieser Rechnung zu erwartende Genauigkeit des Ergebnisses sei nochmals wiederholt, dass bei Grundströmungen von ähnlichem Charakter wie in der zur Ermittlung der Koeffizienten verwendeten Versuchsdüse zuverlässige Resultate zu erwarten sind. Unter Beachtung der Anfangs dieses Abschnittes gemachten Einschränkungen muss die Rechnungsmethode für beliebige andere Grundströmungen verwendbar sein, weil die gemachten Voraussetzungen, wenigstens soweit die Ansprüche der Rechnung gehen, als erfüllt gelten dürfen. Bei Verwendung des zugehörigen Wertes der kinematischen Zähigkeit gelten die Gleichungen für jede Flüssigkeit und jedes Gas unterhalb der Schallgeschwindigkeit, da das Reynold'sche Aehnlichkeitsgesetz respektiert ist.

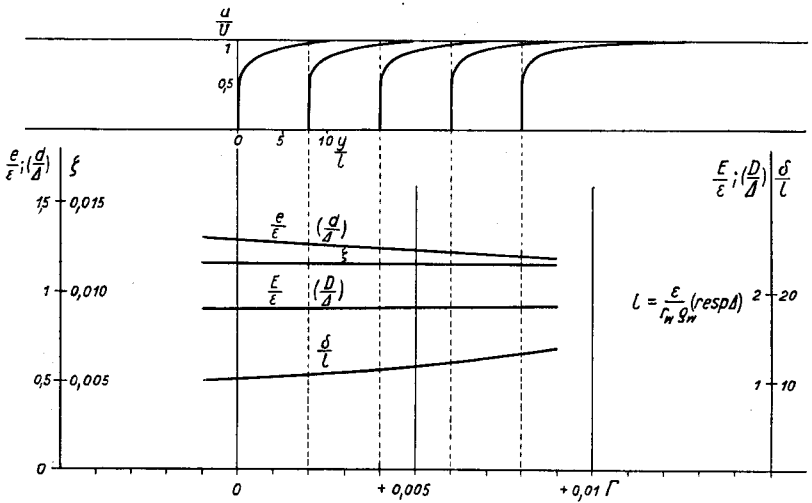


Abb. 7. Profilformen und charakteristische Koeffizienten für die beschleunigte Grenzschicht.

19. Behandlung komplizierterer Grenzschichtvorgänge.

Der Verfasser ist sich bewusst, dass bei der Kompliziertheit und Vielgestaltigkeit der Aufgabe diese Arbeit durch Auswertung weiterer Grenzschichtmessungen ergänzt werden muss. Um zu zeigen, wie weit die technische Hydrodynamik noch von der Lösung des Problems der Reibungsströmung entfernt ist, sei nur kurz auf folgende Punkte hingewiesen:

- a) Beeinflussung der Grundströmung in der Gegend der Ablösungsstelle.
- b) Einfluss der Wandkrümmung in Strömungsrichtung.
- c) Wandrauhigkeit.

Bei der gewählten Fassung dieser Abhandlung mit weitgehender Durchrechnung des allgemeinen Falles und erst nachträglicher Spezialisierung, ist zu hoffen, dass auch eine Anwendung auf diese Fälle praktisch durchführbar und brauchbar sein wird.

Schlusswort.

Es bleibt mir noch die angenehme Pflicht, Herrn Professor Prandtl in Göttingen für die unmittelbare Anregung zu dieser Arbeit zu danken, während ich insbesondere als Assistent von Herrn Professor Stodola in Zürich Gelegenheit hatte, mit dem Stoff vertraut zu werden. Speziell zu Dank verpflichtet bin ich Herrn Professor Stodola für die Ueberlassung der nach seinen Angaben vorbereiteten Apparatur im Zürcher Maschinenlaboratorium und Herrn Professor Eichelberg für seine Unterstützung bei der endgültigen Textabfassung.
