

# **Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Grundströmung**

---

Von der

**Eidgenössischen Technischen Hochschule  
in Zürich**

zur Erlangung der

**Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften**

genehmigte

Nr. 652

**Promotionsarbeit**

vorgelegt von

**Alfred Buri, Dipl. Ing.**

aus **Burgdorf.**

*Referent: Herr Prof. Dr. G. Eichelberg.*

*Korreferent: Herr Prof. Dr. P. Scherrer.*

1931

Buchdruckerei A.-G. Jean Frey  
Zürich.

**Leer - Vide - Empty**

# Inhaltsübersicht.

---

	Seite
Literaturangaben . . . . .	IV
Bezeichnungen . . . . .	V
<b>I. Abschnitt. Aufgabestellung.</b>	
1. Einleitung . . . . .	1
2. Charakterisierung des Strömungszustandes . . . . .	4
3. Zuordnung der Profilformen . . . . .	6
4. Wandreibungsgesetz . . . . .	7
5. Plan für die Rechnungsdurchführung . . . . .	9
<b>II. Abschnitt. Rechnungsdurchführung.</b>	
6. Impulssatz für die eindimensionale Grenzschicht bei inkompressibler Flüssigkeit und stationärem Zustand	10
7. Einführung des speziellen, für glatte Oberflächen gültigen Widerstandsgesetzes in die Impulsgleichung . .	12
8. Heranziehen der Voraussetzung der Einparametrigkeit zur Vereinfachung der Impulsgleichung . . . . .	13
9. Lösung der Differentialgleichung der Grenzschicht . .	15
10. Berechnung der Grenzschicht für rotationssymmetrische Düsen oder Körper bei glatter Oberfläche und kompressibler Flüssigkeit . . . . .	16
<b>III. Abschnitt. Messungen.</b>	
11. Beschreibung der Versuchsanordnung . . . . .	22
12. Vornahme der Messungen . . . . .	25
13. Auswertung der Messungen . . . . .	30
14. Diskussion der Ergebnisse der Auswertung . . . . .	35
15. Messungen von Dr. Nikuradse . . . . .	37
16. Das Ablösungsproblem . . . . .	38
<b>IV. Abschnitt. Zusammenfassung.</b>	
17. Gedankengang der Methode und Rechnungsdurchführung . . . . .	40
18. Zusammenfassung der Resultate für die Berechnung der turbulenten Grenzschicht . . . . .	42
19. Behandlung komplizierterer Grenzschichtvorgänge . .	44
Schlusswort . . . . .	45

---

**Literatur, auf die im Text Bezug genommen wird.**

---

1. Prandtl. Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses Heidelberg 1904.
  2. Blasius. Dissertation Göttingen 1907.
  3. Bolze. Dissertation Göttingen 1908.
  4. Hiemenz. Dissertation Göttingen 1911.
  5. v. Kármán. Z. A. M. M. 1921, S. 233.
  6. K. Pohlhausen. Z. A. M. M. 1921, S. 242.
  7. Prandtl. Z. A. M. M. 1925, S. 136.
  8. Stodola. Schweizerische Bauzeitung 1926, S. 243.
  9. Dönch. Forschungsarbeiten Heft 282.
  10. Nikuradse. Forschungsarbeiten Heft 289.
  11. v. Kármán. Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1930.
-

## Bezeichnungen

für die  
zweidimensionale Grenzschichtrechnung.

---

- x krummlinige Koordinate längs der Oberfläche in der Hauptströmungsrichtung,  
 y Koordinate senkrecht zur Oberfläche,  
 U; U' Geschwindigkeit für die reibungslose Potentialströmung und deren Ableitung nach x (Seite 4),  
 u zeitlicher Mittelwert der turbulenten Geschwindigkeitspulsationen in der Grenzschicht in Richtung x,  
 v Geschwindigkeit in y Richtung,  
 $\tau$  scheinbare, durch den turbulenten Impulsaustausch hervorgerufene Schubspannung für ein Flächenelement senkrecht y (Seite 2),  
 $\nu$ ;  $\varrho$ ;  $\rho$ ; T kinematische Zähigkeit, spezifische Dichte, Druck, absolute Temperatur,  
 $\delta$  Störungsweite (Kármánsche Grenzschichtdicke) (Seite 4),  

$$d = \int_0^{\delta} \left[ 1 - \left( \frac{u}{U} \right) \right] dy \quad \text{Verdrängungsdicke (Seite 11)}$$

$$\Delta = \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{U} \right) \left[ 1 - \left( \frac{u}{U} \right) \right] dy \quad \text{Impulsdicke (Seite 11)}$$

$$D = \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{U} \right) \left[ 1 - \left( \frac{u}{U} \right)^2 \right] dy$$
 l charakteristische Länge, später identifiziert mit  $\Delta$  (Seite 4),  
 $\Gamma$  Formparameter für die Geschwindigkeitsprofile (Seite 6 und 14),  
 $\zeta$  Widerstandszahl (Seite 9),  
 $\psi$  universelle Grenzschichtfunktion (Seite 14),  
 a Krümmungsradius der Stromlinien.

## Spezielle Bezeichnungen

für die  
rotationssymmetrische Grenzschicht.

---

x    Koordinate in Achsenrichtung,

r    Abstand von der Achse,

$e = \int \left[ r \varrho_u - r \varrho \left( \frac{u}{U} \right) \right] dy$     der Verdrängungsdicke entsprechende Grösse (Seite 17),

$\varepsilon = \int r \varrho \left( \frac{u}{U} \right) \left[ 1 - \left( \frac{u}{U} \right) \right] dy$     der Impulsdicke entsprechende Grösse (Seite 17),

$E = \int r \varrho \left( \frac{u}{U} \right) \left[ 1 - \left( \frac{u}{U} \right)^2 \right] dy$

$\frac{\varepsilon}{r_w \varrho_w}$  charakteristische Länge für das rotationssymmetrische Problem (Seite 18).

## Indizes.

---

u    bezieht sich auf Werte in der ungestörten Strömung,

w    Werte an der Wandfläche,

0    Anfangswerte.

Eine Zahl als Index bei den Geschwindigkeiten u und U deutet auf den Messquerschnitt für diese Grössen in der Messdüse hin.

Die beigefügten Seitenzahlen weisen auf nähere Erläuterungen im Text über die betreffende Grösse hin.

# I. Abschnitt. Aufgabestellung.

## 1. Einleitung.

Die klassische Hydrodynamik gibt uns in den meisten Fällen die Möglichkeit einer Berechnung der Strömungsvorgänge für die ideale reibungslose Flüssigkeit. Die allgemeine Behandlung einer reibungsbehafteten Strömung jedoch führt auf eine Differentialgleichung, die Navier-Stokes'sche Gleichung, die die Mathematiker als unlösbar bezeichnen. Deshalb befasst sich die technische Hydrodynamik mit Näherungslösungen dieses praktisch wichtigen Problems.

Eine erste wichtige Aufgabe der praktischen Hydrodynamik war zunächst die, experimentell zu untersuchen, inwieweit die Theorie der reibungslosen Flüssigkeit die Strömungsvorgänge in den technischen Flüssigkeiten mit kleiner Zähigkeit richtig wiedergibt. Abgesehen von einigen komplizierteren Fällen, zeigte sich dabei immer dasselbe Bild, für das Abb. 3 im III. Abschnitt dieser Abhandlung als Beispiel gelten kann. Dort geben die durch die Messpunkte gelegten Kurven die Geschwindigkeiten in der technischen, reibungsbehafteten Flüssigkeit, während die horizontalen Geraden die nach Massgabe der Theorie der idealen Flüssigkeit zu erwartenden Geschwindigkeiten darstellen. In sehr weitem Gebiet stimmen demnach die beiden Geschwindigkeiten sehr gut überein, während in der Nähe einer Wandfläche ein plötzlicher Geschwindigkeitsabfall bis zum Wert Null in der technischen Flüssigkeit zu konstatieren ist. Praktisch beschränkt sich also der Reibungseinfluss auf ein schmales Gebiet in unmittelbarer Wandnähe, auf die sogenannte Grenzschicht.<sup>1)</sup>

Durch diese Beobachtung ist der Weg für die näherungsweise Berechnung der Reibungsströmung vorgezeigt. Die Strömung der idealen Flüssigkeit hat für das Reibungsproblem den Charakter einer Grundströmung, in die durch Berechnung der Grenzschichtvorgänge nachträglich der Reibungseinfluss hereinkorrigiert werden kann.

Der erste erfolgreiche Schritt in dieser Richtung wurde durch Herrn Prof. Prandtl geleistet. Es ist das Verdienst von

---

<sup>1)</sup> Die Verhältnisse in dieser Grenzschicht werden nun allerdings noch dadurch kompliziert, dass in ihr zwei grundsätzlich verschiedene Strömungsformen unterschieden werden müssen, die laminare und die turbulente Strömungsform. Abgesehen von Strömungsvorgängen mit sehr kleiner Geschwindigkeit, sind jedoch bei Flüssigkeiten mit kleiner Zähigkeit die Voraussetzungen für das Auftreten des laminaren Strömungszustandes nur ausnahmsweise erfüllt, während in den praktisch wichtigen Fällen fast immer die in dieser Abhandlung zu berücksichtigende Turbulenz anzutreffen ist.

Prof. Prandtl, im Jahre 1904 für die immer schon festgestellte Abweichung der wirklichen Strömung von den Voraussagen der Theorie, eine theoretische Erklärung angebahnt zu haben, indem er die Vorgänge in den körpernahen Flüssigkeitsschichten unter der Annahme einer kleinen Zähigkeit der Flüssigkeit genauer verfolgte.

Unter Voraussetzung einer im Vergleich zu den Körperdimensionen geringen Grenzschichtdicke und unter Beschränkung auf Flüssigkeiten mit kleiner kinematischer Zähigkeit (Wasser, Luft) vereinfacht sich für das ebene stationäre Problem die Navier-Stokes'sche Gleichung auf die Prandtl'sche Differentialgleichung der Grenzschicht (4).

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad \dots \quad (1)$$

$$- \frac{u^2}{a} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \dots \quad (2)$$

Für laminaire Strömung darf  $\tau/\rho = \nu \frac{\partial u}{\partial y}$  gesetzt werden, entsprechend dem Newton'schen Reibungsgesetz, womit die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht und die Wandreibung berechnet werden können (2) (3) (4).

Für die uns hier interessierende turbulente Strömung muss in Gleichung 3  $\nu$  durch die turbulente Impulsaustauschgrösse  $\varepsilon$  ersetzt werden.<sup>2)</sup>

Es besteht wenig Hoffnung, dass wir jemals die komplizierte Mechanik des turbulenten Impulsaustausches in der Grenzschicht beherrschen werden und damit die Funktion  $\varepsilon$  bestimmen können. Aus der Differentialgleichung der Grenzschicht ergibt sich also nicht unmittelbar eine Berechnungsmöglichkeit der turbulenten Grenzschichtvorgänge. Die Grenzschichtbetrachtungen liefern uns jedoch einige grundlegende Erkenntnisse für die weitere Rechnung.

Wir wissen zunächst, dass der Geschwindigkeitsverlauf  $u$  ausserhalb der Störungsbreite  $\delta$  den Gesetzen der reibungslosen Strömung mit grosser Annäherung gehorcht. Für einen

<sup>2)</sup> Für diese Grösse liegt insbesondere der Prandtl'sche Ansatz (7)  $\varepsilon = l^2 \left| \frac{du}{dy} \right|$  vor, der sich in speziellen Fällen mit einfachen

Annahmen für die Mischungsweglänge  $l$  bewährt hat. Für den Fall der Grenzschicht sind von Nikuradse (10)  $l$  und  $\varepsilon$  für die Strömung in einem divergenten und konvergenten Kanal bestimmt worden, wobei sich der Verlauf von  $l$  als sehr kompliziert herausstellt. Von Prof. v. Kármán (11) liegen neuerdings Ansätze vor, um die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht bei gleichförmiger Grundströmung unter bestimmten Annahmen zu berechnen. Doch ergibt sich für den Verlauf von  $l$  in weiterer Entfernung von der Wand ein der Anschauung widersprechendes Resultat, so dass diese Grundlage nicht zu einem Versuch der Grenzschichtberechnung verlocken kann.

gegebenen Körper kann also mit Hilfe der Theorie der idealen Flüssigkeit die Strömung ausserhalb der Grenzschicht berechnet werden, so lange wenigstens, als die Grenzschicht dünn ist und die Entwicklung der Grundströmung nicht beeinflusst. Diese Grundströmung ist also für die eigentliche Grenzschichtrechnung vorgegeben.

Weiterhin machen wir die in der Grenzschichttheorie gebräuchliche Einschränkung, dass der Krümmungsradius  $a$  der Stromlinien gross ist gegenüber der Störungsbreite  $\delta$ . Dann ergibt sich auch aus Gleichung 2, dass der Druck in der Grenzschicht auf einer Vertikalen zur Wand konstant, also gleich demjenigen in der Grundströmung an jener Stelle ist. Durch die Grundströmung wird also der Druck in der Grenzschicht bestimmt und gewissermassen eingepägt.

Endlich liefert uns Gleichung 1 einen wichtigen Anhaltspunkt über den Schubspannungsverlauf in der Grenzschicht. In einem Punkt unmittelbar an der Wandfläche muss sowohl  $u$  als auch  $v$  verschwinden, und damit erhalten wir eine Aussage über die Tangente der Schubspannung im Wandpunkt

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots \dots \dots (3)$$

Um nochmals das für die Rechnung Grundlegende zu betonen, gestatten uns also die Erkenntnisse der Grenzschichttheorie die Festlegung des Druckverlaufes nach  $x$  und  $y$  in der Grenzschicht. Dies ermöglicht uns die Impulsbetrachtung für das Störungsgebiete in der von v. Kármán (6) angegebenen besonders einfachen Weise durchzuführen, allerdings nur wenn es uns gelingt, erstens über die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht zuverlässige Anhaltspunkte zu gewinnen und zweitens ein brauchbares Wandreibungsgesetz zu finden.

Das Ziel dieser Abhandlung besteht nun darin, die für die Rechnung notwendigen Angaben über die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht einerseits und über die Wandreibung andererseits unmittelbar aus Messungen zu entnehmen und mit diesen experimentell gewonnenen Daten die Berechnung der turbulenten Grenzschicht durchzuführen.<sup>3)</sup>

Die Schwierigkeiten dieser Methode konzentrieren sich auf folgende Punkte. Zunächst müssen wir uns darüber Rechenschaft geben, wodurch in erster Näherung der Strömungszustand in einem Querschnitt charakterisiert werden kann, so dass wir in der Lage sind, die in einem bestimmten Querschnitt der Messströmung festgestellten Zustände für einen

<sup>3)</sup> Bei der unter (6) zitierten Pohlhausen'schen Arbeit wurde zur Berechnung der laminaren Grenzschicht ein ähnlicher Weg eingeschlagen. Die Geschwindigkeitsverteilung wird aber dort durch eine analytische Funktion angenähert.

bestimmten Querschnitt der zu berechnenden Strömung zuzuordnen. Auf Grund dieser Charakterisierung des Strömungszustandes muss dann erstens die Festlegung der Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht und zweitens die Wahl eines Wandreibungsgesetzes erfolgen.

Ehe auf die Rechnungsdurchführung eingegangen wird, sollen in den folgenden drei Unterabschnitten diese Schwierigkeiten vorweggenommen werden, um so eine spätere Unterbrechung des Rechnungsverlaufes zu vermeiden.

## 2. Charakterisierung des Strömungszustandes.

Zunächst seien hier einige Definitionen vorausgestellt. Als Geschwindigkeitsprofil bezeichnen wir die dimensionslose Auftragung des Geschwindigkeitsverlaufes in der Grenzschicht über den Koordinaten  $\frac{u}{U}$  und  $l$ .  $l$  ist eine für die Grenzschichtdicke charakteristische Länge. Prof. v. Kármán (5) setzt an Stelle von  $l$  die Störungsbreite  $\delta$ , während Dr. Nikuradse (10) die Verdrängungsdicke  $d$  verwendet und Prof. Prandtl die Impulsdicke  $\Delta$  vorziehen würde. Wir wollen deshalb die Entscheidung über die Wahl von  $l$  hinausschieben, bis wir sie später mit Vorteil nach rein mathematischen Gesichtspunkten treffen können.

Als Zustandsgrößen für die eigentliche Grenzschichtrechnung wollen wir bezeichnen erstens die eigentlichen physikalischen Zustandsgrößen  $\rho$  und  $\nu$ , dann aber auch die nach den Schlussfolgerungen aus der Grenzschichttheorie für unsere Rechnung vorgegebenen Werte  $U$ ;  $U'$  und  $p$ .

Wir gehen nun aus von einer vollständig durchgemessenen und ausgewerteten Versuchsströmung längs einer Wand. Diese Ergebnisse sollen nun aber nicht nur zur Berechnung der Vorgänge bei gleicher oder geometrisch ähnlicher Grundströmung dienen; es sollen allgemein die Bedingungen untersucht werden, unter welchen auch bei andersartiger Grundströmung für einen einzelnen Querschnitt wieder derselbe Strömungszustand angenommen werden darf, wie in einem Querschnitt der Versuchsströmung.

In streng hydrodynamischem Sinne ist das Auftreten derselben Strömungsform bei andersartiger Grundströmung unmöglich, weil die Strömung in der Grenzschicht an einer bestimmten Stelle von den Verhältnissen vor und nach diesem Punkt mitbestimmt wird. Mit Annäherung ist unter bestimmten Bedingungen jedoch das Auftreten desselben Strömungszustandes zu erwarten. Es handelt sich nur darum, ein möglichst zweckmässiges Charakteristikum für das Auftreten annähernd desselben Strömungszustandes in einzelnen Querschnitten zu finden und nachher an Hand von Versuchen nach-

zuweisen, wie gut die Uebereinstimmung ist und ob sie für die Ansprüche der Rechnung genügt. In der Rechnung wird dieses Charakteristikum als eine aus den Rechnungsgrössen eines Querschnittes gebildete Parameterfunktion erscheinen.

Wir müssen demnach zunächst untersuchen, durch welche Rechnungsgrössen der Strömungszustand in einem Querschnitt zweckmässig charakterisiert wird. Als Ausdruck für den Strömungszustand erscheint bei Messungen unmittelbar die Geschwindigkeitsverteilung über die Grenzschichtbreite. Neben diesem direkten Messergebnis verdient aber besonders die Verteilung der durch den turbulenten Impulsaustausch hervorgerufenen Schubspannung besondere Beachtung. Dieselbe ist für das Studium der Mechanik des Strömungsvorganges die nächstliegende und aufschlussreichste Grösse.<sup>4)</sup>

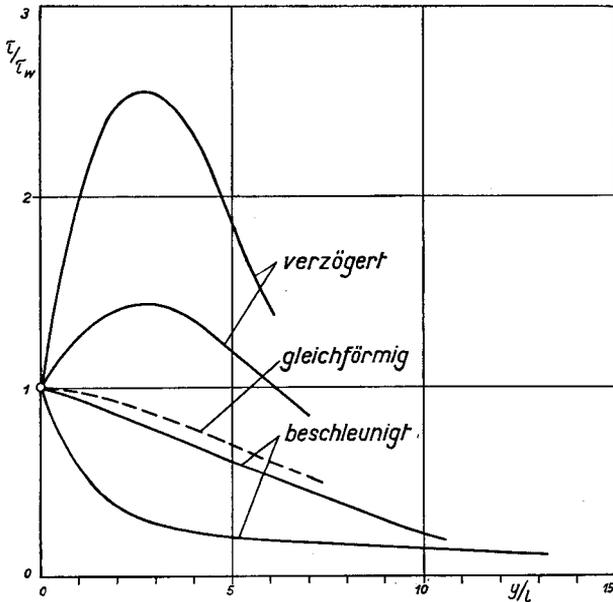


Abb. 1. Schubspannungsverlauf in der Grenzschicht.

In Abb. 1 ist dieser Schubspannungsverlauf für beschleunigte und verzögerte Grundströmungen nach Messungen von Dr. Nikuradse dimensionslos aufgetragen über den Koordinaten  $\tau/\tau_w$  und  $y/l$ .<sup>5)</sup>

<sup>4)</sup> Aus gemessenen Geschwindigkeitsprofilen kann diese Schubspannung ermittelt werden mit Hilfe der aus Gleichung 1 gewonnenen Formel.

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u^2 dy + u \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u dy - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u dy = \rho U U' (d-y) - \tau \quad (4)$$

<sup>5)</sup> I wird später identifiziert mit der Grösse  $\Delta$ , die Werte  $\Delta$  für die Messungen von Dr. Nikuradse finden sich auf Seite 38.

Es sei hier nochmals darauf hingewiesen, dass die Tangente  $d\tau/\tau_w/dy/l$  im Punkt  $y = 0$  an der Wand sich nach Gleichung 1 aus den Zustandsgrößen ergibt zu

$$\Gamma_a = - \frac{U U' \Delta \varrho}{\tau_w} \dots \dots \dots (5)$$

Ferner wollen wir beachten, dass diese Tangente für den ganzen Schubspannungsverlauf bestimmenden Einfluss hat, oder mathematisch ausgedrückt, dass in einer Reihenentwicklung

$$\frac{\tau}{\tau_w} = \left[ 1 + \Gamma_a \frac{y}{l} + \Gamma_b \left( \frac{y}{l} \right)^2 + \dots \right] \dots \dots (6)$$

dem Faktor von  $y/l$  besondere Wichtigkeit zukommt. Mit andern Worten heisst dies, dass diese dimensionslose Tangente  $\Gamma_a$  für den Schubspannungsverlauf in einem bestimmten Querschnitt und damit für den ganzen Strömungszustand in diesem Querschnitt charakteristisch ist und somit die für unsere Parameterfunktion gewünschten Eigenschaften besitzt.<sup>6)</sup>

Diese Möglichkeit, den für den ganzen Strömungsvorgang in einem Querschnitt der Grenzschicht typischen Schubspannungsverlauf durch eine einzige dimensionslose Funktion unserer Rechnungsgrößen charakterisieren zu können, bildet die Grundlage des vorliegenden Näherungsverfahrens zur Grenzschichtberechnung. Dies wird aus den beiden Anwendungen in den folgenden zwei Unterabschnitten sofort ersichtlich.

### 3. Zuordnung der Profilformen.

Als Vorbereitung für die Anwendung der Impulsbeziehung auf das Störungsgebiet müssen wir für die einzelnen Querschnitte die Geschwindigkeitsverteilung festlegen. Dies geschieht mit Hilfe vorliegender Profilformen, also an Hand der dimensionslos gemachten Messergebnisse.

Das Geschwindigkeitsprofil ist eine bestimmte Aeusserungsform des in einem Querschnitt der Grenzschicht herrschenden Strömungszustandes. Im vorhergehenden Unterabschnitt sind wir dazu gelangt, eine gewisse Funktion unserer Rechnungsgrößen, nämlich  $\Gamma_a$  als Parameter für das Auftreten eines bestimmten Strömungszustandes anzusehen. Wir werden daher bei einer vorliegenden Mess-Serie zu den Profilformen der einzelnen Querschnitte den zugehörigen Wert dieser Parameterfunktion aus den Messgrößen dieses

<sup>6)</sup> Diese Betrachtung über die Zweckmässigkeit der dimensionslosen Tangente  $\Gamma_a$  als Parameter verdanke ich einer mündlichen Mitteilung von Herrn Professor Prandtl in Göttingen.

Querschnittes auswerten. Im Rahmen der vorliegenden Näherungsrechnung darf nun geschlossen werden, dass in einer zu berechnenden Grenzschichtströmung dieselbe Profilform auftritt, sobald für einen bestimmten Querschnitt aus der Rechnung derselbe Wert der Parameterfunktion sich ergibt.

Von einem rein mathematischen Standpunkt aus ergibt sich für die Festlegung der Geschwindigkeitsverteilung mit Hilfe der Profilformen folgende Betrachtung. Wir legen unserer Rechnung eine Serie von Geschwindigkeitsprofilen zugrunde. Diese Profile sind durch drei Grössen an die physikalischen Bedingungen anpassungsfähig, nämlich durch  $U$ ;  $l$ ;  $\Gamma_a$ . Die erste Grösse  $U$  ist ohne weiteres dadurch festgelegt, dass unser Profil ausserhalb der Störungsbreite in die bekannte Grundströmung übergehen muss.  $l$  ist die charakteristische Dicke der Grenzschicht und erscheint nunmehr als die abhängige Variable unserer Rechnung.  $l$  wird sich als Mass für den Impulsverlust gegenüber der ungestörten Strömung aus der Impulsbetrachtung ergeben.  $\Gamma_a$  ist Formparameter, von dem allein die Profilkurve, also die dimensionslose Geschwindigkeitsverteilung abhängen soll.

Für die Profilkurve könnten wir eine analytische Funktion wählen, die eine vorhandene gemessene Profilsreihe möglichst gut annähert.  $\Gamma_a$  würde darin als Parameter auftreten. Allgemeiner lässt sich jedoch so vorgehen, dass wir direkt mit den graphisch gegebenen Messprofilen in die Rechnung eingehen und nachträglich für die einzelnen, durch den zugehörigen  $\Gamma_a$ -Wert charakterisierten Profile die durch die Endgleichung vorgeschriebene Auswertung vornehmen. Diese Massnahme wird sich als ausserordentlich zweckmässig erweisen, indem die Auswertung einer Mess-Serie direkt auf die in der Endgleichung auftretenden Koeffizienten losgeht. Ein Hauptvorteil liegt bei dieser allgemeinen Durchführung auch darin, dass jederzeit leicht eine neue Serie von Profilen der Rechnung zugrunde gelegt werden kann, wenn dies zur Berücksichtigung der Wandkrümmung oder einer abnormalen Grundströmung notwendig werden sollte.

#### 4. Wandreibungsgesetz.

Neben der Profilform ist weiter auch die Bestimmung der Wandreibung auf experimenteller Grundlage notwendig. Eine theoretische Bestimmung derselben ist solange nicht möglich, als das Problem des turbulenten Impulsaustausches ungeklärt ist.

Abgesehen von den schwer erfassbaren Einflüssen der Faktoren: Rauigkeit und Wandkrümmung war insbesondere die Abhängigkeit der Wandreibung von der Beschleunigung oder Verzögerung der Grundströmung bis vor kurzem gänz-

lich unbekannt. Nach der mir zugänglichen Literatur hat sich Professor Dr. A. Stodola zuerst mit der Klärung dieser Frage befasst. 7)

Die Durchführung der Grenzschichtrechnung ist unter Zugrundelegung jedes Reibungsgesetzes prinzipiell möglich. Wir beschränken uns jedoch hier auf die Annahme einer glatten Oberfläche bei vernachlässigbarer Wandkrümmung.

Zunächst lässt sich auf Grund des Reynold'schen Aehnlichkeitsgesetzes für diesen Fall aussagen, dass die Wandreibung proportional mit dem Staudruck  $\frac{\rho}{2} U^2$  ist und ausserdem nur noch von der Form der Geschwindigkeitsverteilung und von der Reynold'schen Kennzahl abhängig sein kann. Diese Form der Geschwindigkeitsverteilung wird nach Massgabe des vorhergehenden Abschnittes durch den Profilparameter  $\Gamma$  festgelegt. Als Reynold'sche Kennzahl wählen wir vorteilhaft

$$R = \frac{U l}{\nu} \dots \dots \dots (8)$$

womit wir auch hier unsere vorläufig noch unbestimmte charakteristische Länge  $l$  in die Rechnung einführen. In der mathematischen Ausdrucksweise werden wir also sagen, dass

$$\frac{\tau_w}{\frac{\rho}{2} U^2} = f \left( \frac{U l}{\nu}; \Gamma_a \right) \dots \dots \dots (9)$$

sein muss.

Diese Funktion ist für die gleichförmige Strömung bereits experimentell bestimmt und ist bekannt als Blasius'sches Widerstandsgesetz. Mit unseren Rechnungsgrössen schreibt sich dasselbe

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \xi \frac{1}{\left( \frac{U l}{\nu} \right)^{1/4}} \dots \dots \dots (10)$$

7) In der unter (8) zitierten Veröffentlichung gelangt Professor Stodola zur Feststellung, dass bei beschleunigter Grundströmung der klassische Wert der Schubspannung abgeändert werden muss, indem beim  $^{1/7}$  Gesetz jedenfalls

$$\tau_w / \rho > 2/9 U U' \delta \text{ ist,}$$

somit für  $\tau_w$  ein Ansatz zu wählen sei, der dieser Bedingung genügt und im Grenzfall  $U' = 0$  in den klassischen übergeht. Nach seinerzeitiger mündlicher Mitteilung würde es sich empfehlen, in Verallgemeinerung der in der zitierten Quelle gewählten Näherung den Ansatz

$$\tau_w = \tau_w \text{ klassisch} + 2/9 U U' \delta + \phi$$

aufzustellen, wo  $\phi$  eine geeignet zu wählende Funktion der Strömungsparameter ist.

Vorliegende Untersuchung ist mit zur Klärung dieser Frage unternommen worden, und es zeigt sich, dass die neue Prandtl'sche Kennzahl sich hierzu vorzüglich eignet. (Siehe Fussnote Seite 35.)

wobei  $\xi$  eine Konstante ist. Hierbei liegen allerdings die Verhältnisse insofern sehr einfach, als bei der gleichförmigen Strömung die Profilform sich fast nicht ändert und also der Parameter einen konstanten Wert aufweist. Daher ist die rechte Seite der Gleichung 10 nur eine Funktion der Reynold'schen Kennzahl.

Wir machen nun die Annahme, die später selbstverständlich experimentell nachgeprüft werden muss, dass auch für beschleunigte und verzögerte Grundströmungen die Abhängigkeit von der Reynold'schen Kennzahl dieselbe sei, wie bei der gleichförmigen Strömung. Dann wird sich die Veränderlichkeit der Profilform nur im Faktor  $\zeta$  auswirken, der nun nicht mehr eine Konstante, sondern eine reine Funktion einzig des Parameters  $\Gamma_a$  sein wird. Die gesuchte Funktion  $f\left(\frac{U_1}{\nu}; \Gamma_a\right)$  stellt sich also dar als ein Produkt, wovon der eine Faktor eine reine Funktion des Parameters  $\Gamma_a$  und der andere Faktor eine reine Funktion der Reynold'schen Kennzahl ist.

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \zeta(\Gamma_a) \frac{1}{\left(\frac{U_1}{\nu}\right)^{1/4}} \cdot \cdot \cdot \cdot (11)^8$$

Es sei vorweggenommen, dass die Versuche im Abschnitt III dieser Abhandlung dieses Gesetz durchaus bestätigen.

### 5. Plan für die Rechnungsdurchführung.

Nach der in den vorhergehenden Abschnitten getroffenen Vorbereitung werden wir zur Impulsgleichung für die Grenzschicht übergehen. Die Resultate dieser Rechnung werden, wie es dem Grundgedanken dieser Arbeit entspricht, immer zweifach verwendet. Erstens zur Bestimmung der Koeffizienten aus den Versuchswerten, dann aber zweitens mit der Absicht, auf Grund dieser Koeffizienten eine Rechnungsgrundlage für die Grenzschicht zu gewinnen. Diese Durchführung der Rechnung bis zur Aufstellung der Berechnungsgleichung ist im II. Abschnitt zunächst für den einfachsten Fall der ebenen Grenzschicht bei inkompressibler Flüssigkeit und stationärem Strömungszustand durchgeführt, und zwar zuerst die für jedes Reibungsgesetz gültige Entwicklung und nachher die Spezialisierung auf das Potenzgesetz für den

---

<sup>8)</sup> Mit Hilfe der v. Kármán'schen Dimensionsbetrachtung (5) gelangt man zu demselben Gesetz. Voraussetzung dabei ist allerdings, dass nur Profile auftreten, bei welchen in Wandnähe die Geschwindigkeit mit der  $^{1/7}$  Potenz des Wandabstandes anwächst. Die Messprofile von Dr. Nikuradse zeigen diesen Geschwindigkeitsanstieg sowohl bei beschleunigter als auch bei verzögerter Strömung.

Widerstand bei glatten Oberflächen unter Vernachlässigung des Einflusses der Wandkrümmung. Anschliessend wird gesondert die Erweiterung für das Problem der Grenzschicht bei rotationssymmetrischen Körpern und Düsen bei kompressibler Flüssigkeit behandelt. Die Bestimmung der Koeffizienten folgt im III. Abschnitt im Zusammenhang mit der Besprechung der Versuche.

## II. Abschnitt. Rechnungsdurchführung.

### 6. Impulssatz für die eindimensionale Grenzschicht bei inkompressibler Flüssigkeit und stationärem Zustand.

Die Anwendung des Impulssatzes für die x Richtung auf ein Flüssigkeitselement von der Länge dx, der Breite 1 und der Höhe  $\delta$  führt bei Vernachlässigung der Schwerkräfte und Voraussetzung der Ergebnisse der Grenzschichttheorie auf folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\delta} \rho u \, dy - U \rho \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho u^2 \, dy - \\ - U \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\delta} \rho u \, dy = - \delta \frac{\partial p}{\partial x} - \tau_w . . . . \quad (12) \end{aligned}$$

die zuerst von Prof. v. Kármán (5) angegeben wurde.<sup>9)</sup> Um die Rechnung für die Substituierung der experimentell bestimmten Profifunktion  $\frac{u}{U} = f(y; x)$  vorzubereiten, erweitern wird die u enthaltenden Glieder mit  $1/U$ , bis u nur noch im Quotienten  $\frac{u}{U}$  auftritt. Auch wollen wir uns nicht auf  $\delta$  als abhängige Variable festlegen, sondern uns für später eine günstige Wahl nach mathematischen Gesichtspunkten vorbehalten. Ausserdem beschränken wir uns auf den stationären Fall bei inkompressibler Flüssigkeit, womit sich Gleichung 12 folgendermassen schreibt:

$$\frac{\partial}{\partial x} U^2 \int_0^{\delta} \left(\frac{u}{U}\right)^2 \, dy - U \frac{\partial}{\partial x} U \int_0^{\delta} \left(\frac{u}{U}\right) \, dy = + U U' \delta - \frac{\tau_w}{\rho} \quad (13)$$

<sup>9)</sup> Die Notwendigkeit der Ergänzung der ursprünglichen v. Kármán'schen Gleichung bei instationären Strömungsvorgängen durch Hinzufügen des zweiten Gliedes wurde von Prof. Stodola (8) dargestellt.

indem  $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U U'$  gesetzt werden darf, entsprechend dem für die Grundströmung gültigen Satz von Bernoulli. Durch Ausführen der Differentiation nach  $x$  vor den Integralzeichen und Zusammenstellen der Glieder in der Art, dass sie im nächsten Schritt zu Integralen zusammengefasst werden können, die von der oberen Grenze unabhängig sind, erhalten wir:

$$\frac{U'}{U} \left\{ 2 \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{U} \right) dy - 2 \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{U} \right)^2 dy + \delta - \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{U} \right) dy \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{U} \right) dy - \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{U} \right)^2 dy \right\} = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \quad \dots (14)$$

und weiter:

$$\frac{U'}{U} \left\{ 2 \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{U} \right) \left[ 1 - \left( \frac{u}{U} \right) \right] dy + \int_0^{\delta} \left[ 1 - \left( \frac{u}{U} \right) \right] dy \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{U} \right) \left[ 1 - \left( \frac{u}{U} \right) \right] dy \right\} = + \frac{\tau_w}{\rho U^2} \quad \dots (15)$$

Wir definieren nun

$$A = \int_0^{\delta} \left( \frac{u}{U} \right) \left[ 1 - \left( \frac{u}{U} \right) \right] dy \quad \dots (16)$$

$$d = \int_0^{\delta} \left[ 1 - \left( \frac{u}{U} \right) \right] dy \quad \dots (17)$$

womit sich Gleichung 15 auch

$$\frac{U'}{U} A \left( 2 + \frac{d}{A} \right) + A' = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \quad \dots (18)$$

schreiben lässt. Dies Resultat enthält nur die Voraussetzungen der Grenzschichttheorie, ist also allgemein für beliebige Parameterfunktionen und Wandreibungsgesetze bei laminarer oder turbulenter Strömung verwendbar. Zunächst stellen wir fest, dass die soeben definierten Größen  $A$  und  $d$  die Dimension einer Länge haben und von der oberen Grenze  $\delta$  des Integrals unabhängig sind, indem sich für das Integral kein Zuwachs mehr ergibt, wenn wir das Integral über die Störungsbreite  $\delta$  hinaus in die ungestörte Strömung hinein erstrecken. Da die

Geschwindigkeit in der Grenzschicht tangential oder asymptotisch in die ungestörte Strömung übergeht, ist die Bestimmung von  $\delta$  noch mit Willkür behaftet, während  $\Delta$  und  $d$  mathematisch eindeutig definiert sind. Eine anschauliche Deutung dieser Grössen erhalten wir, wenn wir beachten, dass

$$\rho U^2 \Delta = \int_0^{\delta} \rho u (U - u) dy$$

den gegenüber der ungestörten Strömung von derselben Flüssigkeitsmenge durch einen Querschnitt senkrecht  $x$  weniger durchtransportierten Impuls und

$$\rho U d = \int_0^{\delta} \rho (U - u) dy$$

die weniger durchtransportierte Flüssigkeitsmasse bedeutet. Dementsprechend wollen wir  $\Delta$  als Impulsdicke und  $d$  übereinstimmend mit Dr. Nikuradse (10) als Verdrängungsdicke bezeichnen. Bei Betrachtung der Gleichung 18 drängt sich uns nun  $\Delta$  als Variable geradezu auf, indem der Quotient  $d/\Delta$  als Verhältnis von zwei für die Grenzschicht charakteristische Längen nur von der Profilform, also von unserem Parameter  $I_a$  abhängt. Dies bedeutet, dass wir mit Vorteil an Stelle der noch nicht definierten, für die Grenzschicht charakteristischen Länge  $l$ , die Grösse  $\Delta$  substituieren.

Für  $U' = 0$ , also für die gleichförmige Strömung einer Platte entlang, nimmt Gleichung 18 die einfache Form

$$\Delta' = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \dots \dots \dots (19)$$

an.

Für die Auswertung der Versuche an beschleunigten und verzögerten Strömungen wird ebenfalls mit Vorteil die in Gleichung 18 gegebene Form der Impulsgleichung herangezogen.

### 7. Einführung des speziellen für glatte Oberflächen gültigen Widerstandsgesetzes in die Impulsgleichung.

Unser Problem lässt sich mit Hilfe von Gleichung 18 für jedes Widerstandsgesetz durchführen. Jedoch liegen gegenwärtig nur für glatte Oberflächen genügend Versuchswerte vor. Diese werden, wie schon früher angedeutet, durch das einfache Gesetz Gleichung 11

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \zeta (I_a') \frac{1}{\left(\frac{U \Delta}{\nu}\right)^{1/4}}$$

gut wiedergegeben, so dass wir uns für die weitere Behandlung auf dieses Gesetz beschränken.

In Gleichung 18 findet sich ausser dem nur vom Parameter  $I_a'$  abhängigen Koeffizienten  $d/\Delta$ , neben den Zustandsgrössen und neben der Variablen  $\Delta$ , als einzige Unbekannte nur noch  $\tau_w$ , die nach der obigen Gleichung ebenfalls durch die Variable  $\Delta$ , die Zustandsgrössen und durch einen durch den Parameter festgelegten Koeffizienten  $\zeta$  ausgedrückt wird. Durch Eliminieren des Wertes  $\tau_w$  in Gleichung 18 und geeignete Zusammenfassung kommen wir auf die nur für unser spezielles Widerstandsgesetz gültige Form der Impulsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \Delta \left( \frac{U \Delta}{\nu} \right)^{1/4} \right] = \frac{5}{4} \left[ \zeta - \frac{U'}{U} \Delta \left( \frac{U \Delta}{\nu} \right)^{1/4} \left( \frac{9}{5} + \frac{d}{\Delta} \right) \right] \quad (20)$$

wie sich durch Ausführen der Differentiation auf der linken Seite der Gleichung leicht nachrechnen lässt. Es wird nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \Delta \left( \frac{U \Delta}{\nu} \right)^{1/4} \right] = \frac{5}{4} \Delta' \left( \frac{U \Delta}{\nu} \right)^{1/4} + \frac{1}{4} \frac{U'}{U} \Delta \left( \frac{U \Delta}{\nu} \right)^{1/4}$$

welcher Ausdruck mit der rechten Seite zusammengefasst und mit  $5/4 \left( \frac{U \Delta}{\nu} \right)^{1/4}$  gekürzt wieder Gleichung 18 vorstellt, in welcher  $\tau_w/\rho U^2$  durch  $\zeta / \left( \frac{U \Delta}{\nu} \right)^{1/4}$  ersetzt ist.

Das allgemeinere Gesetz

$$\frac{\tau_w}{\rho U^2} = \zeta \frac{1}{\left(\frac{U \Delta}{\nu}\right)^m} \dots \dots \dots (21)$$

würde ganz entsprechend auf die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \Delta \left( \frac{U \Delta}{\nu} \right)^m \right] = (1+m) \left[ \zeta - \frac{U'}{U} \Delta \left( \frac{U \Delta}{\nu} \right)^m \left( \frac{2+m}{1+m} + \frac{d}{\Delta} \right) \right] \quad (21a)$$

führen, die mit  $m = \frac{1}{2}$  den Verhältnissen bei laminarer Strömung entsprechen würde.

### 8. Heranziehen der Voraussetzung der Einparametrigkeit zur Vereinfachung der Impulsgleichung.

Bis jetzt ist unsere Impulsgleichung noch in keiner Weise belastet durch die Voraussetzung der Einparametrigkeit. Jetzt ist aber der Moment gekommen, die damit mögliche mathematische Vereinfachung durchzuführen in Verbindung mit der

Abschätzung der durch diese Näherungsrechnung gegebenen Fehlermöglichkeit.

Wie früher ausführlich dargelegt, kommt als Parameter die dimensionslose Tangente der Schubspannung im Wandpunkt

$$\Gamma_a = \left( \frac{d \left( \frac{\tau}{\tau_w} \right)}{d \left( \frac{y}{\Delta} \right)} \right)_{y=0} = - \frac{U U' \Delta \varrho}{\tau_w} \dots \dots (22)$$

in Frage. In dieser Form ist der Parameter noch auf kein Widerstandsgesetz spezialisiert. Wenn wir  $\tau_w$  durch Gleichung 10 ausdrücken und beachten, dass nicht nur  $\Gamma_a$  selbst, sondern jede reine Funktion von  $\Gamma_a$  Parametereigenschaft hat, so wählen wir bei unserem Widerstandsgesetz mit Vorteil

$$\Gamma = (-1) \Gamma_a \zeta (\Gamma_a) = \frac{U' \Delta}{U} \left( \frac{U \Delta}{\nu} \right)^{1/4} \dots \dots (23)$$

Dieser Parameter  $\Gamma$  deckt sich mit der von Dr. Nikuradse (10) im selben Sinne verwendeten Funktion  $\Gamma_1$ , mit dem Unterschied, dass an jener Stelle als charakteristische Länge  $l$  der Wert  $d$  gesetzt wird. Die Parametereigenschaften von  $\Gamma_1$  wurden von Nikuradse durch Vergleich der eigenen Messungen mit den Ergebnissen von Dönch nachgewiesen.

Nach Voraussetzung der Einparametrigkeit stellen wir nun fest, dass auf der rechten Seite der Gleichung 20 eine reine Funktion unseres Parameters  $\Gamma$  steht.  $\zeta$  ist nämlich einzig und allein von der Profilform, also von  $\Gamma$  abhängig, ebenso  $d/\Delta$  als Verhältnis zweier für die Grenzschicht charakteristischer Längen, während die Funktion  $\frac{U' \Delta}{U} \left( \frac{U \Delta}{\nu} \right)^{1/4}$  mit unserem Parameter  $\Gamma$  identisch ist. Zunächst hat dieses Resultat eine wertvolle Konsequenz für die Auswertung der Versuche. Wenn die Bedingung der Einparametrigkeit erfüllt ist, werden die nach Massgabe der linken Seite der Gleichung 20 ausgewerteten Versuchswerte eine universelle Funktion von  $\Gamma$  ergeben.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \Delta \left( \frac{U \Delta}{\nu} \right)^{1/4} \right] = \Psi(\Gamma) \dots \dots (24)$$

was sich leicht nachkontrollieren lässt. Wertvoll ist ferner, dass der einfache Aufbau der Funktion  $\Psi(\Gamma)$

$$\Psi(\Gamma) = \frac{5}{4} \left[ \zeta - \frac{U' \Delta}{U} \left( \frac{U \Delta}{\nu} \right)^{1/4} \left( \frac{9}{5} + \frac{d}{\Delta} \right) \right] \dots (25)$$

uns zu diskutieren erlaubt, welche Konsequenzen bestimmte Abweichungen von der Voraussetzung der Einparametrigkeit für die Rechnung zeitigen. Für die Rechnung darf die Einparametrigkeit als erfüllt gelten, wenn wirklich  $\zeta$  und  $d/\Delta$  reine Funktionen des Parameters  $\Gamma$  sind. Dies sind im

Vergleich zur ursprünglich geforderten geometrischen Aehnlichkeit der Profilformen viel bescheidenere Ansprüche. Im nächsten Teil werden wir an Hand der Versuche feststellen, dass  $\zeta$  und  $d/\Delta$  beinahe Konstantwerte sind und deshalb die von der Rechnung an die Einparametrigkeit gestellten Ansprüche auch dann noch erfüllt sind, wenn die für verschiedene Versuchsreihen bei gleichem Wert des Parameters geforderte geometrische Aehnlichkeit der Profile nicht genau übereinstimmen sollte.

Die Versuche zeigen auch, dass die experimentell bestimmten Werte der Funktion  $\Psi(I)$  für die beschleunigte und für die verzögerte Grundströmung, also für positives und negatives  $I$  je durch eine Gerade sehr gut angenähert werden können. Dies ermöglicht die im nächsten Kapitel ausgeführte einfache Lösung der Differentialgleichung 20.

### 9. Lösung der Differentialgleichung der Grenzschicht.

Wir denken uns die experimentell bestimmten Werte von  $\Psi(I)$  durch einen Polygonzug aus einzelnen Geradenstücken näherungsweise wiedergegeben. Dann gilt für jedes Teilstück

$$\Psi(I) = a - b I \dots \dots \dots (26)$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \Delta \left( \frac{U \Delta}{\nu} \right)^{1/4} \right] = a - b \frac{U'}{\nu} \left( \frac{U \Delta}{\nu} \right)^{1/4} \dots \dots (27)$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung ersten Grades für die Funktion  $\Delta \left( \frac{U \Delta}{\nu} \right)^{1/4}$ , deren Lösung

$$\Delta \left( \frac{U \Delta}{\nu} \right)^{1/4} = e^{\int_b \frac{U'}{U} dx} \left( \int_{x_0}^x a e^{\int_b \frac{U'}{U} dx} + c \right) \text{ oder}$$

$$\Delta \left( \frac{U \Delta}{\nu} \right)^{1/4} = \frac{1}{U^b} \left( a \int_{x_0}^x U^b dx + c \right) \dots \dots \dots (28)$$

lautet. Bei bekannter Grundströmung  $U$  ist damit unser Parameter  $I$  und die Variable  $\Delta$  sehr einfach nach folgenden Formeln berechenbar:

$$I = \frac{U'}{U} \left[ \frac{1}{U^b} \left( a \int_{x_0}^x U^b dx + \frac{U_0}{U_0'} U_0^b I_0 \right) \right] \dots \dots (29)$$

$$\Delta = \left( \frac{\nu}{U} \right)^{1/5} \left[ \frac{1}{U^b} \left( a \int_{x_0}^x U^b dx + \frac{U_0}{U_0'} U_0^b I_0 \right) \right]^{4/5} \dots \dots (30)$$

wobei für die untere Grenze des Integrals  $x_0$   $\Gamma = \Gamma_0$ ;  $U' = U_0'$  und  $U = U_0$  sein soll. Es sei gleich anschliessend bemerkt, dass man leicht zu einer impliziten Lösung der Differentialgleichung für jede beliebige Funktion  $\Psi(\Gamma)$  vordringen kann, indem man die Polygonseiten bis zum Grenzübergang kleiner und kleiner werden lässt, doch bietet diese implizite Lösung keinerlei Vorteile.

Wie schon früher bemerkt, lässt sich die  $\Psi(\Gamma)$  Funktion sowohl für das Gebiet der beschleunigten als auch für das Gebiet der verzögerten Grundströmung durch je eine Gerade, die sich im Punkte  $\Gamma = 0$  treffen, annähern, so dass unser Polygonzug zur Wiedergabe von  $\Psi(\Gamma)$  nur zwei Seiten und eine Ecke aufweist.

Wenn die Geschwindigkeit der Potentialströmung durch ein Potenzgesetz

$$U = (\mp 1)^n A (\pm x)^n \quad (31)$$

angenähert werden kann, wobei für  $x$  und  $n$  alle Werte zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$  zuzulassen sind, so erhalten wir mit

$$\frac{U'}{U} = \frac{n}{x}$$

aus den Gleichungen 29 und 30

$$\Gamma = \frac{n a}{n b + 1} - \left( \frac{n a}{n b + 1} - \Gamma_0 \right) \left( \frac{x_0}{x} \right)^{n b + 1} \quad (32)$$

$$\frac{\Delta}{x_0} = \left( \frac{\nu}{x_0 U_0} \right)^{1/5} \left( \frac{x}{x_0} \right)^{\frac{4-n}{5}} \left( \frac{\Gamma}{n} \right)^{4/5} \quad (33)$$

Für  $n = -\frac{1}{b}$  ergibt sich aus Gleichung 32 ein unbestimmter Wert für  $\Gamma$ , für welchen

$$\Gamma = \frac{a}{b} \ln \left( \frac{x_0}{x} \right) + \Gamma_0$$

zu setzen ist.  $\Gamma_0$  und  $U_0$  sind die Werte für  $\Gamma$  und  $U$  an der Stelle  $x = x_0$ . Der bei den Faktoren  $x$ ;  $x_0$ ;  $\Gamma$  und  $n$  unter Umständen auftretende Faktor  $(-1)$  kann in der Gleichung 33 auf die verschiedenen Klammern mit gebrochenen Exponenten so verteilt werden, dass sich für  $\Delta$  eine positive reelle Grösse ergibt. Bei der Gleichung 33 zeigt sich besonders deutlich, dass die Reynold'sche Aehnlichkeitstheorie in unserer Rechnung respektiert ist.

#### 10. Berechnung der Grenzschicht für rotationssymmetrische Düsen oder Körper bei glatten Oberflächen und kompressibler Flüssigkeit.

Nachdem wir nun die Rechnung für ein übersichtliches Problem ganz durchgeführt haben, wollen wir die mathematisch ebenso einfache, aber formelmässig kompliziertere

Rechnung für die rotationssymmetrische Grenzschicht bei veränderlicher Temperatur, Dichte und kinematischer Zähigkeit behandeln.

Dabei ist zu sagen, dass die Veränderlichkeit der physikalischen Zustandsgrößen nur eine Rolle spielt beispielsweise bei äusserer Wärmezufuhr in die strömende Flüssigkeit oder bei kompressiblen Medien bei sehr grossem Expansionsverhältnis. Hingegen tritt bei der Grenzschicht an rotationssymmetrischen Körpern gegenüber der ebenen Grenzschicht eine neue Erscheinung auf, indem der Umfang des Körpers, also auch die Breitenausdehnung der Grenzschicht, veränderlich sein wird. Dies hat zur Folge, dass zunächst die Reibungsfläche nicht nur von der Körperausdehnung in Strömungsrichtung, sondern auch vom Meridianradius abhängt. Ferner wird beispielsweise bei in Strömungsrichtung abnehmendem Meridianradius die Flüssigkeitsmasse der Grenzschicht seitlich zusammengedrängt, so dass sich aus diesem Effekt ein zusätzliches Anwachsen der Störungsbreite ergibt.

Unsere  $x$  Achse soll zusammenfallen mit der Rotationsachse, und im Gegensatz zu früher sollen  $u$  und  $U$  Komponenten der Geschwindigkeit in  $x$  Richtung vorstellen, wobei allerdings der Absolutwert der Geschwindigkeit mit dem Wert dieser Komponente beinahe übereinstimmen wird. Dann lautet bei einem düsenförmigen Körper die Impulsgleichung für eine kreisringförmige Flüssigkeitsmasse von der Dicke  $\delta$ , dem Umfang an der Wand  $r_w 2\pi$  und der Länge  $dx$

$$\frac{\partial}{\partial x} U^2 \int_{r_w - \delta}^{r_w} \rho \left( \frac{u}{U} \right)^2 2r \pi dr - U \frac{\partial}{\partial x} U \int_{r_w - \delta}^{r_w} \rho \left( \frac{u}{U} \right) 2r \pi dr = - \frac{\partial p}{\partial x} [r_w^2 - (r_w - \delta)^2] \pi - \tau_w 2r_w \pi \dots \dots (35)$$

wobei der Düsenradius  $r_w$  eine Funktion von  $x$ , und  $\rho$  eine Funktion von  $x$  und  $r$  sein wird, während nach Voraussetzung der Grenzschichttheorie  $p$  vom Radius unabhängig sein muss. Demnach werden Dichtenunterschiede über den Radius nur durch Temperaturungleichheiten hervorgerufen. Wenn wir nun zwei neue Grössen definieren

$$\varepsilon = \int_0^{r_w} \rho r \left( \frac{u}{U} \right) \left[ 1 - \left( \frac{u}{U} \right) \right] dr \dots \dots (36)$$

$$e = \int_0^{r_w} \left[ \rho_u r - \rho r \left( \frac{u}{U} \right) \right] dr \dots \dots (37)$$

wobei die angeschriebenen Grenzen für eine Düse hingegen

$r_w$  und  $r_w + \delta$  als Grenzen bei einem rotationssymmetrischen Körper zu setzen sind, so ergibt sich eine der Gleichung 18 sehr ähnliche Differentialgleichung

$$\frac{U' \varepsilon}{U} \left( 2 + \frac{e}{\varepsilon} \right) + \varepsilon' = + \frac{\tau_w r_w}{U^2} \dots \dots (38)$$

Diese Gleichung ist der Auswertung unter Zugrundelegung eines beliebigen Wandreibungsgesetzes für  $\tau_w$  zugänglich. Wir beschränken uns aber auch hier auf das spezielle Widerstandsgesetz für glatte Wände. Hier stellt wieder der Ausdruck

$$2 \pi \varepsilon U^2 = \int_0^{r_w} \rho u (U - u) 2r \pi dr$$

den gegenüber der ungestörten Strömung von derselben Flüssigkeitsmenge durch den Kreisquerschnitt an der Stelle  $x$  weniger durchtransportieren Impuls vor, während

$$2 \pi e U = \int_0^r (\rho_u U 2r \pi - \rho u 2r \pi) dr$$

die weniger durchtransportierte Flüssigkeitsmasse bedeutet. Auch hier ist  $\varepsilon$  die Variable der Rechnung, und die Wahl einer für die Grenzschicht charakteristischen Länge  $l$  wird beinahe selbstverständlich. Wenn die Störungsbreite  $\delta$  klein gegenüber dem Radius und die Dichte über den Radius konstant ist, wird der Ausdruck

$$\frac{\varepsilon}{r_w \rho_w} \dots \dots \dots (39)$$

identisch mit dem Werte  $A$ , und ebenso  $e/r_w \rho_w$  mit  $d$  ( $\rho_w$  gebührt der Vorzug gegenüber  $\rho_u$ , weil der Hauptbeitrag zu den Integralen 36 und 37 durch die wandnahen Schichten beigesteuert wird.) Wir müssen hier entsprechend der Grenzschichttheorie eine kleine Störungsbreite voraussetzen und wollen in der Hauptsache die Veränderlichkeit von  $\rho$  in Abhängigkeit von  $x$  studieren, so dass es gerechtfertigt erscheint,

$$l = \frac{\varepsilon}{r_w \rho_w}$$

zu setzen. Damit schreibt sich das Widerstandsgesetz Gleichung 11

$$\frac{\tau_w}{\rho_w U^2} = \zeta(\Gamma_a) \frac{1}{\left( \frac{U \varepsilon}{r_w \Gamma_w \rho_w} \right)^{1/4}} \dots \dots (40)$$

wobei  $\zeta$  eine reine Funktion von  $\Gamma_a$  ist und aus Versuchen bestimmt werden muss. Der spezielle Parameter wird

$$\Gamma = \frac{U'}{U} \frac{\varepsilon}{r_w \varrho_w} \frac{\varrho_u}{\varrho_w} \left( \frac{U \varepsilon}{\nu_w r_w \varrho_w} \right)^{1/4} \dots \dots \dots (41)$$

Dies ergibt mit Gleichung 38

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\hat{c}}{\hat{c}x} (\varepsilon^{5/4} U^{1/4})}{\nu_w^{1/4} \Gamma_w^{5/4} \varrho_w^{5/4}} &= \frac{5}{4} \left[ \zeta - \Gamma \frac{\varrho_w}{\varrho_u} \left( \frac{9}{5} + \frac{e}{\varepsilon} \right) \right] \\ &= \Psi \left( \Gamma; \frac{\varrho_w}{\varrho_u}; \frac{\delta}{r_w} \right) \dots \dots \dots (42) \end{aligned}$$

Wir halten auch hier an der Forderung der Einparametrigkeit fest und formulieren diese Annahme am besten dahin, dass für feste Werte des obigen Parameters  $\Gamma$ ,  $\Psi = 5/4 \left[ \zeta - \Gamma \frac{\varrho_w}{\varrho_u} \left( \frac{9}{5} + \frac{e}{\varepsilon} \right) \right]$  unabhängig vom Verhältnis  $\delta/r_w$  und von der Dichteverteilung über den Radius sein soll, und dementsprechend diese  $\Psi(\Gamma)$  Funktion mit derjenigen für die eindimensionale Grenzschrift bei inkompressibler Flüssigkeit zusammenfalle. Diese Annahme muss natürlich experimentell nachgeprüft werden.

Demnach lauten für den Fall des rotationssymmetrischen Problems bei kompressibler Flüssigkeit die aus der Voraussetzung der Einparametrigkeit zu entnehmenden Forderungen dahin, dass  $\zeta$  und  $\frac{\varrho_w}{\varrho_u} \left( \frac{9}{5} + \frac{e}{\varepsilon} \right)$  reine Funktionen des Parameters

$$\Gamma = \frac{U'}{U} \frac{\varepsilon}{r_w \varrho_w} \frac{\varrho_u}{\varrho_w} \left( \frac{U \varepsilon}{\nu_w r_w \varrho_w} \right)^{1/4}$$

seien. Diese Forderungen sind bei kleinem Verhältnis  $\delta/r_w$  und für konstante Dichte über der Störungsbreite mit den Forderungen bei der zweidimensionalen Grenzschrift und inkompressibler Flüssigkeit identisch.

An Hand der im III. Abschnitt beschriebenen Versuche darf geschlossen werden, dass diese Forderung für die beschleunigte Strömung genügend genau erfüllt sind, indem für gleiche Werte  $\Gamma$  die Funktionen  $\zeta$ ;  $e/\varepsilon$ ;  $\Psi$  für die Grenzschrift an einem kegelförmigen Kern mit den entsprechenden Werten für die Grenzschrift an der zylindrischen Aussenwand zusammenfallen.

Ganz entsprechend der Lösung von Gleichung 20 erhalten wir hier mit linearem Ansatz für  $\Psi(\Gamma)$

$$\Gamma = \frac{U'}{U} \frac{\varrho_u}{U^b \nu_w^{1/4} \Gamma_w^{5/4} \varrho_w^{9/4}} \left[ a \int_{x_0}^x \frac{U^b \nu_w^{1/4} \Gamma_w^{5/4} \varrho_w^{9/4}}{\varrho_u} dx + c \right] \dots \dots \dots (43)$$

welche Gleichung bei Konstantsetzen von  $\nu_w$ ,  $r_w$  und  $\varrho$  auch

ohne weiteres in Gleichung 29 übergeht. An Stelle von Gleichung 30 erhalten wir

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{U}\right)^{1/5} \left[ \frac{1}{U^b} \left( a \int_{x_0}^x \frac{U^b \nu_w^{1/4} \Gamma_w^{5/4} \varrho_w^{3/4}}{\varrho_u} dx + c \right) \right]^{1/5} . \quad (44)$$

Für eine Düse bei inkompressibler Flüssigkeit gilt die Kontinuitätsgleichung

$$U^2 2 r \pi = \text{konst.}$$

Für eine Grundströmung von der Form  $U = (\mp 1)^n A (\pm x)^n$  gilt damit bei Konstantsetzen der Werte  $\varrho$  und  $\nu$ .

$$\Gamma = \frac{a}{b - \frac{5}{8} + \frac{1}{n}} - \left( \frac{a}{b - \frac{5}{8} + \frac{1}{n}} - \Gamma_0 \right) \left( \frac{x_0}{x} \right)^n \left( b - \frac{5}{8} \right)^{n+1} \quad (45)$$

woraus

$$\frac{\varepsilon}{\varrho x_0^2} = \left( \frac{\nu}{U_0 x_0} \right)^{1/5} \left( \frac{x}{x_0} \right)^{\frac{3-2n}{10}} \left( \frac{\Gamma}{n} \right)^{4/5} . . . \quad (46)$$

sich ergibt. Der unbestimmte Wert von  $\Gamma$  für  $n = -\frac{1}{b - \frac{5}{8}}$  errechnet sich zu

$$\Gamma = \frac{a}{b - \frac{5}{8}} \ln \frac{x_0}{x} + \Gamma_0 . . . \quad (47)$$

Im übrigen gilt auch hier das im Anschluss an Gleichung 33 Gesagte.

In Gleichung 43 können auf einfache Weise die Vereinfachungen vorgenommen werden, die für unveränderliche Werte der einzelnen Funktionen möglich sind. Die betreffenden Grössen dürfen vor das Integralzeichen genommen werden und kürzen sich damit ohne weiteres gegen denselben Wert im Ausdruck vor der Klammer. Für eine Grenzschicht an einer Wand von veränderlicher Breite  $b$ , wie sie bei erweiterten oder verengten rechteckigen Kanälen vorkommt, ist ebenfalls Gleichung 43 gültig, wenn an Stelle von  $r$  die Variable  $b$  gesetzt wird.

An dieser Stelle soll noch kurz darauf eingegangen werden, nach welchen Gesichtspunkten nach einem Vorschlag von Prof. Stodola die Dichteverteilung über die Grenzschicht zu berechnen ist. Innerhalb der Grundströmung darf in der Düse näherungsweise rein adiabatische Expansion angenommen werden, d. h. es ist

$$A \frac{U^2}{2g} = c_p (T_0 - T_u) . . . \quad (48)$$

Wenn wir ferner den Wärmeaustausch in der Grenzschicht vernachlässigen, dürfen wir, da sich der Vorgang innerhalb

eines Querschnittes bei nahezu konstantem Druck abspielt, setzen

$$A \frac{u^2}{2g} = c_p (T_0 - T) \dots \dots \dots (49)$$

Dabei ist mit  $T_0$  die Temperatur im Gase vor Beginn der Expansion bezeichnet, die nach Gleichung 49 mit der Temperatur an der Wand bei der Geschwindigkeit  $u = 0$  zusammenfällt, während mit  $T_u$  die durch reibungslose Expansion in der Grundströmung erreichte Temperatur bezeichnet wird. Damit wird unter Heranziehung der Profillfunktion  $\left(\frac{u}{U}\right)$

$$\frac{T_w}{T} = \frac{\rho}{\rho_w} = \frac{1}{1 - \left(\frac{u}{U}\right)^2 \left(1 - \frac{T_u}{T_w}\right)} \dots \dots (50)$$

weil der Druck über die Grenzschichtdicke konstant sein soll. Dieser Wert für  $\rho/\rho_w$  kann nun in die Definitionsgleichungen 36 und 37 eingeführt werden, womit dann der Einfluss der Kompressibilität auf die Werte  $\varepsilon$  und  $\epsilon$  berücksichtigt ist.

Der eben dargelegte adiabatische Vorgang entspricht einem Grenzfall. Das andere Extrem mit der Annahme eines sehr grossen Wärmeaustausches in der Grenzschicht und vollständigen Temperatúrausgleiches ist noch leichter zu behandeln, indem die physikalischen Zustandsgrössen ausschliesslich Funktionen von  $x$  sind. Für die Integration über  $r$  entsprechend der Formel 36 und 37 darf daher  $\rho$  als konstant angenommen werden.

In der Gleichung 43 ergibt sich noch eine Vereinfachung, wenn wir beachten, dass das Produkt  $\rho_w v_w = \eta_w$  bei der konstanten Wandtemperatur von  $x$  unabhängig ist und dementsprechend vor das Integral genommen und gekürzt werden darf.

Damit sind wir am Ende der theoretischen Betrachtungen angelangt. Im nächsten Teil werden wir an Hand der vorliegenden Versuche die für unsere Grenzschichtrechnung wichtigen Koeffizienten und Funktionen bestimmen, und zwar zunächst für die beschleunigte Strömung, und nachher auch noch kurz auf die verwickeltere verzögerte Strömung eingehen.

### III. Abschnitt. Messungen.

#### 11. Beschreibung der Versuchsanordnung.

Die nach Angaben von Herrn Prof. Stodola von Gebr. Sulzer in Winterthur für das Maschinenlaboratorium der Eidgenössischen Technischen Hochschule gelieferte Messvorrichtung erlaubt durch Aendern ihrer Proportionen, die Geschwindigkeit innerhalb bestimmter Grenzen beliebig zu ändern, d. h. beliebige Beschleunigungen einzustellen.

Der in Abb. 2 und 2a wiedergegebene Aufbau der Düse

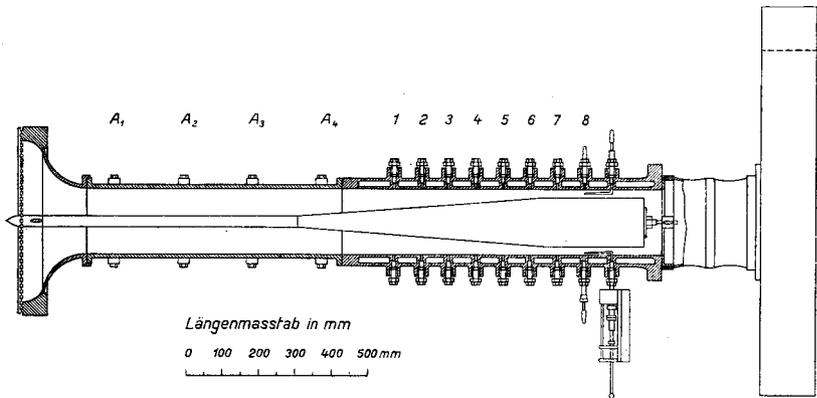


Abb. 2. Längsschnitt durch die Messdüse (Grundriss).

zeigt nach einem sanft gekrümmten Einlauftrichter ein zylindrisches Rohrstück von 181 mm Innendurchmesser und 1580 mm Länge, aus Flusseisen mit geschliffener Innenfläche. In dieses Rohr werden lackierte hölzerne Kerne mit verschiedenartigen Meridiankurven zentrisch eingelegt.

Ein Gebläse saugt Luft durch die vorgeschalteten Beruhigungssiebe und durch das Rohr und bläst frei in den Maschinensaal aus. Die im engsten Querschnitt maximal erreichbare Geschwindigkeit liegt etwas über 80 m/sec.

Auf den Einbau eines Gleichrichters vor die Düse konnte verzichtet werden, nachdem durch Messungen mit dem Pitotrohr unter verschiedenen Anstellwinkeln gegen die Anströmrichtung und in gegenüberliegenden Wandpunkten vollständige Strömungssymmetrie in Bezug auf eine Ebene durch die Achse festgestellt worden war. Dies lässt mit Sicherheit auf rein meridionale Strömung schliessen unter Abwesenheit irgend einer Rotation um die Achse. Hingegen war es notwendig, im äussern Umfange des Eintrittsquerschnittes die Siebe etwas abzudecken, um über den ganzen Radius in der

Messstrecke absolut gleiche Grundströmungsgeschwindigkeit zu erhalten. Um den Einfluss der Eintrittsstörungen übersehen zu können, waren die ersten 700 mm des zylindrischen Rohres

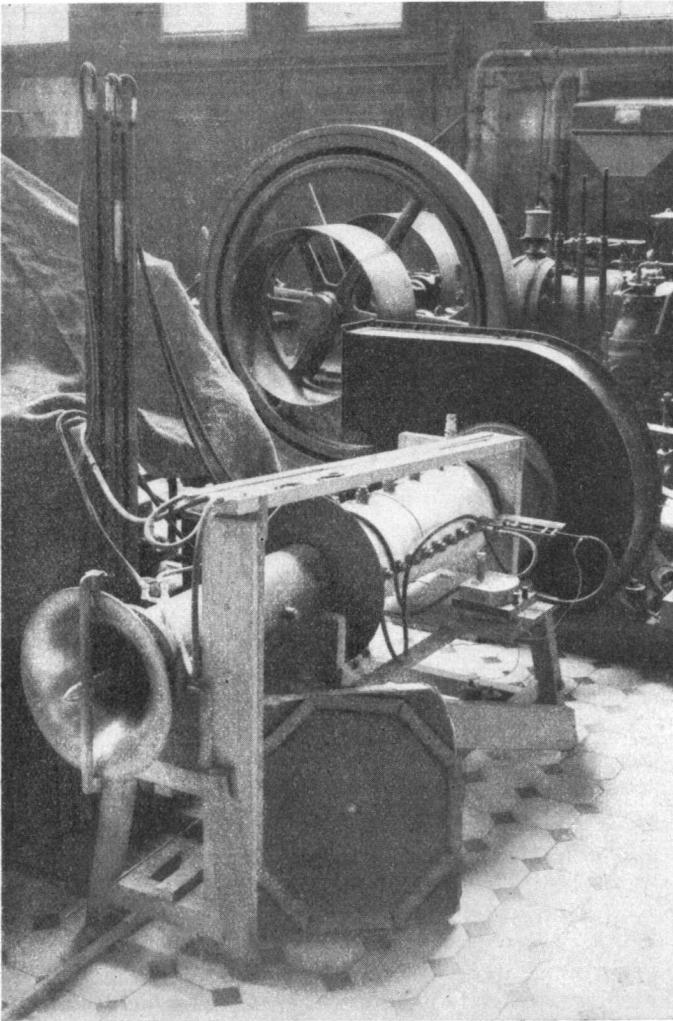


Abb. 2 a. Ansicht der Messdüse  
im Maschinenlaboratorium der Eidg. Techn. Hochschule Zürich.

als Beruhigungsstrecke gedacht, woselbst in vier Querschnitten der Geschwindigkeitsverlauf kontrolliert wurde. Als eigentliche Messstrecke für die beschleunigte Strömung diente der anschliessende hintere Teil des Rohres, mit  $2 \times 9$  in regel-

mässigen Abständen auf zwei gegenüberliegenden Mantellinien verteilten Anbohrungen von 5 mm Durchmesser. Die Pitotrohre wurden in der Länge so bemessen, dass die Mündung in die Querschnittebene des davorliegenden Loches zu liegen kam. In dies Loch war jeweils ein genau passendes Verschlussstück eingesetzt, das für die Messungen des statischen Druckes ein 2 mm Loch mit sauber abgerundeter Kante enthielt. Die für die Messung der Geschwindigkeitsprofile in der Nähe der Aussenwand und am Kern verwendeten Pitotrohre hatten rechteckige Oeffnungen von 2 auf 0,2 mm, um auch in grösserer Wandnähe messen zu können. Sie waren mittelst eines durch eine Mikrometerschraube verschiebbaren Rohres elektrisch isoliert eingeführt, so dass mit Hilfe des elektrischen Kontaktes zwischen Pitotrohr und Wand oder Anschlagsstift eine bestimmte Null-Lage fixiert werden konnte. Durch Feststellen der Pitotrohrstellung bei eben eingetretenem Stromschluss für stillstehendes und angelassenes Gebläse konnte festgestellt werden, dass auch bei den höchsten Luftgeschwindigkeiten das Pitotrohr keine Schwingungen ausführt.

Das zur Messung an der Aussenwand dienende Pitotrohr war in der Art abgebogen, dass bei richtiger Anstellung gegen den Strom die Mündung in Umfangsrichtung 20 mm neben das Loch zur Messung des statischen Druckes zu liegen kam, während die Mündung des zweiten, für die Messpunkte der Nähe des Kernes verwendeten Pitotrohres, in der Ebene der Anbohrungen lag. Als Feinmessinstrument für Drücke diente ein mit Petroleum gefülltes 1500 mm langes U-Rohr, dessen Neigung entsprechend dem gewünschten Messbereich beliebig eingestellt werden konnte. Der Meniskus dieses Manometers gleicht demjenigen in der Wasserwaage und kann sehr gut abgelesen werden. Durch auswechselbare Kapillaren wurde jeweils die Halbwertszeit für die Einstellung der Petroleumsäule auf ca. 5 sec. einreguliert.

Die von Herrn Prof. Stodola angegebene zylindrische Bauart der Düse vermeidet für die Messung an der Aussenwand in idealer Weise Störungen durch Ecken oder durch Krümmung der Wand in der Strömungsrichtung, während bei der Kleinheit der Störungsbreite der Unterschied gegenüber der ebenen Grenzschicht durch den Einfluss des Meridianradius rechnerisch erfasst werden kann auf Grund der im vorhergehenden Abschnitt angegebenen Betrachtung. Es zeigt sich, dass der Einfluss des Meridianradius bei der Grenzschicht an der zylindrischen Aussenwand vernachlässigbar ist und somit diese Grenzschicht mit einer ebenen identisch ist, was auch durch die Bezeichnung ( $\Delta$ ;  $d$ ; etc.) zum Ausdruck gebracht wird.

## 12. Vornahme der Messungen.

Ausser im eigentlichen Messquerschnitt  $m$ , waren auch noch auf der gegenüberliegenden Rohrseite im ungestörten Strom des engsten Querschnitts 8 Pitotrohr und statische Sonde eingebaut, und zwar unverändert an derselben Stelle für alle Mess-Serien. Ein Pitotrohr zeigt bekanntlich einem

Druck entsprechend  $p + \frac{\rho}{2} u^2$  an, während die statische Sonde im selben Querschnitt den Wert  $p$  anzeigt. Durch Gegen-einanderschalten der Pitotrohre im engsten Querschnitt 8 und im Messquerschnitt  $m$  auf die beiden Schenkel des Manometers wurde unmittelbar die Differenz

$p_8 + \frac{\rho}{2} U_8^2 - p_m - \frac{\rho}{2} u_m$  abgelesen, was unter Herbeiziehung des Satzes von Bernoulli identisch ist mit

$$\frac{\rho}{2} U_m^2 - \frac{\rho}{2} u_m^2$$

Wir erfassen also durch diese Messung unmittelbar den Unterschied der Reibungsströmung gegenüber der Potentialströmung. Mit Ausnahme der wandnahen Messpunkte wird der Manometerausschlag klein, konnte aber durch geeignete Schiefstellung des Manometers genau gemessen werden. Kleine Unterschiede in der Gebläsefourenzahl machen sich daher nur für diese kleine Grösse störend bemerkbar, während sie für die Berechnung des Wertes  $u_m$  fast ohne Einfluss sind. Insbesondere kann aber auch die Regelmässigkeit der Grundströmung genau kontrolliert werden, indem sich ausserhalb der Grenzschicht die Manometeranzeige Null einstellen muss. Weiter war das Pitotrohr im Querschnitt 8 auch noch in einem besondern Manometer gegen den zugehörigen statischen Druck geschaltet. Diese Manometeranzeige von der Grösse

$\frac{\rho}{2} U_8^2$  diente zur Kontrolle der Konstanz der Geschwindigkeit während einer Mess-Serie. Der Anschluss der statischen

Sonde im Querschnitt  $m$  konnte zur Bestimmung von  $\frac{\rho}{2} U_m^2$

am schiefen Manometer gegen den Druck des Pitotrohres im Querschnitt 8 geschaltet werden. Für die Berechnung von  $u$  musste an einem dritten Manometer jedoch auch noch die Differenz dieses Druckes gegenüber dem Aussendruck abgelesen werden. Für die Aufnahme eines Messpunktes wurde

zunächst das stark gedämpfte Manometer für  $\frac{\rho}{2} U_m - \frac{\rho}{2} u_m$

beobachtet, bis keine Bewegung der Petrolsäule mehr festzustellen war. Dann wurde die Anzeige des Manometers für  $\frac{\rho}{2} U_8^2$  eine halbe Minute lang beobachtet. Wenn in dieser Zeit nun keines der beiden Manometer eine Änderung des Ausschlages zeigte, wurden die beiden Werte notiert. Da während der langen Dauer der Messungen die Siebe langsam verstaubten und deshalb ihr Widerstand wuchs, mussten die einzelnen zu derselben Grundströmung gehörigen Geschwindigkeitswerte ausgeglichen werden mit Hilfe der Vergleichsgeschwindigkeit  $U_8$ , entsprechend der Gleichung

$$u_{\text{korrigiert}} = u_{\text{Messung}} \frac{U_8 \text{ Mittelwert}}{U_8 \text{ Messung}}$$

Die korrigierten  $u$ -Werte sind in der Tabelle 1 zusammengestellt. Die Dimension ist für die Geschwindigkeiten  $u$  und  $U$  m/sec. für den Radius  $r$  mm und für den statischen Druck  $p_{\text{stat}}$  ata. Die Gastemperatur für alle Mess-Serien war beinahe unverändert  $20^\circ \text{C}$ . Die Messung des statischen Druckes wurde nur zur Bestimmung der physikalischen Konstanten  $\rho$  und  $\nu$  verwendet, während die Beschleunigungsverhältnisse unmittelbar aus den Messungen von  $U$  abgeleitet werden konnten. Es wurden für den in Abb. 2 gezeichneten kegelförmigen Kern bei drei verschiedenen Gebläsetourenzahlen die Grenzschicht am Kern und an der Aussenwand in je vier Querschnitten in der Anlaufstrecke und in acht Querschnitten in der Messstrecke gemessen. In den Abbildungen 3 und 4 sind für

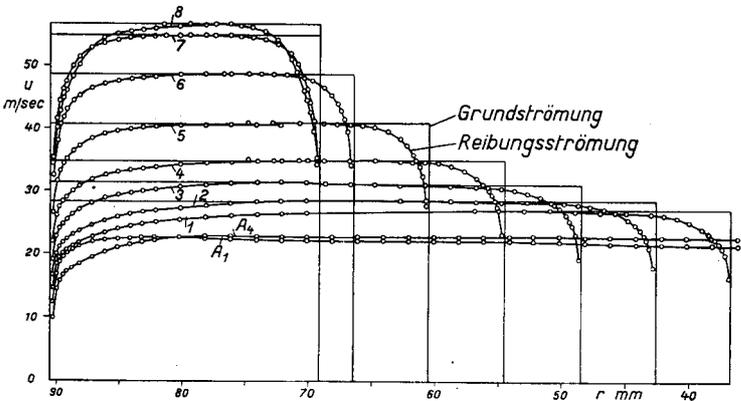


Abb. 3. Geschwindigkeitsverteilung in der Messdüse Abb. 2.

die mittlere Serie diese Werte im gewöhnlichen und logarithmischen Koordinatensystem aufgetragen. Ausserdem sind in Abb. 3 zwei in der Tabelle nicht angeführte Profile  $A_1$  und  $A_4$  der Anlaufstrecke eingetragen. Die einzelnen Messpunkte

Tabelle 1: Geschwindigkeitsverteilung in der Messdüse

Abb. 2.

**Kleine Geschwindigkeit:**

In Nähe der Aussenwand.

r	u <sub>1</sub>	u <sub>2</sub>	u <sub>3</sub>	u <sub>4</sub>	u <sub>5</sub>	u <sub>6</sub>	u <sub>7</sub>	u <sub>8</sub>
90,5	0	0	0	0	0	0	0	0
90,25	5,5	6,14	7,46	8,45	9,98	13,2	15,76	16,15
90,0	7,91	8,89	9,84	12,28	14,5	19,47	19,47	18,8
89,75	8,95	9,89	11,38	12,79	15,4	19,1	20,75	19,87
89,5	9,41	10,33	11,91	13,2	15,96	19,6	21,55	20,8
89,25	9,67	10,53	12,11	13,57	16,28	20,0	22,06	21,4
88,75	10,1	10,95	12,6	14,01	16,82	20,65	23,0	22,46
88,25	10,38	11,23	12,87	14,34	17,3	21,15	23,63	23,4
87,25	10,81	11,78	13,45	14,86	17,83	21,8	24,6	24,75
86,25	11,25	12,14	13,8	15,3	18,2	22,15	25,0	25,55
85,25	11,5	12,42	14,06	15,55	18,42	22,4	25,2	26,0
84,25	11,77	12,58	14,25	15,73	18,68	22,48	25,35	26,2
83,25	12,03	12,8	14,4	15,93	18,78	22,53	25,45	26,28
82,25	12,2	12,94	14,58	16,08	18,83	22,58	25,5	26,32
80,25	12,24	13,1	14,88	16,31	19,0	22,6	25,55	26,35
78,25	12,3	13,21	14,92	16,36	19,02	22,48	25,55	26,35
76,25	12,3	13,3	15,01	16,38	19,02	22,4	25,55	26,30
74,25	12,3	13,3	15,01	16,38	19,0			
72,25	12,3	13,3	15,01	16,38	19,0			
70,25	12,3	13,25	14,99	16,31				
U	12,43	13,30	14,90	16,32	19,04	22,75	25,55	26,42
p <sub>stat</sub>	0,9861	0,9876	0,9896	0,9914	0,9907	0,9849	0,9844	0,9772

**In Kernnähe.**

r - r <sub>w</sub>	u <sub>1</sub>	u <sub>2</sub>	u <sub>3</sub>	u <sub>4</sub>	u <sub>5</sub>	u <sub>6</sub>	u <sub>7</sub>	u <sub>8</sub>
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,25	5,8	6,97	7,56	9,16	11,3	14,74	15,75	15,27
0,5	8,23	9,44	10,2	12,13	14,73	18,52	19,42	18,5
0,75	9,23	10,26	11,3	13,18	15,8	19,5	20,84	19,85
1	9,64	10,62	11,66	13,55	16,31	20,05	21,6	20,67
1,25	9,92	10,88	12,0	13,83	16,65	20,45	22,35	21,34
1,75	10,3	11,3	12,43	14,32	17,24	21,15	23,3	22,60
-2,25	10,58	11,58	12,73	14,72	17,6	21,6	23,96	23,52
3,25	11,07	12,03	13,28	15,26	18,2	22,2	24,75	25,10
4,25	11,42	12,4	13,63	15,65	18,56	22,53	25,12	25,80
5,25	11,67	12,68	13,93	15,93	18,8	22,67	25,36	26,20
6,25	11,84	12,88	14,12	16,1	18,91	22,75	25,5	26,27
7,25	12,0	13,04	14,28	16,2	18,95	22,78	25,6	26,40
8,25	12,05	13,14	14,35	16,28	19,04	22,82	25,63	26,42
10,25	12,13	13,22	14,48	16,33	19,04	22,85	25,67	26,45
12,25	12,2	13,3	14,52	16,36	19,04		25,69	26,45
14,25	12,25	13,35	14,55	16,4	19,04			
16,25	12,25	13,32	14,55	16,4				
18,25	12,3	13,35	14,55	16,4				
20,25	12,3	13,35	14,58	16,4				
U	12,28	13,27	14,40	16,28	19,04	22,75	25,55	26,42
p <sub>stat</sub>	0,9861	0,9865	0,9876	0,9888	0,9905	0,9898	0,9841	0,9779
r <sub>w</sub>	36,8	42,6	48,5	54,6	60,7	66,6	69,2	69,2

**Mittlere Geschwindigkeit:**  
In Nähe der Aussenwand.

$r$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$	$u_8$
90,5	0	0	0	0	0	0	0	0
90,25	14,75	16,6	19,1	21,93	26,4	32,3	35,2	34,4
90,0	18,38	20,08	22,76	26,1	31,55	38,15	41,5	40,2
89,75	19,45	21,2	24,1	27,33	33,1	40,5	44,2	42,7
89,5	20,05	21,84	24,75	28,28	34,26	41,8	46,2	44,7
89,25	20,55	22,35	25,5	28,8	35,03	42,8	47,6	45,9
88,75	21,35	23,2	26,37	30,0	36,33	44,35	49,9	48,25
88,25	21,9	23,73	27,13	30,8	37,05	45,2	51,35	50,2
87,25	22,8	24,6	28,1	31,8	38,35	46,35	52,9	52,8
86,25	23,48	25,35	28,9	32,5	39,02	47,05	53,65	54,3
85,25	24,05	25,8	29,3	33,0	39,55	47,5	54,15	55,0
84,25	24,4	26,2	29,7	33,23	39,8	47,8	54,4	55,4
83,25	24,75	26,6	30,03	33,6	40,1	48,0	54,5	55,75
82,25	25,05	26,83	30,3	33,83	40,3	48,1	54,55	55,9
80,25	25,56	27,35	30,8	34,2	40,47	48,35	54,7	56,2
78,25	25,86	27,8	31,08	34,5	40,6	48,45	54,75	56,3
76,25	26,12	28,08	31,23	34,68	40,7	48,5	54,75	56,45
74,25	26,38	28,3	31,5	34,8	40,73			
72,25	26,5	28,5	31,6	34,86	40,73			
70,25	26,6	28,6	31,7	34,95				
<b>U</b>	26,4	28,15	31,29	34,70	40,73	48,40	54,80	56,10
$\rho_{stat}$	0,9690	0,9776	0,9762	0,9842	0,9773	0,9682	0,9657	0,9570

**In Kernnähe.**

$r - r_w$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$	$u_8$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,25	16,5	18,24	19,55	23,26	27,88	34,18	35,06	34,25
0,5	20,15	21,56	23,3	27,33	32,42	39,5	41,0	39,60
0,75	21,3	22,7	24,7	28,4	34,04	41,6	44,2	42,65
1	21,9	23,32	25,6	29,5	35,2	43,0	46,3	44,55
1,25	22,55	24,0	26,3	30,15	36,04	43,95	48,1	46,1
1,75	23,53	24,86	27,27	31,45	37,41	45,5	50,5	49,0
2,25	24,2	25,7	28,06	32,23	38,35	46,52	52,0	51,2
3,25	25,3	26,74	29,17	33,4	39,6	47,7	53,6	54,25
4,25	26,0	27,48	29,75	34,1	40,25	48,4	54,3	55,65
5,25	26,35	27,8	30,25	34,45	40,55	48,6	54,6	56,1
6,25	26,55	28,0	30,5	34,6	40,75	48,8	54,7	56,2
7,25	26,65	28,14	30,7	34,76	40,8	48,85	54,75	56,4
8,25	26,65	28,22	30,8	34,8	40,9	48,9	54,8	56,45
10,25	26,75	28,3	30,82	34,84	40,95	48,9	54,78	56,48
12,25	26,9	28,35	30,88	34,95	40,97		54,75	56,45
14,25	27,0	28,42	30,95	34,95	40,97			
16,25	27,13	28,5	31,0	34,95				
18,25	27,13	28,5	31,02	34,95				
20,25	27,25	28,55	31,02	35,0				
<b>U</b>	27,3	28,6	31,02	35,0	40,97	48,90	54,80	56,48
$\rho_{stat}$	0,9739	0,9736	0,9771	0,9756	0,9762	0,9728	0,9566	0,9581
$r_w$	36,8	42,6	48,5	54,6	60,7	66,6	69,2	69,2

**Grosse Geschwindigkeit:**  
In Nähe der Aussenwand.

$r$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$	$u_8$
90,5	0	0	0	0	0	0	0	0
90,25	23,25	26,4	29,4	33,05	38,8	48,15	52,4	47,7
90,0	27,9	30,93	33,9	39,0	45,9	57,4	62,1	60,5
89,75	29,75	32,45	35,5	41,2	48,5	61,4	66,4	64,0
89,5	30,55	33,7	36,7	42,6	50,3	63,5	69,1	66,8
89,25	31,28	34,6	37,5	43,75	51,6	65,1	71,5	69,2
88,75	32,45	35,92	39,0	45,5	53,3	67,5	74,7	73,1
88,25	33,35	36,92	40,1	46,7	54,6	69,1	76,9	76,0
87,25	34,65	38,45	41,55	48,4	56,3	71,0	79,1	79,8
86,25	35,6	39,55	42,5	49,4	57,0	71,9	80,4	81,55
85,25	36,4	40,3	43,2	49,9	57,95	72,4	81,0	82,6
84,25	37,0	40,75	43,8	50,55	58,5	72,6	81,3	83,1
83,25	37,45	41,25	44,3	50,9	58,8	72,9	81,5	83,5
82,25	37,9	41,6	44,6	51,1	59,1	73,0	81,6	83,7
80,25	38,55	42,0	45,25	51,5	59,6	73,1	81,7	84,1
78,25	39,1	42,2	45,6	51,6	60,0	73,1	82,0	84,2
76,25	39,4	42,3	45,9	51,9	60,2		82,0	84,2
74,25	39,7	42,4	46,2	52,0	60,3			
72,25	39,85	42,6	46,3	52,0	60,3			
70,25	40,05	42,65	46,5	52,1				
<b>U</b>	40,05	43,20	46,5	52,5	60,0	73,1	81,5	84,0
<b>p<sub>stat</sub></b>	0,9638	0,9634	0,9626	0,9634	0,9578	0,9437	0,9372	0,9280

In Kernnähe.

$r - r_w$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$	$u_7$	$u_8$
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,25	25,42	27,15	30,0	34,15	41,2	51,0	47,8	50,8
0,5	30,45	31,9	35,5	40,3	48,2	59,0	59,1	59,1
0,75	32,15	33,8	37,6	42,5	50,9	62,3	64,9	63,8
1	33,25	35,15	38,9	44,1	52,5	64,8	68,5	67,2
1,25	34,2	36,0	39,9	45,2	53,9	66,5	71,5	69,6
1,75	35,7	37,6	41,65	47,1	56,0	68,7	75,5	74,0
2,25	36,75	38,75	42,9	48,4	57,4	70,3	79,1	77,45
3,25	38,3	40,45	44,6	50,05	59,1	71,9	80,5	81,8
4,25	39,2	41,3	45,4	51,1	59,9	72,6	81,5	83,4
5,25	39,6	41,7	45,8	51,5	60,15	72,75	81,9	83,8
6,25	39,8	41,9	46,05	51,7	60,3	72,8	82,1	84,0
7,25	40,0	42,1	46,15	51,8	60,4	73,1	82,2	84,2
8,25	40,2	42,2	46,2	51,9	60,5	73,3	82,2	84,2
10,25	40,3	42,2	46,5	52,0	60,6	73,3	82,2	84,2
12,25	40,4	42,25	46,6	52,15	60,6		82,1	84,1
14,25	40,5	42,4	46,7	52,25	60,6			
16,25	40,5	42,5	46,85	52,3				
18,25	40,6	42,6	46,9	52,3				
20,25	40,6	42,65	46,9	52,2				
<b>U</b>	40,80	43,05	46,80	52,3	60,70	73,3	81,9	84,2
<b>p<sub>stat</sub></b>	0,9611	0,9629	0,9627	0,9624	0,9575	0,9443	0,9294	0,9276
<b><math>\Gamma_w</math></b>	36,8	42,6	48,5	54,6	60,7	66,6	69,2	69,2

streuen beinahe gar nicht und, was für die Auswertung noch wichtiger ist, in allen Messquerschnitten geht die Grenzschichtgeschwindigkeit  $u$  eindeutig und ohne Schwankungen in die Grundgeschwindigkeit  $U$  über.

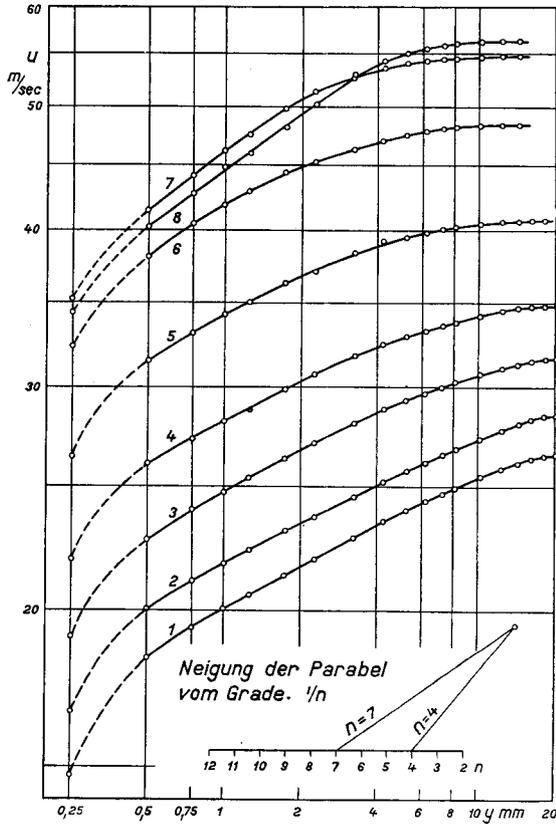


Abb. 4. Logarithmische Auftragung der Geschwindigkeitsverteilung für die Grenzschicht an der Aussenwand.

### 13. Auswertung der Messungen.

In der Abb. 4 ist unten der durch die Neigung der Tangente an die Kurven im logarithmischen Koordinatensystem festgelegte Exponent  $n$  der Gleichung

$$\left(\frac{u}{U}\right) = \left(\frac{y}{l}\right)^{1/n} ; \log u = \frac{1}{n} \log y + \text{konst.}$$

abzulesen. Abgesehen von dem mit an der Wand anliegenden Pitotrohr gemessenen ersten Punkt gilt für eine grössere Strecke in der Grenzschicht jeweils derselbe Koeffizient  $n$ , der aber bei zunehmender Beschleunigung von 7 bis 11 anwächst. Für den Verlauf der Profilkurve in Wandnähe kann



Tabelle 2. Auswertung der Messungen.

Kleine Geschwindigkeit. (Dim. cm, sec.)

In Nähe der Aussenwand.

Nr.	U	U'	$\Delta$	d	R	I	$\tau_w/\rho U^2$	$\psi$	$\zeta$
1	1243	10,5	0,0875	0,123	693	0,0038	0,00218	-0,00125	0,0112
2	1330	14,8	0,0816	0,111	691	0,00469	0,00216	-0,0045	0,0111
3	1490	20,3	0,0748	0,1013	709	0,00526	0,00226	-0,0062	0,01164
4	1632	27,2	0,0641	0,0911	667	0,00547	0,00226	-0,0078	0,01146
5	1904	39,5	0,0530	0,0768	643	0,00554	0,00215	-0,0089	0,01083
6	2275	59,3	0,0404	0,056	586	0,00519	0,00223	-0,0070	0,01095
7	2555	12	0,0397	0,0551	646	0,00116	0,00209	+0,00912	0,01100
8	2642	0	0,0546	0,0758	920	0	0,00215	+0,01475	0,0118

In Kernnähe.

Nr.	U	U'	$\epsilon/\rho$	$e/\rho$	R	I	$\tau_w/\rho U^2$	$\psi$	$\zeta$
1	1228	10,5	0,3036	0,3885	650	0,00358	0,00226	+0,00047	0,01142
2	1327	13,8	0,2995	0,405	594	0,00363	0,002345	+0,00021	0,01159
3	1440	18,3	0,295	0,412	558	0,00376	0,00241	-0,00029	0,1172
4	1628	27,2	0,284	0,400	539	0,00418	0,002147	-0,00232	0,01156
5	1904	41,0	0,253	0,376	506	0,00424	0,00232	-0,00253	0,01103
6	2275	64,0	0,215	0,312	467	0,00421	0,00251	-0,00254	0,01167
7	2555	12	0,261	0,375	614	0,00089	0,00221	+0,0102	0,0110
8	2642	0	0,354	0,500	861	0	0,002173	+0,01475	0,0118

Tabelle 2. Auswertung der Messungen.

Mittlere Geschwindigkeit. (Dim. cm, sec.)

In Nähe der Aussenwand.

Nr.	U	U'	$\lambda$	d	R	$\Gamma$	$\tau_w/\rho U^2$	$\Psi$	$\zeta$
1	2640	22	0,1034	0,137	1740	0,00557	0,00168	-0,0082	0,01084
2	2815	30	0,0938	0,1192	1680	0,00641	0,001815	-0,0101	0,01161
3	3129	42	0,0813	0,1047	1620	0,00693	0,00186	-0,0120	0,01180
4	3470	59	0,0681	0,0851	1505	0,00720	0,00184	-0,0131	0,01147
5	4073	87	0,0536	0,0722	1392	0,00698	0,001828	-0,0135	0,01115
6	4840	123	0,0378	0,0493	1185	0,00564	0,00186	-0,0084	0,01083
7	5480	26	0,0398	0,0542	1390	0,00115	0,00180	+0,00925	0,01100
8	5610	0	0,0517	0,0703	1845	0	0,001804	+0,01475	0,01180

In Kernnähe.

Nr.	U	U'	$\epsilon/\rho$	$e/\rho$	R	$\Gamma$	$\tau_w/\rho U^2$	$\Psi$	$\zeta$
1	2730	19	0,293	0,3775	1357	0,00341	0,001734	-0,00	0,01055
2	2860	25	0,288	0,373	1231	0,003495	0,001760	-0,0018	0,01045
3	3102	37	0,283	0,370	1152	0,00398	0,001998	-0,0040	0,01166
4	3500	57	0,266	0,353	1085	0,00454	0,002062	-0,0155	0,01184
5	4097	87	0,239	0,328	1027	0,00472	0,00212	-0,0228	0,01197
6	4890	122	0,2095	0,297	980	0,00438	0,002135	-0,0180	0,01194
7	5480	26	0,242	0,362	1220	0,000976	0,001995	+0,0762	0,0118
8	5648	0	0,328	0,461	1705	0	0,001835	+0,1045	0,0118

Tabelle 2. Auswertung der Messungen.

Grosse Geschwindigkeit. (Dim. cm, sec.)

In Nähe der Aussenwand.

Nr.	U	U'	$\Delta$	d	R	$\Gamma$	$\tau_w/\rho U^2$	$\Psi$	$\zeta$
1	4005	32	0,1078	0,1399	2780	0,00624	0,001548	-0,0109	0,0112
2	4320	42	0,0943	0,1200	2590	0,00652	0,001545	-0,0113	0,0110
3	4650	57	0,0846	0,1090	2510	0,00736	0,00168	-0,0134	0,0119
4	5250	83	0,0704	0,0914	2360	0,00776	0,001623	-0,0159	0,0113
5	6000	131	0,0535	0,0706	2045	0,00785	0,001637	-0,0168	0,01101
6	7310	198	0,0363	0,0535	1690	0,00631	0,001726	-0,0120	0,01105
7	8150	38	0,0383	0,0541	1986	0,00119	0,001648	+0,00901	0,0110
8	8400	0	0,0496	0,0688	2680	0	0,001641	+0,01475	0,0118

In Kernnähe.

Nr.	U	U'	$\epsilon/\rho$	$e/\rho$	R	$\Gamma$	$\tau_w/\rho U^2$	$\Psi$	$\zeta$
1	4080	28	0,288	0,3635	2050	0,00364	0,001657	-0,00	0,01115
2	4305	39	0,285	0,3660	1832	0,00394	0,001789	-0,000596	0,011695
3	4680	56	0,278	0,357	1708	0,00434	0,001838	-0,0001986	0,011818
4	5230	85	0,2595	0,3225	1405	0,00484	0,001955	-0,00346	0,01198
5	6070	129	0,231	0,3090	1472	0,00499	0,001885	-0,00496	0,01168
6	7330	189	0,196	0,2541	1375	0,00456	0,001945	-0,00322	0,01185
7	8190	38	0,231	0,294	1740	0,000998	0,001825	+0,01092	0,01180
8	8420	0	0,308	0,421	2385	0	0,001687	+0,01475	0,01180

Nebst den durch graphische Integration nach Massgabe der Definitionsgleichungen 16 und 17 resp. 36 und 37 bestimmten Werten  $\Delta$  resp.  $\frac{\varepsilon}{\varrho}$  und  $d$  resp.  $\frac{e}{\varrho}$ , und neben  $U$  und  $U'$ , sind die Resultate dieser Rechnung, die Funktionen  $\Gamma$ ,  $\Psi, \left(\frac{U1}{\nu}\right)$  und  $\tau_w/\varrho U^2$  in Tabelle 2 eingetragen und in Abb. 5 und 6 zur Darstellung gebracht. Durch die graphische Bestimmung der beiden ersten Differentialquotienten  $U'$  und  $\frac{\partial}{\partial x} \left[ \Delta \left( \frac{U \Delta}{\nu} \right)^{1/4} \right]$  nach  $x$  kommen Ungenauigkeiten in die Rechnung, die eine Streuung der Punkte verursachen. Auf die Anwendung irgendeiner Ausgleichsrechnung wurde jedoch verzichtet, um direkt im Resultat ein anschauliches Bild für die erreichte Genauigkeit zu erhalten.

#### 14. Diskussion der Ergebnisse der Auswertung.

Wie aus Abb. 5 und Tabelle 2 ersichtlich ist, wird im ganzen gemessenen Bereich und unabhängig von der Beschleunigung sowohl für die Grenzschicht am zylindrischen Rohr als auch am Kern die Wandreibung durch Gleichung 40 mit dem Mittelwert für  $\zeta (\Gamma_a) = 0,0116$

$$\frac{\tau_w}{\varrho U^2} = 0,0116 \frac{1}{\left(\frac{U1}{\nu}\right)^{1/4}}$$

ziemlich gut wiedergegeben.<sup>10)</sup> Die durch diese Gleichung gegebene Abhängigkeit von der Reynold'schen Zahl steht in Uebereinstimmung mit den Messungen von Dr. Nikuradse (10).

Auch kann es nach dem früher Gesagten nicht überraschen, dass derselbe Koeffizient für die Grenzschicht am Kern und am zylindrischen Rohr gültig bleibt, denn das Verhältnis von Strömungsbreite zu Meridianradius ist sehr klein.

Die Unabhängigkeit des Koeffizienten  $\zeta$  vom Parameter  $\Gamma$  und demnach vom Geschwindigkeitsprofil steht auch nicht im Widerspruch mit der Anschauung. Die Funktion unter dem Integralzeichen im Ausdruck Gleichung 16 für  $\Delta$  hat, wie man sich leicht überlegt, ihr Maximum beim Wert  $\frac{u}{U} = 0,5$ , also in unmittelbarer Wandnähe. Die Geschwindigkeitsverteilung in

<sup>10)</sup> Die Form der im Ansatz von Prof. Stodola (Fussnote Seite 8) enthaltene Funktion  $\Phi$  ist damit bestimmbar. Sie stellt sich dar als

$$\Phi = 85 \varrho U^2 \frac{\Gamma^{1,22}}{\left(\frac{U \Delta}{\nu}\right)^{1/4}}$$

Wandnähe hat also in erster Linie auf die Grösse  $\Delta$  bestimmenden Einfluss. Je stärker die Geschwindigkeit an der Wand ansteigt, desto kleiner wird der Wert  $\Delta$  und um so grösser ergibt sich der Wert für  $\tau_w$  nach der Widerstandsgleichung, wie es die Anschauung verlangt. In einem Reibungsgesetz, das für verschiedene Profilformen gültig ist, verdient  $\Delta$  gegenüber der Störungsbreite  $\delta$  demnach den Vorzug, weil sich mit  $\Delta$  als charakteristische Länge in der Reynold'schen Zahl der Wert  $\zeta$  als konstant ergibt.

Nach Messungen in Rohren und nach der Kármán'schen Dimensionsbetrachtung ergibt sich unser Koeffizient  $\zeta$  bei gleichförmiger Strömung aus einer einfachen Umrechnung. Für die voll ausgebildete Turbulenz in einem geraden zylindrischen Rohr und mit guter Näherung für die massgebenden wandnahen Gebiete der Grenzschicht unmittelbar vor dem Zusammenwachsen in der Mitte des Rohres wird nach Angaben von v. Kármán (5) die Geschwindigkeitsverteilung gut wiedergegeben durch den Ansatz

$$\left(\frac{u}{U}\right) = \left[1 - \left(\frac{r}{r_w}\right)^{1,25}\right]^{1/7}$$

Für diese Profilform wird  $\Delta \cong \varepsilon/\rho r_w = r_w 0,062$ , womit sich  $\zeta$  zu 0,01185 ergibt in Uebereinstimmung mit dem  $\zeta$ -Wert für gleichförmige und beschleunigte Strömung nach den neuen Versuchen.

Die zur Rechnungskontrolle sowohl nach Massgabe der linken Seite der Gleichung 42 als auch indirekt mit der auf der rechten Seite derselben Gleichung stehenden Beziehung ausgewerteten  $\Psi$  Werte ergeben entsprechend Tafel 2 und Abb. 6 für alle Mess-Serien für die Grenzschicht an der zylindrischen Aussenwand als auch am Kern eine universelle  $\Psi(\Gamma)$ -Funktion, die am besten durch eine Gerade

$$\Psi = 0,01475 - 3,945 \Gamma$$

angenähert wird.

Es zeigt sich, dass ausser  $\zeta$  auch der Koeffizient  $d/\Delta$  resp.  $e/\varepsilon$  für alle Profile bei gleichförmiger und beschleunigter Strömung sehr wenig voneinander abweichende Werte hat. Die an die Einparametrigkeit gestellten Ansprüche der Grenzschichtrechnung sind erfüllt, wenn die beiden Werte  $\zeta$  und  $d/\Delta$  eindeutige Funktionen des Parameters sind. Da sich diese beiden Koeffizienten mit grosser Näherung als Festwerte ergeben, ist der Schluss erlaubt, dass auch für andersartige, beschleunigte Grundströmungen mit der bei der Grenzschichtrechnung zu erwartenden Annäherung die Forderung der Einparametrigkeit erfüllt ist. Damit sind die in den Berech-

nungsgleichungen 29, 30, 43 und 44 auftretenden Koeffizienten  
 $a = 0,01475$ ;  $b = 3,945$

für jede gleichförmige oder beschleunigte Grundströmung bei glatten Wandungen bestimmt. Der Gültigkeitsbereich fällt mit dem des Blasius'schen Widerstandsgesetzes zusammen und liegt zwischen den Reynold'schen Zahlen  $\frac{U l}{\nu} = 200$  bis 4000, entsprechend den auf den Rohrdurchmesser  $\Phi$  beim eben erwähnten Gesetz bezogenen Zahlen

$$\frac{U \Phi}{\nu} = 5000 \text{ bis } 100\,000.$$

Um den, für die Rechnung zu gewärtigenden, maximalen Fehler abzuschätzen, wurde je durch die zwei äussersten Punkte auf beiden Seiten der Punktserie der  $\Psi(\Gamma)$ -Werte auf Abb. 6 eine Gerade gelegt. Wie eine genauere Rechnung zeigt, wird für die meisten Grundströmungen der maximale Fehler bei Annahme der oberen, resp. unteren Geraden als  $\Psi(\Gamma)$ -Funktion unter 4%, resp. 9% liegen.

### 15. Messungen von Dr. Nikuradse.

Die Messungen von Dr. Nikuradse (10) wurden vorgenommen an einem Kanal von rechteckigem Querschnitt, dessen Schmalseiten zueinander parallel und dessen Längsseiten unter dem Winkel  $\alpha$  zueinander standen, wobei das positive Vorzeichen von  $\alpha$  für verzögerte Strömung bei divergentem Kanal gesetzt ist. Nachdem durch Messungen in drei hintereinander liegenden Querschnitten die Aehnlichkeit der Geschwindigkeitsverteilung erwiesen war, wurde für jeden Öffnungswinkel  $\alpha$  ein Profil gemessen. Für den divergenten Kanal mit  $\alpha > 4^\circ$  löste sich die Grenzschicht ab, während bei  $\alpha = 4^\circ$  die Grenzschicht im Messquerschnitt gerade vor der Ablösung steht. Es haben sich allerdings bei diesen Messungen zum Teil die Störungsgebiete von den gegenüberliegenden Wänden in der Mitte getroffen, so dass kein Kern einer Potentialgeschwindigkeit übrig bleibt. Es ergibt sich für die Grenzschichtbestimmung eine Korrektur, indem wir aus dem Gesetz von Bernoulli mit den gemessenen statischen Drücken die Werte  $U$  berechnen und zwischen diesem Grenzwert und der gemessenen Kurve interpolieren. Die Auswertungsergebnisse nach Massgabe der rechten Seite der Gleichung 20 sind in Tabelle 3 zusammengestellt. Die Bestimmung von  $\tau_w$  und  $\zeta$  erfolgt allerdings unter Voraussetzung der geometrischen Aehnlichkeit der hintereinander liegenden Geschwindigkeitsprofile. Bei beschleunigter Strömung ist diese Aehnlichkeit jedoch nur bei langer Anlaufstrecke zu erwarten, während bei verzögerter Grenzschicht eine ständige Veränderung der Pro-

filiform bis zur Ablösungsstelle anzunehmen ist. Gegenüber den vorhin beschriebenen Messungen, bei welchen für jede Serie die Profilform in acht hintereinander liegenden Querschnitten gemessen wurde, und gegenüber den angeführten Messungen bei gleichförmiger Strömung ergeben sich diese  $\zeta$  Werte ungefähr 30% höher, während die Koeffizienten  $d/\Delta$  besser übereinstimmen.

Tabelle 3. Auswertung der Messungen von Dr. Nikuradse.  
(Dim. cm; sec.)

Verzögerte Grundströmung:									
$\alpha$	U	U'	$\Delta$	d	R	$\Gamma$	$\tau_w/\rho U^2$	$\Psi$	$\zeta$
4	209	2,24	0,515	0,924	9100	-0,0589	0,000688	+0,332	0,00671
3	248	3,25	0,361	0,573	7560	-0,0443	0,001132	+0,2455	0,01054
2	298	3,64	0,246	0,356	6200	-0,0267	0,001692	+0,1450	0,01500
1	424	4,06	0,1315	0,176	4715	-0,01042	0,001721	+0,0693	0,01428
Gleichförmige und beschleunigte Grundströmung:									
$\alpha$	U	U'	$\Delta$	d	R	$\Gamma$	$\tau_w/\rho U^2$	$\Psi$	$\zeta$
0	720	2,265	0,0471	0,0578	2870	0,00108	0,001871	+0,0120	0,01370
-2	405	13,50	0,0359	0,0432	1230	0,00706	0,00228	-0,0166	0,01352
-4	277	13,45	0,0269	0,0316	631	0,00655	0,00286	-0,0129	0,01438
-8	173	10,58	0,0208	0,0230	304	0,00533	0,00318	-0,0081	0,01330

Für verzögerte Grenzschichten nehmen bis zur Ablösungsstelle die Koeffizienten  $\zeta$  ständig bis auf 0 ab, während die Werte von  $d/\Delta$  auf etwa 1,8 anwachsen. Damit wird für die  $\Psi(\Gamma)$  Funktion der Einfluss der Unsicherheit des Wertes  $\zeta$  immer kleiner. Tatsächlich stimmen auch für die verzögerte Grenzschicht die  $\Psi(\Gamma)$  Werte sehr gut überein mit den Werten aus einer von Herrn Gruschwitz im Göttinger Windkanal auf der Oberseite eines Tragflügels gemessenen und mir zur Auswertung freundlichst überlassenen Profilserie.

Nach den Messungen von Dr. Nikuradse ergibt sich die  $\Psi(\Gamma)$  Funktion für verzögerte Strömungen im Gültigkeitsbereich des Blasius'schen Widerstandsgesetzes zu

$$\Psi = 0,0175 - 4,15 \Gamma \text{ mit } a = 0,0175; b = 4,15$$

wobei allerdings, wie schon erwähnt, die Konstante a zu hoch sein dürfte und mit dem Werte  $a = 0,01475$  bei beschleunigter Strömung übereinstimmen sollte.

## 16. Das Ablösungsproblem.

Bei verzögerter Grundströmung, z. B. in einem Diffusor, kann sehr leicht der Fall eintreten, dass die Flüssigkeitsteile in der Grenzschicht in der Nähe der Wand ihre Strömungsrichtung umkehren. Dann tritt die bekannte Erscheinung der Grenzschichtablösung auf. Hinter der Ablösungsstelle in der

Nähe der Wand findet sich unregelmässig strömendes Wasser, während der Hauptstrom der Wand nicht weiter zu folgen vermag und mit gleichförmiger Geschwindigkeit weiterfließt. Die Voraussetzung der Grenzschichtrechnung, dass die Grundströmung durch die Verhältnisse in der Grenzschicht nicht beeinflusst werde, ist nun nicht mehr erfüllt. Auf die für die Rechnung aus diesem Grunde auftretenden Besonderheiten soll hier kurz hingewiesen werden. Wir können uns allerdings auf Grund der Messungen von Dr. Nikuradse (10) vorläufig nur mit dem Eintreten der Ablösung befassen; während für die Strömungsvorgänge in der Gegend dieser Stelle noch zu wenig Versuchsmaterial vorliegt.

Wir denken uns zunächst wieder nach der Potentialtheorie die Grundströmung gerechnet, und zwar ohne Berücksichtigung der durch die Ablösung bewirkten Aenderungen. Dann sind wir in der Lage, nach Gleichung 29 oder 43 den Wert unseres Parameters  $\Gamma$  zu bestimmen. Bei einem bestimmten Wert von  $\Gamma = \Gamma_{abl}$ , der nach den vorhin erwähnten Versuchswerten in der Nähe von  $-0,06$  liegen muss, wird nun in Wirklichkeit die Grundströmung gegenüber dem nach der Potentialtheorie voraus bestimmten Wert weniger stark verzögert sein. Hier befindet sich die Grenzschicht unmittelbar vor der Ablösung, die mit Sicherheit eintreten wird, wenn nicht etwa aus äussern Gründen an dieser Stelle die Verzögerung auf 0 zurückgeht. Das Geschwindigkeitsprofil muss in der Nähe dieser Stelle an der Wand eine senkrechte Tangente haben, weil die Flüssigkeitsteilchen an der Wand im Begriffe sind, ihre Strömungsrichtung umzukehren, und dementsprechend geht die Schubspannung an der Wand auf den Wert  $\zeta = 0$  zurück. Hinter dem Ablösungspunkt wird die Grundströmungsgeschwindigkeit konstant, und man überlegt sich leicht, dass hier  $\psi$  und  $\Gamma$  zu Null werden.

Wir besitzen also für das Eintreten der Ablösung ein Kriterium in dem Wert  $\Gamma_{abl} = -0,06$ . Abweichungen von diesem Zahlenwert sind für die Feststellung der Ablösungsstelle nicht von starkem Belang, weil  $\Delta$  und damit auch  $\Gamma$  vor der Ablösung sehr rasch wächst. Unsere ursprüngliche Rechnung unter Zugrundelegung der Potentialströmung ist hinter dem Punkt  $\Gamma = \Gamma_{abl}$  nicht mehr gültig, und es muss an Hand von weiteren Versuchen festgestellt werden, wie der Uebergang von der Potentialströmung in die gleichförmige Strömung nach der Ablösungsstelle erfolgt. Im Göttinger Windkanal wurden dahin zielende Messungen von Herrn Gruschwitz durchgeführt. Wie eine Stichprobe zeigte, hat eine Auswertung dieser Messungen auf Grund vorliegender Arbeit praktischen Wert, es soll aber einer Veröffentlichung dieser Messungen hier nicht vorgegriffen werden.

## IV. Abschnitt. Zusammenfassung.

### 17. Gedankengang der Methode und Rechnungsdurchführung.

In dieser Abhandlung ist versucht, eine Berechnungsmöglichkeit für den Reibungseinfluss in der turbulenten Strömung um beliebige Körper oder in Düsen abzuleiten aus Messungsergebnissen über den Strömungsverlauf einer speziellen Versuchsdüse.

Zunächst werden die Annahmen und Ergebnisse der allgemeinen Grenzschichttheorie übernommen. Unter Voraussetzung einer technischen Flüssigkeit mit kleiner Zähigkeit (Wasser, Luft etc.) und einer gegenüber dem Wandkrümmungsradius und der Kanalbreite kleinen Grenzschichtdicke liefert dieselbe das wichtige Ergebnis, dass, abgesehen von der sogenannten Grenzschicht in unmittelbarer Wandnähe, der Strömungsvorgang den Gesetzen der reibungslosen idealen Flüssigkeit sehr gut gehorcht und dass ferner der Druck über die Grenzschichtbreite konstant und gleich demjenigen in der angrenzenden ungestörten Strömung ist.

Daher lassen sich dieser Druck und die Grundströmungsgeschwindigkeit nach den Regeln der Potentialtheorie (in einfachen Fällen nach dem Satz von Bernoulli und der Kontinuitätsgleichung) berechnen und ist damit gewissermassen als Zustandsgrösse der Grundströmung gleich wie irgend eine physikalische Zustandsgrösse der Flüssigkeit für die Berechnung des Reibungseinflusses vorgegeben.

Die Aufgabe besteht nun darin, mit Hilfe des Impulssatzes den Impulsverlust gegenüber der ungestörten Strömung infolge des Reibungseinflusses zu bestimmen. Vorerst muss als Funktion dieses Impulsverlustes und als Funktion der Rechnungsgrössen die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht und die Grösse der Wandreibung ermittelt werden. Das Wesentliche der vorliegenden Methode besteht nun darin, dass nicht etwa irgend eine analytische Profilkurve für diese Geschwindigkeitsverteilung vorausgesetzt werden soll, sondern es sollen die in der Versuchsdüse gemessenen und graphisch vorliegenden Profile verwendet und dem zu berechnenden Grenzschichtverlauf richtig zugeordnet werden. Als Parameter für die Profilerie, also als Kriterium für das Auftreten eines gemessenen Profils in der zu berechnenden Grenzschicht dient eine gewisse Funktion der Zustandsgrössen und des Impulsverlustes, nämlich die dimensionslos gemachte Schubspannungstangente im Wandpunkt. Es bleibt noch die Grösse der Wandreibung zu bestimmen, und zwar für beschleunigte und verzögerte Strömungen, also veränderliche Profilformen. In Anlehnung an das Blasius'sche Gesetz wird

zunächst für glatte Oberflächen die Abhängigkeit von der Reynold'schen Kennzahl zu  $1/R^{1/4}$  angesetzt und später auch experimentell bestätigt, während die Abhängigkeit von der veränderlichen Profilform durch einen variablen Faktor  $\zeta$  berücksichtigt wird, der als Funktion des Profilparameters durch Messungen zu bestimmen ist.

Die Einführung dieser Abhängigkeiten in die Impuls-gleichung liefert eine Differentialgleichung für den Impuls-verlust in Abhängigkeit von den Zustandsgrössen. Nachdem noch durch Auswertung der Messergebnisse in der Versuchs-diüse die in dieser Differentialgleichung auftretenden Koeffi-zienten als Funktionen des Profilparameters ermittelt sind, lässt sich diese Differentialgleichung in allgemeiner Form in-tegrieren und somit der Impulsverlust explizite aus den Zu-standsgrössen berechnen. Da damit auch der Wert des Para-meters ermittelt ist, ist nun auch die Geschwindigkeitsver-teilung in der Grenzschicht bekannt und somit die Aufgabe gelöst.

Für die Anwendung dieser Methode zur Berechnung der turbulenten Strömungsvorgänge sind im nächsten Abschnitt noch kurz die notwendigen Formeln, Voraussetzungen und Einschränkungen für die Benützung zusammengestellt.

Im weitem wird gezeigt, dass auch für rotationssymmetri-sche Körper oder Düsen dieselbe Rechnungsweise zum Ziele führt, obwohl hierbei als neuer Effekt eine seitliche Aus-weitung, resp. Zusammendrückung der Grenzschichtflüssigkeit bei Zu-, resp. Abnahme des Meridianradius des Körpers hin-zukommt. Ferner gestattet diese Rechnungsweise, den Ein-fluss der Veränderlichkeit von Dichte und Zähigkeit, insbeson-dere bei kompressiblen Flüssigkeiten zu berücksichtigen.

In Bezug auf die Rechnungsdurchführung muss auf die Zweckmässigkeit der Verwendung von  $\Delta$  und  $d$  als Rechnungsgrössen hingewiesen werden, da die-selbe ganz allgemein bei irgendwelchen Grenzschichtrech-nungen in Erscheinung treten wird. Diese beiden Grössen sind mathematisch eindeutig und physikalisch anschaulich definiert und lassen sich aus einer Integration für eine vor-liegende Profilform leicht bestimmen. In ihnen ist die für den Impulssatz wesentliche Aussage über die Geschwindigkeits-verteilung in der Grenzschicht restlos enthalten. Dies zeigt sich darin, dass die allgemeine Impulsgleichung in eine Form gebracht werden kann, bei der die variable Grenzschicht-geschwindigkeit ausschliesslich in den beiden Funktionen  $d$  und  $\Delta$  enthalten ist. In dieser neuen Form der Impulsgleichung treten also, abgesehen von den Zustandsgrössen und der Wandreibung, nur noch diese beiden Grössen auf, und zwar  $d$  nur im Koeffizienten  $d/\Delta$ . Es erscheint demnach  $\Delta$  als

Variable und muss deshalb als zweckmässiges Mass für den Impulsverlust infolge des Reibungseinflusses angesehen werden, während die ganze grosse Variationsmöglichkeit der Profilformen durch einen einzigen Koeffizienten  $d/\Delta$  für die Impulsbetrachtung erschöpfend erfasst wird.

### 18. Zusammenfassung der Resultate für die Berechnung der turbulenten Grenzschicht.

Es seien hier nochmals kurz die Voraussetzungen und Formeln für die Grenzschichtrechnung zusammengestellt.

Die Rechnungsgrundlage gilt für «glatte Oberflächen», welche Bedingung durch die gebräuchlichen technischen Oberflächen weitgehend erfüllt wird. In Bezug auf die Reynold'sche Zahl fällt der Gültigkeitsbereich mit dem technisch wichtigen Gebiet zwischen  $\frac{U l}{\nu} = 200$  bis 4000 zusammen.

Die Rechnungsgrundlage ist mit den für die Grenzschichttheorie erforderlichen Einschränkungen behaftet. So muss die Wandkrümmung in der Strömungsrichtung vernachlässigbar sein. Weiter darf die Grenzschichtausbildung auf die Grundströmung keinen Einfluss haben. Es dürfen sich z. B. die Störungsgebiete von zwei gegenüberliegenden Wandflächen nicht überdecken. Auch das Gebiet nach einer Grenzschichtablösung ist aus diesem Grunde von der rechnerischen Behandlung ausgeschlossen.

Für ein vorliegendes Problem muss zunächst nach den Regeln und Methoden der Potentialtheorie (in einfachen Fällen mit der Kontinuitätsgleichung und dem Satz von Bernoulli) die Grundströmung in Funktion von  $x$  ermittelt werden. Damit ist für die eigentliche Grenzschichtrechnung  $U$  und  $U'$  bekannt. Weiter ist  $r_w$  aus den Körperabmessungen zu entnehmen und die Werte der Konstanten  $\nu_w$ ;  $\varrho_w$ ;  $\varrho_u$  für die betreffende Flüssigkeit zu bestimmen. Dann lässt sich mit einer einfachen Integration die Grenzschicht berechnen, womit auch der Strömungsverlauf der technischen reibungsbehafteten Flüssigkeit ermittelt ist.

Bei vorliegenden Zustandsgrössen lassen sich im allgemeinen Fall einer rotationssymmetrischen Grenzschicht bei kompressibler Flüssigkeit nach den Gleichungen

$$\Gamma = \frac{U'}{U} \left[ \frac{\varrho_u}{U^b \nu_w^{1/4} r_w^{5/4} \varrho_w^{9/4}} \left( a \int_{x_0}^x \frac{U^b \nu_w^{1/4} r_w^{5/4} \varrho_w^{9/4}}{\varrho_u} dx + c \right) \right]$$

$$l = \frac{\varepsilon}{r_w \varrho_w} = \frac{1}{r_w \varrho_w} \frac{1}{U^{1/5}} \left[ \frac{1}{U^b} \left( a \int_{x_0}^x \frac{U^b \nu_w^{1/4} r_w^{5/4} \varrho_w^{9/4}}{\varrho_u} dx + c \right) \right]^{4/5}$$

durch graphische Auswertung des bestimmten Integrals über  $x$  die beiden massgebenden Werte  $\Gamma$  und  $\frac{\varepsilon}{r_w \varrho_w}$  berechnen.

Für beschleunigte Grundströmung gelten dabei die Werte

$$a = 0,01475 \qquad b = 3,945$$

für verzögerte annähernd

$$a = 0,0175 \qquad b = 4,15$$

Spezialisierung auf einfachere Fälle ist leicht möglich durch Herausnehmen der nunmehr konstanten Grössen aus dem Integral und Wegkürzen gegen die entsprechenden, vor dem Integral stehenden Werte. Dies ergibt beispielsweise für die ebene Grenzschicht bei inkompressibler Flüssigkeit

$$\Gamma = \frac{U'}{U} \left[ \frac{1}{U^b} \left( a \int_{x_0}^x U^b dx + c \right) \right]$$

$$l = \Delta = \left( \frac{\nu}{U} \right)^{1/5} \left[ \frac{1}{U_b} \left( a \int_{x_0}^x U_b dx + c \right) \right]^{1/5}$$

Weiter können leicht aus Abb. 7 bei bekanntem  $\Gamma$  die zugehörigen Profilformen und Koeffizienten  $\frac{e}{\varepsilon}$  (resp.  $\frac{d}{\Delta}$ );  $\frac{E(D)}{\varepsilon(\Delta)}$ ;  $\frac{\delta}{l}$  entnommen werden, woraus sich dann alle interessierenden Werte und Geschwindigkeitsverteilungen berechnen lassen. Beispielsweise ergeben sich bei einer rotationssymmetrischen Düse und kleinem Verhältnis von Strömungsbreite zu Radius der

$$\text{Düsenkoeffizient} \quad \varrho = 1 - \frac{2}{r_w} \left( \frac{\varepsilon}{r_w \varrho_w} \right) \frac{e}{\varepsilon}$$

$$\text{Impulswirkungsgrad} \quad \eta = 1 - \frac{2}{r_w} \left( \frac{\varepsilon}{r_w \varrho_w} \right)$$

$$\text{Energiewirkungsgrad} \quad \Phi = 1 - \frac{2}{r_w} \left( \frac{\varepsilon}{r_w \varrho_w} \right) \frac{E}{\varepsilon}$$

wenn das Integral über die ganze Düsenlänge erstreckt wird.

Die  $x$ -Komponente der Wandreibung für einen Rotationskörper zwischen den Stellen  $x_0$  und  $x$  bestimmt sich aus

$$W = U^2 2 \pi \varepsilon$$

wenn bei  $x_0$  die Entwicklung der Grenzschicht beginnt und die Konstante  $C = 0$  ist.

Für die verzögerte Strömung muss beachtet werden, dass beim Wert

$$\Gamma_{abl} = -0,06$$

die Grenzschicht unmittelbar vor der Ablösung steht.

In Bezug auf die mit dieser Rechnung zu erwartende Genauigkeit des Ergebnisses sei nochmals wiederholt, dass bei Grundströmungen von ähnlichem Charakter wie in der zur Ermittlung der Koeffizienten verwendeten Versuchsdüse zuverlässige Resultate zu erwarten sind. Unter Beachtung der Anfangs dieses Abschnittes gemachten Einschränkungen muss die Rechnungsmethode für beliebige andere Grundströmungen verwendbar sein, weil die gemachten Voraussetzungen, wenigstens soweit die Ansprüche der Rechnung gehen, als erfüllt gelten dürfen. Bei Verwendung des zugehörigen Wertes der kinematischen Zähigkeit gelten die Gleichungen für jede Flüssigkeit und jedes Gas unterhalb der Schallgeschwindigkeit, da das Reynold'sche Aehnlichkeitsgesetz respektiert ist.

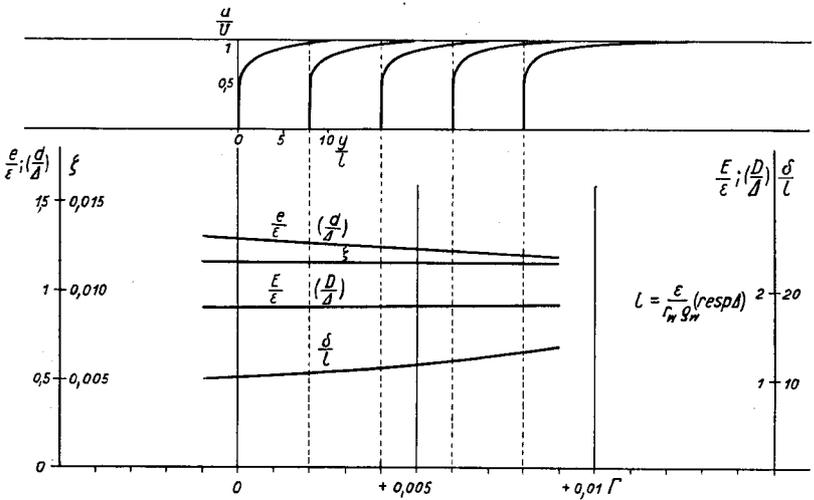


Abb. 7. Profilformen und charakteristische Koeffizienten für die beschleunigte Grenzschicht.

### 19. Behandlung komplizierterer Grenzschichtvorgänge.

Der Verfasser ist sich bewusst, dass bei der Kompliziertheit und Vielgestaltigkeit der Aufgabe diese Arbeit durch Auswertung weiterer Grenzschichtmessungen ergänzt werden muss. Um zu zeigen, wie weit die technische Hydrodynamik noch von der Lösung des Problems der Reibungsströmung entfernt ist, sei nur kurz auf folgende Punkte hingewiesen:

- a) Beeinflussung der Grundströmung in der Gegend der Ablösungsstelle.
- b) Einfluss der Wandkrümmung in Strömungsrichtung.
- c) Wandrauhigkeit.

Bei der gewählten Fassung dieser Abhandlung mit weitgehender Durchrechnung des allgemeinen Falles und erst nachträglicher Spezialisierung, ist zu hoffen, dass auch eine Anwendung auf diese Fälle praktisch durchführbar und brauchbar sein wird.

### Schlusswort.

Es bleibt mir noch die angenehme Pflicht, Herrn Professor Prandtl in Göttingen für die unmittelbare Anregung zu dieser Arbeit zu danken, während ich insbesondere als Assistent von Herrn Professor Stodola in Zürich Gelegenheit hatte, mit dem Stoff vertraut zu werden. Speziell zu Dank verpflichtet bin ich Herrn Professor Stodola für die Ueberlassung der nach seinen Angaben vorbereiteten Apparatur im Zürcher Maschinenlaboratorium und Herrn Professor Eichelberg für seine Unterstützung bei der endgültigen Textabfassung.

---

## Lebenslauf.

Mein Vater Oskar Buri stammt aus Burgdorf im Kanton Bern, wo unsere Familie heimatberechtigt ist. Meine Mutter Clara Steffan war aus Zürich gebürtig. Ich wurde am 24. Juli 1905 in Liestal geboren. Vor Beginn meiner Schulzeit nahm mein Vater Wohnsitz in Basel. Hier besuchte ich ohne Unterbrechung die Primarschule, die vier Klassen des Unteren Gymnasiums, um nach der Entscheidung über die Wahl des Berufes in die Obere Realschule einzutreten und daselbst im Herbst 1924 mit der Maturitätsprüfung abzuschliessen. Im gleichen Herbst bezog ich die Maschineningenieurabteilung der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich und diplomierte daselbst im Sommer 1928 bei Herrn Prof. Stodola. Im folgenden Jahr wurde mir der Vorzug zu teil, als Assistent von Herrn Prof. Stodola meine Ausbildung vervollständigen zu können. Anschliessend besuchte ich für ein weiteres Jahr die Universität Göttingen, um mich insbesondere bei Herrn Prof. Prandtl mit dem Studium der technischen Physik zu befassen.

---