

Festigkeitsberechnung von Ringflächenschalen



Von der
Eidgenössischen Technischen Hochschule
in Zürich

zur Erlangung der

Würde eines Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte

Promotionsarbeit

vorgelegt von

HANS WISSLER, dipl. Masch.-Ing.
aus Sumiswald (Bern)

Referent: Herr Prof. Dr. E. MEISSNER

Korreferent: Herr Prof. Dr. L. KOLLROS

167



ZÜRICH 1916

Druck: Art. Institut Orell Füssli.

Leer - Vide - Empty

Herrn

Prof. Dr. E. MEISSNER

in Dankbarkeit gewidmet.

Leer - Vide - Empty

Vorwort.

Über das Problem der Untersuchung der Festigkeitsverhältnisse an Ringflächenschalen sind bis jetzt nur wenige Angaben bekannt geworden.

Da solche Schalen aber in der Technik als Konstruktionsteile oft Verwendung finden, ist die Kenntnis ihres elastischen Verhaltens im Hinblick auf eine rationelle Konstruktion notwendig.

In Anbetracht der Wichtigkeit des Problems, und angeregt durch die von Prof. Meissner¹⁾ in der «Physikalischen Zeitschrift» veröffentlichte Arbeit über das Elastizitätsproblem dünner Schalen entschloss sich der Verfasser, diese Festigkeitsberechnung zum Gegenstand einer eingehenderen Untersuchung zu machen.

Eine Andeutung zur Lösung der Aufgabe wird von Prof. Föppl²⁾ in seinen Vorlesungen über technische Mechanik gegeben, jedoch wird dort nur die geschlossene Ringfläche unter Einfluss eines konstanten inneren Überdruckes bei Vernachlässigung aller Biegungs- und Schubspannungen behandelt. Auch in der Promotionsarbeit von Dr. Ing. G. Weihs³⁾, die in der Hauptsache die Spannungs- und Formänderungszustände in dünnwandigen Pressluftreifen untersucht, wird der Einfluss der Biegemomente nicht berücksichtigt.

Die genaue elastische Theorie dieser Schalen führt bei Voraussetzung axialsymmetrischer Belastung auf eine totale Differentialgleichung fünfter Ordnung, deren durch Reihenansätze auszuführende Integration sehr umständlich wird.

Nun hat Prof. Reissner⁴⁾ für die Kugelschale durch Einführung von Spannungs- und Deformationsgrößen an Stelle der Verschiebungen eine Symmetrie der Grundgleichungen erzielt, und Prof. Meissner⁵⁾ hat

¹⁾ E. Meissner. Das Elastizitätsproblem für dünne Schalen von Ringflächen-, Kugel- oder Kegelform. *Physikalische Zeitschrift*, 14. Jahrgang 1913. Seite 343—349.

²⁾ A. Föppl. Vorlesungen über technische Mechanik. Verlag G. B. Teubner, 4. Aufl. 1908, Band III, Seite 295—296.

³⁾ Dr. Ing. G. Weihs. Über Spannungs- und Formänderungszustände in dünnen Hohlreifen. Halle a. S. 1911.

⁴⁾ H. Reissner. Spannungen in Kugelschalen. Müller-Breslau Festschrift. Leipzig Körner 1912, Seite 192.

⁵⁾ E. Meissner a. a. O.

gezeigt, dass diese auch für den Fall der allgemeinen Rotationsfläche erreicht werden kann, und dass sie für die Ringflächen-, Kugel- und Kegelschale von grundlegender Bedeutung ist, indem sie den Zerfall einer Differentialgleichung vierter Ordnung in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung bewirkt.

Gestützt auf diese Resultate wurden die in der vorliegenden Promotionsschrift niedergelegten Untersuchungen über die Festigkeitsverhältnisse der Ringflächenschalen durchgeführt.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. E. Meissner für seine wertvollen Ratschläge, und das grosse Interesse, das er meiner Arbeit stets entgegenbrachte, meinen herzlichen Dank aussprechen. Auch Herrn Prof. Dr. L. Kollros bin ich zu grossem Dank verpflichtet.

* * *

Zur leichteren Orientierung werden nachfolgend die verwendeten Bezeichnungen angegeben. Es sei:

α der Winkel der Meridiannormalen eines Meridianpunktes $P(\alpha)$ der Schalenmittelfläche mit der Rotationsachse.

Die x -Achse des Koordinatensystems in $P(\alpha)$ wird nach der Meridiantangente [$+x$ im Sinne des wachsenden Winkels α], die y -Achse nach der Parallelkreistangente, die z -Achse nach der inneren Fächennormalen gelegt.

R_1 der Krümmungsradius des Meridians.

R_2 der zweite Hauptkrümmungsradius der Fläche in $P(\alpha)$.

$2h$ die konstante Schalendicke.

a der Abstand des Meridianszentrums von der Rotationsachse.

X, Y, Z die Komponenten der Belastung auf die Flächeneinheit der Schalenmittelfläche als Funktion von α gegeben.

σ_r, σ_t die gleichmässig verteilte Spannung in Richtung der x -Achse («radial») bzw. in Richtung der y -Achse («tangential») normal auf die zugehörigen Schnitte.

$\sigma_{ri}, \sigma_{ti}; \sigma_{ra}, \sigma_{ta}$ die gleichen Spannungen am Innen- bzw. am Aussenrand der Schale.

T_1, T_2 die Resultierende der auf einen Schnitt von der Länge 1 wirkenden Spannungen σ_r bzw. σ_t .

$T_{1i}, T_{2i}; T_{1a}, T_{2a}$ die gleichen bezogenen Kräfte am Innen- bzw. am Aussenrand.

- σ_x, σ_y die reinen Biegungsspannungen in «radialer» bzw. «tangentialer» Richtung normal auf die zugehörigen Schnitte.
- σ_{xm}, σ_{ym} die Höchstwerte dieser Spannungen in der positiven Innenfaser [$z = +h$].
- $\sigma_{xmi}, \sigma_{ymi}; \sigma_{xma}, \sigma_{yma}$ dieselben Spannungen am Innen- bzw. am Aussenrand.
- G_1, G_2 das Moment des Kräftepaars dem die auf einen Schnitt von der Länge τ wirkenden Biegungsspannungen σ_x bzw. σ_y statisch gleichwertig sind.
- $G_{1i}, G_{2i}; G_{1a}, G_{2a}$ die gleichen bezogenen Momente am Innen- bzw. am Aussenrand.
- τ, τ_i, τ_a der Mittelwert der Schubspannungen in Schnitten normal zum Meridian in Richtung der z -Achse; allgemein, am Innen- bzw. am Aussenrand.
- N, N_i, N_a die Resultierende der auf einen Schnitt von der Länge τ wirkenden Spannungen τ ; allgemein, am Innen- bzw. am Aussenrand.
- $u, v, w; u_i, v_i, w_i; u_a, v_a, w_a$ die Verschiebungen, die der Punkt $P(\alpha)$ in der x -, der y - bzw. der z -Richtung erfährt; allgemein, am Innen- bzw. am Aussenrand.
- $\epsilon_{xo}, \epsilon_{yo}, \epsilon_{zo}$ die Dehnungen in $P(\alpha)$ nach der x -, der y - bzw. der z -Richtung.
- $\epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zz}$ die Dehnungen in einem Punkte im Abstand z von der Schalenmittelfläche nach der x -, der y - bzw. der z -Richtung.
- $\vartheta, \vartheta_i, \vartheta_a$ den Verdrehungswinkel der Meridiannormalen infolge der Formänderung; allgemein, am Innen- bzw. am Aussenrand.
- $\sigma = \frac{1}{m}$ das Verhältnis der Querkontraktion zur Längendilatation.
- E der Elastizitätsmodul.
- p der gleichmässig verteilte Flüssigkeitsdruck, bezogen auf die Flächeneinheit der Schalenmittelfläche.

Leer - Vide - Empty

I. ABSCHNITT.

Mathematischer Teil.

Es soll der Spannungs- und der Deformationszustand einer dünnen, aus einem homogenen, isotropen Material bestehenden Ringflächenschale konstanter Wandstärke, unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes, ermittelt werden.

Die Schale werde durch ein Kräftesystem belastet, das zur Rotationsachse symmetrisch ist, dabei soll die Elastizitätsgrenze an keiner Stelle überschritten werden.

Für eine solche Schale kann angenommen werden, dass:

1. Der Spannungszustand derart beschaffen sei, dass Normalspannungen in Richtung der Schalenmittelfächennormalen gegenüber den übrigen Normalspannungen vernachlässigt werden können, und dass der Symmetrie aller Bedingungen wegen in Schnitten durch die Rotationsachse keine Schubspannungen auftreten.

2. Die Verschiebungen von Punkten einer Meridianebene senkrecht zu dieser Ebene null seien, und dass Punkte, die vor der Deformation auf einer Normalen zur Schalenmittelfläche lagen, nach der Deformation auf einer Normalen zur deformierten Mittelfläche liegen.

Von den Deformationen wird vorausgesetzt, dass sie klein seien gegenüber den Schalenabmessungen.

§ 1. Die Grundgleichungen der Deformationen.

Aus den obenstehenden Festsetzungen folgt, dass:

$$\varepsilon_{z0} = \varepsilon_z = 0; \nu = 0$$

und dass \mathcal{J} in der Meridianebene liegen muss.

Die Dehnung ε_{x0} in einem Punkte $P(\alpha)$ der Schalenmittelfläche in Richtung der x -Achse ist: (vergl. Abb. 1.)

$$\varepsilon_{x0} = \frac{ds' - ds}{ds};$$

nun ist:

$$ds = R_1 \cdot a \alpha,$$

$$ds'^2 = [R_1 d\alpha + (u + du) \cos d\alpha - (w + dw) \sin d\alpha - u]^2 + [(u + du) \sin d\alpha + (w + dw) \cos d\alpha - w]^2.$$

Wird $\cos d\alpha = 1$ und $\sin d\alpha = d\alpha$ gesetzt, und vernachlässigt man Größen, die von zweiter bzw. dritter bzw. vierter Ordnung klein sind gegenüber von solchen von erster bzw. zweiter bzw. dritter Ordnung, erhält man:

$$ds' = [R_1 - w] d\alpha + du;$$

durch Einsetzen der Werte für ds und ds' in die Gleichung für $\epsilon_{x\alpha}$ erhält man:

1)
$$\epsilon_{x\alpha} = \frac{1}{R_1} \left[\frac{du}{d\alpha} - w \right].$$

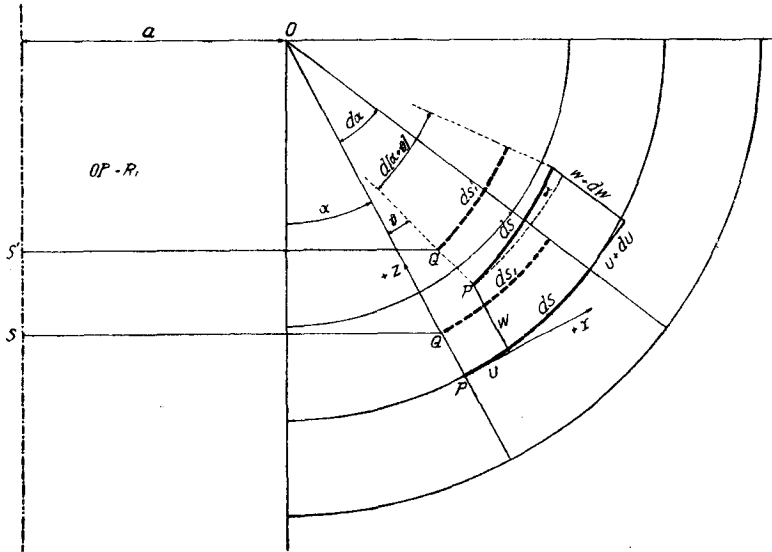


Abb. 1.

Für die Dehnung in einem Punkte Q im Abstand z von der Mittelfläche in der Richtung der x -Achse erhält man mit Benützung der in Abb. 1 angegebenen Bezeichnungen:

$$\epsilon_{xz} = \frac{ds'_1 - ds_1}{ds_1},$$

$$ds'_1 = ds' - z \sin(a\alpha + d\alpha).$$

Der Kleinheit der Winkel $d\alpha$ und $d\vartheta$ wegen ist $\sin(d\alpha + d\vartheta) = d\alpha + d\vartheta$, während

$$ds' = R_1 \cdot d\alpha (1 + \varepsilon_{x0});$$

somit wird: $ds'_1 = R_1 \cdot d\alpha (1 + \varepsilon_{x0}) - z(d\alpha + d\vartheta)$.

Da $ds_1 = (R - z) d\alpha$,

erhält man durch Einsetzen der Werte für ds_1 und ds'_1 in die Gleichung für ε_{xz}

$$2) \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{1 - \frac{z}{R_1}} \left[\varepsilon_{x0} - \frac{z}{R_1} \cdot \frac{d\vartheta}{d\alpha} \right].$$

Die Dehnung ε_{yz} in der Richtung der y -Achse in irgend einem Punkte Q im Abstand z von der Schalenmittelfläche (vergl. Abb. 1) ist gleich der durch die Deformation bewirkten Veränderung des Abstandes von Q von der Rotationsachse dividiert durch seinen Abstand im undeformierten Zustand.

$$\varepsilon_{yz} = \frac{Q'S' - QS}{QS}.$$

$PC = R_2$ ist der zweite Hauptkrümmungsradius der Fläche; wie aus Abb. 2 ersichtlich ist:

$$3) \quad R_2 = \frac{a + R_1 \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = R_1 \cdot \frac{\sin \alpha + \lambda}{\sin \alpha},$$

wenn die Schalenkonstante λ nach der folgenden Gleichung definiert wird:

$$4) \quad \lambda = a : R_1.$$

Für ε_{yz} erhält man:

$$\varepsilon_{yz} = \frac{R_2 \cdot \sin \alpha + u \cos \alpha - w \sin \alpha - z \sin(\alpha + \vartheta) - R_2 \sin \alpha + z \sin \alpha}{R_2 \sin \alpha - z \sin \alpha}.$$

Da ϑ klein bleibt, kann $\sin(\alpha + \vartheta) = \sin \alpha + \cos \alpha \cdot \vartheta$ gesetzt werden, so dass:

$$\varepsilon_{yz} = \frac{u \cdot \cos \alpha - w \cdot \sin \alpha - z \cdot \vartheta \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha (R_2 - z)}$$

wird. Für $z = 0$ erhält man daraus die Dehnung in der y -Richtung für einen Punkt der Schalenmittelfläche

$$5) \quad \varepsilon_{y0} = \frac{1}{R_2} [u \cdot \cotg \alpha - w]$$

und durch Einsetzen dieses Wertes für ε_{y_0} in die Gleichung für ε_{y_0} ,

$$6) \quad \varepsilon_{y_0} = \frac{1}{1 - \frac{z}{R_2}} \left[\varepsilon_{y_0} - z \cdot \vartheta \cdot \frac{\cotg \alpha}{R_2} \right].$$

Zur Bestimmung von ϑ denken wir uns den Übergang des Elementes ds (Abb. 1) in die Lage ds' , die es nach der Deformation einnimmt, in zwei Teile zerlegt. Zuerst verschieben wir ds um die Strecke u auf dem Meridian der Mittelfläche, dabei ändert sich der Winkel zwischen der Normalen zum Element und der Rotationsachse um

$$\beta = \frac{u}{R_1}$$

Nachher verschiebt man das Element parallel zu sich selber um die Strecke w , so dass der Punkt P mit P' zusammenfällt, und dreht dasselbe zuletzt um den Winkel γ um P' , so dass ds in ds' hineinfällt. Für die Winkeländerung bei dieser letzten Drehung erhalten wir:

$$\gamma \propto \sin \gamma = \frac{dw}{ds'} \propto \frac{dw}{ds} = \frac{dw}{R_1 d\alpha};$$

der totale Verdrehungswinkel ist $\vartheta = \beta + \gamma$

$$7) \quad \vartheta = \frac{1}{R_1} \left[u + \frac{dw}{d\alpha} \right].$$

§ 2. Die Grundgleichungen der Spannungen.

Die Spannungen und die Verzerrungen werden durch das Gesetz von Hooke verbunden.

Da nach den früher gemachten Annahmen die Normalspannungen in Richtung der z -Achse vernachlässigt werden, sind die Normalspannungen σ_{xx} bzw. σ_{yy} auf die zur x - bzw. zur y -Achse senkrechten Elemente und die Dehnungen in dieser Richtung durch die Gleichungen:

$$8) \quad \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \sigma \sigma_{yy}]; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \sigma \sigma_{xx}]$$

verknüpft. Aus diesen Gleichungen folgt für die Normalspannungen:

$$9) \quad \sigma_{xx} = \frac{E}{1 - \sigma^2} [\varepsilon_{xx} + \sigma \varepsilon_{yy}], \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1 - \sigma^2} [\varepsilon_{yy} + \sigma \varepsilon_{xx}].$$

Mit Berücksichtigung der Gl. 2 und 6 erhält man, wenn zur Abkürzung $\varepsilon_1 = \left\{ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right\} \cdot \frac{z}{1 - \frac{z}{R_1}}$ und $\varepsilon_2 = \left\{ \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right\} \cdot \frac{z}{1 - \frac{z}{R_2}}$ gesetzt wird:

$$10) \sigma_{xz} = \frac{E}{1 - \sigma^2} \left\{ \varepsilon_{x_0} (1 + \varepsilon_1) + \sigma \varepsilon_{y_0} - z \left[\frac{1}{R_1} \cdot \frac{d\vartheta}{d\alpha} (1 + \varepsilon_1) + \sigma \cdot \frac{\cotg \alpha \cdot \vartheta}{R_2} \right] \right\} \frac{R_2}{R_2 - z}$$

$$11) \sigma_{yz} = \frac{E}{1 - \sigma^2} \left\{ \varepsilon_{y_0} (1 + \varepsilon_2) + \sigma \varepsilon_{x_0} - z \left[\frac{\sigma}{R_1} \cdot \frac{d\vartheta}{d\alpha} + \frac{\cotg \alpha \cdot \vartheta}{R_2} (1 + \varepsilon_2) \right] \right\} \frac{R_1}{R_1 - z}$$

Da $z : R_1$ für dünne Schalen sehr klein ist, sind ε_1 und ε_2 kleine Grössen, die gegenüber 1 vernachlässigt werden können, dies führt zu den folgenden Näherungsformeln für die Spannungen σ_{xz} und σ_{yz} :

$$12) \sigma_{xz} = \frac{E}{1 - \sigma^2} \left\{ \varepsilon_{x_0} + \sigma \varepsilon_{y_0} - z \left[\frac{1}{R_1} \cdot \frac{d\vartheta}{d\alpha} + \frac{\sigma \cotg \alpha \cdot \vartheta}{R_2} \right] \right\} \frac{R_2}{R_2 - z},$$

$$13) \sigma_{yz} = \frac{E}{1 - \sigma^2} \left\{ \varepsilon_{y_0} + \sigma \varepsilon_{x_0} - z \left[\frac{\sigma}{R_1} \cdot \frac{d\vartheta}{d\alpha} + \frac{\cotg \alpha \cdot \vartheta}{R_2} \right] \right\} \frac{R_1}{R_1 - z}.$$

Die Gl. 12, 13 sind für Kugelschalen ($R_1 = R_2$) genau, da für solche ε_1 und ε_2 null ist.

Wir setzen alle Spannungen eines durch einen Parallelkreis normal zur Schalenmittelfläche gelegten Schnittes von der Länge 1 zu einer Normalkraft T_1 in der x -Achse, einer Schubkraft N in der z -Achse und einem Kräftepaar vom Momente G_1 in der xz -Ebene zusammen. Analog können die Spannungen $\sigma_{y\vartheta}$, die auf einen Meridianschnitt von der Länge 1 wirken, auf eine Normalkraft T_2 in der y -Achse und ein Kräftepaar vom Momente G_2 in der yz -Ebene reduziert werden.

$$T_1 = \int_{-h}^{+h} \sigma_{xz} \cdot \frac{R_2 - z}{R_2} \cdot dz; \quad T_2 = \int_{-h}^{+h} \sigma_{yz} \cdot \frac{R_1 - z}{R_1} \cdot dz; \quad N = 2h \cdot \tau;$$

$$G_1 = \int_{-h}^{+h} \sigma_{xz} \cdot \frac{R_2 - z}{R_2} \cdot z \cdot dz; \quad G_2 = \int_{-h}^{+h} \sigma_{yz} \cdot \frac{R_1 - z}{R_1} \cdot z \cdot dz.$$

Führt man die Werte für σ_{xz} und σ_{yz} aus Gl. 12 und 13 ein, erhält man:

$$14) \quad T_1 = \frac{2h \cdot E}{1 - \sigma^2} [\varepsilon_{x_0} + \sigma \varepsilon_{y_0}]; \quad T_2 = \frac{2h \cdot E}{1 - \sigma^2} [\varepsilon_{y_0} + \sigma \varepsilon_{x_0}].$$

$$15) \quad G_1 = -\frac{E \cdot 2h^3}{(1-\sigma^2) \cdot 3} \left[\frac{1}{R_1} \cdot \frac{d\vartheta}{d\alpha} + \sigma \vartheta \cdot \frac{\cotg \alpha}{R_2} \right];$$

$$G_2 = -\frac{E \cdot 2h^3}{(1-\sigma^2) \cdot 3} \left[\frac{\sigma}{R_1} \cdot \frac{d\vartheta}{d\alpha} + \frac{\vartheta \cdot \cotg \alpha}{R_2} \right];$$

somit ist:

$$16) \quad \sigma_{xx} = \left[\frac{T_1}{2h} + \frac{z}{h} \cdot \frac{3G_1}{2h^2} \right] \frac{R_2}{R_2 - z},$$

$$17) \quad \sigma_{yy} = \left[\frac{T_2}{2h} + \frac{z}{h} \cdot \frac{3G_2}{2h^2} \right] \frac{R_1}{R_1 - z}.$$

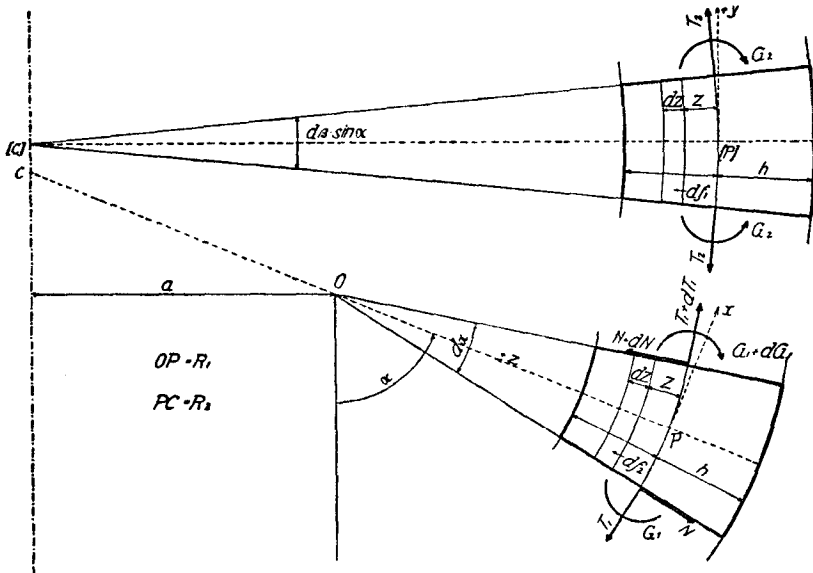


Abb. 2.

Sind T_1 , T_2 , N , G_1 , G_2 als Funktion von α bestimmt, kann der Spannungszustand mit Hilfe dieser Formeln für jeden Ort angegeben werden.

Obschon die Berechnung der Spannungen nach Gl. 16 und 17 keine Schwierigkeiten bietet, vernachlässigen wir die kleine Länge z gegenüber R_1 und R_2 , und werden so auf den linearen Verlauf der Normalspannungen geführt.

Da der Flächeninhalt eines Meridian- oder eines Parallelkreisschnittes von der Länge l gleich $2h \cdot l$, und das Widerstandsmoment dieser Quer-

schnitte, bezogen auf die in ihnen gelegene Gerade $z = 0$ gleich $\frac{2}{3}h^2 \cdot 1$ ist, können die Gl. 16 und 17 mit:

$$18) \quad \sigma_r = \frac{T_1}{2h}; \quad \sigma_t = \frac{T_2}{2h}; \quad \tau = \frac{N}{2h};$$

$$19) \quad \sigma_{zm} = \frac{3G_1}{2h^2}; \quad \sigma_{ym} = \frac{3G_2}{2h^2}$$

wie folgt geschrieben werden:

$$20) \quad \sigma_{xz} = \sigma_r + \frac{z}{h} \sigma_{zm},$$

$$21) \quad \sigma_{yz} = \sigma_t + \frac{z}{h} \sigma_{ym};$$

die grösste Normalspannung erhält man für $z = \pm h$.

§ 3. Die Gleichgewichtsbedingungen.

Wir schneiden aus unserer Schale ein Element heraus, das begrenzt ist durch die beiden Schalenoberflächen, durch zwei Ebenen durch die Rotationsachse, die den Winkel $d\beta$ miteinander einschliessen, und durch zwei Kreiskegelflächen, deren Erzeugende auf der Schalenmittelfläche in zwei Parallelkreisen senkrecht stehen; die Spitzen dieser Kegel liegen auf der Rotationsachse, zwei Erzeugende in derselben Meridianebene schliessen den Winkel $d\alpha$ miteinander ein.

Um das Element im gleichen Gleichgewichtszustande zu erhalten, in dem es sich als Teil der ganzen Schale befand, denken wir uns auch die an den Schnittflächen wirkenden Spannungssysteme als äussere Kräftesysteme am Element angreifend.

Die zur Bestimmung der Spannkraften und Spannungsmomente notwendigen Beziehungen erhalten wir aus dem analytischen Ausdruck der Bedingung, dass alle am herausgeschnittenen Element wirkenden Kräfte und Momente das Element im Gleichgewicht erhalten.

An dem in Abb. 3 dargestellten Schalenelement wirken auf einen Schnitt von der Länge eins:

- a. Auf die begrenzenden Kegelflächen des Randes α bzw. $\alpha + d\alpha$
 1. Die Normalkraft T_1 bzw. $T_1 + dT_1$,
 2. Die Schubkraft N bzw. $N + dN$,
 3. Das Kräftepaar vom Momente G_1 bzw. $G_1 + dG_1$;

b. Auf die ebenen Seitenbegrenzungsflächen :

1. Die Kraft T_2 , die aus Symmetriegründen auf beiden Seiten gleich sein muss,
2. Ein Kräftepaar, dessen Moment G_2 ebenfalls beidseitig gleich ist, während die Schubkraft hier fehlt,

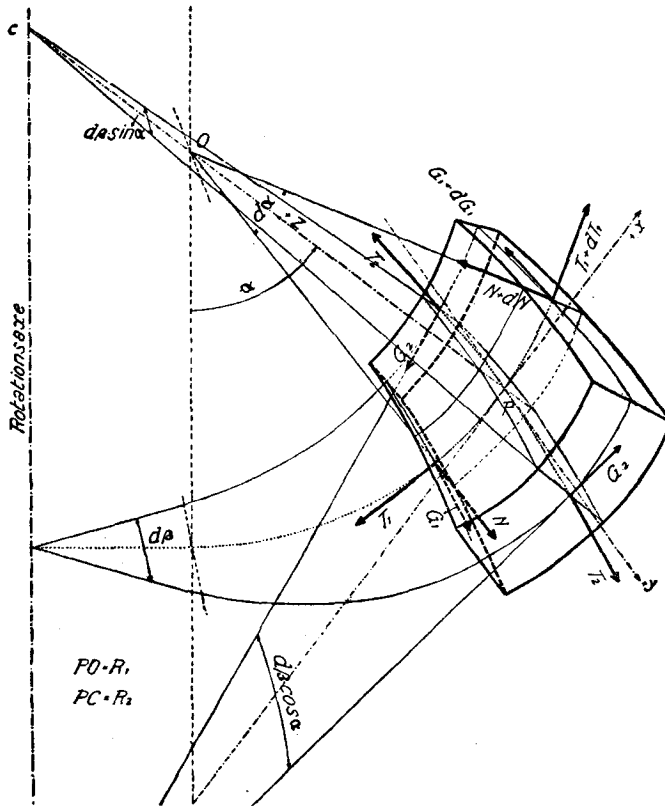


Abb. 3.

c. Herrührend von der Schalenbelastung, auf die Flächeneinheit der Mittelfläche bezogen, eine Kraft K mit den Komponenten $X, Y = 0, Z$ nach den Richtungen der 3 Achsen des in $P(a)$ angenommenen Koordinatensystems.

Von den 6 Gleichgewichtsbedingungen des an unserem Element wirkenden Kräftesystems werden drei infolge der, der allgemeinen Symmetrie entsprechend, angenommenen Spannungsverteilung identisch erfüllt, und

zwar die Komponentengleichung in Richtung der y -Achse und die Momentengleichungen bezogen auf die x - und die z -Achse.

Wird der Cosinus eines sehr kleinen Winkels zu eins angenommen und ersetzt man den Sinus eines solchen Winkels durch den Bogen, dann lautet:

1. Die Komponentengleichung in Richtung der x -Achse:

$$d(T_1 \cdot R_2 \sin \alpha \cdot d\beta) - T_2 \cdot d\beta \cos \alpha \cdot R_1 \cdot da - (2N + dN) \frac{da}{2} \cdot R_2 \sin \alpha d\beta + X \cdot R_1 da \cdot R_2 d\beta \sin \alpha = 0.$$

2. Die Komponentengleichung in Richtung der z -Achse:

$$(2T_1 + dT_1) \cdot \frac{da}{2} R_2 \sin \alpha d\beta + T_2 \cdot d\beta \cdot \sin \alpha R_1 da + d(NR_2 \sin \alpha d\beta) + ZR_1 da \cdot R_2 d\beta \cdot \sin \alpha = 0.$$

3. Die Momentengleichung bezogen auf die y -Achse;

$$-(2N + dN) R_1 \frac{da}{2} \cdot R_2 \sin \alpha \cdot d\beta + d(G_1 \cdot R_2 d\beta \sin \alpha) - G_2 \cdot \cos \alpha \cdot d\beta \times R_1 da = 0.$$

Dividiert man die 3 Gleichungen durch $da \cdot d\beta$, erhält man:

$$22) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d[T_1 R_2 \sin \alpha]}{da} - T_2 \cdot R_1 \cdot \cos \alpha - N \cdot R_2 \sin \alpha + X R_1 R_2 \sin \alpha = 0, \\ \frac{d[N \cdot R_2 \sin \alpha]}{da} + \sin \alpha [R_2 T_1 + R_1 T_2] + Z \cdot R_1 R_2 \sin \alpha = 0, \\ \frac{d[G_1 \cdot R_2 \sin \alpha]}{da} - N \cdot R_1 R_2 \sin \alpha - G_2 R_1 \cos \alpha = 0. \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen geben uns 3 Beziehungen zwischen den 5 Unbekannten T_1, T_2, N, G_1, G_2 ; das Problem ist zweifach statisch unbestimmt.

Eliminiert man N aus den 3 Gleichungen, bleiben noch 2 übrig, aus denen mit Berücksichtigung der Gl. 15, 14, 7, 5, 1 ein System von 2 simultanen Differentialgleichungen zwischen den Verschiebungen u und w gefunden werden kann. Aus diesen könnten die Verschiebungen und nachher die Dehnungen und die Spannungen bestimmt werden, das Elastizitätsproblem wäre damit gelöst.

Die Reihenintegration dieses Gleichungssystems wird aber sehr kompliziert, so dass auf dem im folgenden Paragraphen angegebenen Weg eine wesentliche Vereinfachung des Problems erzielt wird.

§ 4. Die Reduzibilität des mathematischen Problems.

Anstatt, wie am Schlusse des vorigen Paragraphen angegeben, aus den Gleichgewichtsbedingungen direkt die Differentialgleichungen für die Verschiebungen u und w herzuleiten, wählen wir an Stelle von u und w zwei neue Grundvariable und stellen die Differentialgleichungen auf, denen sie genügen müssen; sind diese wesentlich einfacher als die Differentialgleichungen in u und w , haben wir das ganze Problem dementsprechend vereinfacht.

Prof. Meissner¹⁾ hat für Ringflächen-, Kugel- und Kegelschalen allgemein gezeigt, dass durch Einführung von:

$$23) \quad V = N \cdot R_2$$

und

$$24) \quad \mathcal{J} = \frac{1}{R_1} \left[u + \frac{dw}{d\alpha} \right]$$

als neue Grundvariable die Differentialgleichungen in \mathcal{J} und V zur Integration viel bequemer sind, als die entsprechenden Gleichungen in u und w .

Aus den zwei ersten Gleichgewichtsbedingungen erhält man durch Multiplikation der ersten mit $\sin \alpha$, der zweiten mit $\cos \alpha$ und nachheriger Addition der beiden:

$$\begin{aligned} \sin \alpha \frac{d[T_1 R_2 \sin \alpha]}{d\alpha} + \cos \alpha \frac{d[N R_2 \sin \alpha]}{d\alpha} + \cos \alpha \sin \alpha \cdot R_1 T_1 - \\ - N \cdot R_2 \sin^2 \alpha + R_1 \cdot R_2 \sin \alpha [X \sin \alpha + Z \cos \alpha] = 0; \end{aligned}$$

dies kann in der Form:

$$\frac{d}{d\alpha} [T_1 R_2 \sin^2 \alpha + N R_2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha] + R_1 R_2 \sin \alpha [X \sin \alpha + Z \cos \alpha] = 0$$

geschrieben werden. Setzt man:

$$25) \quad F(\alpha) = \int R_1 R_2 \cdot \sin \alpha [X \cdot \sin \alpha + Z \cos \alpha] + c,$$

wobei sich die Grösse der Integrationskonstanten c , wie später gezeigt wird, aus der statischen Interpretation des Integrals ergibt, erhält man mit Berücksichtigung der Definitionsgleichung 23

$$26) \quad T_1 = -\frac{V}{R_2} \cdot \cotg \alpha - \frac{F(\alpha)}{R_2 \cdot \sin^2 \alpha};$$

¹⁾ Vergl. E. Meissner a. a. O.

dabei ist $F(\alpha)$ eine von den Belastungen (eventuell auch von den Randkräften) abhängige Funktion von α .

Wird der Wert für T_1 in Gl. 22.₂ eingeführt, erhält man nach einfacher Umformung, wenn vorher

$$27) \quad H(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{R_1 \cdot \sin^2 \alpha} - R_2 \cdot Z$$

definiert wird [$H(\alpha)$ ist ebenfalls eine von den Belastungen abhängige Funktion von α]

$$28) \quad T_2 = -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{dV}{d\alpha} + H(\alpha)$$

Durch die Gleichungen 23, 26, 28 werden die Spannungskräfte N , T_1 und T_2 durch die eine der neuen Grundvariablen ausgedrückt, während die Gl. 18 und 19 den Zusammenhang der Momente G_1 und G_2 mit der zweiten Variablen \mathcal{J} angeben.

Die erste Beziehung zwischen \mathcal{J} und V wird durch Einsetzen der Werte für N , G_1 und G_2 aus den Gl. 23 und 15 in die dritte Gleichgewichtsbedingung erhalten. Nach dieser Substitution nimmt die Gl. 22.₃ nach einiger Umrechnung die Form:

$$29) \quad \frac{1}{\sin \alpha \cdot R_1} \cdot \frac{d}{d\alpha} \left[R_2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{d\mathcal{J}}{d\alpha} \right] - \mathcal{J} \left[\frac{R_1}{R_2} \cot^2 \alpha + \sigma \right] = -\frac{R_1 \cdot V}{D}$$

an, wenn man unter D die durch die Gleichung:

$$30) \quad D = \frac{2E \cdot h^3}{3(1-\sigma^2)}$$

definierte Schalenkonstante (Biegesteifigkeit) versteht.

Führt man der Bequemlichkeit wegen den linearen Differentialoperator

$$31) \quad L(f) = \frac{1}{\sin \alpha \cdot R_1} \cdot \frac{d}{d\alpha} \left[R_2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{df}{d\alpha} \right] - f \left[\frac{R_1}{R_2} \cot^2 \alpha \right]$$

ein, so schreibt sich die Gleichung 29 einfach:

$$32) \quad L(\mathcal{J}) - \sigma \mathcal{J} = -\frac{R_1}{D} \cdot V.$$

Die zweite Beziehung zwischen \mathcal{J} und V erhält man aus der Bedingung der Kompatibilität, diese wird so gefunden, dass wir in die zwischen \mathcal{J} und T_1 bzw. T_2 durch die Gl. 1, 5, 7 und 14 gegebenen

Beziehungen für T_1 und T_2 die Variable V unter Zuhilfenahme der Gl. 26 und 28 einführen.

Durch Elimination von w aus den Gl. 1 und 5 erhält man:

$$u \cdot \cotg \alpha - \frac{du}{d\alpha} + R_1 \varepsilon_{x_0} = R_2 \varepsilon_{y_0}$$

oder
$$\sin^2 \alpha \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{u}{\sin \alpha} \right] = \sin \alpha [R_1 \varepsilon_{x_0} - R_2 \varepsilon_{y_0}]$$

und daraus
$$u = \sin \alpha \int \frac{(R_1 \varepsilon_{x_0} - R_2 \varepsilon_{y_0})}{\sin \alpha} d\alpha,$$

worauf aus der Gl. 5 für

$$w = \cos \alpha \int \frac{1}{\sin \alpha} (R_1 \varepsilon_{x_0} - R_2 \varepsilon_{y_0}) d\alpha - R_2 \varepsilon_{y_0}$$

folgt.

Diese Werte für u und w in Gl. 7 eingesetzt, wird:

$$\vartheta = \frac{1}{R_1} \left[\sin \alpha \int \left\{ \frac{R_1 \varepsilon_{x_0} - R_2 \varepsilon_{y_0}}{\sin \alpha} \right\} d\alpha + \frac{d}{d\alpha} \left\{ \cos \alpha \int \frac{1}{\sin \alpha} (R_1 \varepsilon_{x_0} - R_2 \varepsilon_{y_0}) d\alpha - R_2 \varepsilon_{y_0} \right\} \right]$$

oder

$$33) \quad \vartheta = \frac{1}{R_1} \left[\cotg \alpha \{ R_1 \varepsilon_{x_0} - R_2 \varepsilon_{y_0} \} - \frac{d}{d\alpha} (R_2 \varepsilon_{y_0}) \right].$$

Aus Gl. 9 folgt für ε_{x_0} und ε_{y_0}

$$34) \quad \varepsilon_{x_0} = \frac{1}{2Eh} [T_1 - \sigma T_2],$$

$$35) \quad \varepsilon_{y_0} = \frac{1}{2Eh} [T_2 - \sigma T_1].$$

Substituiert man für T_1 und T_2 die Werte aus Gl. 26 und 28 in die Gl. 34 und 35, und setzt man die erhaltenen Ausdrücke für ε_{x_0} und ε_{y_0} in Gl. 33 ein, erhält diese nach längerer Umrechnung die Form:

$$\frac{1}{R_1 \sin \alpha} \cdot \frac{d}{d\alpha} \left[R_2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{dV}{d\alpha} \right] - \left[\frac{R_1}{R_2} \cotg^2 \alpha - \sigma \right] V = 2E \cdot h \cdot R_1 \cdot \vartheta + \Phi.$$

oder mit der Bezeichnung von Gl. 31

$$36) \quad L(V) + \sigma V = 2h \cdot R_1 E \cdot \vartheta + \Phi;$$

dabei ist, wie aus der Umrechnung folgt:

$$37) \quad \Phi = \frac{F(\alpha)}{\sin^2 \alpha} \left\{ \cotg \alpha \left[\frac{R_1}{R_2} - \frac{R_2}{R_1} \right] + \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{R_2}{R_1} \right] \right\} + R_2 [R_2 + \sigma R_1] X - \frac{d}{d\alpha} [R_2^2 Z]$$

Φ ist somit eine nur von den Belastungen (eventuell auch von den Randkräften) abhängige Funktion.

Wesentlich ist, dass die Bedingung der Kompatibilität einen analogen Differentialausdruck ergibt, wie er in Gl. 32 auftritt.

Setzt man zur Normierung der Gl. 32 und 36

$$38) \quad \mathcal{J} = i \cdot \mu \cdot U,$$

$$\text{wobei} \quad i = +\sqrt{-1}$$

und μ eine noch zu bestimmende Konstante bedeutet, so folgt aus Gl. 32 da $L(i\mu U) = i\mu \cdot L(U)$ ist

$$L(U) - \sigma U = -\frac{R_1}{D \cdot i \cdot \mu} V$$

$$\text{und aus Gl. 36} \quad L(V) + \sigma V = 2EhR_1 i \mu U + \Phi.$$

Bestimmt man μ aus der Gleichung:

$$-\frac{R_1}{D \cdot i \cdot \mu} = 2EhR_1 \cdot i \mu,$$

so wird:

$$39) \quad \mu = \frac{1}{2Eh^2} \sqrt{3(1 - \sigma^2)}$$

und man erhält, wenn noch die Grösse

$$40) \quad \chi = 2EhR_1 \cdot \mu = \frac{R_1}{h} \sqrt{3(1 - \sigma^2)}$$

eingeführt wird:

$$41) \quad L(U) - \sigma U = i\chi V,$$

$$42) \quad L(V) + \sigma V = i\chi U + \Phi;$$

aus diesem System der zwei simultanen Differentialgleichungen lassen sich U und V bestimmen.

Die Elimination von V ergibt eine Differentialgleichung vierter Ordnung zur Bestimmung von U .

$$LL(U) - \sigma L(U) = i\chi L(V) = i\chi [i\chi U - \sigma V + \Phi] = -\chi^2 U - \sigma L(U) + \sigma^2 U + i\chi \Phi.$$

oder:

$$43) \quad LL(U) + z^2 U = i\chi \Phi,$$

wenn:

$$44) \quad z^2 = \chi^2 - \sigma^2 \text{ oder } z = +\sqrt{\left(\frac{R_1}{h}\right)^2 (1 - \sigma^2) \cdot 3 - \sigma^2}$$

gesetzt wird. Um U aus der linearen, inhomogenen Differentialgleichung vierter Ordnung zu bestimmen, müssen wir zu der allgemeinen Lösung U_1 der reduzierten Gleichung

$$45) \quad LL(U_1) + z^2 U_1 = 0$$

ein partikuläres Integral U_2 der inhomogenen Differentialgleichung addieren, um die allgemeine Lösung für U zu erhalten.

Nun zerfällt aber die homogene Gleichung 45 in die zwei konjugierten zweiter Ordnung

$$46) \quad L(U_1) - izU_1 = 0,$$

$$47) \quad L(U_1) + izU_1 = 0.$$

Da die Lösungen der Gl. 47 konjugiert komplexe zu denjenigen der Gl. 46 sind, kann die Lösung U_1 der Differentialgleichung, wie wir später zeigen, sofort angegeben werden, sobald man das allgemeine Integral der Differentialgleichung 46 allein kennt.

Für den Fall, dass Φ nicht null ist, muss, wie schon erwähnt, eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung 43, oder, was auf dasselbe herauskommt, ein partikuläres Lösungssystem U_2, V_2 der Gl. 41 und 42 gefunden werden. Aber auch in diesem Fall ist das Problem reduzibel.

Ist nämlich:

$$48) \quad U_2^* = Q_1 + iQ_2$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung zweiter Ordnung

$$49) \quad L(U_2^*) - izU_2^* = \Phi,$$

so ist

$$50) \quad U_2 = i \frac{\chi}{z} \cdot Q_2$$

$$51) \quad V_2 = Q_1 - \frac{\sigma}{z} \cdot Q_2$$

ein Lösungssystem der inhomogenen Gleichungen 41 und 42.

Das Elastizitätsproblem ist daher in allen Fällen durch die Integration einer einzigen linear-inhomogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$L(U) - izU = \Phi$$

im wesentlichen gelöst.

§ 5. Die Integration der homogenen Differentialgleichung.

Wir ermitteln zuerst die allgemeine Lösung U_1 der Gl. 46 und zeigen nachher, dass dadurch auch diejenige der Gl. 45 bestimmt ist.

Bei Berücksichtigung der Gl. 3 und 31 kann die Gl. 46 auf die Form

$$52) \frac{\lambda + \sin \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{d^2 U_1}{d\alpha^2} + \cotg \alpha \cdot \frac{dU_1}{d\alpha} - \left\{ \frac{\cos^2 \alpha}{(\sin \alpha + \lambda) \sin \alpha} + i\lambda \right\} U_1 = 0$$

gebracht werden. Wird

$$\sin \alpha = x$$

in diese Gl. substituiert, nimmt sie die Form an

$$53) [\lambda + x]^2 [1 - x^2] \frac{d^2 U_1}{dx^2} + [\lambda + x] [1 - \lambda x - 2x^2] \frac{dU_1}{dx} - [1 + i\lambda x + i\lambda x - 1] x^2 U_1 = 0.$$

Wir setzen voraus, dass man für U_1 eine nach Potenzen von x mit unbestimmten Koeffizienten und Exponenten geordnete Reihe annehmen kann. Setzt man diese Reihe und ihre Ableitungen in Gl. 53 ein, so muss diese, da U_1 eine Lösung der Gleichung sein soll, dadurch zu einer Identität werden. Der Vergleich der Exponenten der unabhängigen Veränderlichen gibt uns das Fortschrittzgesetz derselben an, während der Vergleich der Koeffizienten der verschiedenen Glieder, welche dieselbe Potenz der unabhängigen Veränderlichen enthalten, die Relationen zwischen diesen Koeffizienten angibt.

Da die Kenntnis der Integration durch Reihen nicht als allgemein bekannt vorausgesetzt werden kann, sollen die hauptsächlichsten Resultate dieser Theorie hier kurz angegeben werden.¹⁾

Die vorgelegte lineare, homogene Differentialgleichung hat die Form :

$$p_{(n)} \cdot U_1^{(n)} + p_{(n-1)} \cdot U_1^{(n-1)} + \dots + p_0 \cdot U_1 = 0;$$

dabei sind alle p_n Funktionen der Veränderlichen x ; $U_1^{(v)}$ ist die v te Ableitung der Funktion U_1 nach x .

Diese Differentialgleichung kann durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von $(x - b)$ auf die Normalform für $x = b$ gebracht werden :

$$54) (x - b)^n \cdot P_n \cdot U_1^{(n)} + (x - b)^{n-1} \cdot P_{n-1} \cdot U_1^{(n-1)} + \dots + P_0 \cdot U_1 = 0.$$

¹⁾ Vergl. z. B. A. R. Forsyth, «Lehrbuch der Differentialgleichungen». Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1912. S. 573 u. f.

Für Px setzen wir:

$$55) \quad Px = \sum_{q=0}^s \alpha_{xq} [x-b]^q; \quad x = 0, 1, 2, 3, \dots, n,$$

dann kann die Differentialgleichung 54 durch eine Reihe

$$56) \quad U_1 = [x-b]^\rho \sum_{v=0}^{\infty} c_v [x-b]^v$$

befriedigt werden. Die Koeffizienten c_v werden sukzessive aus der Rekursionsformel:

$$57) \quad f_v(\rho)c_0 + f_{v-1}(\rho+1)c_1 + \dots + f_0(\rho+v)c_v = 0; \quad v = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$$

bestimmt, dabei ist:

$$f_i(\rho) = \sum_{x=0}^i \alpha_{ix} \left[\begin{matrix} \rho \\ x \end{matrix} \right]; \quad \left[\begin{matrix} \rho \\ x \end{matrix} \right] = \rho \cdot (\rho-1) \dots (\rho-x+1); \quad \left[\begin{matrix} \rho \\ 1 \end{matrix} \right] = \rho; \quad \left[\begin{matrix} \rho \\ 0 \end{matrix} \right] = 1.$$

Da c_0 von null verschieden vorausgesetzt werden muss, weil sonst die Reihe gar nicht den Anfangsexponent ρ hätte, folgt aus Gl. 57

$$58) \quad f_0(\rho) = \alpha_{0,0} + \alpha_{1,0} \cdot \rho + \alpha_{2,0} \rho(\rho-1) + \dots \\ + \alpha_{n,0} \rho(\rho-1) \dots (\rho-n+1) = 0.$$

Aus dieser Gleichung werden die Anfangsexponenten $\rho_1 \dots \rho_n$ berechnet, sie heisst nach Fuchs die determinierende Fundamentalgleichung.

Es bleibt uns noch anzugeben, ob und in welchem Bereich unsere Reihen konvergieren.

Ist die determinierende Fundamentalgleichung für die Stelle $x = b$ (dabei werden für x auch komplexe Werte zugelassen, die wir geometrisch in der Gauss'schen Zahlenebene deuten können) vom n -ten Grad, d. h. ist:

$$\alpha_{n,0} \neq 0,$$

so sind die Reihen in einem gewissen Bereich konvergent ($x = b$ ist eine «Stelle der Bestimmtheit»). Ist dagegen

$$\alpha_{n,0} = 0,$$

d. h. ist die determinierende Fundamentalgleichung vom niedrigeren als vom n -ten Grad ($x = b$ ist eine «Stelle der Unbestimmtheit») wächst $c_{v+1} : c_v$ im allgemeinen mit unendlich wachsendem v über alle Grenzen, die Reihen sind divergent.

Um anzugeben, innerhalb welchen Bereichs die Reihen konvergieren, nimmt man die singulären Stellen der Differentialgleichung zu Hilfe.

Eine Stelle $x = b$ der Differentialgleichung 54 ist regulär, wenn nach Division der Gl. durch P_n keiner der Koeffizienten für $x = b$ unendlich wird; die regulären Stellen sind stets Stellen der Bestimmtheit.

Jede nicht reguläre Stelle heisst singulär, die singulären Stellen können Stellen der Bestimmtheit oder Stellen der Unbestimmtheit sein.

Ist nun $x = b$ eine reguläre oder singuläre Stelle der Bestimmtheit, so konvergiert jede nach Potenzen von $(x-b)$ fortschreitende Reihe, die der Differentialgleichung formal genügt, für alle Werte von x , die innerhalb eines Kreises um b liegen, der durch die nächstgelegene singuläre Stelle geht (Konvergenzkreis).

Die Normalform der Differentialgleichung 53 für die Normalstelle $x = b$ lautet: $(x-b)^2 \cdot (\lambda+x)^2 \cdot (1-x)^2 \cdot \frac{d^2 U_1}{dx^2} + (x-b)(\lambda+x)(1-\lambda x-2x^2) \times$
 $\times (x-b) \cdot \frac{dU_1}{dx} - [1 + ix\lambda x + (ix-1)x^2](x-b)^2 U_1 = 0.$ Aus

$$59) \quad P_2 = (\lambda+x)^2(1-x^2) = \alpha_{2,0} + \alpha_{2,1}(x-b) + \alpha_{2,2}(x-b)^2 + \alpha_{2,3}(x-b)^3 + \alpha_{2,4}(x-b)^4$$

und den entsprechenden Gleichungen für P_1 und P_0 erhält man durch Koeffizientenvergleichung¹⁾:

$$60) \quad \begin{aligned} \alpha_{2,0} &= (1-b^2)(\lambda+b)^2 \\ \alpha_{2,1} &= -2[b\lambda^2 - (1-3b^2)\lambda - b(1-2b^2)] \\ \alpha_{2,2} &= -[\lambda^2 + 6b\lambda + 6b^2 - 1] \\ \alpha_{2,3} &= -2[\lambda - 2b] \\ \alpha_{2,4} &= -1 \\ \\ \alpha_{1,0} &= 0 \\ \alpha_{1,1} &= -[\lambda^2 b - (1-3b^2)\lambda + b(1-2b^2)] \\ \alpha_{1,2} &= -[\lambda^2 + 6b\lambda + 6b^2 - 1] \\ \alpha_{1,3} &= -3[\lambda + 2b] \\ \alpha_{1,4} &= -2 \\ \\ \alpha_{0,0} &= 0 \\ \alpha_{0,1} &= 0 \\ \alpha_{0,2} &= -ix \cdot b \cdot (\lambda+b) + b^2 - 1 \\ \alpha_{0,3} &= -ix(\lambda+2b) + 2b \\ \alpha_{0,4} &= 1 - ix \end{aligned}$$

1) Die Koeffizienten α_{xi} können auch mit Hilfe des Taylor'schen Satzes bestimmt werden.

Um einen möglichst grossen Konvergenzbereich zu erhalten, lässt man die Normalstellen $x = b$ mit den singulären Stellen zusammenfallen. Die singulären Stellen unserer Differentialgleichung im Endlichen sind:

$$x_1 = +1; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = -\lambda.$$

Werden diese Stellen als Normalstellen gewählt, kann die Normalform 59 durch $(x - b)$ dividiert werden, dadurch werden die Indices q der Koeffizienten $\alpha_{x,q}$ in Gl. 60 um die Einheit verkleinert, so dass:

$$61) \quad \beta_{x,q} = \alpha_{x,q+1}$$

gesetzt werden kann.

Setzt man die Werte für $\beta_{2,0}$, $\beta_{1,0}$ und $\beta_{0,0}$ in Gl. 58 ein, erhält man daraus, da $\beta_{0,0} = 0$ und $\beta_{2,0} = 2\beta_{1,0}$ ist,

$$\varrho_1 = 0; \quad \varrho_2 = +\frac{1}{2} \cdot 1)$$

Die Rekursionsformel zur Bestimmung der zu der Reihe $\varrho_1 = 0$ gehörenden Koeffizienten c_v ist nach Gl. 57 und 61

$$62) \quad c_v \{ \beta_{0,0} + \beta_{1,0} \cdot v + \beta_{2,0} \cdot v(v-1) \} + c_{v-1} \{ \beta_{0,1} + \beta_{1,1}(v-1) + \beta_{2,1} \times \\ \times (v-1)(v-2) \} + c_{v-2} \{ \beta_{0,2} + \beta_{1,2}(v-2) + \beta_{2,2}(v-2)(v-3) \} + \\ + c_{v-3} \{ \beta_{0,3} + \beta_{1,3}(v-3) + \beta_{2,3}(v-3)(v-4) \} = 0, 2)$$

und es ist:

$$\mathfrak{P}_1 = \sum_{v=0}^{\infty} c_v \cdot (\sin \alpha - b)^v$$

ein Integral der Differentialgleichung 52. Ähnlich könnten die Koeffizienten \bar{c}_v des zu $\varrho_1 = \frac{1}{2}$ gehörenden Integrals

$$\bar{\mathfrak{P}}_1 = [\sin \alpha - b]^{1/2} \sum_{v=0}^{\infty} \bar{c}_v (\sin \alpha - b)^v$$

gefunden werden; damit wäre ein Fundamentalsystem der Gl. 52 bekannt. Nun erfordert die Bestimmung der Koeffizienten \bar{c}_v aus der zugehörigen Rekursionsformel umständliche Berechnungen, es lässt sich aber ein zweites

1) Für eine reguläre Stelle als Normalstelle ist $\alpha_{0,0} = \alpha_{1,0} = 0$; $\alpha_{2,0} \neq 0$, daher wird für diese $\varrho_1 = 0$; $\varrho_2 = 1$. Die Rekursionsformel kann nach Gl. 57 sofort angegeben werden.

2) Diese Rekursionsformel kann auch durch Einsatz von $U_1 = (x - b)^{\varrho} \sum_{v=0}^{\infty} c_v (x - b)^v$ in Gl. 53 durch Koeffizientenvergleich gefunden werden, wenn die Funktionen \mathcal{P}_n vorher nach Potenzen von $(x - b)$ entwickelt worden sind.

partikulares Integral der Differentialgleichung 52 auf einfachere Weise finden.

Substituiert man zu diesem Zwecke:

$$63) \quad U_1 = \cos \alpha \cdot U_1^*$$

in Gl. 52, erhält man eine Differentialgleichung zur Bestimmung von U_1^* , diese lautet, wenn $\sin \alpha = x$ gesetzt wird:

$$64) \quad (1 - x^2)(\lambda + x)^2 \cdot \frac{d^2 U_1^*}{dx^2} + [\lambda + (1 - 3\lambda^2)x - 7\lambda x^2 - 4x^3] \frac{dU_1^*}{dx} + \\ + [-(\lambda^2 + 1) - (3 + i\kappa)\lambda \cdot x - (1 + i\kappa)x^2] U_1^* = 0.$$

Die Normalform der Gl. 64 für die Stelle $x = b$ lautet:

$$(x - b)^2 (1 - x^2)(\lambda + x)^2 \cdot \frac{d^2 U_1^*}{dx^2} + \\ + (x - b)[\lambda + (1 - 3\lambda^2)x - 7\lambda x^2 - 4x^3](x - b) \cdot \frac{dU_1^*}{dx} + \\ + [-(\lambda^2 + 1) - (3 + i\kappa)\lambda \cdot x - (1 + i\kappa)x^2](x - b)^2 \cdot U_1^* = 0.$$

Aus $P_2^* = (1 - x^2)(\lambda + x)^2 = \alpha_{2,0}^* + \alpha_{2,1}^*(x - b) + \alpha_{2,2}^*(x - b)^2 + \alpha_{2,3}^*(x - b)^3 + \alpha_{2,4}^*(x - b)^4$ und den entsprechenden Gleichungen für P_1^* und P_0^* erhält man:

$$65) \quad \begin{array}{ll} \alpha_{2,0}^* = \alpha_{2,0} & \alpha_{1,0}^* = 0 \\ \alpha_{2,1}^* = \alpha_{2,1} & \alpha_{1,1}^* = -3b\lambda^2 + (1 - 7b^2)\lambda + b(1 - 4b^2) \\ \alpha_{2,2}^* = \alpha_{2,2} & \alpha_{1,2}^* = -[3\lambda^2 + 14b\lambda + 12b^2 - 1] \\ \alpha_{2,3}^* = \alpha_{2,3} & \alpha_{1,3}^* = -[7\lambda + 12b] \\ \alpha_{2,4}^* = \alpha_{2,4} & \alpha_{1,4}^* = -4 \\ \\ \alpha_{0,0}^* = 0 \\ \alpha_{0,1}^* = 0 \\ \alpha_{0,2}^* = -[\lambda^2 + 3b\lambda + b^2 + 1 + i\kappa \cdot b \cdot (\lambda + b)] \\ \alpha_{0,3}^* = -[3\lambda + 2b + i\kappa(2b + \lambda)] \\ \alpha_{0,4}^* = -[i\kappa + 1] \end{array}$$

Werden die singulären Stellen $x_1 = +1$; $x_2 = -1$; $x_3 = -\lambda$ als Normalstellen gewählt, ist wie früher:

$$\beta_{\kappa,q}^* = \alpha_{\kappa,q+1}^*.$$

Für die Anfangsexponenten ρ erhält man aus Gl. 58

$$\rho_1^* = 0; \quad \rho_2^* = -\frac{1}{2}.$$

Die Koeffizienten c_v^* der zu $\varrho_1^* = 0$ gehörenden Reihe werden nach Einsetzen der Werte β_{xq}^* an Stelle der Werte β_{xq} in Gl. 62 aus dieser bestimmt.

Es ist dann:

$$\mathfrak{P}_1^* = \sum_{v=0}^{\infty} c_v^* (\sin \alpha - b)^v$$

eine Lösung der Differentialgleichung 64 und somit

$$\cos \alpha \cdot \mathfrak{P}_1^* = \cos \alpha \sum_{v=0}^{\infty} c_v^* \cdot (\sin \alpha - b)^v$$

ein zweites Integral der Gl. 46. Da aber \mathfrak{P}_1 und $\cos \alpha \mathfrak{P}_1^*$ linear unabhängig sind, ist:

$$66) \quad U_1 = \mathfrak{P}_1 + \cos \alpha \mathfrak{P}_1^*$$

die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung; dabei sind c_0 und c_0^* , die nach Gl. 62 jeden beliebigen Wert annehmen können, zwei Integrationskonstante.

Will man eine möglichst gute Konvergenz im Winkelraum $\alpha = 0$ bis $\alpha = 180^\circ$ erzielen, wird die Stelle $x = b = +1$, soll die Konvergenz im Winkelraum $\alpha = 180^\circ$ bis 360° gut sein, wird die Stelle $x = b = -1$ als Normalstelle gewählt.

Der Konvergenzbereich erstreckt sich für reelle Werte von x , wenn $b = +1$ ist für:

1. $\lambda \geq 1$ von $-1 < x < +3$,
2. $\lambda < 1$ von $-\lambda < x < \lambda + 2$.

Wird dagegen $b = -1$ angenommen, konvergieren die Reihen für:

1. $\lambda \geq 3$; $\lambda = 1$ von $-3 < x < +1$,
2. $1 < \lambda < 3$ von $-\lambda < x < \lambda - 2$,
3. $0 < \lambda < 1$ von $\lambda - 2 < x < -\lambda$.

Liegt die singuläre Stelle $x = b = -\lambda$ zwischen den beiden erstgenannten drin, so können für sie als Normalstelle konvergente Potenzreihen angegeben werden; wir haben somit für alle praktisch vorkommenden Fälle konvergente Potenzreihen als Lösung der Differentialgleichung 52 gefunden, damit kann aber auch die allgemeine Lösung der Gl. 45 angegeben werden.

Die Gl. 66, die uns eine allgemeine Lösung der Gl. 52 gibt, kann auf die Form:

$$U_1 = c_0 \left\{ 1 + \frac{c_1}{c_0} (\sin \alpha - b) + \frac{c_2}{c_0} (\sin \alpha - b)^2 + \dots \right\} + \\ + c_0^* \cdot \cos \alpha \left\{ 1 + \frac{c_1^*}{c_0^*} (\sin \alpha - b) + \frac{c_2^*}{c_0^*} (\sin \alpha - b)^2 + \dots \right\}$$

gebracht werden, die Koeffizienten $c_v : c_0$ und $c_v^* : c_0^*$ sind komplexe Grössen; wir setzen:

$$\frac{c_v}{c_0} = m_v + i n_v$$

$$\frac{c_v^*}{c_0^*} = m_v^* + i n_v^*$$

und erhalten mit:

$$(7) \quad J_1 = \sum_{v=0}^{\infty} m_v (\sin \alpha - b)^v; \quad J_2 = \sum_{v=0}^{\infty} n_v (\sin \alpha - b)^v; \\ J_3 = \sum_{v=0}^{\infty} m_v^* (\sin \alpha - b)^v; \quad J_4 = \sum_{v=0}^{\infty} n_v^* (\sin \alpha - b)^v \\ U_1 = c_0 [J_1 + i J_2] + c_0^* \cos \alpha [J_3 + i J_4].$$

$$\text{Es sind somit:} \quad U_{1,1} = J_1 + i J_2$$

$$\text{und:} \quad U_{1,2} = \cos \alpha [J_3 + i J_4]$$

Integrale der Gl. 46, also auch solche der Gl. 45; setzt man aber die Werte für $U_{1,1}$ bzw. $U_{1,2}$ in Gl. 45 ein, so sieht man nach Trennung des Imaginären vom Reellen, dass J_1 bzw. J_2 und $\cos \alpha J_3$ bzw. $\cos \alpha J_4$ die Gl. 45 allein befriedigen muss, d. h. dass $J_1, J_2, \cos \alpha J_3$ und $\cos \alpha J_4$ partikuläre Lösungen der Gl. 45 sein müssen.

Da diese 4 Integrale linear unabhängig sind, kann die allgemeine Lösung in der Form:

$$U_1 = i \{ C_1 J_1 + C_2 J_2 + C_3 J_3 \cdot \cos \alpha + C_4 J_4 \cdot \cos \alpha \}$$

geschrieben werden, wobei $C_1 C_2 C_3 C_4$ Integrationskonstanten bedeuten.

Nach Gl. 38 erhält man für \mathcal{J}_1 , wenn:

$$(68) \quad J_1 = a_1; \quad J_2 = a_2; \quad J_3 \cdot \cos \alpha = a_3; \quad J_4 \cdot \cos \alpha = a_4$$

gesetzt wird:

$$(69) \quad \mathcal{J}_1 = -i \{ C_1 \cdot a_1 + C_2 \cdot a_2 + C_3 \cdot a_3 + C_4 \cdot a_4 \}$$

und für $d\mathcal{J} : da$ mit:

$$(70) \quad b_1 = \cos \alpha J_1'; \quad b_2 = \cos \alpha J_2'; \quad b_3 = \cos^2 \alpha J_3' - \sin \alpha J_3; \\ b_4 = \cos^2 \alpha \cdot J_4' - \sin \alpha \cdot J_4,$$

wenn:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \sum_{v=0}^{\infty} v \cdot m_v (\sin \alpha - b)^{v-1}; & J_2 &= \sum_{v=0}^{\infty} v \cdot n_v (\sin \alpha - b)^{v-1}; \\
 71) \quad J_3 &= \sum_{v=0}^{\infty} v \cdot m_v^* (\sin \alpha - b)^{v-1}; & J_4 &= \sum_{v=0}^{\infty} v \cdot n_v^* (\sin \alpha - b)^{v-1} \\
 72) \quad \frac{d\mathcal{J}_1}{d\alpha} &= -\mu \{ C_1 b_1 + C_2 b_2 + C_3 b_3 + C_4 b_4 \}.
 \end{aligned}$$

Zur Bestimmung von V_1 verwendet man das Gleichungssystem 41—42 mit $\Phi = 0$. Da $iC_1 J_1$ eine U -Lösung dieses Systems ist, folgt aus Gl. 41 für die zugehörige Funktion V

$$V_{1,1} = \frac{C_1}{\chi} \{ L(J_1) - \sigma J_1 \}.$$

Andererseits ist $J_1 + iJ_2$ ein Integral der Gl. 46, daraus folgt, dass;

$$L(J_1) = -\kappa J_2; \quad L(J_2) = \kappa J_1,$$

so dass:
$$V_{1,1} = \frac{C_1}{\chi} \{ -\kappa J_2 - \sigma J_1 \}$$

wird. Ähnliche Ausdrücke erhält man für $V_{1,2}$, $V_{1,3}$ und $V_{1,4}$, aus ihnen folgt, da $V_1 = V_{1,1} + V_{1,2} + V_{1,3} + V_{1,4}$ ist:

$$73) \quad V_1 = \frac{1}{\chi} \{ C_1 \cdot f_1 + C_2 \cdot f_2 + C_3 \cdot f_3 + C_4 \cdot f_4 \},$$

wenn:

$$73a) \quad f_1 = -\kappa a_2 - \sigma a_1; \quad f_2 = \kappa a_1 - \sigma a_2; \quad f_3 = -\kappa a_4 - \sigma a_3; \\ f_4 = \kappa a_3 - \sigma a_4$$

gesetzt wird.

$$74) \quad \frac{dV_1}{d\alpha} = \frac{1}{\chi} \{ C_1 \cdot g_1 + C_2 \cdot g_2 + C_3 \cdot g_3 + C_4 \cdot g_4 \};$$

dabei ist:

$$75) \quad g_1 = -\kappa b_2 - \sigma b_1; \quad g_2 = \kappa b_1 - \sigma b_2; \quad g_3 = -\kappa b_4 - \sigma b_3; \quad g_4 = \kappa b_3 - \sigma b_4.$$

Das allgemeine Lösungssystem \mathcal{J}_1 , V_1 der zwei simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung muss 4 Integrationskonstanten (C_1 , C_2 , C_3 , C_4) besitzen; andererseits haben wir gerade 4 Konstanten nötig, um beliebigen Randmomenten G_{1i} bzw. G_{1a} und beliebigen Randkräften H_i bzw. H_a senkrecht zur Rotationsachse am Innen- bzw. am Aussenrande der Schale genügen zu können.

Die fünfte Integrationskonstante, die wir brauchen, um beliebigen Randkräften parallel zur Rotationsachse zu genügen (zwischen diesen und der Schalenbelastung besteht eine Gleichgewichtsbedingung), steckt im Integral $F(\alpha)$ Gl. 25 drin.

§ 6. Partikulärintegrale des simultanen, inhomogenen Gleichungssystems.

Wenn ein Belastungsfall vorliegt, für den Φ nicht null ist, so muss ein partikuläres Integralsystem des inhomogenen Gleichungssystems 41–42 gefunden werden.

Dieser Fall tritt, wie in § 8 gezeigt wird, immer dann ein, wenn die Schale einer stetigen Belastung unterworfen wird, und bei der unbelasteten Schale, wenn die Randkräfte Komponenten in der Richtung der Rotationsachse aufweisen.

In den Beispielen, die wir untersuchen, hat Φ die Form:

$$76) \quad \Phi = K_0 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha^4 \cdot (\sin \alpha + \lambda)} [2\lambda + 3 \sin \alpha - M \cdot \sin^3 \alpha].$$

K_0 und M sind Konstanten, die von Fall zu Fall bestimmt werden.

Da es in keinem Fall gelungen ist, ein elementares Partikulärlösungssystem zu finden, musste eine Lösung U_2^* aus der Differentialgleichung:

$$L(U_2^*) - izU_2^* = \Phi$$

durch Reihenansatz bestimmt werden.

Spaltet man in U^* (Gl. 48) den Faktor $K_0 \cdot \cotg \alpha$ ab, d. h. definiert man:

$$77) \quad U_2^* = Q_1 + iQ_2 = K_0 \cdot \cotg \alpha \cdot U_2^\dagger = K_0 \cdot \cotg \alpha (Q_1^\dagger + iQ_2^\dagger),$$

erhält man zur Bestimmung von U^\dagger mit Verwendung der Gl. 3, 3I, 76, 77 die Differentialgleichung:

$$78) \quad [\lambda \cdot \sin^2 \alpha + 2\lambda \sin^3 \alpha + \sin^4 \alpha] \cos \alpha \cdot \frac{d^2 U_2^\dagger}{d\alpha^2} - \\ - [2\lambda^2 \sin \alpha + 3\lambda \sin^2 \alpha + \sin^3 \alpha + \lambda \sin^4 \alpha + \sin^5 \alpha] \frac{d U_2^\dagger}{d\alpha} + \\ + [2\lambda^3 + 3\lambda \sin \alpha - iz\lambda \cdot \sin^3 \alpha + (1 - iz) \sin^4 \alpha] \cos \alpha \cdot U_2^\dagger = \\ = \cos \alpha \cdot [2\lambda + 3 \sin \alpha - M \cdot \sin^3 \alpha].$$

Zur Integration dieser Gleichung entwickeln wir die Klammerausdrücke nach Potenzen von $(\sin \alpha - b)$ und schreiben:

$$79) \quad \cos \alpha \left[\sum_{q=0}^4 \alpha_{2,q} (\sin \alpha - b)^q \right] \frac{d^2 U_2^\dagger}{d\alpha^2} + \left[\sum_{q=0}^5 \alpha_{1,q} (\sin \alpha - b)^q \right] \frac{d U_2^\dagger}{d\alpha} + \\ + \cos \alpha \left[\sum_{q=0}^4 \alpha_{0,q} (\sin \alpha - b)^q \right] U_2^\dagger = \cos \alpha \sum_{q=0}^3 \gamma_q (\sin \alpha - b)^q.$$

Die Koeffizienten $\alpha_{x,q}$ werden wie früher durch Koeffizientenvergleich bestimmt

$$80) \quad \begin{aligned} \alpha_{2,0} &= b^2(\lambda + b)^2 & \alpha_{1,0} &= -b[2\lambda^2 + (3 + b^2)b\lambda + b^2(1 + b^2)] \\ \alpha_{2,1} &= 2b[\lambda^2 + 3b\lambda + 2b^2] & \alpha_{1,1} &= -[2\lambda^2 + 2b(3 + 2b^2)\lambda + b^2(3 + 5b^2)] \\ \alpha_{2,2} &= \lambda^2 + 6b\lambda + 6b^2 & \alpha_{1,2} &= -[3(1 + 2b^2)\lambda + b(3 + 10b^2)] \\ \alpha_{2,3} &= 2[\lambda + 2b] & \alpha_{1,3} &= -[4b\lambda + 1 + 10b^2] \\ \alpha_{2,4} &= 1 & \alpha_{1,4} &= -[\lambda + 5b]; \quad \alpha_{1,5} = -1 \\ \\ \alpha_{0,0} &= 2\lambda^2 + 3b\lambda + b^4 - i\lambda b^3(\lambda + b) & \gamma_0 &= 2\lambda + b(3 - b^2 M) \\ \alpha_{0,1} &= 3\lambda + 4b^3 - i\lambda b^2(3\lambda + 4b) & \gamma_1 &= 3 - 3b^2 M \\ \alpha_{0,2} &= b[6b - 3i\lambda(\lambda + 2b)] & \gamma_2 &= -3b M \\ \alpha_{0,3} &= 4b - i\lambda[\lambda + 4b] & \gamma_3 &= -M \\ \alpha_{0,4} &= 1 - i\lambda. \end{aligned}$$

Der Differentialgleichung 79 können wir mit einer Reihe

$$81) \quad U_2^\dagger = \sum_{v=0}^{\infty} c_v \cdot (\sin \alpha - b)^v$$

genügen; setzt man diesen Wert für U_2^\dagger und dessen Ableitungen in Gl. 79 ein, erhält man die Rekursionsformel 82, die zur Bestimmung der Koeffizienten c_v dient.

$$82) \quad c_v \{v(v-1)\alpha_{2,0}\} + c_{v-1} \{v-1\}(v-2)\alpha_{2,1} + (v-1)\alpha_{1,0}\} + \\ + c_{v-2} \{v-2\}(v-3)\alpha_{2,2} - (v-2)^2\alpha_{2,0} + (v-2)\alpha_{1,1} + \alpha_{0,0}\} + \\ + c_{v-3} \{v-3\}(v-4)\alpha_{2,3} - (v-3)^2\alpha_{2,1} + (v-3)\alpha_{1,2} + \alpha_{0,1}\} + \\ + c_{v-4} \{v-4\}(v-5)\alpha_{2,4} - (v-4)^2\alpha_{2,2} + (v-4)\alpha_{1,3} + \alpha_{0,2}\} + \\ + c_{v-5} \{-(v-5)^2\alpha_{2,3} + (v-5)\alpha_{1,4} + \alpha_{0,3}\} + \\ + c_{v-6} \{-(v-6)^2\alpha_{2,4} + (v-6)\alpha_{1,5} + \alpha_{0,4}\} = \gamma_{v-2}.$$

Da die Koeffizienten c_v komplex sind (c_0 und c_1 sind unbestimmt):

$$c_v = q_{1,v} + iq_{2,v}$$

kann für U_2^\dagger durch Trennung des Imaginären vom Reellen erhalten werden:

$$U_2^{\dagger} = \sum_{\nu=0}^{\infty} q_{1,\nu} (\sin \alpha - b)^{\nu} + i \sum_{\nu=0}^{\infty} q_{2,\nu} (\sin \alpha - b)^{\nu}.$$

Nach Gl. 77 erhält man, wenn zur Abkürzung:

$$83) \quad \begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} q_{1,\nu} (\sin \alpha - b)^{\nu} &= Q_1^{\dagger} \\ \sum_{\nu=0}^{\infty} q_{2,\nu} (\sin \alpha - b)^{\nu} &= Q_2^{\dagger} \end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$Q_1 = K_0 \cotg \alpha \cdot Q_1^{\dagger}; \quad Q_2 = K_0 \cdot \cotg \alpha \cdot Q_2^{\dagger};$$

damit ist ein partikuläres Lösungssystem U_2, V_2 bestimmt.

Die zugehörige Winkeländerung \mathcal{J}_2 ist:

$$84) \quad \mathcal{J}_2 = -\frac{R_1}{D} \cdot \frac{K_0}{z} \cdot \cotg \alpha \cdot Q_2^{\dagger},$$

wenn D und z , die nach Gl. 30 und 44 definierten Konstanten bedeuten.

$$85) \quad \frac{d\mathcal{J}_2}{d\alpha} = -\frac{R_1}{D} \cdot \frac{K_0}{z} \cdot \left[-\frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot Q_2^{\dagger} + \cos \alpha \cdot \cotg \alpha \cdot Q_2^{\dagger} \right]$$

dabei ist:

$$86) \quad Q_2^{\dagger} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu \cdot q_{2,\nu} \cdot (\sin \alpha - b)^{\nu-1}.$$

Ähnlich erhält man für

$$87) \quad V_2 = K_0 \cdot \cotg \alpha \left[Q_1^{\dagger} - \frac{\sigma}{z} Q_2^{\dagger} \right]$$

$$88) \quad \frac{dV_2}{d\alpha} = K_0 \cdot \left\{ -\frac{1}{\sin^2 \alpha} \left[Q_1^{\dagger} - \frac{\sigma}{z} Q_2^{\dagger} \right] + \cos \alpha \cdot \cotg \alpha \left[Q_1^{\dagger} - \frac{\sigma}{z} Q_2^{\dagger} \right] \right\}$$

$$89) \quad \text{wenn zur Abkürzung } Q_1^{\dagger'} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu \cdot q_{1,\nu} (\sin \alpha - b)^{\nu-1} \text{ gesetzt wird.}$$

Da es uns nur darauf ankommt, irgend ein partikuläres Lösungssystem \mathcal{J}_2, V_2 zu erhalten, kann über die Integrationskonstanten frei verfügt werden.

II. ABSCHNITT.

Spannungen und elastische Verschiebungen.

§ 7. Zerlegung der Aufgabe.

Wenn wir eine volle Ringflächenschale längs zwei Parallelkreisen aufschneiden, erhalten wir ein Schalenstück, für das wir den Spannungs- und den Deformationszustand bestimmen wollen.

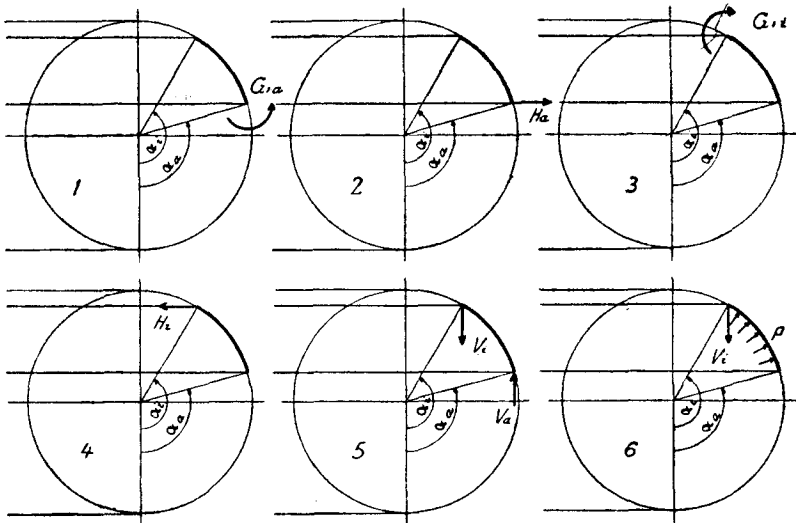


Abb. 4.

Der Spannungsverlauf in irgend einem Punkte der Schale wird einmal von der stetigen Belastung (konstanter Oberflächendruck, Trägheitskräfte, Eigengewicht usw.) und andererseits von den an den Rändern herrschenden Spannungen abhängig sein.

Da der Zusammenhang der stetigen Belastung bzw. der Randspannungen mit dem Spannungszustand linear ist, können die Einflüsse der stetigen Belastung und der verschiedenen Randspannungen gesondert bestimmt werden, die Ermittlung des wirklichen Spannungszustandes erfolgt dann leicht durch Superposition.

Den allgemeinsten Randbedingungen kann durch Superposition von 6 elementaren Randspannungssystemen genügt werden; zwischen diesen besteht aber eine Beziehung, die ausdrückt, dass die unbelastete Schale sich unter dem Einfluss der an den Rändern wirkenden Kräftesysteme nicht in der Richtung der Achse verschiebt; dadurch wird die Zahl der unabhängigen, elementaren Randspannungssysteme die nötig sind, um allgemeinen Randbedingungen genügen zu können, auf 5 reduziert.

Von allen Arten der stetigen Belastung soll hier nur der Fall des konstanten Oberflächendruckes behandelt werden.

Bei den Belastungsfällen 1 bis 4 ist die Schale für jeden Wert von G_{1a} , G_{1i} , H_a und H_i im Gleichgewicht, während bei den Fällen 5 und 6 die Kräfte V_a und V_i so gewählt werden müssen, dass das Gleichgewicht erhalten bleibt.

§ 8. *Behandlung der sechs elementaren Belastungsfälle.*

Die Spannkraften N , T_1 , T_2 und die Spannungsmomente G_1 und G_2 sind durch die Gl. 23, 24, 26, 28, 18, 19 als Funktion der Grundvariablen \mathcal{J} und V und deren ersten Ableitungen ausgedrückt, und zwar ist der Zusammenhang dieser bezogenen Kräfte und Momente mit \mathcal{J} und V , wie aus den genannten Gleichungen ersichtlich ist, linear.

Andererseits wird das allgemeine Integralsystem \mathcal{J} , V durch Superposition der allgemeinen Lösung \mathcal{J}_1 , V_1 der homogenen Gl. 41—42 ($\Phi = 0$) und eines partikulären Integralsystems \mathcal{J}_2 , V_2 des gleichen inhomogenen Systems nach den Gleichungen

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2; \quad V = V_1 + V_2$$

erhalten. Daraus folgt, dass die resultierenden Vektoren N , T_1 , T_2 , G_1 , G_2 durch lineare Superposition der Vektoren N_1 , $T_{1,1}$, $T_{2,1}$, $G_{1,1}$, $G_{2,1}$, die der Lösung \mathcal{J}_1 , V_1 entsprechen, mit den Vektoren N_2 , $T_{1,2}$, $T_{2,2}$, $G_{1,2}$, $G_{2,2}$, die aus dem Lösungssystem \mathcal{J}_2 , V_2 hervorgehen, erhalten werden.

Um das System der N_1 , $T_{1,1}$, $T_{2,1}$, $G_{1,1}$, $G_{2,1}$ zu bestimmen, setzen wir die Werte für V und $dV: d\alpha$ aus Gl. 73, 74 in die Gl. 23, 26, 28 ein und berücksichtigen, dass nach Gl. 37, wenn $\Phi = 0$ ist, auch $F_{(\alpha)} = X = Z = 0$ und daher auch $H(\alpha) = 0$ sein muss.

Man erhält dann:

$$90) \quad R_1 \cdot N_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \lambda} \{c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4\},$$

wenn: $C_v : \chi = c_v$

definiert wird; ferner:

$$91) \quad R_1 T_{1,1} = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \lambda} \{c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4\}$$

und

$$92) \quad R_1 T_{2,1} = -\{c_1 g_1 + c_2 g_2 + c_3 g_3 + c_4 g_4\}.$$

Aus Gl. 15, 69, 72 folgt für

$$93) \quad G_{1,1} = c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 + c_4 p_4,$$

wenn

$$94) \quad p_v = b_v + \frac{\sigma \cdot \cos \alpha}{\lambda + \sin \alpha} a_v$$

gesetzt wird, und für $G_{2,1}$ ist:

$$95) \quad G_{2,1} = c_1 q_1 + c_2 q_2 + c_3 q_3 + c_4 q_4,$$

dabei ist:

$$96) \quad q_v = \sigma b_v + \frac{\cos \alpha}{\lambda + \sin \alpha} a_v.$$

Die Funktionen f_v, g_v, p_v, q_v sind nach Wahl von λ und $R_1 : \mu$ eindeutig bestimmbare Funktionen von α , sie sind von der Art der Belastung unabhängig. Die Integrationskonstanten c_1, c_2, c_3, c_4 werden aus den Randbedingungen bestimmt.

Das dem partikulären Lösungssystem $\mathcal{J}_2 V_2$ entsprechende Spannungssystem wird erhalten durch Substitution der Werte für $V_2, dV_2 : d\alpha, \mathcal{J}, d\mathcal{J} : da$ aus Gl. 84, 85, 87, 88 in die Gl. 23, 26, 28, 15. Die Gl. 23 nimmt dann die Form an:

$$97) \quad N_2 \cdot R_1 = K_0 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \lambda} \left\{ Q_1^* - \frac{\sigma}{z} Q_2^* \right\},$$

ferner erhält man:

$$98) \quad T_{1,2} \cdot R_1 = -\frac{1}{\sin \alpha [\sin \alpha + \lambda]} \left\{ K_0 \cdot \cos^2 \alpha \left(Q_1^* - \frac{\sigma}{z} Q_2^* \right) + F(\alpha) \right\}$$

und für:

$$99) \quad T_{2,2} \cdot R_1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left\{ K_0 \cdot \left[Q_1^* - \frac{\sigma}{z} Q_2^* \right] + F(\alpha) \right\} + \\ + \frac{1}{\sin \alpha} \left\{ -K_0 \cos^2 \alpha \left[Q_1^* - \frac{\sigma}{z} Q_2^* \right] - R_1^2 (\sin \alpha + \lambda) Z \right\}.$$

Für die Biegemomente $G_{1,2}$ und $G_{2,2}$ wird:

$$100) \quad G_{1,2} = \frac{K_0}{z} \left\{ \left[-\frac{1}{\sin^2 \alpha} + \sigma \cdot \frac{\cos \alpha \cdot \cotg \alpha}{\sin \alpha + \lambda} \right] Q_2^\dagger + \cos \alpha \cdot \cotg \alpha \cdot Q_2^{\dagger'} \right\}.$$

$$101) \quad G_{2,2} = \frac{K}{z} \left\{ \left[-\frac{\sigma}{\sin^2 \alpha} + \frac{\cos \alpha \cdot \cotg \alpha}{\sin \alpha + \lambda} \right] Q_2^\dagger + \sigma \cdot \cos \alpha \cdot \cotg \alpha \cdot Q_2^{\dagger'} \right\}.$$

Dabei sind Q_1^\dagger , Q_2^\dagger und $Q_1^{\dagger'}$, $Q_2^{\dagger'}$ ebenfalls nach Wahl von λ und $R_1: h$ bestimmbare Funktionen von α .

Liegt ein Belastungsfall vor, für den $\Phi \neq 0$ ist, ermitteln wir zuerst das dem partikulären Integralsystem entsprechende Spannungssystem, und bestimmen alsdann die Integrationskonstanten c_1, c_2, c_3, c_4 des der Lösung der homogenen Gleichungen entsprechenden Spannungssystems so, dass die Superposition der beiden am Rande das dort durch die Bedingungen vorgeschriebene Spannungssystem ergibt.

Da bei den ersten 4 Belastungsfällen $X = Z = F(\alpha) = H(\alpha) = \Phi = 0$ ist, sind die dem Lösungssystem $\mathfrak{J}_1 V_1$ entsprechenden Spannungen zugleich die totalen Spannungen; die Spannungenkräfte und -Momente werden nach den Gl. 90—96 bestimmt, dabei werden die Integrationskonstanten c_1, c_2, c_3, c_4 aus den Gleichungen:

$$102) \quad \begin{aligned} c_1 f_{1a} + c_2 f_{2a} + c_3 f_{3a} + c_4 f_{4a} &= S_1 \\ c_1 p_{1a} + c_2 p_{2a} + c_3 p_{3a} + c_4 p_{4a} &= S_2 \\ c_1 f_{1i} + c_2 f_{2i} + c_3 f_{3i} + c_4 f_{4i} &= S_3 \\ c_1 p_{1i} + c_2 p_{2i} + c_3 p_{3i} + c_4 p_{4i} &= S_4 \end{aligned}$$

berechnet; dabei bezeichnen die Indices a bzw. i , dass sich der zugehörige Wert auf den Aussen- bzw. auf den Innenrand bezieht; die Werte für S werden von Fall zu Fall bestimmt.

Für den am häufigsten vorkommenden Fall von $\alpha_a = 90^\circ$ wird nach Gl. 68, 70, 73 a, 94, wenn $b = 1: f_{1a} = -\sigma$; $f_{2a} = z$; $f_{3a} = f_{4a} = p_{1a} = p_{2a} = p_{4a} = 0$; $p_{3a} = -1$.

Mit diesen Werten erhält man aus den Gl. 102

$$103) \quad c_2 = \frac{S_1 \frac{1}{\sigma} \{ f_1 p_4 - p_1 f_4 \}_i + S_2 \{ f_3 p_4 - p_3 f_4 \}_i + S_3 p_{4i} - S_4 f_{4i}}{\left\{ \frac{z}{\sigma} f_1 + f_2 \right\}_i p_{4i} - \left\{ \frac{z}{\sigma} p_1 + p_2 \right\}_i f_{4i}}$$

$$c_1 = -\frac{1}{\sigma} \cdot S_1 + \frac{z}{\sigma} c_2; \quad c_3 = -S_2;$$

$$c_4 = \frac{1}{f_{4i}} \left\{ \frac{f_{4i}}{\sigma} S_1 + f_{3i} S_2 + S_3 - c_2 \left[\frac{z}{\sigma} f_1 + f_2 \right]_i \right\}.$$

Erster Belastungsfall: *Die Schale sei am Aussenrand durch ein ringsum gleichmässig verteiltes Kräftepaar vom Moment G_{1a} cm. kg für 1 cm Umfang des Mittelparallelkreises belastet.*

Aus den Randbedingungen: $T_{1i} = N_i = G_{1i} = 0$; $N_a = T_{1a} = 0$; $G_{1a} \neq 0$ folgt für

$$104) \quad S_2 = G_{1a}; \quad S_1 = S_3 = S_4 = 0.$$

Die Integrationskonstanten werden durch Einsetzen dieser Werte von S in die Gl. 102 bzw. 103 aus diesen Gleichungen bestimmt.

Zweiter Belastungsfall: *Die Schale sei am Aussenrand durch einen ringsum gleichmässig verteilten Horizontalzug (senkrecht zur Schalenrotationsachse) H_a kg für 1 cm Umfang des Mittelparallelkreises belastet.*

Da $N_i = T_{1i} = G_{1i} = 0$; $N_a = H_a \sin \alpha_a$; $T_{1a} = -H_a \cos \alpha_a$; $G_{1a} = 0$ ist, erhält man

$$105) \quad S_1 = [\lambda + \sin \alpha_a] H_a \cdot R_1; \quad S_2 = S_3 = S_4 = 0.$$

Dritter Belastungsfall: *Die Schale sei am Innenrand durch ein ringsum gleichmässig verteiltes Kräftepaar vom Moment G_{1i} cm. kg auf 1 cm Umfang des Mittelparallelkreises belastet.*

Hier ist: $N_a = T_{1a} = G_{1a} = 0$; $N_i = T_{1i} = 0$; $G_{1a} \neq 0$ und man erhält:

$$106) \quad S_4 = G_{1i}; \quad S_1 = S_2 = S_3 = 0.$$

Vierter Belastungsfall: *Die Schale sei am Innenrand durch einen ringsum gleichmässig verteilten Horizontalzug H_i kg für 1 cm Umfang des Mittelparallelkreises belastet.*

Aus den Randbedingungen $N_a = T_{1a} = G_{1a} = 0$; $N_i = H_i \sin \alpha_i$; $T_{1i} = -H_i \cos \alpha_i$; $G_{1i} = 0$ folgt:

$$107) \quad S_3 = [\lambda + \sin \alpha_i] H_i R_1; \quad S_1 = S_2 = S_4 = 0.$$

Fünfter Belastungsfall: *Der Innenrand der Schale sei durch einen ringsum gleichmässig verteilten Vertikalzug (parallel zur Schalenrotationsachse) V_i kg, der Aussenrand durch einen solchen von der Grösse V_a kg für 1 cm Umfang des entsprechenden Mittelparallelkreises belastet.*

V_i und V_a müssen so gewählt werden, dass für die ganze Schale das Gleichgewicht erhalten bleibt. Die Komponentengleichung in Richtung der Rotationsachse lautet:

$$108) \quad V_i [\lambda + \sin \alpha_i] = V_a [\lambda + \sin \alpha_a].$$

Da hier, wie wir sehen werden, $\Phi \neq 0$ ist, tritt neben dem System der Spannkraften und Spannungsmomente $N_1, T_{1,1}, T_{2,1}, G_{1,1}, G_{2,1}$ auch dasjenige der $N_2, T_{1,2}, T_{2,2}, G_{1,2}, G_{2,2}$ auf, das letztere soll zuerst bestimmt werden.

Nach Gl. 25 ist da $X = Z = 0$; $F(\alpha) = \text{konstant}$.

Gl. 26, auf den Innenrand der Schale bezogen, gibt:

$$109) \quad F(\alpha_i) = -R_1(\sin \alpha_i + \lambda)[\sin \alpha_i T_{1,2i} + \cos \alpha_i N_{2i}].$$

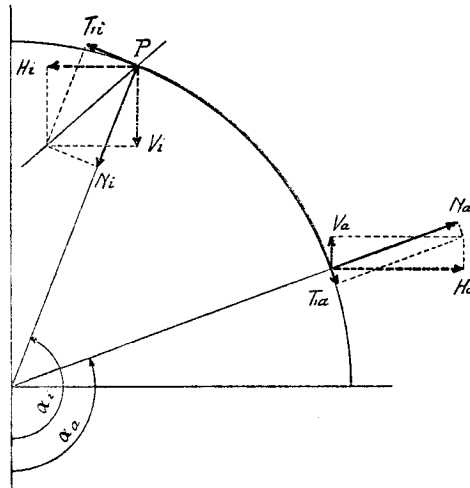


Abb. 5.

Nach Gl. 37 ist, da $X = Z = 0$

$$\Phi = -F(\alpha) \cdot \lambda \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin^4 \alpha (\sin \alpha + \lambda)} [2\lambda + 3 \sin \alpha]$$

für die nach Gl. 76 eingeführten Konstanten K_0 und M erhält man:

$$K_0 = -F(\alpha) \cdot \lambda; \quad M = 0.$$

Die Gl. 97 bis 101 stellen uns mit dem angegebenen Werte von K_0 das dem partikulären Lösungssystem \mathcal{D}_2, V_2 entsprechende Spannungssystem dar.

Aus Gl. 97, bezogen auf den Innenrand, erhält man:

$$110) \quad R_1 \cdot N_{2i} = -F(\alpha) \lambda \cdot \frac{\cos \alpha_i}{\lambda + \sin \alpha_i} \left[Q_{1i}^t - \frac{\sigma}{\alpha} Q_{2i}^t \right].$$

Aus Gl. 109 und 110 oder, was auf dasselbe herauskommt, aus Gl. 98 (bezogen auf den Innenrand) und Gl. 110 ist das Verhältnis von N_{2i} zu $T_{1,2i}$ gegeben, dadurch ist die Richtung der Innenrandkraft, nicht aber ihre Grösse, bestimmt; letztere bleibt willkürlich.

Anstatt die Grösse der Resultierenden (N_{2i} , $T_{1,2i}$) zu wählen, nehmen wir die Grösse ihrer Vertikalkomponente V_i an; dadurch ist die Resultierende selbst und somit der ganze Spannungszustand bestimmt.

Führt man den Wert für $V_i = -[N_{2i} \cos \alpha_i + T_{1,2i} \sin \alpha_i]$ in Gl. 109 ein, wird:

$$F(\alpha) = R_1 V_i [\sin \alpha_i + \lambda],$$

wonach durch Einsetzen dieses Wertes in die Gl. 97 bis 101 die Spannkraften N_2 , $T_{1,2}$, $T_{2,2}$ und die Momente $G_{1,2}$, $G_{2,2}$ erhalten werden.

$$111) \quad N_2 = -V_i \lambda \cdot (\sin \alpha_i + \lambda) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \lambda} \left\{ Q_1^t - \frac{\sigma}{z} Q_2^t \right\}.$$

$$112) \quad T_{1,2} = V_i (\sin \alpha_i + \lambda) \frac{1}{\sin \alpha (\sin \alpha + \lambda)} \left\{ \left(Q_1^t - \frac{\sigma}{z} Q_2^t \right) \lambda \cos^2 \alpha - 1 \right\}.$$

$$113) \quad T_{2,2} = -V_i (\sin \alpha_i + \lambda) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\sin^2 \alpha} \left[\lambda \left(Q_1^t - \frac{\sigma}{z} Q_2^t \right) - 1 \right] - \lambda \cdot \cos \alpha \cdot \cotg \alpha \left[Q_1^t - \frac{\sigma}{z} Q_2^t \right] \right\}.$$

$$114) \quad G_{1,2} = V_i R_1 \cdot \frac{\lambda}{z} (\sin \alpha_i + \lambda) \times \\ \times \left\{ \left[\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \sigma \frac{\cos \alpha \cdot \cotg \alpha}{\sin \alpha + \lambda} \right] Q_2^t - \cos \alpha \cdot \cotg \alpha \cdot Q_2^t \right\}.$$

$$115) \quad G_{2,2} = V_i R_1 \cdot \frac{\lambda}{z} (\sin \alpha_i + \lambda) \times \\ \times \left\{ \left[\frac{\sigma}{\sin^2 \alpha} - \frac{\cos \alpha \cdot \cotg \alpha}{\sin \alpha + \lambda} \right] Q_2^t - \sigma \cos \alpha \cdot \cotg \alpha \cdot Q_2^t \right\}.$$

Um eine nur durch vertikale Randkräfte belastete Schale zu haben, müssen wir über das der partikulären Lösung \mathfrak{D}_2 , V_2 entsprechende Spannungssystem das einer Lösung \mathfrak{D}_1 , V_1 entsprechende superponieren.

Die Konstanten c_1 , c_2 , c_3 , c_4 des letztgenannten Systems werden aus den Gl. 102 bestimmt, dabei sind für S_1 bis S_4 die folgenden Werte einzusetzen:

$$S_1 = -H_{2a} R_1 [\sin \alpha_a + \lambda] = \\ = R_1 [\sin \alpha_a + \lambda] T_{1,2a} \cdot \cos \alpha_a - N_{2a} \cdot \sin \alpha_a.$$

$$\begin{aligned}
 116) \quad S_3 &= -H_{2i}R_1[\sin \alpha_i + \lambda] = \\
 &= R_1[\sin \alpha_i + \lambda]\{T_{1,2i} \cdot \cos \alpha_i - N_{2i} \cdot \sin \alpha_i\}. \\
 S_2 &= -G_{1,2a}; \quad S_4 = -G_{1,2a}.
 \end{aligned}$$

Es soll der am häufigsten vorkommende Spezialfall $\alpha_a = 90^\circ$; $\alpha_i = 180^\circ$ noch kurz behandelt werden; für ihn erhält man nach Gl. 111 bis 115 für die Randwerte:

$$\begin{aligned}
 N_{2,90} &= 0; \quad T_{1,2,90} = -\lambda \frac{V_i}{\lambda + 1}; \quad T_{2,2,90} = -V_i \lambda \left\{ \lambda \left[Q_{1,90}^* - \frac{\sigma}{\chi} \cdot Q_{2,90}^* \right] - 1 \right\}; \\
 G_{1,2,90} &= V_i R_1 \cdot \frac{\lambda^2}{\chi} \cdot Q_{2,90}^*; \quad G_{2,2,90} = V_i R_1 \cdot \frac{\lambda^2}{\chi} \cdot \sigma \cdot Q_{2,90}^*. \\
 N_{2,180} &= V_i = V_{180}; \quad T_{1,2,180} = 0; \quad T_{2,2,180} = V_i \frac{\lambda^3}{2} \left[Q_{1,180}^{**} - \frac{\sigma}{\chi} \cdot Q_{2,180}^{**} \right];
 \end{aligned}$$

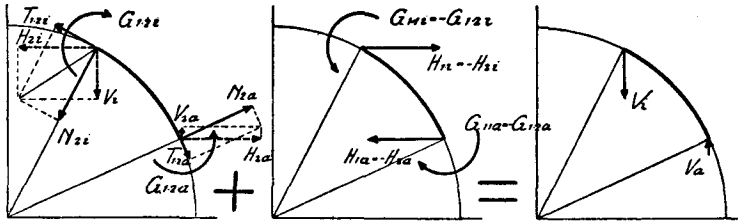


Abb. 6.

dabei ist:

$$Q_1^{**} = \sum_{v=0}^{\infty} v \cdot (v-1) q_{1,v} (\sin \alpha - \delta)^{v-2}; \quad Q_2^{**} = \sum_{v=0}^{\infty} v \cdot (v-1) q_{2,v} (\sin \alpha - \delta)^{v-2}.$$

Aus der Berechnung dieser Werte erhält man als Endlichkeitsbedingungen für $T_{1,2,180}$ und $T_{2,2,180}$ die Gleichungen:

$$116') \quad \left[Q_1^* - \frac{\sigma}{\chi} Q_2^* \right]_{180} = \frac{1}{\lambda}; \quad \left[Q_1' - \frac{\sigma}{\chi} Q_2' \right]_{180} = 0.$$

Den beiden Bedingungen kann für alle Werte von b genügt werden, da wir über die Integrationskonstanten in den Potenzreihen für Q_1^* und Q_2^* frei verfügen können.

Mit $b = 0$ wird, wie aus der Rekursionsformel 82 ersichtlich ist, wenn die unbestimmten Koeffizienten c_0 und c_1 zu null angenommen werden:

$$116'') \quad Q_{1,180}^* = q_{1,0} = 1; \lambda; \quad Q_{2,180}^* = Q_{1,180}' = Q_{2,180}' = 0;$$

die obigen Bedingungen sind damit erfüllt, und man erhält aus den Gl. 114 und 115:

$$G_{1,2,180} = V_i R_1 \frac{3\lambda^2}{2\kappa} Q_{2,180}^{t''}; \quad G_{2,2,180} = V_i \cdot R_1 \cdot \frac{3\lambda^2 \cdot \sigma}{2\kappa} \cdot Q_{2,180}^{t''}.$$

Die Integrationskonstanten der homogenen Lösung bestimmt man mit:

$$S_1 = S_3 = 0; \quad S_2 = -V_i R_1 \cdot \frac{\lambda^2}{\kappa} Q_{2,90}^{t''}; \quad S_4 = -V_i R_1 \cdot \frac{3\lambda^2}{2\kappa} \cdot Q_{2,180}^{t''}$$

aus Gl. 103.

Wenn der Spannungsverlauf der Belastungsfälle 1 bis 4 bekannt ist, brauchen diese Konstanten nicht berechnet zu werden, weil die Superposition direkt durchgeführt werden kann, wenn die Randwerte H_{2i} , H_{2a} , $G_{1,2i}$ und $G_{1,2a}$ bekannt sind.

Sechster Belastungsfall. *Die Schale sei durch konstanten inneren Überdruck p kg auf 1 cm^2 der Schalenmittelfläche und am Innenrand durch einen Vertikalzug V_i kg auf 1 cm Umfang des Mittelparallelkreises belastet.*

Damit die Schale im Gleichgewicht bleibt, müssen an den Rändern vertikale Spannungskräfte wirken; zwischen diesen und der Belastung p besteht die durch die Komponentengleichung in Richtung der Rotationsachse gegebene Beziehung:

$$\begin{aligned} V_i [\sin \alpha_i + \lambda] - V_a [\sin \alpha_a + \lambda] &= \\ &= \frac{p \cdot R_1}{2} \{ \sin \alpha_a [\sin \alpha_a + 2\lambda] - \sin \alpha_i [\sin \alpha_i + 2\lambda] \}. \end{aligned}$$

$F(\alpha)$ erhält man durch Einsetzen von $Z = -p$; $X = 0$ in Gl. 25:

$$117) \quad F(\alpha) = -\frac{R_1^2 p}{2} \{ \sin \alpha [\sin \alpha + 2\lambda] + C \};$$

aus Gl. 37 folgt dann für Φ

$$\Phi = \lambda \cdot C \frac{R_1^2 p}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin^4 \alpha (\sin \alpha + \lambda)} \left\{ 2\lambda + 3 \sin \alpha - \frac{1}{C} \sin^3 \alpha \right\};$$

dies ergibt für die Konstanten K_0 und M (vergl. Gl. 76)

$$118) \quad K_0 = \lambda C \cdot \frac{R_1^2 p}{2}; \quad M = \frac{1}{C}.$$

Es sollen auch wieder zuerst die dem partikulären Integralsystem $\mathfrak{J}_2 V_2$ entsprechenden Spannungen bestimmt werden:

Aus Gl. 97 bis 101 und 117 folgt, dass jedem Wert der Konstanten C ein Spannungssystem entspricht; der Veränderung von C kommt die Superposition eines der Veränderung entsprechenden Belastungsfalles 5 statisch gleich. Wir wählen C so, dass die Vertikalkraft am Aussenrande null sein soll.

Für V_a erhalten wir: $V_a = -\{N_{2a} \cos \alpha_a + T_{1,2a} \sin \alpha_a\}$; anderseits ist nach Gl. 26: $F(\alpha) = -R_1 (\sin \alpha + \lambda) [T_{1,2} \sin \alpha + N_2 \cos \alpha]$.

Aus den zwei letzten Gleichungen folgt, dass, wenn $V_a = 0$ angenommen wird, auch $F(\alpha)_a = 0$ sein muss, dies liefert uns eine Gleichung zur Bestimmung der Konstanten C :

$$119) \quad C = -\sin \alpha_a [\sin \alpha_a + 2\lambda].$$

Nachdem über die Grösse von V_a verfügt wurde, ist das Spannungssystem eindeutig bestimmt, und zwar ist nach Gl. 97 bis 101:

$$120) \quad N_2 = R_1 \cdot \rho \cdot \frac{\lambda \cdot C}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \lambda} \left\{ Q_1^* - \frac{\sigma}{\alpha} Q_2^* \right\};$$

$$121) \quad T_{1,2} = \frac{R_1 \cdot \rho}{2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha [\sin \alpha + \lambda]} \times \\ \times \left\{ \sin \alpha [\sin \alpha + 2\lambda] - C \left[\lambda \cos^2 \alpha \left(Q_1^* - \frac{\sigma}{\alpha} Q_2^* \right) - 1 \right] \right\};$$

$$122) \quad T_2 = \frac{R_1 \cdot \rho}{2} \times \\ \times \left\{ C \left[\frac{1}{\sin^2 \alpha} \left\{ \lambda \left(Q_1^* - \frac{\sigma}{\alpha} Q_2^* \right) - 1 \right\} - \cos \alpha \cdot \cotg \alpha \lambda \left(Q_1^* - \frac{\sigma}{\alpha} Q_2^* \right) \right] + 1 \right\};$$

$$123) \quad G_{1,2} = -\frac{R_1 \rho}{2} \cdot \frac{\lambda \cdot C}{\alpha} \times \\ \times \left\{ \left[\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \sigma \frac{\cos \alpha \cdot \cotg \alpha}{\sin \alpha + \lambda} \right] Q_2^* - \cos \alpha \cdot \cotg \alpha Q_2^* \right\};$$

$$124) \quad G_{2,2} = -\frac{R_1 \rho}{2} \cdot \frac{\lambda \cdot C}{\alpha} \times \\ \times \left\{ \left[\frac{\sigma}{\sin^2 \alpha} - \frac{\cos \alpha \cdot \cotg \alpha}{\sin \alpha + \lambda} \right] Q_2^* - \sigma \cdot \cos \alpha \cdot \cotg \alpha Q_2^* \right\}.$$

Durch Superposition eines aus der Lösung $\mathcal{J}_1 V_1$ hervorgehenden Spannungssystems kann eine Schale erhalten werden, die nur durch konstanten Oberflächendruck und vertikale Randkräfte am Innenrand belastet ist.

Die Integrationskonstanten des superponierten Spannungssystems werden durch Substitution der sich aus den Gl. 120—124 ergebenden Randwerte für N_2 , $T_{1,2}$, $G_{1,2}$ in Gl. 116 und nachheriger Auflösung der Gl. 102 erhalten.

Für den Spezialfall $\alpha_a = 90^\circ$, $\alpha_i = 180^\circ$ erhalten wir:

$$N_{2,90} = T_{1,2,90} = 0;$$

$$T_{2,2,90} = \frac{R_1 \cdot p}{2} \left[2(\lambda + 1) - (1 + 2\lambda) \left\{ \lambda \left(Q_{1,90}^+ - \frac{\sigma}{\varepsilon} Q_{2,90}^+ \right) \right\} \right];$$

$$G_{1,2,90} = \frac{R_1^2 \cdot p}{2} \cdot \frac{\lambda(1 + 2\lambda)}{\varepsilon} Q_{2,90}^+; \quad G_{2,2,90} = \frac{R_1^2 \cdot p}{2} \cdot \frac{\lambda(1 + 2\lambda)}{\varepsilon} \cdot \sigma Q_{2,90}^+;$$

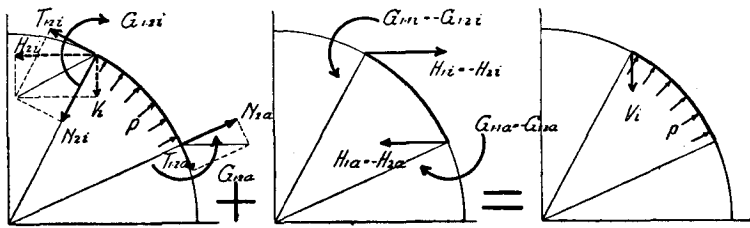


Abb. 7.

und mit den Relationen 116^I, 116^{II}

$$N_{2,180} = R_1 \cdot p \cdot \frac{1 + 2\lambda}{2\lambda}; \quad T_{1,2,180} = R_1 \cdot p;$$

$$T_{2,2,180} = \frac{R_1 \cdot p}{2} \left[1 - \frac{\lambda}{2}(3 + 2\lambda) \left\{ Q_{1,180}'' - \frac{\sigma}{\varepsilon} Q_{2,180}'' \right\} \right];$$

$$G_{1,2,180} = R_1^2 \cdot p \cdot \frac{3\lambda(1 + 2\lambda)}{4\varepsilon} \cdot Q_{2,180}''; \quad G_{2,2,180} = R_1^2 \cdot p \cdot \frac{3\lambda\sigma(1 + 2\lambda)}{4\varepsilon} Q_{2,180}''.$$

Setzt man für:

$$S_1 = 0; \quad S_2 = -R_1^2 \cdot p \cdot \frac{\lambda(1 + 2\lambda)}{2\varepsilon} Q_{2,90}^+; \quad S_3 = -R_1^2 \cdot p \cdot \lambda;$$

$$S_4 = -R_1^2 \cdot p \cdot \frac{3\lambda(1 + 2\lambda)}{4\varepsilon} \cdot Q_{2,180}''$$

in Gl. 103 ein, lassen sich die Integrationskonstanten der homogenen Lösung aus ihnen bestimmen.

Auch hier brauchen die Konstanten, wenn der Spannungsverlauf der Belastungsfälle 1 bis 4 bekannt ist, nicht berechnet zu werden, da in diesem Falle die Superposition direkt vorgenommen werden kann, wenn die Randwerte gegeben sind.

§ 9. *Schalenmeridiane in verschiedenen Quadranten.
Die volle Ringflächenschale.*

Wo in den vorangehenden Untersuchungen keine besonderen Einschränkungen über die Gültigkeit der abgeleiteten Resultate gemacht wurden, gelten diese für jeden Wert von α ; dabei sind je nach der Lage des Schalenmeridians in den verschiedenen Quadranten die in Abb. 8 angegebenen Bezeichnungen zu verwenden.

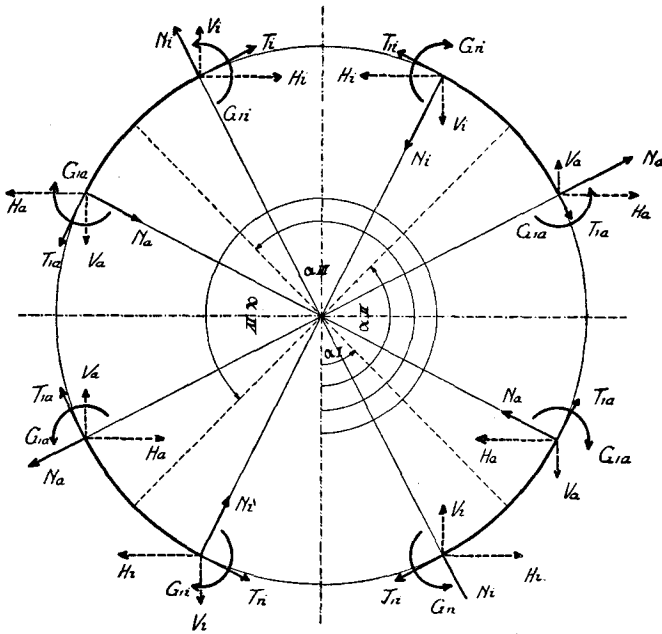


Abb. 8.

Um eine möglichst gute Konvergenz zu erreichen, werden wir über die in allen unseren Potenzreihen auftretende Konstante b zweckmässig verfügen. So wird für Schalenmeridiane, die im ersten und im zweiten Quadranten liegen, diese Konstante den Wert $+1$ erhalten, während für Meridiane im dritten und vierten Quadranten $b = -1$ gewählt wird.

Es kann nun vorkommen, dass man für gewisse Schalen nicht mit ein und demselben Wert von b für alle Werte von α genügend konvergente Reihen erhält. So wird z. B. für eine Schale, deren Meridian im zweiten und dritten Quadranten liegt, im allgemeinen kein solcher

Wert für b gefunden werden können, es soll daher an Hand dieses Beispiels gezeigt werden, wie in solchen Fällen immer verfahren werden kann, um den Spannungsverlauf der ganzen Schale zu ermitteln.

Wir zerlegen die Schale, wie in Abb. 8_a angegeben, in zwei Teile, worauf jeder Teil für sich nach den früher angegebenen Methoden mit verschiedenen Werten von b durchgerechnet werden kann.

Dabei sind die Werte von T_1 und G_1 für die Schnittstelle ($\alpha = 180^\circ$) statisch unbestimmte Grössen, während N durch Aufstellen der Komponentengleichung in Richtung der Rotationsachse gefunden werden kann.

Bei der Behandlung des Schalenteiles I treten 4 Integrationskonstanten $c_{1,I}$, $c_{2,I}$, $c_{3,I}$, $c_{4,I}$ [die Indizes in römischen Zahlen bezeichnen im

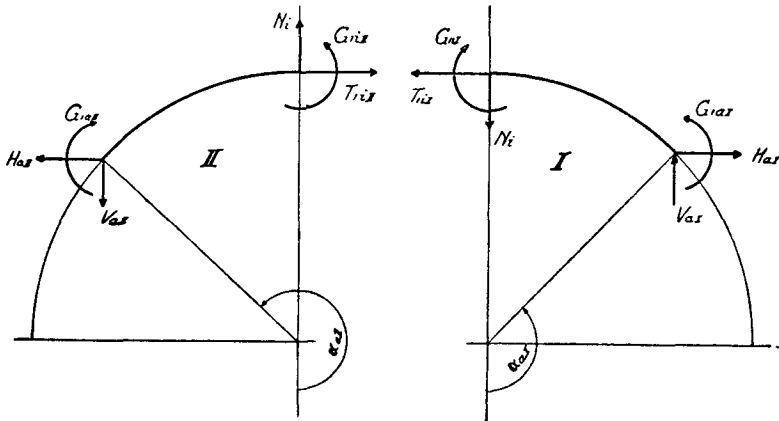


Abb. 8 a.

folgenden den Schalenteil, auf den sich die Grössen beziehen] bei denjenigen des zweiten Teiles die Konstanten $c_{1,II}$, $c_{2,II}$, $c_{3,II}$, $c_{4,II}$ auf, zwischen diesen Konstanten bestehen 8 Beziehungen, nämlich:

2 zwischen den Grössen $c_{1,I}$ bis $c_{4,I}$ aus den Bedingungen am Aussenrand I:

$$c_{1,I} \cdot f_{1,aI} + c_{2,I} \cdot f_{2,aI} + c_{3,I} \cdot f_{3,aI} + c_{4,I} \cdot f_{4,aI} = H_{a,I} [\sin \alpha_1 + \lambda] R_1,$$

$$c_{1,I} \cdot p_{1,aI} + c_{2,I} \cdot p_{2,aI} + c_{3,I} \cdot p_{3,aI} + c_{4,I} \cdot p_{4,aI} = G_{1,aI};$$

2 zwischen den Grössen $c_{1,II}$ bis $c_{4,II}$ aus den Bedingungen am Aussenrand II:

$$c_{1,II} \cdot f_{1,aII} + c_{2,II} \cdot f_{2,aII} + c_{3,II} \cdot f_{3,aII} + c_{4,II} \cdot f_{4,aII} = H_{a,II} [\sin \alpha_2 + \lambda] R_1,$$

$$c_{1,II} \cdot p_{1,aII} + c_{2,II} \cdot p_{2,aII} + c_{3,II} \cdot p_{3,aII} + c_{4,II} \cdot p_{4,aII} = G_{1,aII};$$

und die 4 Beziehungen, die ausdrücken, dass für die Trennungsstelle die Spannungszustände beider Schalenteile dieselben sind:

$$\begin{aligned} T_{1,1I} + T_{1,2I} &= T_{1,1II} + T_{1,2II}; & T_{2,1I} + T_{2,2I} &= T_{2,1II} + T_{2,2II} \\ G_{1,1I} + G_{1,2I} &= G_{1,1II} + G_{1,2II}; & G_{2,1I} + G_{2,2I} &= G_{2,1II} + G_{2,2II} \end{aligned}$$

Da die Integrationskonstanten c_1 bis c_4 in den Ausdrücken für $T_{1,1}$, $T_{2,1}$, $G_{1,1}$ und $G_{2,1}$ auftreten, geben uns die letzten 4 Gleichungen 4 Beziehungen zwischen den 8 Integrationskonstanten.

Nachdem die Integrationskonstanten bestimmt sind, kann der Spannungsverlauf auf bekannte Weise ermittelt werden.

Zum Schlusse seien noch einige Bemerkungen über die *volle, durch konstanten inneren Überdruck belastete Schale* gemacht.

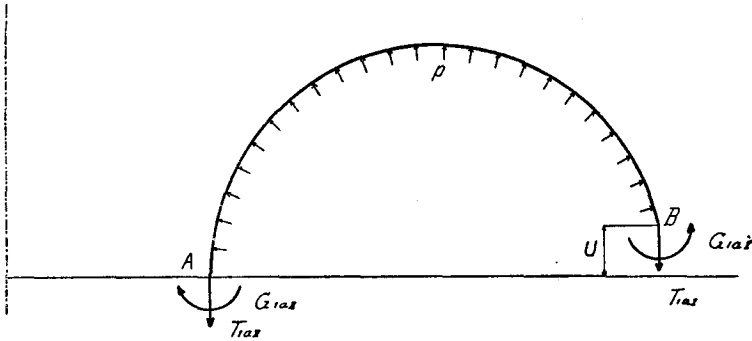


Abb. 9.

Wir denken uns den Ring längs der Symmetrieebene senkrecht zur Rotationsachse aufgeschnitten, es müssen dann an den Schnittstellen Spannkraften T_{1aII} und T_{1aI} und Spannungsmomente G_{1aII} und G_{1aI} angebracht werden, während der Schub der Symmetrie wegen fehlen muss.

Zwischen den 4 statischen Unbekannten und den Überdruckkräften besteht eine Gleichgewichtsbedingung; die drei anderen zu ihrer Bestimmung notwendigen Beziehungen erhalten wir aus den Deformationsbedingungen; in A ist $\vartheta = 0$; in B ist $\vartheta = 0$ und $u = 0$.

Nachdem die statisch unbestimmten Grössen bestimmt sind, bietet das Problem keine prinzipiellen Schwierigkeiten mehr.

§ 10. Die elastischen Verschiebungen.

Aus den Normalspannungen $\sigma_r = \frac{T_1}{2h}$ und $\sigma_t = \frac{T_2}{2h}$ berechnet man nach Gl. 34 und 35 die Dehnungen ε_{x_0} und ε_{y_0} :

$$\varepsilon_{x_0} = \frac{1}{E} \{ \sigma_r - \sigma \sigma_t \}; \quad \varepsilon_{y_0} = \frac{1}{E} \{ \sigma_t - \sigma \sigma_r \}.$$

Setzt man diese Werte für ε_{x_0} und ε_{y_0} in die Gl. 1 und 5 ein, erhält man:

$$\frac{du}{d\alpha} - w = \frac{R_1}{E} \{ \sigma_r - \sigma \sigma_t \}$$

und
$$u \cos \alpha - w \sin \alpha = \frac{R_1}{E} (\sin \alpha + \lambda) \{ \sigma_t - \sigma \sigma_r \};$$

durch Elimination von w aus den zwei Gleichungen wird:

$$-\frac{du}{d\alpha} \sin \alpha + u \cdot \cos \alpha = \frac{R_1}{E} \{ (1 + \sigma) \sin \alpha [\sigma_t - \sigma_r] + \lambda [\sigma_t - \sigma \sigma_r] \}.$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet $u_0 = k_0 \cdot \sin \alpha$. Durch Variation der Konstanten erhält man für diese:

$$k_0 = -\frac{R_1}{E} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{1}{\sin^2 \alpha} \{ (1 + \sigma) \sin \alpha [\sigma_t - \sigma_r] + \lambda [\sigma_t - \sigma \sigma_r] \} d\alpha + k;$$

somit ist:

$$125) \quad u = k \sin \alpha - \frac{R_1}{E} \sin \alpha \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{1}{\sin^2 \alpha} \{ (1 + \sigma) \sin \alpha [\sigma_t - \sigma_r] + \lambda [\sigma_t - \sigma \sigma_r] \} d\alpha.$$

Die Konstante k ist von der Wahl des Nullpunktes abhängig, da zu der Verschiebung (uw) stets noch eine starre Verschiebung zugefügt werden kann.

Für $\alpha = 180$ erhält die Gl. 125 unbestimmte Form, für u_{180} ist aber

$$u_{180} = -\frac{R_1}{E} \{ \sigma_t - \sigma \sigma_r \}_{180} \lambda.$$

Für die Verschiebung Δh eines Punktes der Schalenmittelfläche senkrecht zur Rotationsachse findet man:

$$126) \quad \Delta h = \frac{R_1}{E} (\sin \alpha + \lambda) [\sigma_t - \sigma \sigma_r].$$

und für w :

$$127) \quad w = \frac{1}{\sin \alpha} \{u \cos \alpha - \Delta h\};$$

die axiale Verschiebung f wird nach Gl.

$$128) \quad f = -(w \cos \alpha + u \sin \alpha)$$

berechnet, und die Winkeländerung \mathcal{J} erhält man nach Gl. 69

$$129) \quad \mathcal{J} = \frac{-1}{2Eh^2} \sqrt{3(1-\sigma^2)} \{c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + c_4 a_4\};$$

damit sind alle Deformationsgrößen bestimmt.

III. ABSCHNITT.

Numerische Berechnungen.

Da die Berechnung der Spannungen und der Deformationsgrößen nach der bis jetzt entwickelten Theorie keineswegs einfach ist, kann es sich hier nicht darum handeln, die Festigkeitsverhältnisse aller Ringflächenschalen klarzulegen, und etwa durch Aufstellen von empirischen Formeln zu ermöglichen, dass der Spannungsverlauf für alle Schalen auf einfache Weise ermittelt werden könnte. Es soll vielmehr durch die vollständige Durchrechnung eines Beispiels gezeigt werden, dass die entwickelte Theorie praktisch brauchbar ist; damit erhalten wir zum ersten Male einen Einblick in die Festigkeitsverhältnisse der Ringflächenschalen.

An Hand der Kurven, die uns den Spannungsverlauf für eine Schar von Schalen mit verschiedenen Wandstärken angeben, soll der Einfluss der Schalenstärke auf den Spannungsverlauf diskutiert werden.

§ 11. *Behandlung der sechs elementaren Belastungsfälle für eine Schale $R_1: h = 10$; $\lambda = 10$.*

Im folgenden sollen für eine gegebene Schale [$\lambda = 10$; $R_1: h = k = 10$; $\alpha_i = 180^\circ$; $\alpha_a = 90^\circ$; Materialkonstanten: $\sigma = 0,3$; $E = 2.15 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$] der Spannungsverlauf und die Deformationsgrößen bei beliebigen Randbedingungen und für eine Belastung der Schale durch konstanten inneren Überdruck $p \text{ kg/cm}^2$ ermittelt werden; damit wird gezeigt, wie für die in der Praxis hauptsächlich vorkommenden Fälle symmetrischer Belastung das Problem der Festigkeitsberechnung von Ringflächenschalen gelöst wird.

Bevor über die Art der Belastung verfügt wird, werden die für alle Belastungsfälle notwendigen Vorbereitungsrechnungen ausgeführt.

Mit $\sigma = 0,3$ und $k = 10$ wird nach Gl. 44: $\alpha = 16,5200$.

Aus der Rekursionsformel 62 berechnet man mit $b = 1$ bei Berücksichtigung der Gl. 60 und 65 die Koeffizienten $c_v: c_o$ und $c_v^*: c_o^*$ und darauf die Koeffizienten m_v, n_v, m_v^*, n_v^* der Potenzreihen J_1, J_2, J_3, J_4 . Diese letzten Koeffizienten sind in Zahlentafel I angegeben.

Die Funktionen J_1, J_2, J_3, J_4 werden für Werte von α von 5^0 zu 5^0 nach Gl. 67 berechnet, nachher wurden die in Zahlentafel II angegebenen

Werte für $f_v^\dagger = f_v \cdot \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha + \lambda}$; $f_v^* = f_v \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \lambda}$; g_v ; p_v ; q_v

nach Gl. 68, 70 und 73, 75, 94, 96 bestimmt.

Nachdem die Funktionswerte der Zahlentafel II bekannt sind, kann für die elementaren Randbelastungsfälle 1 bis 4 der Verlauf von N_1, T_1, T_2, G_1, G_2 angegeben werden; bei den Belastungsfällen 5 und 6 ist noch die Kenntnis des Spannungssystems, das einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung 45 entspricht, notwendig; dieses wird von Fall zu Fall bestimmt.

Zahlentafel I.

$v =$	0	1	2	3	4	5	6	7	
m_v	1	0	0.37316	0.02096	0.02055	0.00706	0.00273	0.00112	
n_v	0	1.50182	0.06826	0.03157	0.00719	0.00379	0.00122	0.00039	
m_v^*	1	0.36364	0.07358	0.05319	0.02930	0.01430	0.00681	0.00323	
n_v^*	0	0.50061	0.13198	0.03178	0.01149	0.00435	0.00166	0.00064	
$v =$	0	8	9	10	11	12	13	14	15
m_v	1	0.00047	0.00020	0.00009	0.00004	0.00002	0.00001	0.00000	0.00000
n_v	0	0.00013	0.00005	0.00002	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
m_v^*	1	0.00154	0.00073	0.00035	0.00017	0.00008	0.00004	0.00002	0.00001
n_v^*	0	0.00025	0.00010	0.00004	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Für den Mittelwert der Schubspannung [kurz «Schubspannung» genannt] ist:

$$130) \quad \tau \cdot R_1 = \frac{k}{2} \cdot N.$$

Der Wert für R_1 braucht nicht näher spezialisiert zu werden, da alle ähnlichen Schalen [Schalen mit gleichen Werten von k und λ und gleichen Randverhältnissen] bei gleicher Art der Belastung gleich beansprucht werden.

Die gleichmässig verteilte Normalspannung in radialer Richtung [«Radialspannung»] wird aus der Gleichung:

$$131) \quad \sigma_r \cdot R_1 = \frac{k}{2} T_1$$

berechnet, während für die gleichmässig verteilte Normalspannung in tangentialer Richtung [«Ringspannung»] die Gleichung gilt:

$$132) \quad \sigma_t \cdot R_1 = \frac{k}{2} \cdot T_2.$$

Für die Maximalwerte der reinen Biegungsspannung in der Innenfaser ($z = +h$) in radialer Richtung [«Radialbiegungsspannung»] erhält man:

$$133) \quad \sigma_{zm} \cdot R_1^2 = \frac{3}{2} k^2 \cdot G_1$$

und für die Höchstwerte der reinen Biegungsspannung in der Innenfaser in tangentialer Richtung [«Ringbiegungsspannung»]

$$134) \quad \sigma_{ym} \cdot R_1^2 = \frac{3}{2} k^2 \cdot G_1.$$

Zur Bestimmung der Deformationsgrösse u wird die Gl. 125 verwendet. In allen Fällen wird $u_{90} = 0$ angenommen, so dass $k = 0$ wird.

Da das Vorzeichen von:

$$y(\alpha) = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \{ (1 + \sigma) \sin \alpha [\sigma_t - \sigma_r] + \lambda [\sigma_t - \sigma \sigma_r] \}$$

nicht für das ganze Intervall von $\alpha = 90^0$ bis $\alpha = 180^0$ dasselbe bleibt substituiert man der bequemeren Berechnung wegen:

$$y_{(\alpha)}^* = y_{90} - y(\alpha)$$

und erhält

$$Eu = R_1 \cdot \sin \alpha \left\{ \int_{\alpha_{90}}^{\alpha} y_{(\alpha)}^* d\alpha - y_{90} \cdot \alpha \right\};$$

$y_{(\alpha)}^*$ wurde für Werte von α von $2^{1/2}0$ zu $2^{1/2}0$ bestimmt, die Integrale $\int_{\alpha_{90}}^{\alpha} y_{(\alpha)}^* \cdot d\alpha$ wurden mit Hilfe der Simpsonschen Regel für Werte von α von 5^0 zu 5^0 berechnet.

Nachdem u und Δh [Gl. 126] bekannt sind, können w und f nach Gl. 127 und 128 berechnet werden.

Erster Belastungsfall. *Die Schale sei am Aussenrand durch ein ringsum gleichmässig verteiltes Kräftepaar vom Momente G_{1a} cm. kg für 1 cm Umfang des Mittelparallelkreises belastet.*

Die Integrationskonstanten c_1 bis c_4 werden nach Gl. 103 und 104 berechnet.

$$c_1 = -3,27532 G_{1a}; \quad c_2 = -0,05948 G_{1a}; \quad c_3 = -G_{1a}; \quad c_4 = 2,84877 G_{1a}.$$

Der Verlauf von N , T_1 , T_2 , G_1 , G_2 wird unter Zuhilfenahme der Zahlentafel II nach Gl. 90, 91, 92, 93, 95 bestimmt.

Wir setzen $R_1 \cdot N = A_1 \cdot G_{1a}$; $R_1 \cdot T_1 = B_1 \cdot G_{1a}$; $R_1 \cdot T_2 = C_1 \cdot G_{1a}$; $G_1 = D_1 \cdot G_{1a}$; $G_2 = E_1 \cdot G_{1a}$; A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , E_1 sind Funktionen von α , die Funktionswerte sind für α in Intervallen von 5^0 zu 5^0 berechnet worden; sie sind in Zahlentafel III₁ eingetragen.

Wird die Radialbiegungsspannung am Aussenrande der Schale

$$\sigma_{zma} = 1 \text{ kg/cm}^2$$

angenommen, ist:

$$\tau = \frac{A_1}{3k} \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_r = \frac{B_1}{3k} \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_t = \frac{C_1}{3k} \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_{zm} = D_1 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_{ym} = E_1 \text{ kg/cm}^2.$$

Aus Abb. 10, die den Verlauf dieser Spannungen wiedergibt, ist ersichtlich, dass bei einer am Aussenrand durch ein Kräftepaar belasteten Schale die Ringspannungen und die Biegungsspannungen in den Vordergrund treten, während Radial- und Schubspannungen klein bleiben.

Die Ringspannungen sind in der Nähe des Aussenrandes Zug-, in der Nähe des Innenrandes Druckspannungen; sie beanspruchen die tangentialen Fasern in der Nähe des belasteten Randes viel stärker als diejenigen des Innenrandes. Der Verlauf dieser Spannungen ist der, wie er dem Gefühle nach zu erwarten war. Die Höchstwerte der Ringspannungen sind:

$$\sigma_{ta} = 1,579 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_{ti} = -0,888 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Randwerte der Radialbiegungsspannungen sind durch die Randbedingungen gegeben. σ_{zma} ist der Höchstwert dieser Spannungen, die gegen den Innenrand hin ziemlich rasch gegen null abfallen. Die Radialfasern werden der Biegung wegen auf der Innenseite der Schale gezogen, auf der Aussenseite gedrückt.

Die Kurve der Ringbiegungsspannungen hat schwingenden Charakter. Die Spannungen σ_{ym} sind auf der Innenseite überall Zugspannungen; ihr Höchstwert tritt bei $\alpha = 105^\circ$ auf.

$$\sigma_{ym} \cdot \max = + 0.328 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Radial- und die Schubspannungen machen überall nur einige Prozent der übrigen Spannungen aus. Die Radialspannungen sind durchwegs Druckspannungen.

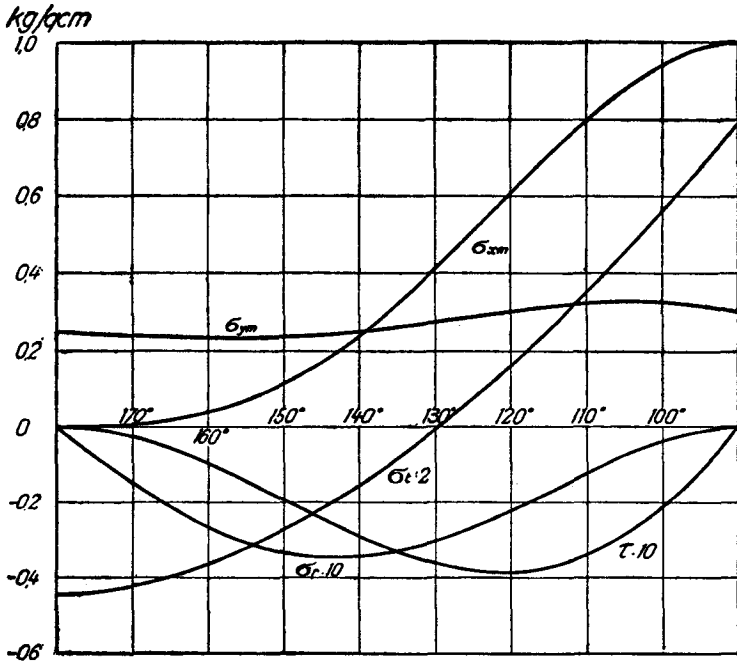


Abb. 10.
Belastungsfall 1. Spannungsverlauf. $\sigma_{zma} = 1 \text{ kg/cm}^2$.

$$|\sigma_r| \max = + 0.0346 \text{ kg/cm}^2 \quad [\alpha = 145^\circ];$$

$$|\tau| \max = + 0.0385 \text{ kg/cm}^2 \quad [\alpha = 126^\circ].$$

Die grösste Zugspannung tritt auf der Innenseite des Aussenrandes in tangentialer Richtung auf.

$$\sigma_{yt} \max = \sigma_{yta} = + 1.879 \text{ kg/cm}^2;$$

sie hat beinahe den doppelten Wert der durch die Randbedingung gegebenen Radialbiegungsspannung σ_{zma} .

Die grösste Druckspannung erleiden die tangential gelegenen Fasern auf der Aussenseite der Innenrandes.

$$\sigma_{yt} \min = \sigma_{yti} = -1.136 \text{ kg/cm}^2.$$

Die radialen Fasern werden auf der Innenseite gezogen, auf der Aussenseite gedrückt, nur in der Nähe des Innenrandes [$\alpha = 160^\circ$ bis

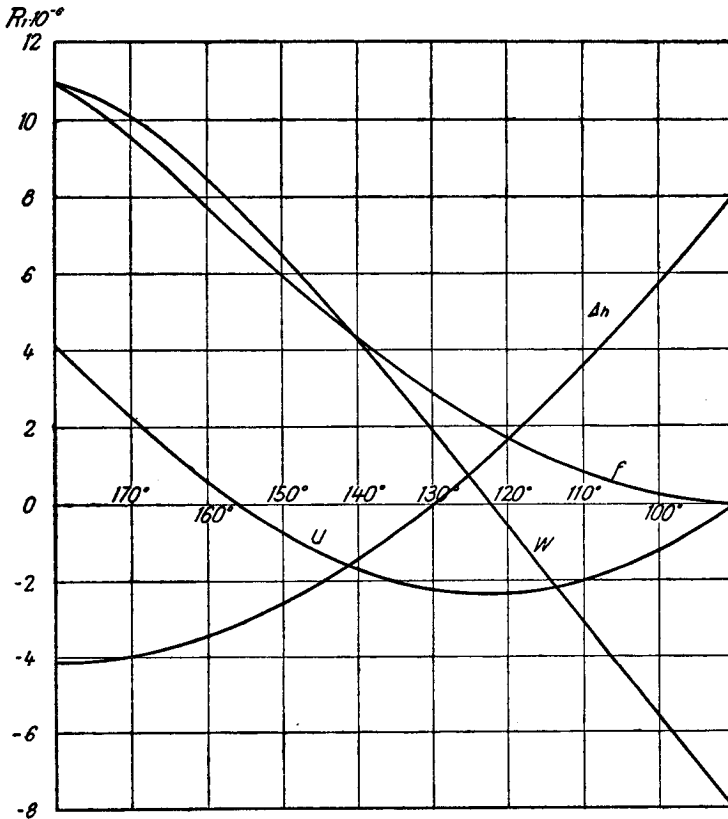


Abb. 11.

Belastungsfall 1. Deformationen. $\sigma_{xma} = 1 \text{ kg/cm}^2$.

180°] sind die totalen radialen Normalspannungen überall Druckspannungen, da dort $|\sigma_r| > |\sigma_{xm}|$ ist.

$$\sigma_{xt} \max = \sigma_{xta} = 1 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Innenseite);}$$

$$\sigma_{xt} \min = -\sigma_{xta} = -1 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Aussenseite).}$$

Der Verlauf der Deformationsgrößen ist aus Abb. 11 ersichtlich. Da Δh in der Nähe von $\alpha = 130^\circ$ null ist, werden die zugehörigen Fasern in tangentialer Richtung weder verlängert noch verkürzt; die ganze Schale wird bei der Deformation um diesen Parallelkreis verdreht; dadurch wird die Schale am belasteten Aussenrand ausgeweitet, während die Radien der Parallelkreise gegen den Innenrand hin immer mehr verkleinert werden.

In Abb. 12 ist das elastische Verhalten der Schale $R_1 = 10 \text{ cm}$ bei $\sigma_{xma} = 1000 \text{ kg/cm}^2$ dargestellt; die Deformationen sind ihrer Kleinheit wegen in einem 10mal grösseren Massstab aufgetragen, als der Radius R_1 .

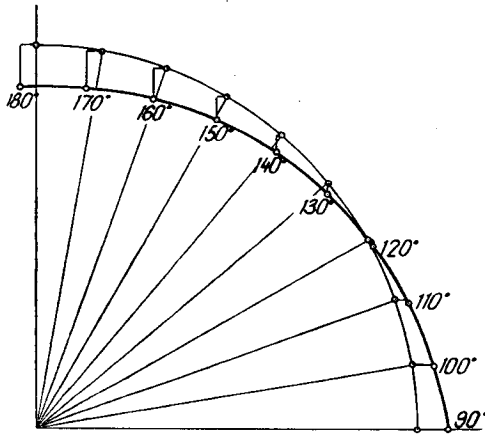


Abb. 12.

Belastungsfall 1. Deformation. $\sigma_{xma} = 1000 \text{ kg/cm}^2$.

Zweiter Belastungsfall. Der Aussenrand der Schale sei durch einen gleichmässig verteilten Horizontalzug $N_a \text{ kg}$ für 1 cm Umfang des Mittelparallelkreises belastet.

Aus Gl. 103 und 105 bestimmt man die Integrationskonstanten:

$$c_1 = -1.89543 N_a \cdot R_1; \quad c_2 = -0.63144 N_a \cdot R_1;$$

$$c_3 = 0; \quad c_4 = 2.19958 N_a \cdot R_1.$$

Der Verlauf von N , T_1 , T_2 , G_1 , G_2 wird wie beim ersten Belastungsfall ermittelt; wir setzen: $N = A_2 \cdot N_a$; $T_1 = B_2 \cdot N_a$; $T_2 = C_2 \cdot N_a$; $G_1 = D_2 \cdot N_a \cdot R_1$; $G_2 = E_2 \cdot N_a \cdot R_1$; die Funktionswerte für A_2 bis E_2 sind in Zahlentafel III₂ angegeben.

Mit

$$\tau_a = 1 \text{ kg/cm}^2$$

erhält man für die übrigen Spannungen:

$$\tau = A_2 \text{ kg/cm}^2; \sigma_r = B_2 \text{ kg/cm}^2; \sigma_t = C_2 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_{xm} = 3k \cdot D_2 \text{ kg/cm}^2; \sigma_{ym} = 3k \cdot E_2 \text{ kg/cm}^2;$$

ihr Verlauf ist aus Abb. 13 ersichtlich.

Auch hier liefert die Ringspannung weitaus die grössten Spannungskomponenten; diese sind, wie zu erwarten war, am Aussenrande Zug-, am Innenrande Druckspannungen:

$$\sigma_t \text{ max} = \sigma_{ta} = 36.337 \text{ kg/cm}^2; \sigma_t \text{ min} = \sigma_{ti} = -9.876 \text{ kg/cm}^2.$$

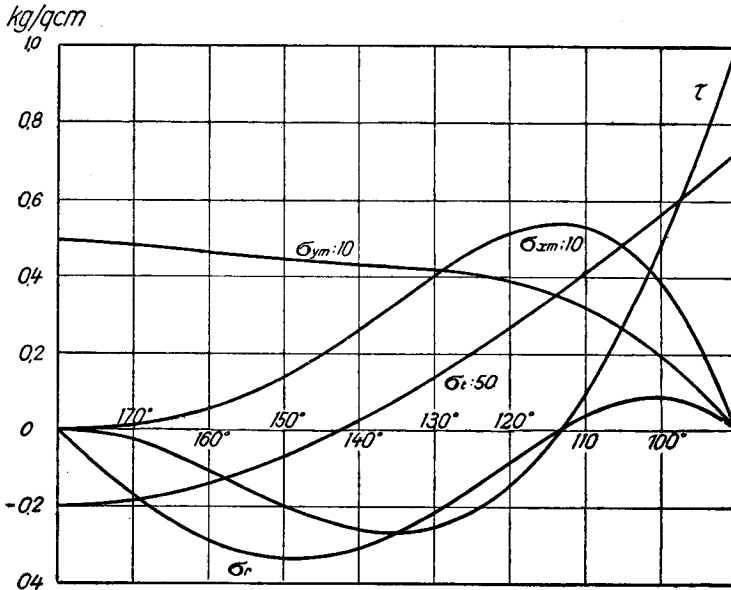


Abb. 13.

Belastungsfall 2. Spannungsverlauf. $\tau_a = 1 \text{ kg/cm}^2$.

Der maximale Ringzug erreicht hier den 36fachen Wert der durch die Randbedingungen vorgeschriebenen Schubspannung am Aussenrande. Der belastete Rand wird im Verhältnis zum Innenrand viel stärker beansprucht als beim ersten Belastungsfall.

Neben den Ringspannungen treten auch hier die Biegungsspannungen am stärksten hervor; die Radialbiegungsspannung erreicht ihren Höchstwert in der Nähe des Aussenrandes:

$$\sigma_{xm} \text{ max} = 5.351 \text{ kg/cm}^2 \quad [\alpha = 114^\circ];$$

die Fasern werden infolge der radialen Biegung auf der Innenseite gezogen, auf der Aussenseite gedrückt.

Die grösste Tangentialbiegungsspannung tritt am Innenrand auf:

$$\sigma_{ym} \cdot \max = \sigma_{ymt} = 4.946 \text{ kg/cm}^2;$$

sie beansprucht die Innenfaser wie bei Belastungsfall 1 auf Zug.

Die Schubspannungen, deren Randwerte durch die Randbedingungen gegeben sind:

$$\tau_a = 1 \text{ kg/cm}^2,$$

fallen in der Nähe des belasteten Randes sehr rasch ab und bleiben dann im Vergleich zu den Ring- und den Biegungsspannungen sehr klein.

Die Radialspannungen bleiben in ihrem ganzen Verlauf unbedeutend.

$$\sigma_r \cdot \min = -0.336 \text{ kg/cm}^2 [\alpha = 150^0]; \quad \sigma_r \cdot \max = 0.085 \text{ kg/cm}^2 [\alpha = 101^0].$$

Die totalen Tangentialspannungen sind in der Nähe des Aussenrandes Zug-, in der Nähe des Innenrandes Druckspannungen.

$$\sigma_{yt} \cdot \max = \sigma_{yta} = \sigma_{ta} = 36.337 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_{yt} \cdot \min = \sigma_{yta} = -14.821 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Aussenseite).}$$

Die Maximalwerte der totalen Radialspannungen in einem Querschnitt sind im wesentlichen mit den Radialbiegungsspannungen identisch.

$$\sigma_{rt} \cdot \max = 5.351 \text{ kg/cm}^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Zug auf Innenseite} \\ \text{Druck auf Aussenseite} \end{array} \right\} [\alpha = 114^0];$$

in der Nähe des Innenrandes haben wir wieder eine radiale Druckzone im ganzen Querschnitt.

Die elastischen Verschiebungen sind in Abb. 14 wiedergegeben. Die Formänderung ist ähnlich wie im ersten Belastungsfall, nur liegt der ungedehnte Parallelkreis der stärkeren Beanspruchung der Aussenrandpartien wegen näher am Innenrand.

Dritter Belastungsfall. *Der Innenrand der Schale sei durch ein ringsum gleichmässig verteiltes Kräftepaar vom Moment G_{11} , cm. kg für 1 cm Umfang des Mittelparallelkreises belastet.*

Zur Berechnung der Integrationskonstanten dienen die Gl. 103 und 106

$$c_1 = 2.44628 G_{11}; \quad c_2 = 0.04442 G_{11}; \quad c_3 = 0; \quad c_4 = -2.47374 G_{11};$$

die Spannungsgrössen werden auf bekannte Weise berechnet, wir setzen:

$$R_1 \cdot N = A_3 \cdot G_{11}; \quad R_1 \cdot T_1 = B_3 \cdot G_{11}; \quad R_1 \cdot T_2 = C_3 \cdot G_{11}; \quad G_1 = D_3 \cdot G_{11}; \\ G_2 = E_3 \cdot G_{11};$$

dabei sind A_3 bis E_3 die in Zahlentafel III₃ eingetragenen Funktionen.

Ist die Radialspannung am Innenrand $\sigma_{xmi} = 1 \text{ kg/cm}^2$, erhält man:

$$\tau = \frac{A_3}{3k} \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_r = \frac{B_3}{3k} \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_t = \frac{C_3}{3k} \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_{xm} = D_3 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_{ym} = E_3 \text{ kg/cm}^2;$$

die zugehörigen Spannungskurven sind in Abb. 15 eingezeichnet.

Die Ringspannungen, die wieder die stärkste Beanspruchung be-

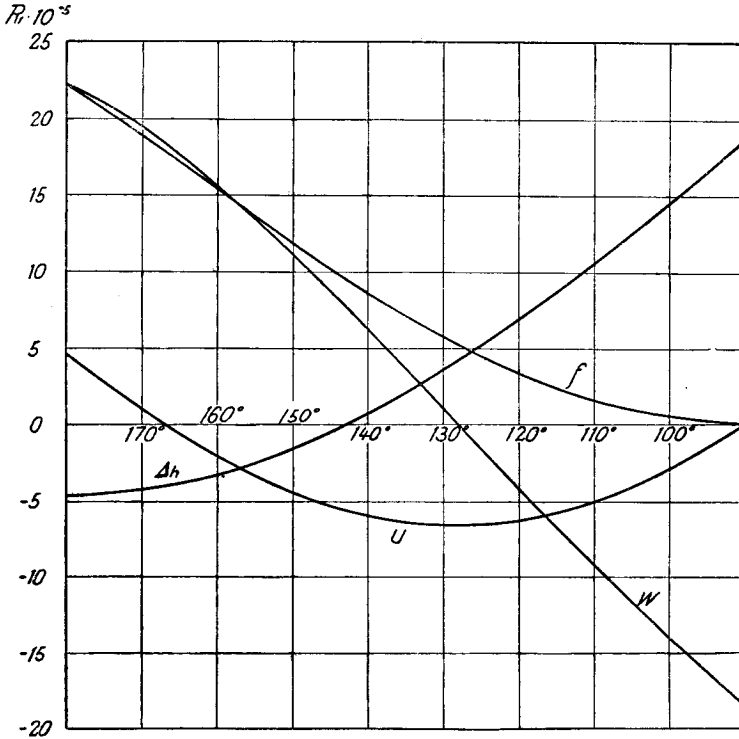


Abb. 14.

Belastungsfall 2. Deformationen. $\tau_a = 1 \text{ kg/cm}^2$.

wirken, müssen am Innenrand Zug-, am Aussenrand Druckspannungen sein.

$$\sigma_t \max = \sigma_{ti} = 0.880 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_t \min = \sigma_{ta} = -1.362 \text{ kg/cm}^2.$$

Es ist bemerkenswert, dass die Ringspannung am belasteten Rande absolut kleiner ist, als am Aussenrand, und dass sie am Innenrand nahezu denselben Wert hat, wie wenn der Aussenrand allein durch ein negatives Moment [$\sigma_{xma} = -1 \text{ kg/cm}^2$] belastet wird.

Die Radialbiegungsspannung erreicht ihren Höchstwert am Innenrand; die σ_{xm} -Kurve fällt gegen den unbelasteten Rand hin weniger rasch ab, als beim ersten Belastungsfall. Wegen der grösseren Steifigkeit des belasteten Randes haben wir hier gleichmässigeren Spannungsverteilung und Ausnützung des Materials.

Die Kurve der Tangentialbiegungsspannungen behält den schwingenden Charakter bei, die Spannungen schwanken zwischen

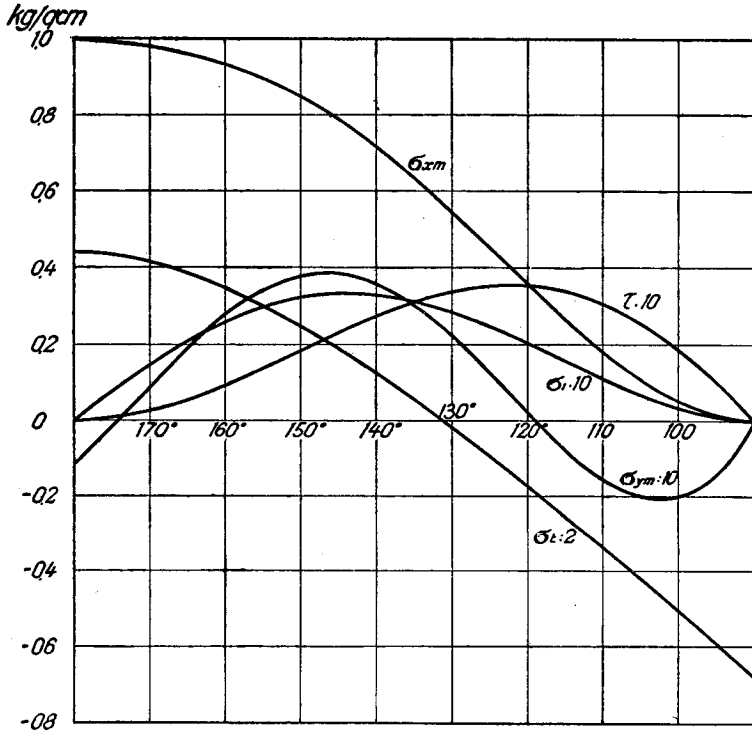


Abb. 15.

Belastungsfall 3. Spannungsverlauf. $\sigma_{xmi} = 1 \cdot \text{kg/cm}^2$.

$\sigma_{ym} \max = 0.039 \text{ kg/cm}^2$ ($\alpha = 147^\circ$); $\sigma_y \min = -0.020 \text{ kg/cm}^2$ [$\alpha = 103^\circ$];
sie beanspruchen die tangentialen Fasern bald auf Zug, bald auf Druck.

Die Schub- und die Radialspannungen sind durchwegs klein:

$$\begin{aligned} \sigma_r \max &= 0.033 \text{ kg/cm}^2 \quad [\alpha = 146^\circ], \\ \tau \max &= 0.035 \text{ kg/cm}^2 \quad [\alpha = 123^\circ]; \end{aligned}$$

während die Schubspannungen den Sinn haben, den man dem Gefühl

nach voraussagt, würde man für die Radialspannungen eher Druckspannungen erwarten.

Der Betrag der totalen Tangentialspannungen wird am Aussenrande maximal.

$$\sigma_{yt} \min = \sigma_{yta} = -1.362 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_{yt} \max = \sigma_{yti} = 0.892 \text{ kg/cm}^2 \text{ (Innenseite).}$$

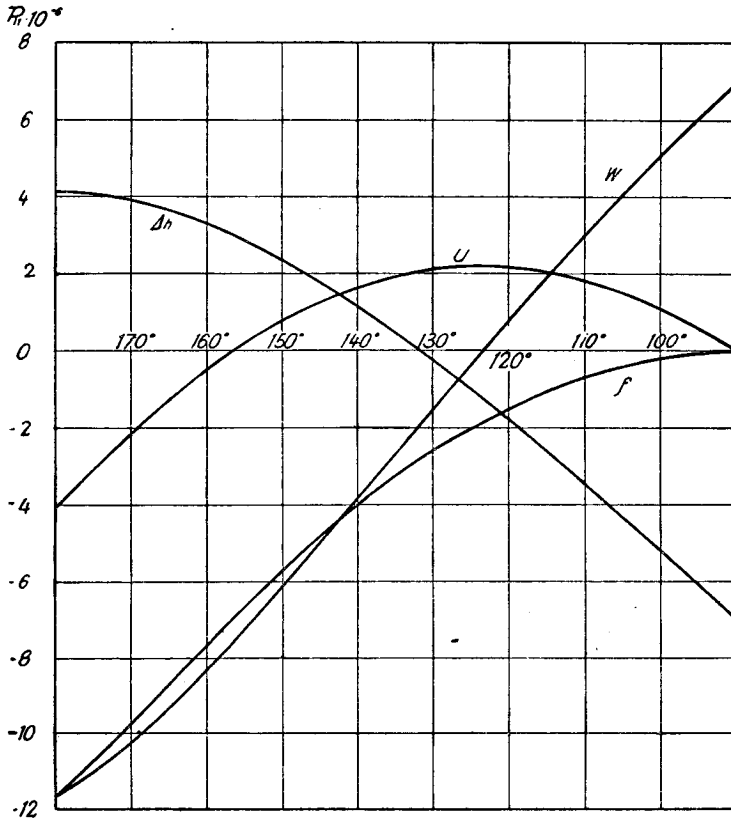


Abb. 16.

Belastungsfall 3. Deformationen. $\sigma_{zmi} = 1 \text{ kg/cm}^2$.

Die radialen Fasern werden überall auf der Innenseite gezogen, auf der Aussenseite gedrückt.

$$\sigma_{zrm} = \sigma_{zri} = 1 \text{ kg/cm}^2 \left\{ \begin{array}{l} \text{Aussenfaser Druck} \\ \text{Innenfaser Zug} \end{array} \right\}$$

Durch Superposition der Belastungsfälle 1 und 3 erhält man eine Schale, die in radialer Richtung im wesentlichen nur auf Biegung beansprucht ist, die Radialbiegungsspannungen sind zudem fast konstant; die Radial- und die Schubspannungen werden verschwindend klein, auch die Tangentialspannungen sind nicht bedeutend.

Dieser Fall weist schon grosse Ähnlichkeit mit einem an beiden Rändern durch zwei gleich grosse Momente belasteten, unendlich langen Zylinder mit gleichen Randverhältnissen auf; dieser ist nur durch konstante radiale Biegung beansprucht, während σ_r und τ null sind. Die Tangentialspannungen verschwinden beim unendlich langen Zylinder für jedes symmetrische Belastungsgesetz. Diese Verhältnisse werden in § 13 noch eingehender untersucht.

Abb. 16 gibt die Deformationen wieder.

Die Deformation ist derjenigen, die bei der durch ein negatives Moment [$\sigma_{zma} = -1 \text{ kg/cm}^2$] am Aussenrand belasteten Schale entsteht, sehr ähnlich; nur in der Nähe des Aussenrandes verhalten sich die Schalen bei den zwei verschiedenen Belastungen verschieden, indem die am Aussenrand belastete Schale dort stärker deformiert wird (Steifigkeit).

Vierter Belastungsfall. *Die Schale sei am Innenrand durch einen ringsum gleichmässig verteilten Horizontalzug T_{1i} kg für 1 cm Umfang des Mittelparallelkreises belastet.*

Die Integrationskonstanten sind (nach Gl. 103 und 107)

$$c_1 = -0.89264 T_{1i} \cdot R_1; \quad c_2 = -0.01621 T_{1i} \cdot R_1; \quad c_3 = 0; \\ c_4 = 0.50821 T_{1i} \cdot R_1.$$

Zahlentafel III₄ gibt die Werte für A_4 bis E_4 an, dabei ist:

$$N = A_4 \cdot T_{1i}; \quad T_1 = B_4 \cdot T_{1i}; \quad T_2 = C_4 \cdot T_{1i}; \quad G_1 = D_4 \cdot T_{1i} \cdot R_1; \\ G_2 = E_4 \cdot T_{1i} \cdot R_1;$$

dann ist, wenn für $\sigma_{ri} = 1 \text{ kg/cm}^2$ angenommen wird:

$$\tau = A_4 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_r = B_4 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_t = C_4 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_{zm} = 3 k \cdot D_4 \text{ kg/cm}^2, \\ \sigma_{ym} = 3 k \cdot E_4 \text{ kg/cm}^2;$$

Abb. 17 gibt den Verlauf dieser Spannungen an.

Während bei den Belastungsfällen 1 und 3 die Maximalwerte der Biegungsspannungen den Ringspannungen fast gleichkamen, ist hier wie bei Belastungsfall 2 die Beanspruchung durch die letzteren überwiegend, immerhin dürfen die Biegungsspannungen keineswegs unberücksichtigt bleiben.

Die Randwerte von σ_t liefern die Höchstwerte dieser Spannungen:
 $\sigma_t \cdot \max = \sigma_{ta} = 8.396 \text{ kg/cm}^2$; $\sigma_t \cdot \min = \sigma_{ti} = -15.761 \text{ kg/cm}^2$.

Die Stelle $\sigma_t = 0$ liegt weiter vom belasteten Rand entfernt, als bei der Belastung des Aussenrandes der Schale durch einen Horizontalzug, desgleichen die Stelle der maximalen Radialbiegungsspannung.

$$|\sigma_{xm}| \max = +2.180 \text{ kg/cm}^2 [\alpha = 136^\circ].$$

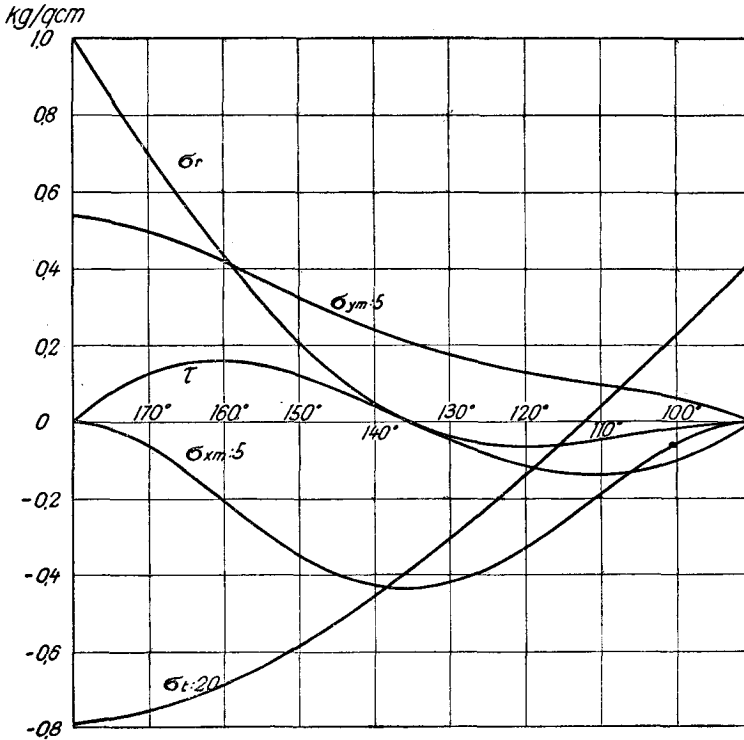


Abb. 17.

Belastungsfall 4. Spannungszustand. $\sigma_{ri} = 1 \text{ kg/cm}^2$.

Durch die Radialbiegung werden die Innenfasern gedrückt, die Aussenfasern gezogen. Die Kurve der Ringbiegungsspannungen schwingt um eine Achse, die nicht mit der α -Achse zusammenfällt.

$$\sigma_{ym} \cdot \max = \sigma_{ymi} = 2.673 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Kurve der Radialspannungen fällt in der Nähe des belasteten Randes rasch ab, im weiteren Verlauf sind diese Spannungen unbedeutend; die Schubspannungen sind ebenfalls sehr klein.

$$\tau_{\max} = 0.157 \text{ kg/cm}^2 [\alpha = 161^\circ]; \quad \tau_{\min} = 0.137 \text{ kg/cm}^2 [\alpha = 111^\circ].$$

Die grösste Druckspannung tritt auf der Aussenseite des Innenrandes auf.

$$\sigma_{yt \min} = \sigma_{yti} = -18.434 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_{yt \max} = \sigma_{yia} = 8.396 \text{ kg/cm}^2.$$

In der Nähe des Innenrandes [bis $\alpha = 171^\circ$] sind die totalen Ra-

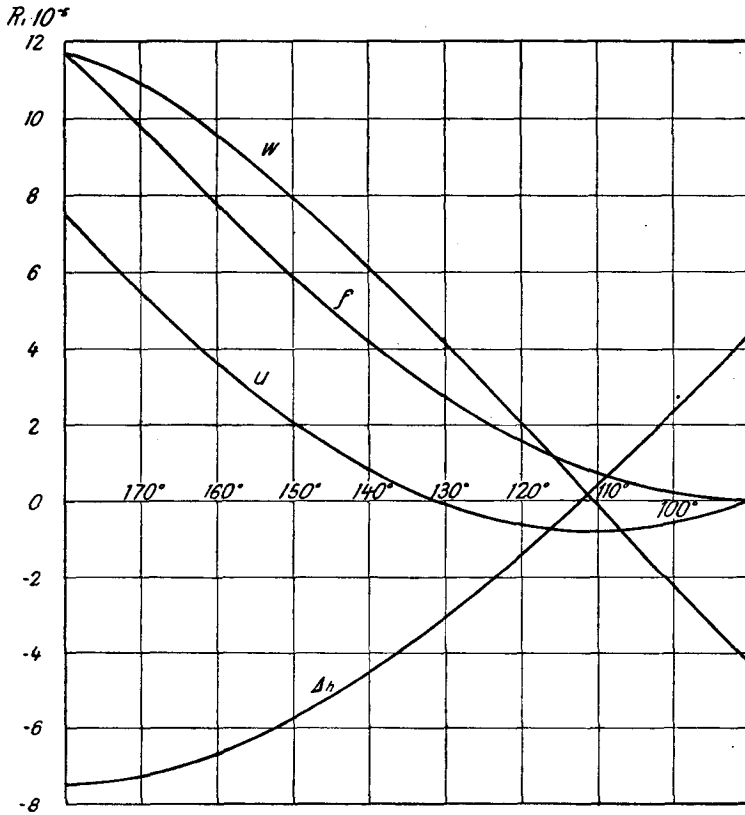


Abb. 18.

Belastungsfall 4. Deformationen. $\sigma_{ri} = 1 \text{ kg/cm}^2$.

dialspannungen im ganzen Querschnitt Zugspannungen, nachher treten die Radialbiegungsspannungen stärker in den Vordergrund, und verursachen, dass die radialen Innenfasern gedrückt, die Aussenfasern gezogen werden.

$$\sigma_{xi \max} = 2.180 \text{ kg/cm}^2 [\alpha = 136^\circ] \left. \begin{array}{l} \text{Zug Aussenseite} \\ \text{Druck Innenseite} \end{array} \right\}$$

Aus Abb. 18, in der die Deformationen dargestellt sind, ist ersichtlich, dass der Aussenrand im Verhältnis zum Innenrand schwach deformiert wird, der ungedehnte Parallelkreis liegt in der Nähe des unbelasteten Aussenrandes.

Fünfter Belastungsfall. *Der Innenrand der Schale sei durch einen ringsum gleichmässig verteilten Vertikalzug V_i , der Aussenrand durch einen solchen von der Grösse V_a kg für 1 cm Umfang des entsprechenden Mittelparallelkreises belastet.*

Damit das Gleichgewicht der Schale erhalten bleibt, muss nach Gl. 108

$$10 V_i = 11 V_a$$

gemacht werden. Neben dem System der Spannkraften und Spannungsmomente, das der Lösung der homogenen Gl. 45 entspricht, tritt dasjenige $[N_2, T_{1,2}, T_{2,2}, G_{1,2}, G_{2,2}]$, das der partikulären Lösung der inhomogenen Gl. 41–42 entspricht, auf, das letztere soll nach Gl. 111 bis 115 zuerst bestimmt werden.

Die Koeffizienten der Potenzreihen $Q_1^†$ und $Q_2^†$ werden bei Berücksichtigung der Gl. 80 $[M = 0]$ aus der Rekursionsformel 82 bestimmt. Da diese Reihen für keinen Wert von b im ganzen Bereich von α praktisch genügend konvergieren, mussten je zwei Lösungen für sie bestimmt werden. Die ersten mit $b = 0$ liefern gut konvergente Reihen im Intervall $\alpha = 180^\circ$ bis 150° , die zweiten mit $b = +1$ sind im Intervall $\alpha = 150^\circ$ bis 90° brauchbar.

Im folgenden werden, wenn dies zur Bestimmung der Eindeutigkeit notwendig ist, die Grössen, die sich auf den inneren Winkelraum beziehen, mit dem Index I, die des äusseren Winkelraumes mit dem Index II versehen.

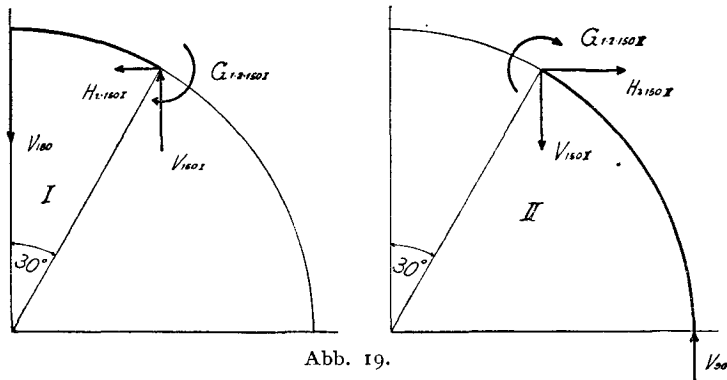
Für $b = 0$ ist:

$$\begin{aligned} Q_{I}^{\dagger} &= 0.1 - 0.000167 \sin^4 \alpha + 0.000021 \sin^5 \alpha - 0.006958 \sin^6 \alpha + \\ &+ 0.000889 \sin^7 \alpha - 0.008496 \sin^8 \alpha + 0.001131 \sin^9 \alpha - \\ &- 0.008777 \sin^{10} \alpha + 0.001199 \sin^{11} \alpha - 0.008676 \sin^{12} \alpha + \\ &+ 0.001204 \sin^{13} \alpha - 0.008449 \sin^{14} \alpha + 0.001187 \sin^{15} \alpha - \\ &- 0.008184 \sin^{16} \alpha + 0.001159 \sin^{17} \alpha - \dots \\ Q_{II}^{\dagger} &= 0.082600 \sin^3 \alpha - 0.005507 \sin^4 \alpha + 0.062432 \sin^5 \alpha - \\ &- 0.004451 \sin^6 \alpha + 0.052015 \sin^7 \alpha - 0.003812 \sin^8 \alpha + \\ &+ 0.045306 \sin^9 \alpha - 0.003350 \sin^{10} \alpha + 0.040615 \sin^{11} \alpha - \\ &- 0.003022 \sin^{12} \alpha + 0.037119 \sin^{13} \alpha - 0.002767 \sin^{14} \alpha + \\ &+ 0.03439 \sin^{15} \alpha - 0.002565 \sin^{16} \alpha + 0.032177 \sin^{17} \alpha - \dots \end{aligned}$$

Für $b = 1$ ist:

$$\begin{aligned} Q_{II}^+ &= 0.095041 [\sin \alpha - 1]^2 - 0.001628 [\sin \alpha - 1]^3 + \\ &+ 0.036112 [\sin \alpha - 1]^4 + 0.012985 [\sin \alpha - 1]^5 + \\ &+ 0.012928 [\sin \alpha - 1]^6 + 0.016837 [\sin \alpha - 1]^7 + \\ &+ 0.004183 [\sin \alpha - 1]^8 + 0.015981 [\sin \alpha - 1]^9 + \\ &+ 0.001991 [\sin \alpha - 1]^{10} + 0.013015 [\sin \alpha - 1]^{11} + \\ &+ 0.002520 [\sin \alpha - 1]^{12} + 0.009570 [\sin \alpha - 1]^{13} + \\ &+ 0.003875 [\sin \alpha - 1]^{14} + 0.006500 [\sin \alpha - 1]^{15} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{2II}^+ &= 0.011895 [\sin \alpha - 1]^4 + 0.011124 [\sin \alpha - 1]^5 + \\ &+ 0.007752 [\sin \alpha - 1]^6 + 0.011041 [\sin \alpha - 1]^7 + \\ &+ 0.006423 [\sin \alpha - 1]^8 + 0.009200 [\sin \alpha - 1]^9 + \\ &+ 0.006101 [\sin \alpha - 1]^{10} + 0.007359 [\sin \alpha - 1]^{11} + \\ &+ 0.005997 [\sin \alpha - 1]^{12} + 0.005915 [\sin \alpha - 1]^{13} + \\ &+ 0.005843 [\sin \alpha - 1]^{14} + 0.004896 [\sin \alpha - 1]^{15} + \dots \end{aligned}$$



Die Koeffizienten, die unbestimmt bleiben [Integrationskonstante], wurden zu null angenommen.

Die Funktionen Q_{II}^+ , Q_{2II}^+ , Q_{III}^+ , und Q_{2III}^+ wurden für Werte von α von 5^0 zu 5^0 bestimmt, darauf wurden die Spannungsgrößen nach Gl. 111 bis 115 berechnet, [vergl. Zahlentafel III_{5a}], das zugehörige Randbelastungssystem der beiden Teile ist in Abb. 19 angegeben.

$$\left. \begin{aligned} N_{2.180} &= V_{180}; \quad T_{1.2.180} = T_{2.2.180} = G_{1.2.180} = G_{2.2.180} = 0 \text{ [Innenrand I];} \\ N_{2.150I} &= V_{180} \cdot 0.821672; \quad T_{1.2.180I} = -V_{180} \cdot 0.481585; \\ T_{2.2.150I} &= -V_{180} \cdot 0.381595; \quad G_{1.2.150I} = -V_{180} \cdot R_1 \cdot 0.479477; \\ G_{2.2.150I} &= -V_{180} \cdot R_1 \cdot 0.153573 \end{aligned} \right\} \text{ Aussen-} \\ & \text{rand I}$$

$$\begin{aligned}
 N_{2.150\text{ II}} &= V_{180} \cdot 0.213271; & T_{1.2.150\text{ II}} &= -V_{180} \cdot 1.535366; \\
 T_{2.2.150\text{ II}} &= V_{180} \cdot 13.466204; & G_{1.2.150\text{ II}} &= V_{180} \cdot R_1 \cdot 0.036540; \\
 G_{2.2.150\text{ II}} &= V_{180} \cdot R_1 \cdot 0.010615 & & \left. \vphantom{\begin{aligned} N_{2.150\text{ II}} \\ T_{2.2.150\text{ II}} \\ G_{2.2.150\text{ II}} \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Innen-} \\ \text{rand II} \end{array} \\
 H_{2.150\text{ I}} &= -0.006229 V_{180}; & H_{2.150\text{ II}} &= -1.223030 V_{180}; \\
 V_{150\text{ I}} &= V_{150\text{ II}} = 0.952381 V_{180}; \\
 N_{2.90} &= G_{1.2.90} = G_{2.2.90} = 0; & T_{1.2.90} &= V_{180} \cdot 0.909091; \\
 T_{2.2.90} &= 10 \cdot V_{180} & & \left. \vphantom{\begin{aligned} N_{2.90} \\ T_{2.2.90} \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Aussen-} \\ \text{rand II} \end{array}
 \end{aligned}$$

Um eine nur durch vertikale Randkräfte belastete Schale zu erhalten, und um zu erreichen, dass für $\alpha = 150^\circ$ der Spannungszustand der beiden Schalenteile derselbe ist [$H_{150\text{ I}} = H_{150\text{ II}}$; $T_{2.150\text{ I}} = T_{2.150\text{ II}}$ etc.], superponiert man bei jedem Schalenteil über das der partikulären Lösung entsprechende Spannungssystem je ein der homogenen Lösung entsprechendes System unter Zuhilfenahme der Zahlentafel II.

Die Konstanten $c_{1\text{ I}}, c_{2\text{ I}}, c_{3\text{ I}}, c_{4\text{ I}}; c_{1\text{ II}}, c_{2\text{ II}}, c_{3\text{ II}}, c_{4\text{ II}}$ der zwei homogenen Lösungen werden aus den folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned}
 [c_{1\text{ I}} - c_{1\text{ II}}]f_{1.150} + [c_{2\text{ I}} - c_{2\text{ II}}]f_{2.150} + [c_{3\text{ I}} - c_{3\text{ II}}]f_{3.150} + [c_{4\text{ I}} - c_{4\text{ II}}]f_{4.150} &= \\
 &= [H_{2.150\text{ II}} - H_{2.150\text{ I}}] (\lambda + \sin 150) R_1; \\
 [c_{1\text{ I}} - c_{1\text{ II}}]g_{1.150} + [c_{2\text{ I}} - c_{2\text{ II}}]g_{2.150} + [c_{3\text{ I}} - c_{3\text{ II}}]g_{3.150} + [c_{4\text{ I}} - c_{4\text{ II}}]g_{4.150} &= - \\
 &= - [T_{2.2.150\text{ II}} - T_{2.2.150\text{ I}}] R_1; \\
 [c_{1\text{ I}} - c_{1\text{ II}}]p_{1.150} + [c_{2\text{ I}} - c_{2\text{ II}}]p_{2.150} + [c_{3\text{ I}} - c_{3\text{ II}}]p_{3.150} + [c_{4\text{ I}} - c_{4\text{ II}}]p_{4.150} &= \\
 &= G_{2.2.150\text{ II}} - G_{2.2.150\text{ I}}; \\
 [c_{1\text{ I}} - c_{1\text{ II}}]q_{1.150} + [c_{2\text{ I}} - c_{2\text{ II}}]q_{2.150} + [c_{3\text{ I}} - c_{3\text{ II}}]q_{3.150} + [c_{4\text{ I}} - c_{4\text{ II}}]q_{4.150} &= \\
 &= G_{2.2.150\text{ II}} - G_{2.2.150\text{ I}}. \\
 c_{1\text{ I}} \cdot f_{1.180} + c_{2\text{ I}} \cdot f_{2.180} + c_{3\text{ I}} \cdot f_{3.180} + c_{4\text{ I}} \cdot f_{4.180} &= F_1 = 0; \\
 c_{1\text{ I}} \cdot p_{1.180} + c_{2\text{ I}} \cdot p_{2.180} + c_{3\text{ I}} \cdot p_{3.180} + c_{4\text{ I}} \cdot p_{4.180} &= F_2 = 0; \\
 c_{1\text{ II}} \cdot f_{1.90} + c_{2\text{ II}} \cdot f_{2.90} + c_{3\text{ II}} \cdot f_{3.90} + c_{4\text{ II}} \cdot f_{4.90} &= F_3 = 0; \\
 c_{1\text{ II}} \cdot p_{1.90} + c_{2\text{ II}} \cdot p_{2.90} + c_{3\text{ II}} \cdot p_{3.90} + c_{4\text{ II}} \cdot p_{4.90} &= F_4 = 0.
 \end{aligned}$$

Bei Verwendung der in Zahlentafel II angegebenen Werte für f_v, g_v, p_v, q_v und der, der partikulären Lösung entsprechenden Randwerte erhält man durch Auflösen der 8 Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 c_{1\text{ I}} &= -3.530369 V_{180} \cdot R_1; & c_{2\text{ I}} &= 0.255380 V_{180} \cdot R_1; \\
 c_{3\text{ I}} &= -0.800196 V_{180} \cdot R_1; & c_{4\text{ I}} &= 3.334997 V_{180} \cdot R_1. \\
 c_{1\text{ II}} &= -2.622977 V_{180} \cdot R_1; & c_{2\text{ II}} &= -0.047633 V_{180} \cdot R_1; \\
 c_{3\text{ II}} &= 0; & c_{4\text{ II}} &= 1.858976 V_{180} \cdot R_1.
 \end{aligned}$$

Die resultierenden Spannungsgrößen ergeben sich leicht durch Superposition. Wir setzen: $N = A_5 \cdot V_{180}$; $T_1 = B_5 \cdot V_{180}$; $T_2 = C_5 \cdot V_{180}$; $G_1 = D_5 \cdot V_{180} \cdot R_1$; $G_2 = E_5 \cdot V_{180} \cdot R_1$.

Die Werte für A_5 bis E_5 sind in Zahlentafel III_{bb} eingetragen.

Wird $\tau_{180} = 1 \text{ kg/cm}^2$ angenommen, ist:

$$\tau = A_5 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_r = B_5 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_t = C_5 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_{xm} = 3k \cdot D_5 \text{ kg/cm}^2; \\ \sigma_{ym} = 3k \cdot E_5 \text{ kg/cm}^2.$$

Abb. 20 gibt den Verlauf dieser Spannungen an.

Die Schale wird weitaus am stärksten durch die Ringspannungen

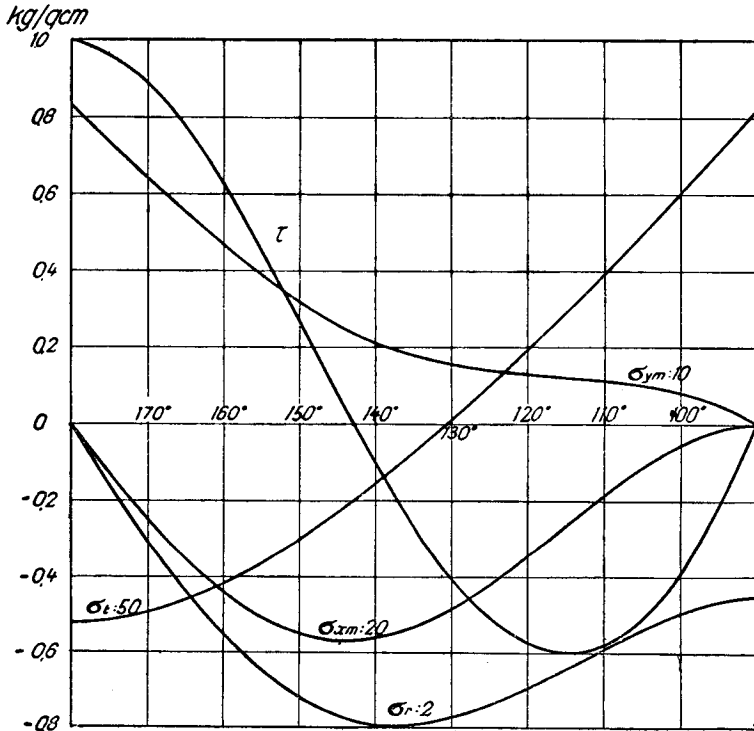


Abb. 20.

Belastungsfall 5. Spannungszustand. $\tau_{180} = 1 \text{ kg/cm}^2$.

beansprucht, doch sind auch die Biegungsspannungen recht bedeutend.

$$\sigma_t \text{ max} = \sigma_{ta} = 40.710 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_t \text{ min} = \sigma_{ti} = -26.064 \text{ kg/cm}^2,$$

der Aussenrand wird stärker beansprucht, als der Innenrand.

Die Radialbiegungsspannungen sind auf der Innenseite Druck-, auf der Aussenseite Zugspannungen, die Stelle ihres Höchstwertes liegt näher am Innenrand.

$$|\sigma_{cm}| \text{ max} = 11.420 \text{ kg/cm}^2 [\alpha = 143^\circ].$$

Der Maximalwert der Ringbiegungsspannung tritt am Innenrand auf:

$$\sigma_{ym} \max = \sigma_{ymi} = 8.311 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Radial- und die Schubspannungen bleiben überall klein; die ersteren sind Druckspannungen

$$|\sigma_r| \max = 1.589 \text{ kg/cm}^2 [\alpha = 137.5^\circ].$$

Die grössten Spannungen sind die totalen Randspannungen in tangentialer Richtung:

$$\sigma_{yt} \max = \sigma_{yta} = 40.710 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_{yt} \min = \sigma_{yti} = -34.374 \text{ kg/cm}^2 [\text{Aussenseite}].$$

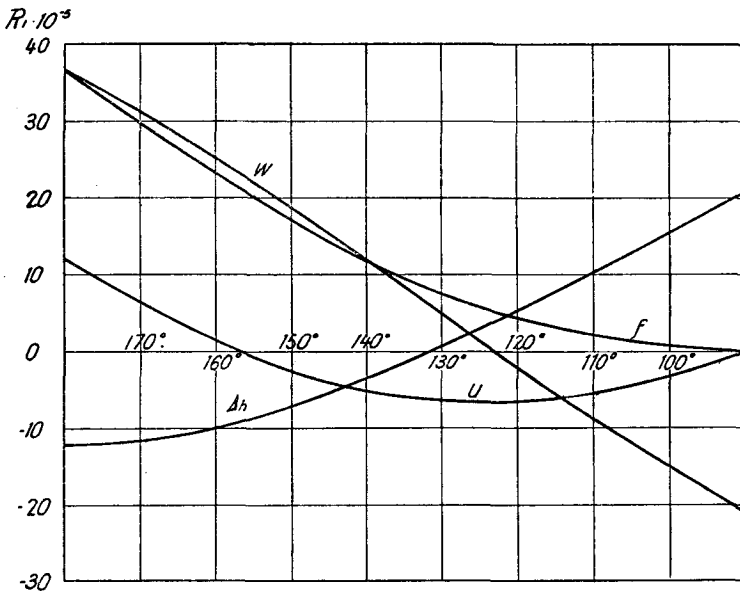


Abb. 21.

Belastungsfall 5. Deformationen. $\tau_{180} = 1 \text{ kg/cm}^2$.

Für die Extremalwerte der totalen Radialspannungen erhält man:

$$\sigma_{rt} \max = 9.890 \text{ kg/cm}^2 [\alpha = 146^\circ] [\text{Aussenseite}],$$

$$\sigma_{rt} \min = -13.020 \text{ kg/cm}^2 [\alpha = 147^\circ] [\text{Innenseite}].$$

In der Nähe des Aussenrandes haben wir eine Zone, in der der ganze Querschnitt in radialer Richtung gedrückt wird.

Abb. 21 gibt den Verlauf der Deformationen wieder.

Sechster Belastungsfall. Eine Schale sei durch konstanten inneren Überdruck $p \text{ kg}$ auf 1 cm^2 der Schalenmittelfläche

und am Innenrand durch einen ringsum gleichmässig verteilten Vertikalzug V_i kg auf 1 cm Umfang des mittleren Parallelkreises belastet.

Die Gleichgewichtsbedingung in Richtung der Rotationsachse gibt die Beziehung, die zwischen p und V_i bestehen muss, damit die ganze Schale im Gleichgewicht bleibt. Mit $V_a = 0$ wird:

$$V_i = p \cdot R_1 \cdot 10,5.$$

Zuerst bestimmen wir das zur partikularen Lösung gehörende Spannungssystem $N_2, T_{1,2}, T_{2,2}, G_{1,2}, G_{2,2}$. Die Reihen Q_1^\dagger und Q_2^\dagger konvergieren für keinen Wert von b im ganzen Bereich von α genügend, es wurden daher wieder wie bei Belastungsfall 5 je zwei Lösungen für diese Reihen bestimmt.

Die Konstanten M und K_0 müssen für jeden Schalenteil gesondert nach Gl. 118 bestimmt werden.

$$C_I = -10,25; \quad M_I = -\frac{1}{10,25}; \quad K_{0I} = -51,25 R_1^2 p.$$

$$C_{II} = -21; \quad M_{II} = -\frac{1}{21}; \quad K_{0II} = -105 R_1^2 p.$$

Dabei ist C_I so bestimmt, dass $V_{aI} = 0$ wird; dies bedingt, dass über das Spannungssystem, das der mit M_I, K_{0I} ermittelten Partikularlösung entspricht, das zur partikulären Lösung des inneren Schalenteiles im 5. Belastungsfall mit $N_{180} = V_{180} = 0,5375 R_1 \cdot p$ zugehörnde Spannungssystem superponiert wird.

Um diese Superposition zu umgehen, könnte C_I direkt so bestimmt werden, dass $V_{aI} = V_{180I} = \frac{10,75}{21} \cdot R_1 p$ gewählt würde; damit die im ersten Teil unter der Voraussetzung $V_a = 0$ abgeleiteten Formeln hier umgeändert verwendet werden konnten, wurde der erste Weg eingeschlagen.

Die Koeffizienten der Potenzreihen Q_1^\dagger und Q_2^\dagger werden mit den oben angegebenen Werten von M unter Zuhilfenahme der Gl. 80 aus der Rekursionsformel 82 berechnet.

Für $b = 0$ ist:

$$\begin{aligned} Q_{1I}^\dagger = & 0,1 + 0,000488 \sin^2 \alpha - 0,000215 \sin^4 \alpha + 0,000392 \sin^5 \alpha - \\ & - 0,006998 \sin^6 \alpha + 0,001198 \sin^7 \alpha - 0,008530 \sin^8 \alpha + \\ & + 0,001401 \sin^9 \alpha - 0,008807 \sin^{10} \alpha + 0,0014398 \sin^{11} \alpha - \\ & - 0,008703 \sin^{12} \alpha + 0,001425 \sin^{13} \alpha - 0,008473 \sin^{14} \alpha + \\ & + 0,001391 \sin^{15} \alpha - 0,008207 \sin^{16} \alpha + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{2I}^I &= 0.082600 \sin^3 \alpha - 0.005507 \sin^4 \alpha + 0.062432 \sin^5 \alpha - \\
 &- 0.004411 \sin^6 \alpha + 0.052009 \sin^7 \alpha - 0.003763 \sin^8 \alpha + \\
 &+ 0.045298 \sin^9 \alpha - 0.003298 \sin^{10} \alpha + 0.040607 \sin^{11} \alpha - \\
 &- 0.002963 \sin^{12} \alpha + 0.037109 \sin^{13} \alpha - 0.002709 \sin^{14} \alpha + \\
 &+ 0.034377 \sin^{15} \alpha - 0.002510 \sin^{16} \alpha + \dots
 \end{aligned}$$

Mit $b = 1$ ist:

$$\begin{aligned}
 Q_{1II}^I &= 0.095238 [\sin \alpha - 1]^2 - 0.001443 [\sin \alpha - 1]^3 + \\
 &+ 0.036173 [\sin \alpha - 1]^4 + 0.013105 [\sin \alpha - 1]^5 + \\
 &+ 0.013018 [\sin \alpha - 1]^6 + 0.016859 [\sin \alpha - 1]^7 + \\
 &+ 0.004309 [\sin \alpha - 1]^8 + 0.015906 [\sin \alpha - 1]^9 + \\
 &+ 0.002945 [\sin \alpha - 1]^{10} + 0.012859 [\sin \alpha - 1]^{11} + \\
 &+ 0.002767 [\sin \alpha - 1]^{12} + 0.009381 [\sin \alpha - 1]^{13} + \\
 &+ 0.004123 [\sin \alpha - 1]^{14} + 0.006320 [\sin \alpha - 1]^{15} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{2II}^I &= 0.011919 [\sin \alpha - 1]^4 + 0.011161 [\sin \alpha - 1]^5 + \\
 &+ 0.007780 [\sin \alpha - 1]^6 + 0.011075 [\sin \alpha - 1]^7 + \\
 &+ 0.006452 [\sin \alpha - 1]^8 + 0.009228 [\sin \alpha - 1]^9 + \\
 &+ 0.006128 [\sin \alpha - 1]^{10} + 0.007383 [\sin \alpha - 1]^{11} + \\
 &+ 0.006022 [\sin \alpha - 1]^{12} + 0.005936 [\sin \alpha - 1]^{13} + \\
 &+ 0.005866 [\sin \alpha - 1]^{14} + 0.004916 [\sin \alpha - 1]^{15} + \dots
 \end{aligned}$$

die Integrationskonstanten wurden zu null angenommen.

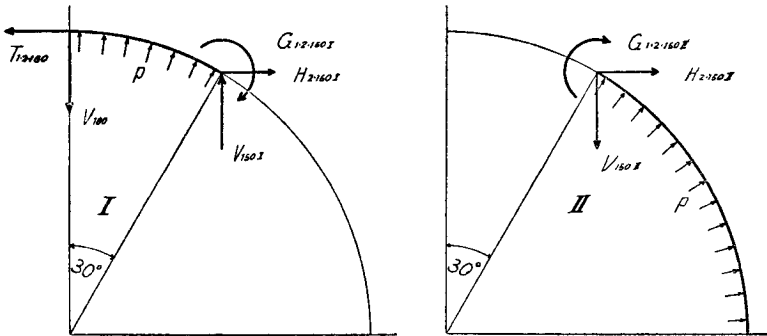


Abb. 22.

Die 4 Reihen sind für Werte von α von 5^0 zu 5^0 , die zugehörigen Spannungsgrößen nach Gl. 120 bis 124 bestimmt worden; über die letzteren wurden, unter Zuhilfenahme der Zahlentafel III_{5,α}, für den inneren Schalenteil die zu $V_{180} = R_1 p \cdot 0.5375$ gehörenden Spannungsgrößen superponiert; die resultierenden Werte sind in Zahlentafel III_{5,α} angegeben, das zugehörige Randbelastungssystem ist aus Abb. 22 ersichtlich.

$$\begin{aligned}
N_{2,180} &= 1.05 \cdot R_1 \cdot p; & T_{1,2,180} &= R_1 \cdot p; & T_{2,2,180} &= 0.5 \cdot R_1 \cdot p; & \left. \begin{array}{l} \text{Innen-} \\ \text{rand I} \end{array} \right\} \\
G_{1,2,180} &= G_{2,2,180} = 0; \\
N_{2,150\text{I}} &= 0.863059 R_1 \cdot p; & T_{1,2,150\text{I}} &= 0.471053 R_1 \cdot p; & & & \left. \begin{array}{l} \text{Aussen-} \\ \text{rand I} \end{array} \right\} \\
T_{2,2,150\text{I}} &= 0.122531 R_1 \cdot p; & G_{1,2,180\text{I}} &= -0.503491 R_1^2 \cdot p; \\
G_{2,2,150\text{I}} &= -0.161264 R_1^2 \cdot p; \\
N_{2,150\text{II}} &= 0.224181 R_1 \cdot p; & T_{1,2,150\text{II}} &= -0.635517 R_1 \cdot p; & & & \left. \begin{array}{l} \text{Innen-} \\ \text{rand II} \end{array} \right\} \\
T_{2,2,150\text{II}} &= 14.230079 R_1 \cdot p; & G_{1,2,150\text{II}} &= 0.038400 R_1^2 \cdot p; \\
G_{2,2,150\text{II}} &= 0.011155 R_1^2 \cdot p; \\
H_{2,150\text{I}} &= 0.839473 R_1 \cdot p; & H_{2,150\text{II}} &= -0.438283 R_1 \cdot p; & V_{150\text{I}} &= V_{150\text{II}} = \\
&= 0.511905 R_1 \cdot p; \\
N_{2,90} &= T_{1,2,90} = G_{1,2,90} = G_{2,2,90} = 0; & T_{2,2,90} &= 11 R_1 \cdot p; & [\text{Aussenrand II}].
\end{aligned}$$

Damit der Spannungszustand beider Schalen für $\alpha = 150^\circ$ derselbe ist, und, um zu erreichen, dass $T_{1,90} = 0$ wird, superponiert man bei jedem Schalenteil über das in Zahlentafel III_{6a} angegebene Spannungssystem je ein der Lösung der homogenen Differentialgleichungen entsprechendes Spannungssystem unter Zuhilfenahme der Zahlentafel II.

Die Integrationskonstanten dieser beiden Lösungen werden mit den oben angegebenen Werten für $H_{2,150}$, $T_{2,2,150}$, $G_{1,2,150}$, $G_{2,2,150}$ und mit $F_1 = -10 R_1^2 p$, $F_2 = F_3 = F_4 = 0$ aus den Gl. 135 bestimmt.

$$c_{1\text{I}} = -2.803053 R_1^2 p; \quad c_{2\text{I}} = 0.258397 R_1^2 p; \quad c_{3\text{I}} = -0.859527 R_1^2 p; \\
c_{4\text{I}} = 2.962148 R_1^2 p.$$

$$c_{1\text{II}} = -1.844016 R_1^2 p; \quad c_{2\text{II}} = -0.033487 R_1^2 p; \quad c_{3\text{II}} = 0; \\
c_{4\text{II}} = 1.435142 R_1^2 p.$$

Für den schliesslichen Spannungszustand setzen wir:

$$N = A_6 \cdot R_1 \cdot p; \quad T_1 = B_6 \cdot R_1 \cdot p; \quad T_2 = C_6 \cdot R_1 \cdot p; \quad G_1 = D_6 \cdot R_1^2 \cdot p; \\
G_2 = E_6 \cdot R_1^2 \cdot p.$$

Die Werte für A_6 bis E_6 vergleiche in Zahlentafel III_{6b}.

Mit $p = 1 \text{ kg/cm}^2$ erhält man:

$$\tau = \frac{k}{2} A_6 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_r = \frac{k}{2} B_6 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_t = \frac{k}{2} C_6 \text{ kg/cm}^2; \\
\sigma_{xm} = \frac{3k^2}{2} D_6 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_{ym} = \frac{3k^2}{2} E_6 \text{ kg/cm}^2;$$

der Verlauf dieser Spannungen ist aus Abb. 23 ersichtlich.

Die Beanspruchung durch die Ringspannungen ist am Aussenrand bedeutend grösser als am Innenrand; der Verlauf der Ringspannungen

ist von demjenigen der gleichen Spannungen des zweiten Belastungsfalles nicht stark verschieden. Die Höchstwerte von σ_t treten an den Rändern auf:

$$\sigma_{t0} = 173.543 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_{t1} = -56.164 \text{ kg/cm}^2;$$

Neben den Ringspannungen treten auch hier die Biegungsspannungen am stärksten hervor; auf den ersten Blick würde man für die σ_{zm} -Spannungen dem Gefühl nach eher Zugspannungen erwarten, die Untersuchung zeigt, dass es Druckspannungen sind. Dass dieser Sinn

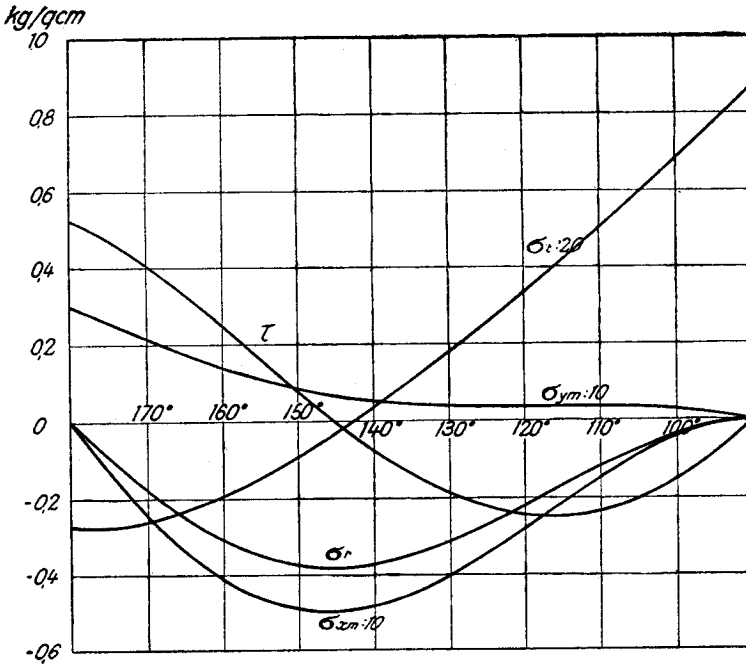


Abb. 23.

Belastungsfall 6. Spannungsverlauf. $p = 1/10 \text{ kg/cm}^2$.

der ist, den auch die Anschauung bei genauerer Betrachtung ergibt, ersieht man besser aus dem Vorzeichen der Radialbiegungsspannungen einer am Aussenrand durch Vertikalzug gehaltenen, durch konstanten inneren Überdruck belasteten Schale. Um eine so belastete Schale zu erhalten, superponiert man das Spannungssystem des 5. Belastungsfalles mit $\tau_{180} = -5,25 \text{ kg/cm}^2$ über den Belastungsfall 6; bei der so belasteten Schale erwartet man für σ_{zm} Zugspannungen, die Superposition zeigt, dass tatsächlich solche Spannungen auftreten.

Für die grössten Werte der Biegungsspannung erhält man beim 6. Belastungsfall:

$$|\sigma_{zm}| \max = 49.880 \text{ kg/cm}^2 [\alpha = 146^\circ] \text{ Zug auf Aussenseite;} \\ \sigma_{ym} \max = \sigma_{ymi} = 30.009 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Schubspannungen sind, ausgenommen in der Nähe des Innenrandes, sehr klein, desgleichen bleiben die Radialspannungen im Vergleich zu den Ring- und den Biegungsspannungen unbedeutend.

$$\tau_t = \tau \max = 5.25 \text{ kg/cm}^2; |\sigma_r| \max = 3.836 \text{ kg/cm}^2 [\alpha = 145^\circ].$$

Die grössten Totalspannungen treten an den Rändern in tangentialer Richtung auf.

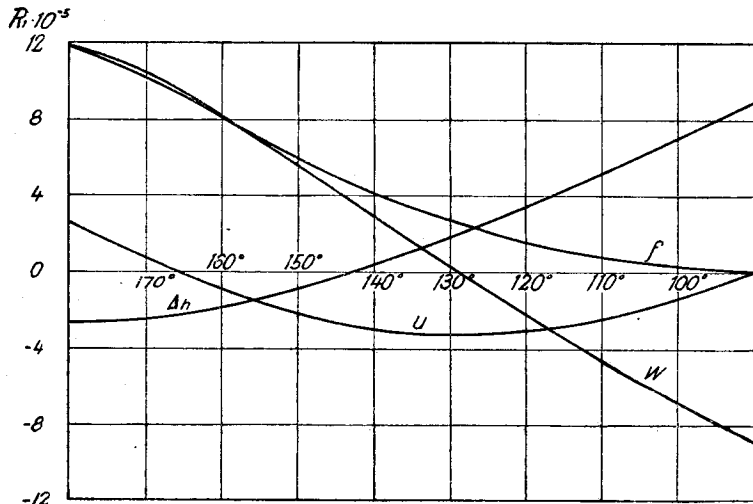


Abb. 24.

Belastungsfall 6. Deformationen. $p = 1/10 \text{ kg/cm}^2$.

$$\sigma_{yt} \max = \sigma_{ta} = 173.343 \text{ kg/cm}^2; \\ \sigma_{yt} \min = -86.173 \text{ kg/cm}^2 [\text{Innenrand, Aussenseite}].$$

Die totalen radialen Spannungen sind im wesentlichen gleich der Radialbiegungsspannung.

$$|\sigma_{rt}| \max = 53.727 \text{ kg/cm}^2 [\alpha = 146^\circ \text{ Innenseite}].$$

Die Kurven der Deformationsgrössen sind in Abb. 24 eingezeichnet.

Aus den vorstehenden Untersuchungen geht hervor, dass der Spannungsverlauf in der Ringflächenschale der ist, wie er vom erfahrenen

Konstrukteur zum grossen Teil wenigstens qualitativ hätte vorausgesagt werden können.

In allen Fällen ist die Beanspruchung durch die Ringspannungen überwiegend. Bemerkenswert ist, dass die Biegungsspannungen keineswegs eine untergeordnete Rolle spielen, ihre Maximalwerte sind durchwegs grösser als die Radial- und die Schubspannungen, die letzteren bleiben im Verhältnis zu den übrigen Spannungen überall klein. Dass diese Eigenschaften auch für dünnere Schalen erhalten bleiben, werden die Untersuchungen des folgenden Paragraphen zeigen.

Nachdem es gelungen ist, den Spannungszustand zu bestimmen, kann die grösste Anstrengung des Materials, die nicht immer durch die grössten Spannungen gemessen wird, nach den bestehenden Bruchhypothesen auf bekannte Weise beurteilt werden.

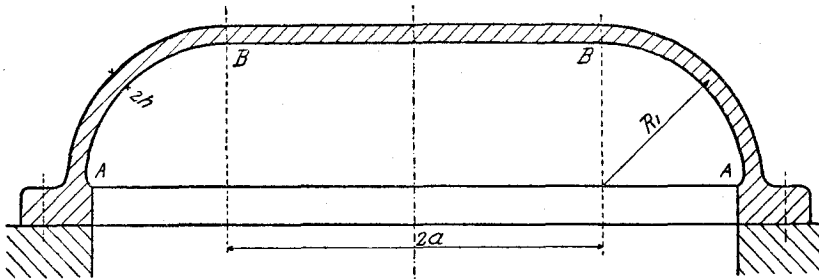


Abb. 25.

Da die Ringflächenschalen in der Technik fast ausschliesslich in Verbindung mit andern Konstruktionsteilen Verwendung finden, soll zum Schlusse an Hand eines Beispiels kurz erläutert werden, wie sich die Berechnung in diesem Falle gestaltet; dabei kommt es nur darauf an, zu zeigen, wie die Grösse der Randbelastungen des Ringschalenteiles bestimmt wird. Nachdem dies geschehen ist, können die Spannungen durch Superposition ermittelt werden, wenn sie für die 6 elementaren Belastungsfälle der betreffenden Schale bekannt sind.

Als Beispiel wählen wir den in Abb. 25 abgebildeten durch konstanten inneren Überdruck belasteten Deckel, der aus einer kreisrunden ebenen Platte vom Durchmesser $2a$ und einem Ringflächenschalenstück besteht.

Dabei nehmen wir an, dass der ganze Konstruktionsteil längs des Parallelkreises A — A fest eingespannt sei; diese Voraussetzung wird

um so genauer erfüllt, je stärker der Flansch und je fester das Fundament gemacht wird.

Wir denken uns den Deckel längs der Parallelkreise AA und BB durch Normalschnitte zur Schalenmittelfläche aufgeschnitten und bringen in den Schnittstellen die resultierenden Systeme der in ihnen übertragenen Spannungen als äussere Kräftesysteme an.

Die Komponentengleichung in Richtung der Rotationsachse ergibt für die beiden Teile:

$$V_i = -\frac{a}{2} \cdot p; \quad V_a = -(a + R_i) \frac{p}{2}.$$

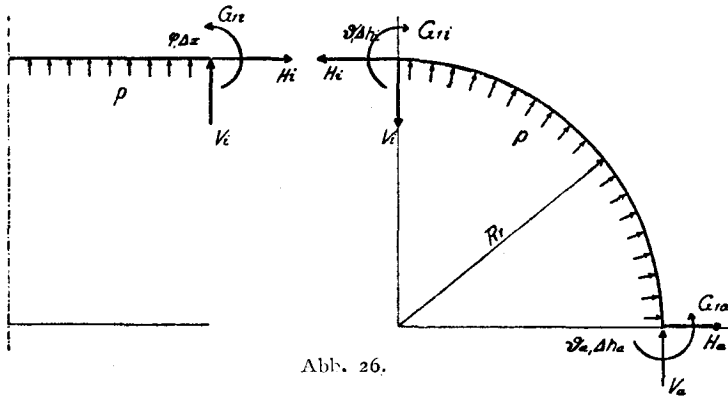


Abb. 26.

Die Grössen H_a , G_{1a} , H_i , G_{1i} bleiben statisch unbestimmt, sie werden mit Hilfe der Deformationsbedingungen ermittelt.

$$\begin{aligned} \text{Es ist:} \quad \vartheta_a &= f_1 [p; H_a; G_{1a}; H_i; G_{1i}], \\ \Delta_{11a} &= f_2 [p; H_a; G_{1a}; H_i; G_{1i}], \\ \vartheta_i &= f_3 [p; H_a; G_{1a}; H_i; G_{1i}], \\ \Delta_{hi} &= f_4 [p; H_a; G_{1a}; H_i; G_{1i}]; \end{aligned}$$

f_1 bis f_4 sind bekannte Funktionen der Klammergrössen, ähnliche Beziehungen gelten für die Änderung φ_a des Winkels, den eine Plattennormale im Parallelkreis B—B mit der Rotationsachse einschliesst, und für die Verschiebung Δ_{xa} des Plattenrandes in Richtung der x -Achse infolge der Deformation.

$$\varphi_a = f_5 [p; H_i; G_{1i}]; \quad \Delta_{xa} = f_6 [p; H_i; G_{1i}].$$

Die Deformationsbedingungen:

$$\vartheta_a = 0; \quad \Delta_{ha} = 0; \quad \vartheta_i = \varphi_a; \quad \Delta_{hi} = \Delta_{xa}$$

geben uns 4 Beziehungen zur Bestimmung der 4 Unbekannten H_a, G_{1a}, H_i, G_{1i} ; nachdem diese bekannt sind, kann der Spannungsverlauf angegeben werden.

§ 12. Der Einfluss der Veränderung der Schalendicke auf den Spannungsverlauf.

Im folgenden wollen wir den Einfluss der Schalendicke auf den Spannungsverlauf diskutieren; da die Verhältnisse $\lambda = a : R_1$ und $k = R_1 : h$ von Schale zu Schale veränderlich sind, müsste der Spannungsverlauf bei verschiedenen Werten von λ für verschiedene Stärken der Schalen [verschiedene Werte von k] bestimmt werden. Dies würde der umständlichen Berechnung wegen zu viel Zeit in Anspruch nehmen,

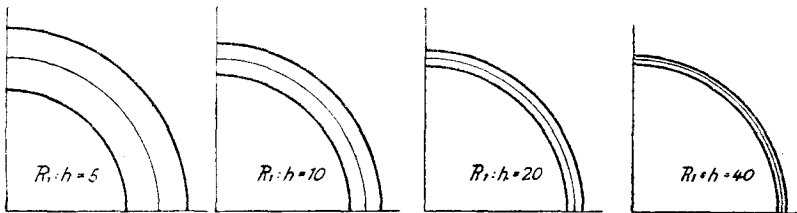


Abb. 27.

der Spannungsverlauf wurde daher nur für verschiedene Werte von k für Schalen mit $\lambda = 10$ ermittelt. Es soll späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben, festzustellen, inwiefern diese Resultate von denjenigen für andere Werte von $a : R_1$ abweichen.

Ein System von Meridianschnitten von Schalen, für die der Spannungsverlauf für einige Belastungsfälle berechnet wurde, ist in Abb. 27 dargestellt; dabei muss bemerkt werden, dass die erste Schale keine «dünne Schale» mehr ist, so dass die Resultate für diese nur näherungsweise richtig sind.

Da die Koeffizienten m_r, m_r^*, n_o, n_o^* der Integrale J_1, J_2, J_3, J_4 von $R_1 : h$ abhängig sind, mussten diese, sowie die Integrale selbst und alle aus diesen hergeleiteten Funktionswerte für jeden Wert von k neu berechnet werden.

Es wäre zu umständlich, hier das ganze Zahlenmaterial wiederzugeben; wir begnügen uns, die Resultate, d. h. die Kurven, die den Spannungsverlauf abbilden, folgen zu lassen. Die Kurven geben den

Verlauf der Spannungen τ , σ_r , σ_t , σ_{ym} und der bezogenen Biegemomente G_1 beigegebenen Randbelastungen G_{1a} bzw. $G_{1a} = 1 \text{ cm.kg}$ und T_{1a} bzw. $N_a = 1 \text{ kg}$ für 1 cm Umfang des zugehörigen mittleren Randparallelkreises wieder. Da die Kurven der bezogenen Momente G_1 einen besseren Einblick in die Verhältnisse der Radialbiegungsspannungen gestatten, als die Kurven der Spannungen σ_{xm} selbst, wurden hier die ersteren wiedergegeben; die Spannungen werden aus den zugehörigen bezogenen Momenten nach der Gleichung

$$\sigma_{xm} \cdot R_1^2 = \frac{3k^2}{2} \cdot G_1$$

bestimmt.

$k =$	5	10	20	40
$\frac{3}{2} k^2$	37.5	150	600	2400

1. Beispiel: *Der Aussenrand der Schalen sei durch ein ringsum gleichmässig verteiltes Kräftepaar vom Momente $G_{1a} = 1 \text{ cm.kg}$ für 1 cm Umfang des Mittelparallelkreises belastet.*

Die Spannungen wurden wie in § 11 angegeben nach der im I. und II. Teil entwickelten Theorie berechnet, die Resultate sind in den Abb. 28 bis 32 aufgezeichnet.

a. Schubspannungen (Abb. 29).

Der Verlauf der Schubspannungen ist bei den 4 Schalen ähnlich, jedoch liegen die Stellen der Höchstwerte dieser Spannungen bei den dünneren Schalen näher am belasteten Aussenrand. Dass die Spannungen bei gleicher Randbelastung bei den dünneren Schalen grösser sind, als bei den dickeren, liess sich vermuten; die Untersuchung zeigt, dass sich die Schubspannungen angenähert wie die Schalenstärken ändern.

Definiert man daher, dass Schalen mit verschiedenen Wandstärken «verhältnismässig gleich belastet» seien, wenn die Belastungen proportional den Schalenstärken gewählt sind, so kann gesagt werden, dass verhältnismässig gleich am Aussenrand durch Kräftepaare belastete Schalen, deren Werte k nicht zu weit auseinanderliegen, bis auf einige v. H. genau gleiche Beanspruchung durch Schub erfahren.

Zahlentafel IV.

	$k =$	5	10	20	40	
Schubspannung	$\tau_{\max} \cdot R_1^2$	kg	2.710	5.770	11.680	24.335
	$\tau^*_{\max} \cdot R_1^2$ †)	kg	2.710	2.885	2.920	3.042
	$\alpha =$		123°	121°	118°	115°
Radialspannung	$\sigma_{r,\max} \cdot R_1^2$	kg	2.475	5.195	9.996	17.010
	$\sigma^*_{r,\max} \cdot R_1^2$	kg	2.475	2.598	2.499	2.126
	$\alpha =$		146°	144°	141°	137°
Ringspannung	$\sigma_{\theta} \cdot R_1^2$	kg	61.991	133.250	253.026	391.274
	$\sigma^*_{\theta} \cdot R_1^2$	kg	61.991	66.625	63.257	48.909
	$\sigma_{\theta a} \cdot R_1^2$	kg	108.069	239.809	532.944	1468.236
	$\sigma^*_{\theta a} \cdot R_1^2$	kg	108.069	118.405	133.236	183.529
Radialbiegungs- spannung	$\sigma_{rma} \cdot R_1^2$	kg	37.5	150.0	600.0	2400.0
	$\sigma^*_{rma} \cdot R_1^2$	kg	37.5	75.0	150.0	300.0
Ringbiegungs- spannung	$\sigma_{yma} \cdot R_1^2$	kg	11.250	45.000	180.000	720.000
	$\sigma^*_{yma} \cdot R_1^2$	kg	11.250	22.500	45.000	90.000

†) Die mit * bezeichneten Spannungen bedeuten Spannungen bei verhältnismässig gleicher Belastung der Schalen, die stärkste Schale wird immer mit 1 cm. kg bzw. 1 kg auf 1 cm Umfang des entsprechenden Aussenparallelkreises belastet. Die Belastungen der übrigen Schalen müssen im Verhältnis von 1 : 1/2 : 1/4 : 1/8 gewählt werden.

Die Maximalwerte der Schubspannungen bei gleicher und bei verhältnismässig gleicher Belastung sind in Zahlentafel IV angegeben.

b. Radialspannungen (Abb. 28).

Je schwächer die Schale ist, umso mehr liegt der Ort grösster Radialspannung am belasteten Rand, die Verschiebung der Kulminationspunkte ist auch hier klein.

Der Verlauf der Spannungskurven ist bei verhältnismässig gleich belasteten Schalen bis auf einige v. H. übereinstimmend, so dass am Aussenrand durch Kräftepaare belastete Schalen bei verhältnismässig gleicher Belastung durch Radialspannungen gleich beansprucht werden. (Vergl. auch Zahlentafel IV.)

c. Ringspannungen (Abb. 30).

Aus Abb. 30 ersieht man deutlich, wie bei abnehmender Schalenstärke der Schalenteil in der Nähe des belasteten Randes immer stärker beansprucht wird, während die Partien nahe am Innenrand zum Tragen der Belastung bei dünneren Schalen nur in geringem Masse herangezogen werden, dass dabei der ungedehnte Parallelkreis sich dem belasteten Rand umso mehr nähert, je dünner die Schale wird, ist natürlich.

Die Eigenschaft, dass die Beanspruchung bei verhältnismässig gleicher Belastung für alle Schalen dieselbe ist, wird hinsichtlich der Ringspannungen nicht erfüllt. Wie aus Zahlentafel IV ersichtlich ist, werden die Spannungen σ_i^* in der Nähe des Aussenrandes bei Verminderung der Schalenstärke immer grösser, während ihr Betrag am Innenrand langsam abnimmt, sobald k grössere Werte erhält.

Die Erscheinung, dass die Schub- und die Radialspannungen neben den Ringspannungen stark zurücktreten, bleibt auch für die dünneren Schalen in gleichem Masse erhalten.

d. Ringbiegungsspannungen (Abb. 32).

Während bei Schalen mit grosser Wandstärke [$k = 5$] die grösste Ringbiegungsspannung in der Nähe des Innenrandes auftritt, liegt die Stelle des Höchstwertes dieser Spannungen bei dünnen Schalen am belasteten Aussenrand, die Spannung am Innenrande ist im letzten Falle bedeutend kleiner, als die Maximalspannung des Aussenrandes. Die Innenrandspannungen sind bei verschieden starken Schalen bei gleicher Belastung des Aussenrandes angenähert gleich gross.

Bei verhältnismässig gleicher Belastung ist die Beanspruchung durch die Ringbiegungsspannungen eine ungleiche, diese Spannungen nehmen

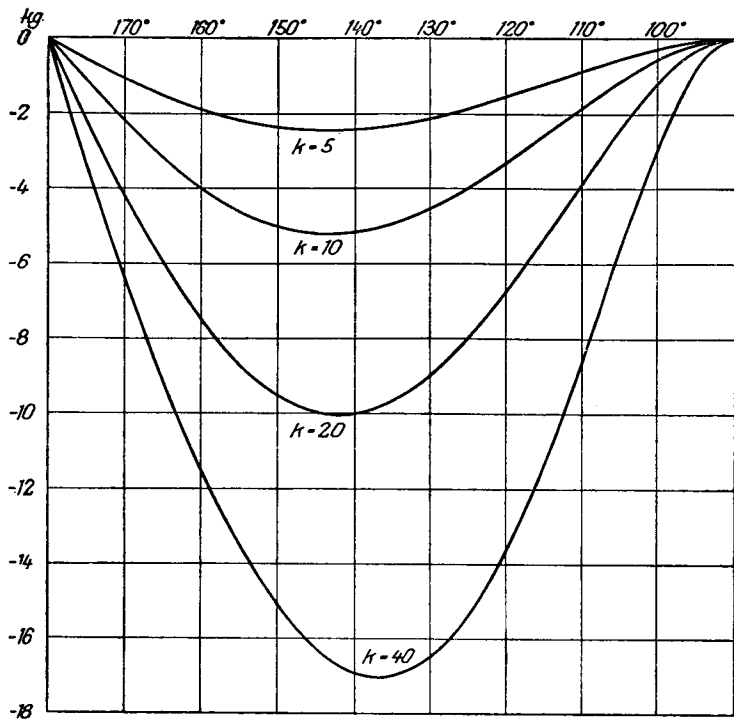


Abb. 28 σR^2 -Kurven

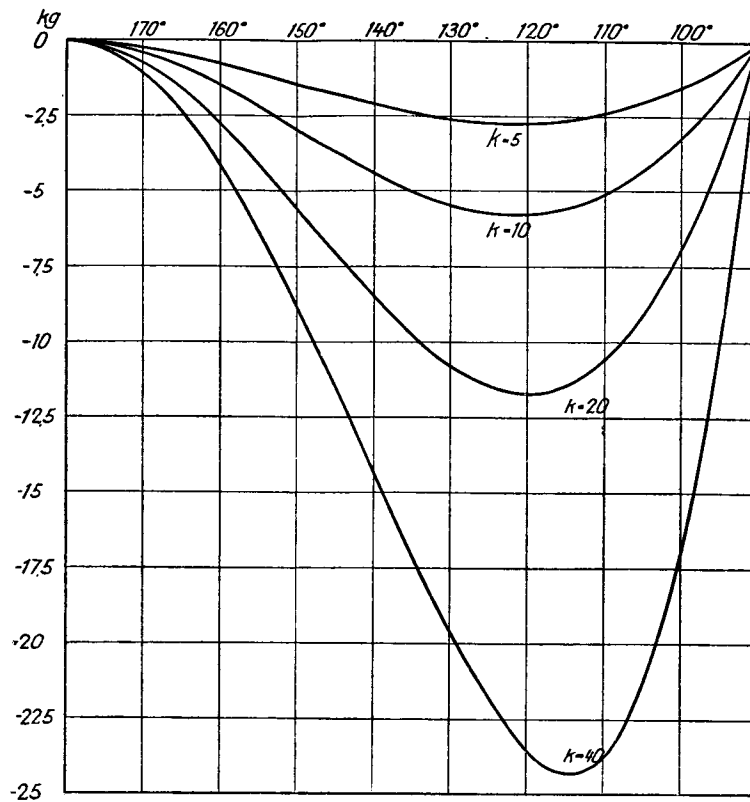


Abb. 29 τR^2 -Kurven

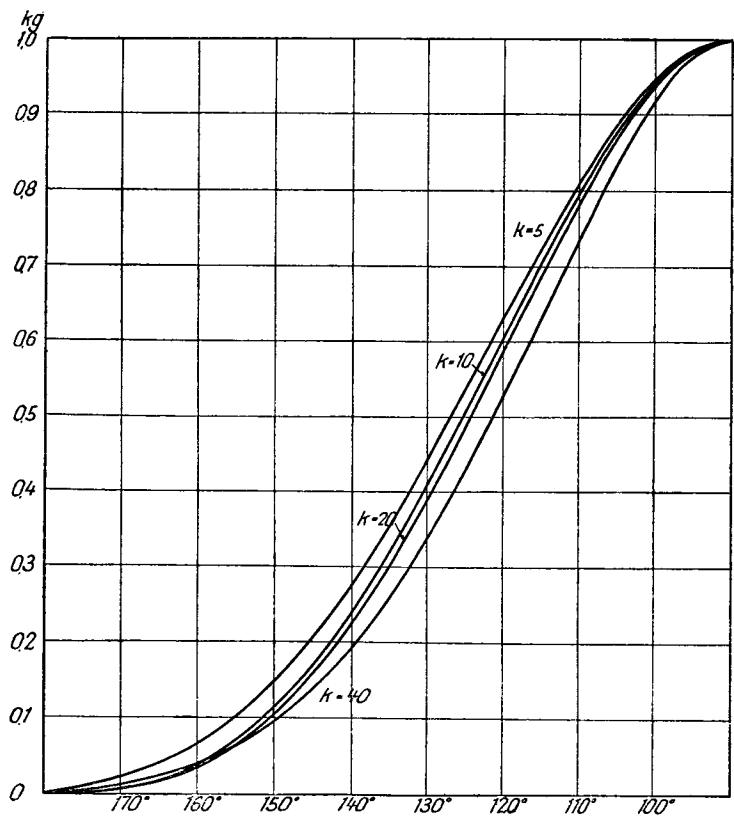


Abb. 31 G_1 -Kurven

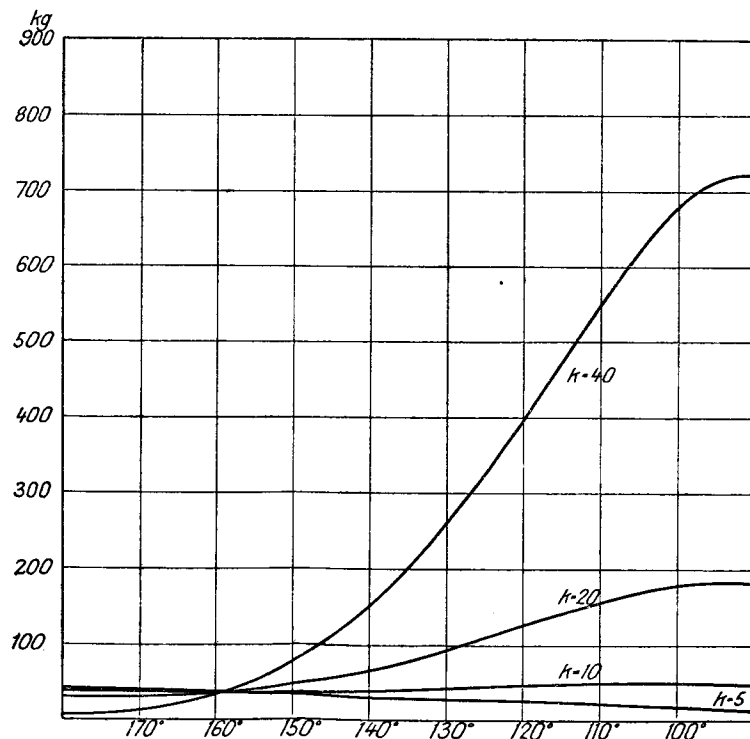


Abb. 32 $\sigma_{sym} R^2$ -Kurven

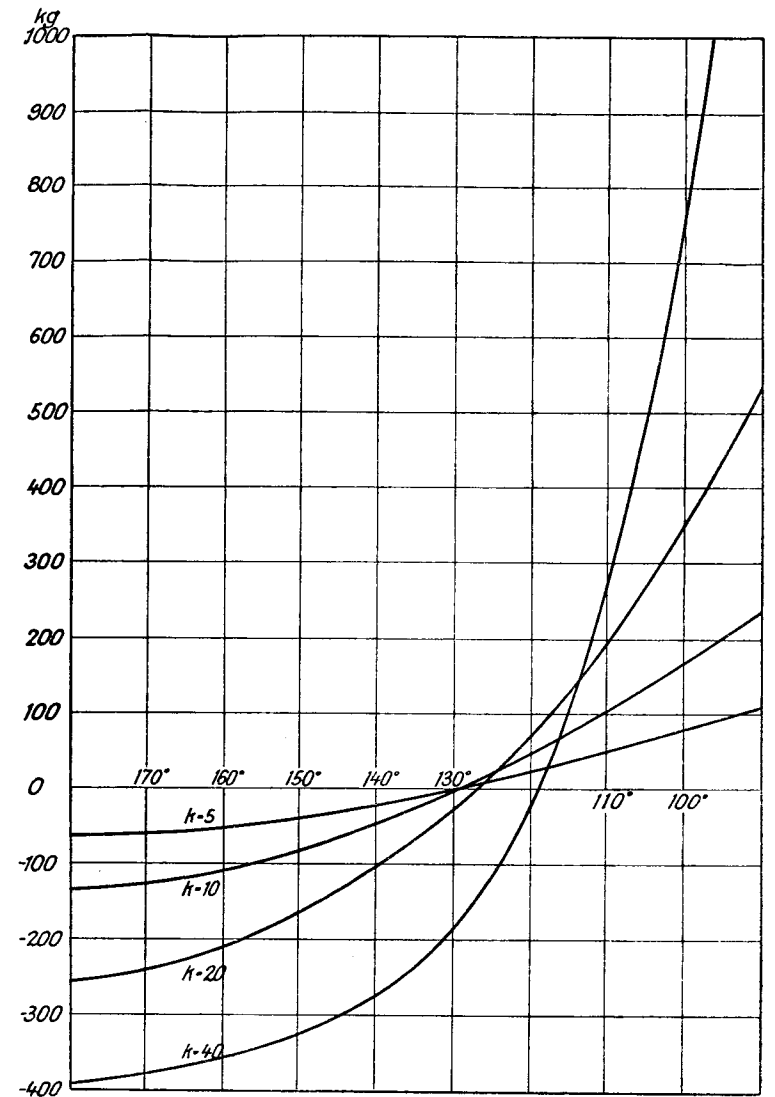


Abb. 30 σR_1 -Kurven

Erster Belastungsfall
Spannungsverlauf
 $G_{10} = 1 \text{ cm}^2/\text{kg}$ für 1 cm Umfang $k=10, 5, 10, 20, 40$

in der Nähe des belasteten Randes mit abnehmender Schalenstärke zu, so dass die Partien des Aussenrandes im Verhältnis zur Innenrandzone durch Ringbiegung stärker beansprucht werden.

e. Radialbiegungsspannungen (Abb. 31).

Aus Abb. 31, die den Verlauf der radialen Biegemomente wiedergibt, ist ersichtlich, dass die Momentenkurven für verschieden dicke Schalen nicht stark von einander abweichen. Dies erlaubt uns, die Biegungsspannungen für eine Schar von Schalen auf einige v. H. genau zu bestimmen, wenn die G_1 -Kurve für einen mittleren Wert von $R_1 : h$ bekannt ist.

Die Spannungen selber sind für verschiedene Schalen keineswegs gleich, die dünneren Schalen werden bei gleichem Randmoment stärker auf Radialbiegung beansprucht. Der Höchstwert der σ_{am} -Spannungen tritt bei allen Schalen am belasteten Rand auf. (Vergl. Zahlentafel IV.) Bei verhältnismässig gleicher Belastung verhalten sich diese Randwerte wie 1 : 2 : 4 : 8 (Randbedingung).

Wir können zusammenfassend feststellen, dass bei am Aussenrand durch Kräftepaare verhältnismässig gleich belasteten Schalen, deren Werte für k nicht zu weit auseinander liegen, die Beanspruchung hinsichtlich Radial- und Schubspannungen eine angenähert gleiche ist, während bei schwächeren Schalen die Beanspruchung durch die Ring- und die Biegungsspannungen am belasteten Rande viel stärker hervortritt.

Die Schub- und die Radialspannungen sind bei allen Schalen von untergeordneter Bedeutung, während die Biegungsspannungen nicht vernachlässigt werden dürfen.

2. Beispiel. *Der Aussenrand der Schalen sei durch eine Kraft $N_a = 1 \text{ kg}$ für 1 cm Umfang des Mittelparallelkreises belastet.*

a. Schubspannungen (Abb. 34).

Die Schubspannungen nehmen bei gleicher Randbelastung mit abnehmender Schalenstärke zu, am belasteten Rand erfolgt die Änderung umgekehrt proportional der Veränderung der Schalenstärke (Randbedingung); diese Proportion bleibt im ganzen Verlauf bis auf einige v. H. genau erhalten, d. h. Schalen, deren Werte k nicht zu stark verschieden sind, werden bei verhältnismässig gleicher Belastung des Aussenrandes durch einen Horizontalzug gleich auf Schub beansprucht.

Zahlentafel V.

		$k =$	5	10	20	40	
Schubspannung	$\tau_a \cdot R_1$	kg/cm	2,5	5,0	10,0	20,0	
	$\tau_a^* \cdot R_1$	kg/cm	2,5	2,5	2,5	2,5	
	$\tau \min \cdot R_1$	kg/cm	0,595	1,340	2,690	4,935	
	$\tau^* \min \cdot R_1$	kg/cm	0,595	0,670	0,672	0,617	
	$\alpha =$			136°	135°	134°	133°
Radialspannung	$\sigma_r \max \cdot R_1$	kg/cm	0,225	0,425	0,820	1,488	
	$\sigma_r^* \max \cdot R_1$	kg/cm	0,225	0,213	0,205	0,186	
	$\alpha =$			101°	100°	100°	99°
	$\sigma_r \min \cdot R_1$	kg/cm	0,768	1,680	3,306	5,760	
	$\sigma_r^* \min \cdot R_1$	kg/cm	0,768	0,840	0,826	0,720	
	$\alpha =$			150°	149°	148°	147°
Ringspannung	$\sigma_{\theta a} \cdot R_1$	kg/cm	86,277	181,686	379,607	848,876	
	$\sigma_{\theta a}^* \cdot R_1$	kg/cm	86,277	90,843	94,902	106,109	
	$\sigma_{\theta i} \cdot R_1$	kg/cm	23,682	49,380	98,819	177,098	
	$\sigma_{\theta i}^* \cdot R_1$	kg/cm	23,682	24,690	24,705	22,137	
Radialbiegungs- spannung	$\sigma_{xm} \max \cdot R_1$	kg/cm	7,069	26,775	103,320	381,600	
	$\sigma_{xm}^* \max \cdot R_1$	kg/cm	7,069	13,388	25,830	47,700	
	$\alpha =$			115°	114°	113°	112°
Ringbiegungs- spannung	$\sigma_{ymi} \cdot R_1$	kg/cm	25,853	24,735	22,982	18,605	
	$\sigma_{ymi}^* \cdot R_1$	kg/cm	25,853	12,368	5,745	2,077	
	$\sigma_m \max \cdot R_1$	kg/cm	$\sigma_{ymi} \cdot R_1$	$\sigma_{ymi} \cdot R_1$	41,160	124,560	

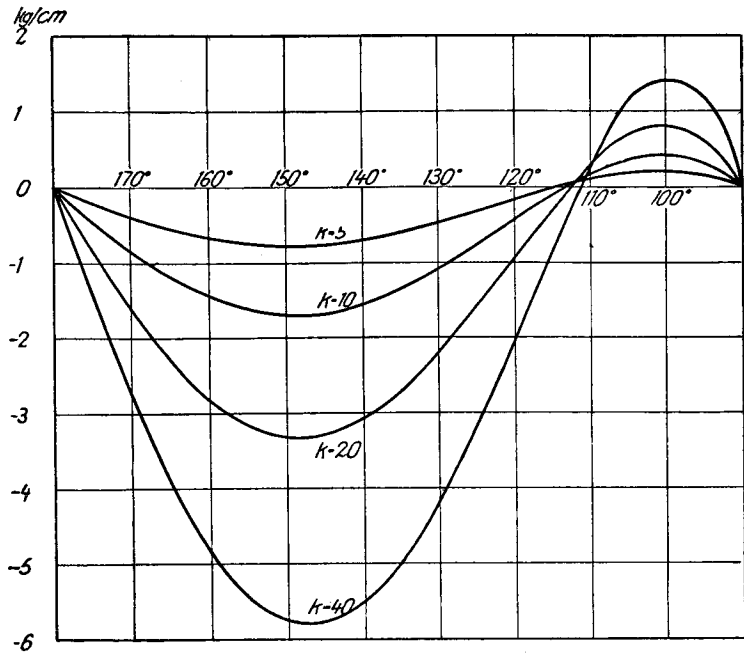


Abb.33 σ_r -Kurven

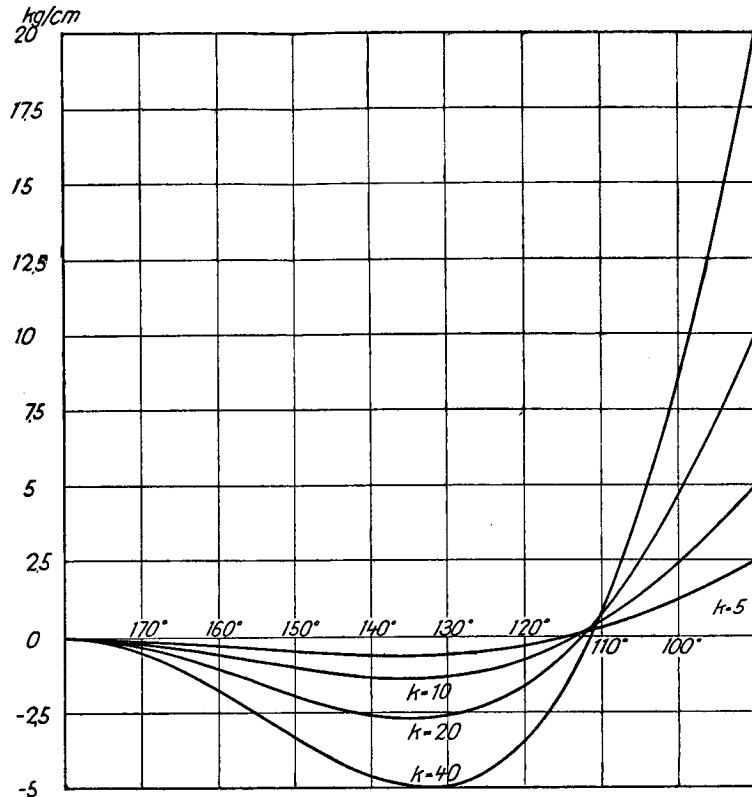


Abb.34 τ -Kurven

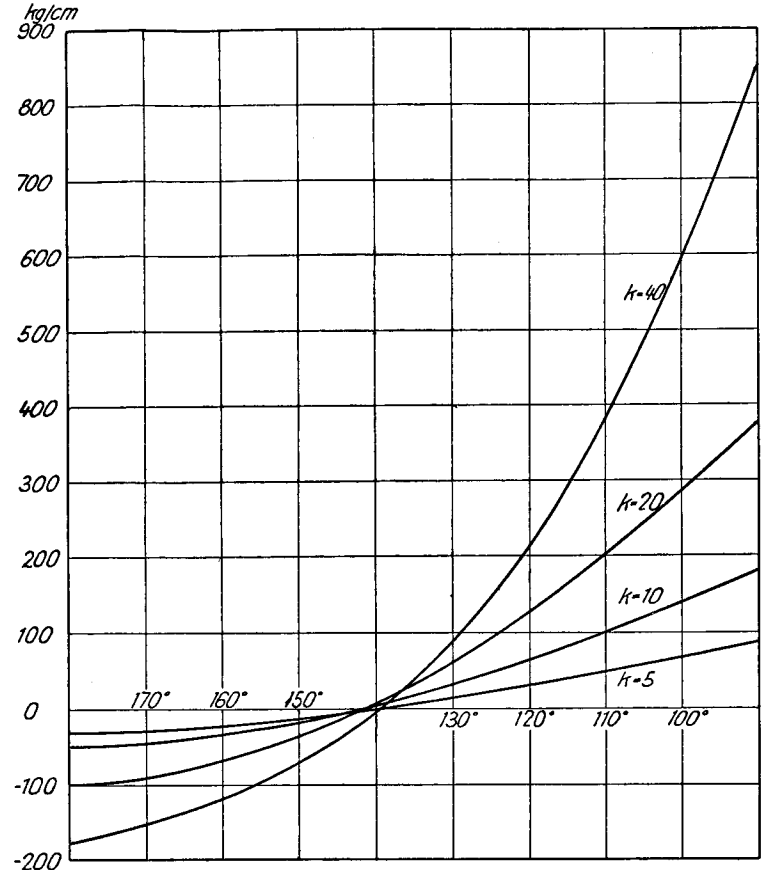


Abb.35 σ_ϕ -Kurven

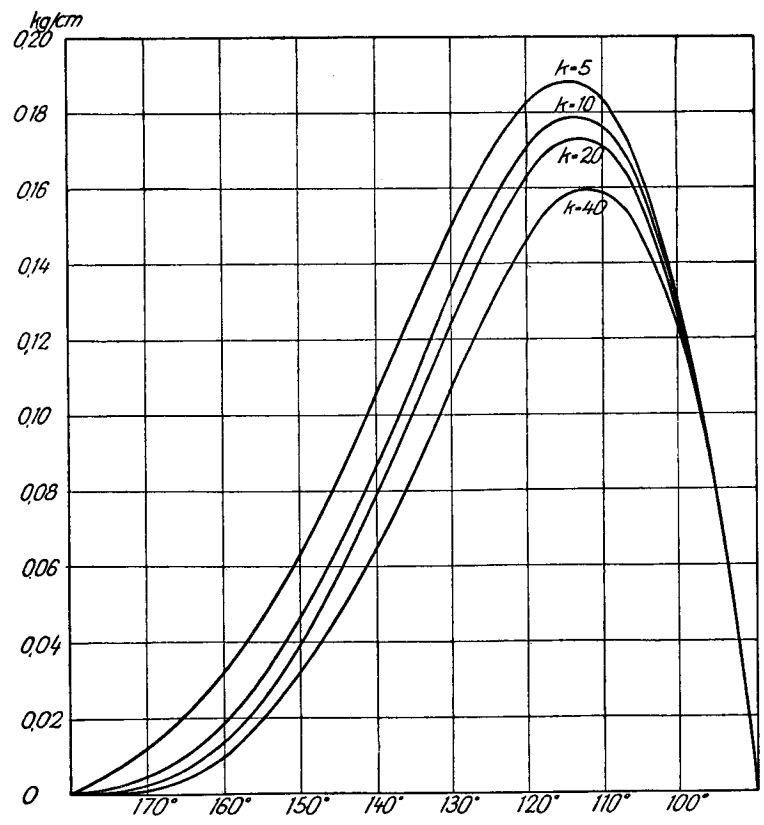


Abb.36 $\bar{\sigma}_r$ -Kurven

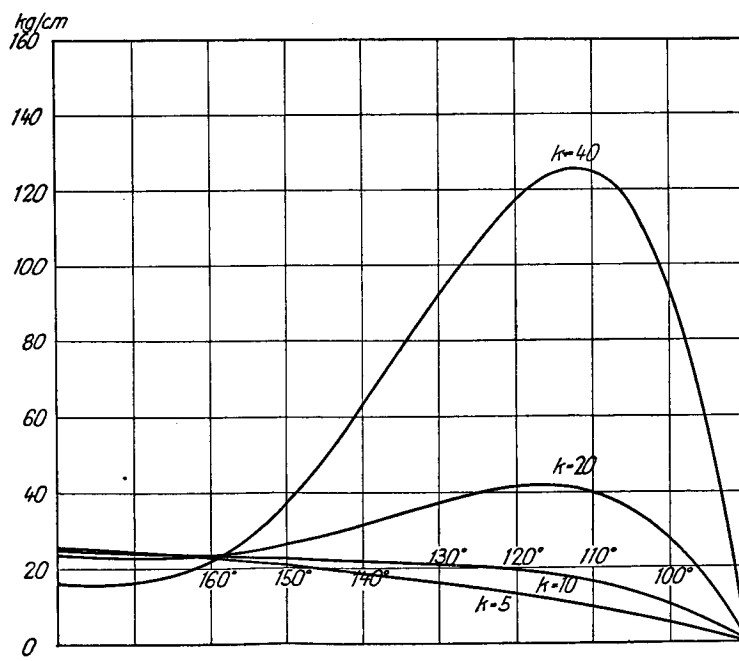


Abb.37 $\bar{\sigma}_\phi$ -Kurven

Zweiter Belastungsfall
 Spannungsverlauf
 $N_0 = 1 \text{ kg}$ für 1 cm Umfang $k = 10; k = 5; 10, 20, 40$.

Die Randspannung ist bei allen gerechneten Schalen die absolut grösste Schubspannung. τ wechselt sein Vorzeichen im Winkelraum $\alpha = 111^\circ$ bis 115° , der zugehörige Parallelkreis liegt um so näher am belasteten Rand, je schwächer die Schale ist.

b. Radialspannungen (Abb. 33).

Auch hier weichen die σ_r^* -Kurven, wenigstens für die 3 ersten Schalen, von einer σ_r^* -Kurve, die einem Mittelwert von k angehört, nur unwesentlich ab. (Vergl. Zahlentafel V.)

Bei allen untersuchten Schalen tritt in der Nähe des belasteten Aussenrandes zuerst eine kleine Druckzone der Radialspannungen auf, während diese Spannungen bei Belastungsfall 1 schon vom Aussenrande weg Druckspannungen waren. Der Parallelkreis, für welchen σ_r null wird, liegt bei den 4 Schalen im Winkelraum $\alpha = 111^\circ$ bis 115° und zwar je näher am Aussenrand, je schwächer die Schale ist; desgleichen nähern sich die Kulminationspunkte der σ_r -Kurven mit abnehmender Schalenstärke mehr dem belasteten Rand.

c. Ringspannungen (Abb. 35).

Die Ringspannungen treten in den Partien nahe am Aussenrand gegenüber denjenigen der Innenrandzone um so stärker hervor, je schwächer die Schale ist, dabei nähert sich der Parallelkreis, dessen Ringspannung null ist, dem belasteten Rand. Bei verhältnismässig gleicher Belastung ist die Zunahme der Ringspannungen am Aussenrande bei Verkleinerung der Schalenstärke weniger ausgeprägt, als beim ersten Belastungsfall, so dass bei den 3 ersten Schalen näherungsweise von gleicher Beanspruchung durch die Ringspannungen gesprochen werden kann. (Vergl. Zahlentafel V.) Am Innenrand sind die Verhältnisse ähnlich wie beim ersten Belastungsfall.

d. Ringbiegungsspannungen (Abb. 37).

Bei gleicher Belastung werden die Teile in der Nähe des Aussenrandes bei dünnen Schalen stärker durch Ringbiegung beansprucht als bei dicken. Die Stelle des Höchstwertes dieser Spannungen rückt bei Verkleinerung der Schalenstärke näher gegen den belasteten Rand hin. Am Innenrand ist die Veränderung der Ringbiegungsspannungen klein. (Vergl. Zahlentafel V.)

Die Biegungsspannungen treten gegenüber den Ringspannungen mehr zurück als beim ersten Belastungsfall, ohne jedoch so klein zu bleiben, dass sie unberücksichtigt bleiben dürften.

e. *Radialbiegungsspannungen* (Abb. 36).

Das beim ersten Belastungsfall über den Verlauf der Momentenkurven Gesagte gilt auch hier. Die Kulminationspunkte der Momentenkurven sind dem belasteten Rande um so näher, je dünner die Schale ist. Die Radialbiegungsspannungen werden nahe am belasteten Rand maximal, sie beanspruchen die schwächeren Schalen bei gleicher und bei verhältnismässig gleicher Belastung stärker als die Schalen mit grosser Wandstärke. (Vergl. Zahlentafel V.)

Die Untersuchung von verschiedenen starken, am Aussenrand durch gleichmässig verteilten Horizontalzug verhältnismässig gleich belasteten Schalen zeigt, dass Schalen, deren Werte von k nicht zu stark verschieden sind, angenähert gleiche Beanspruchung hinsichtlich Schub, Radialzug und Ringzug erfahren.

Die Spannungen σ , und τ bleiben für alle Schalen klein, die Biegungsspannungen, die die Partien in der Nähe des belasteten Randes im Verhältnis zu der Zone am unbelasteten Rand um so stärker beanspruchen, je dünner die Schale ist, treten gegenüber den Ringspannungen, die hier die grösste Anstrengung verursachen, mehr zurück als bei den am Aussenrand durch ein gleichmässig verteiltes Kräftepaar belasteten Schalen.

3. Beispiel. *Der Innenrand der Schalen sei durch ein ringsum gleichmässig verteiltes Kräftepaar vom Momente G_1 cm.kg auf 1 cm Umfang des Mittelparallelkreises belastet.*

a. *Schubspannungen.* (Abb. 39.)

Die Stellen der Höchstwerte der Schubspannungen nähern sich mit abnehmender Schalenstärke dem Innenrand. Da sich diese Spannungen in ihrem ganzen Verlauf den Grössen k proportional ändern, werden Schalen, die am Innenrand verhältnismässig gleich durch ein Kräftepaar belastet sind, ungefähr gleich auf Schub beansprucht. (Vergl. Zahlentafel VI.)

b. *Radialspannungen.* (Abb. 40.)

Die Radialspannungen verhalten sich ähnlich wie im ersten Belastungsfall. Die σ^* -Kurven von Schalen mit nicht stark verschiedenen Werten von k weichen nur wenig voneinander ab. (Vergl. Zahlentafel VI.)

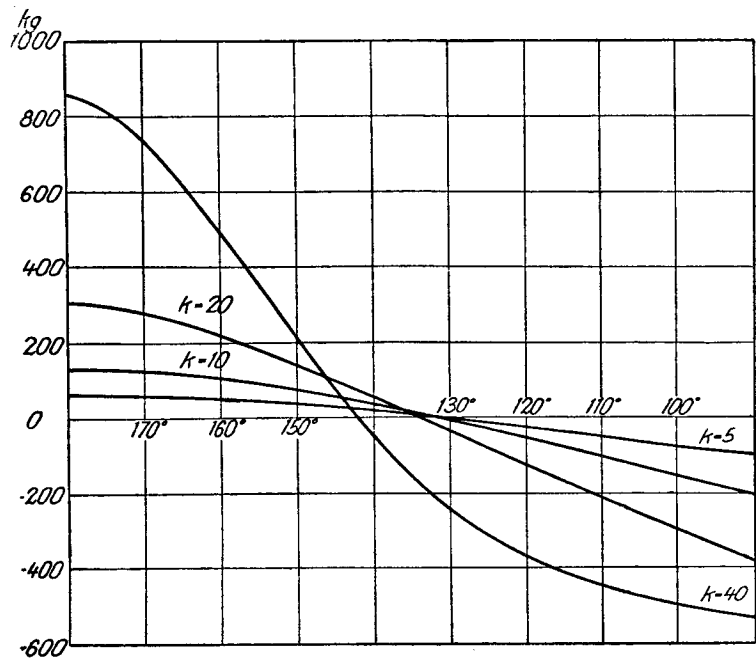


Abb.38 σ_R^2 -Kurven

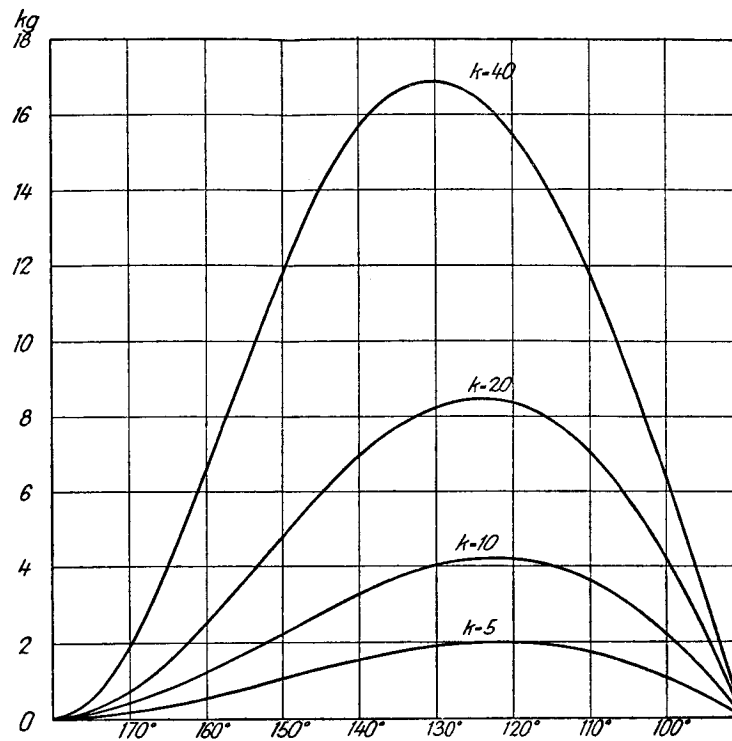


Abb.39 τ_R^2 -Kurven

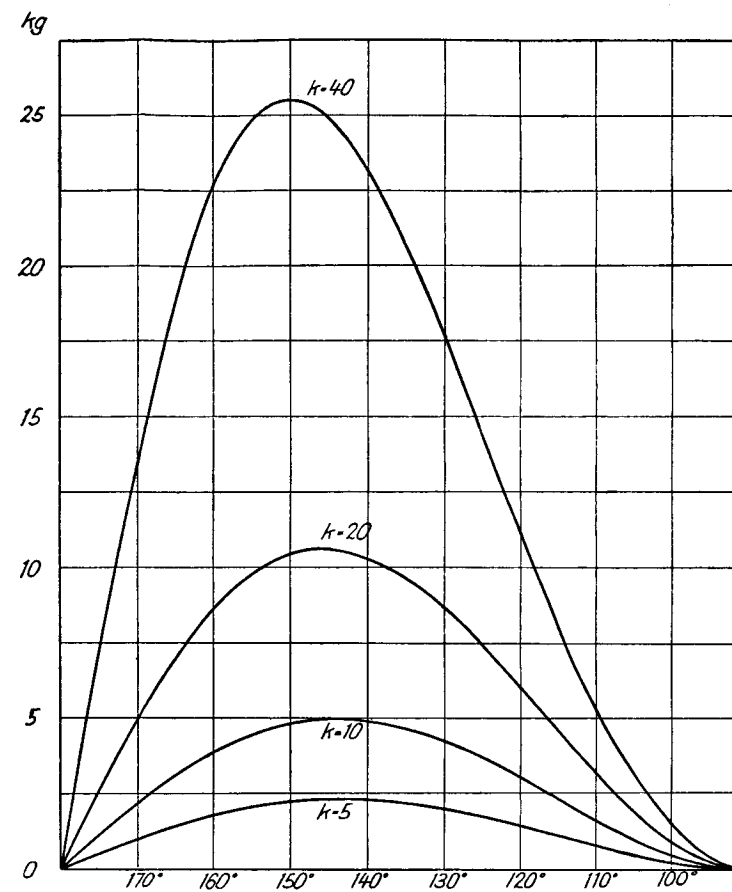


Abb.40 σ_R^2 -Kurven

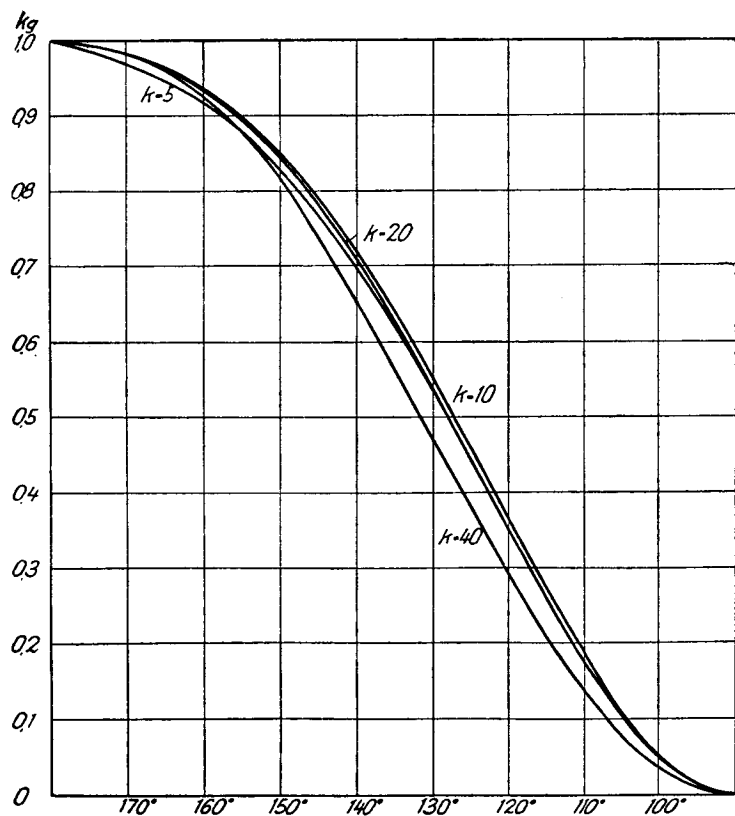


Abb.41 G_i -Kurven

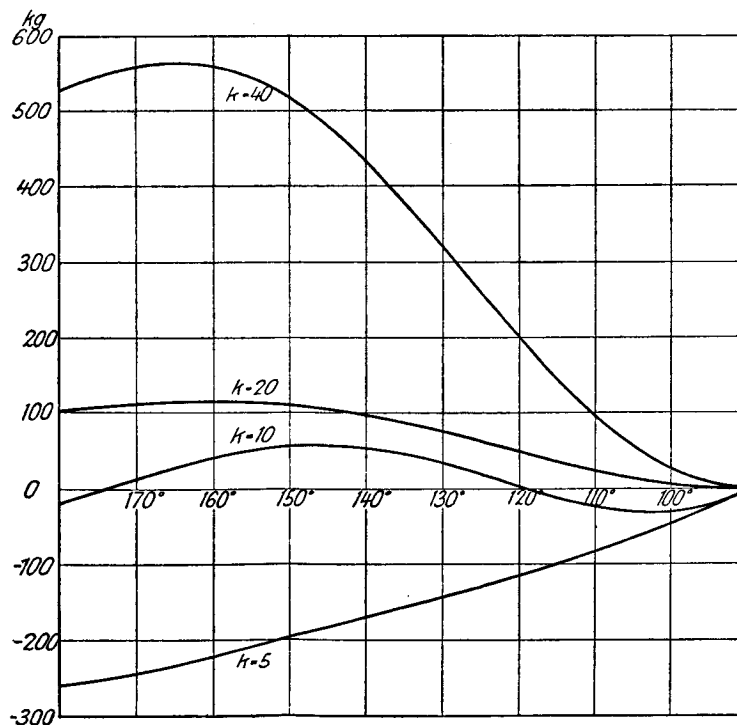


Abb.42 $\sigma_{sym} R_i$ -Kurven

Dritter Belastungsfall
 Spannungsverlauf
 $G_i = 1 \text{ cm/kg}$ für 1cm Umfang $\lambda = 10, k = 5, 10, 20, 40$

Zahlentafel VI.

		$k =$	5	10	20	40
Schubspannung	$\tau_{\max} \cdot R_1^2$	kg	2.520	5.285	10.586	21.114
	$\tau^*_{\max} \cdot R_1^2$	kg	2.520	2.643	2.646	2.639
	$\alpha =$		121°	122°	124°	130°
Radialspannung	$\sigma_{r,\max} \cdot R_1^2$	kg	2.312	4.978	10.615	25.556
	$\sigma^*_{r,\max} \cdot R_1^2$	kg	2.312	2.489	2.654	3.194
	$\alpha =$		141°	143°	146°	150°
Ringspannung	$\sigma_{\theta a} \cdot R_1^2$	kg	98.981	204.331	380.222	532.372
	$\sigma^*_{\theta a} \cdot R_1^2$	kg	98.981	102.166	95.056	66.546
	$\sigma_{\theta i} \cdot R_1^2$	kg	61.536	132.073	303.621	855.958
	$\sigma^*_{\theta i} \cdot R_1^2$	kg	61.536	66.037	75.905	106.995
Radialbiegungs- spannung	$\sigma_{zmi} \cdot R_1^2$	kg	37.5	150.0	600.0	2400.0
	$\sigma^*_{zmi} \cdot R_1^2$	kg	37.5	75.0	150.0	300.0
Ringbiegungs- spannung	$\sigma_{\theta mi} \cdot R_1^2$	kg	25.965	1.710	102.780	528.240
	$\sigma^*_{\theta mi} \cdot R_1^2$	kg	25.985	0.855	25.695	66.030

c. Ringspannungen. (Abb. 38.)

Während die Ringspannungen bei grossen Wandstärken am Aussenrand absolut grösser sind als am belasteten Innenrand überwiegen die letzteren bei dünnen Schalen, so dass die Schalenteile nahe am Aussenrand bei dünnen Schalen im Vergleich zum belasteten Rand schwach beansprucht werden, dabei nähert sich der ungedehnte Parallelkreis mehr

dem Innenrand [$k = 5$, $\alpha = 130^\circ$; $k = 40$, $\alpha = 142^\circ$]. Das Verhalten der Spannungen am belasteten und am unbelasteten Rand ist dem des ersten Belastungsfalles ganz ähnlich.

Bei verhältnismässig gleicher Belastung der Schalen nimmt die Ringspannung am belasteten Rand mit abnehmender Schalenstärke zu. (Vergl. Zahlentafel VI.)

d. Ringbiegungsspannungen. (Abb. 42.)

Eigentümlich ist hier der Wechsel des Momentensinnes, der für eine Schale mit $k \infty 10$ eintritt. Während starke Schalen grosse negative Momente übertragen, hat G_2 für $k = 10$ einen um die α -Achse schwingenden Verlauf, bei noch schwächeren Schalen hat das Moment den positiven Sinn.

Die Spannungen σ_{ym} erreichen ihre Höchstwerte in der Nähe des belasteten Randes, die algebraischen Werte der Maximalspannungen wachsen mit abnehmender Schalenstärke sowohl bei gleicher, als auch bei verhältnismässig gleicher Belastung, ein Resultat, das wir auch bei der Belastung des Aussenrandes durch ein Kräftepaar gefunden haben. (Vergl. Zahlentafel VI.)

e. Radialbiegungsspannungen. (Abb. 41.)

Die unter 1 e gemachten Bemerkungen betreffend den Verlauf der Momentenkurven und der angenäherten Berechnung der Radialbiegungsspannungen aus der G_1 -Kurve eines mittleren k -Wertes gelten hier ungeändert.

Erwähnenswert ist der Umstand, dass die übertragenen Biegemomente bei starken und bei dünnen Schalen kleiner sind als bei der Schale $\lambda = 10$; eine grössere Abweichung von der Momentenkurve dieser Schale wird jedoch erst bei sehr grossen Werten von k bemerkbar.

Die Schlussbemerkungen des ersten Beispielles können ungeändert auf diesen Belastungsfall übertragen werden.

4. Beispiel. *Der Innenrand der Schalen sei durch eine ringsum gleichmässig verteilte Kraft $T_{11} = 1 \text{ kg}$ für 1 cm Umfang des Mittelparallelkreises belastet.*

a. Schubspannungen. (Abb. 46.)

Die Verschiebung der mittleren Nullstellen und der Kulminationspunkte ist gering, alle diese Punkte nähern sich bei Verkleinerung der Schalenstärke dem belasteten Rand. Die angenähert gleiche Beanspruchung durch Schub bei verhältnismässig gleicher Belastung bleibt auch bei diesem Fall der Randbelastung bestehen. (Vergl. Zahlentafel VII.)

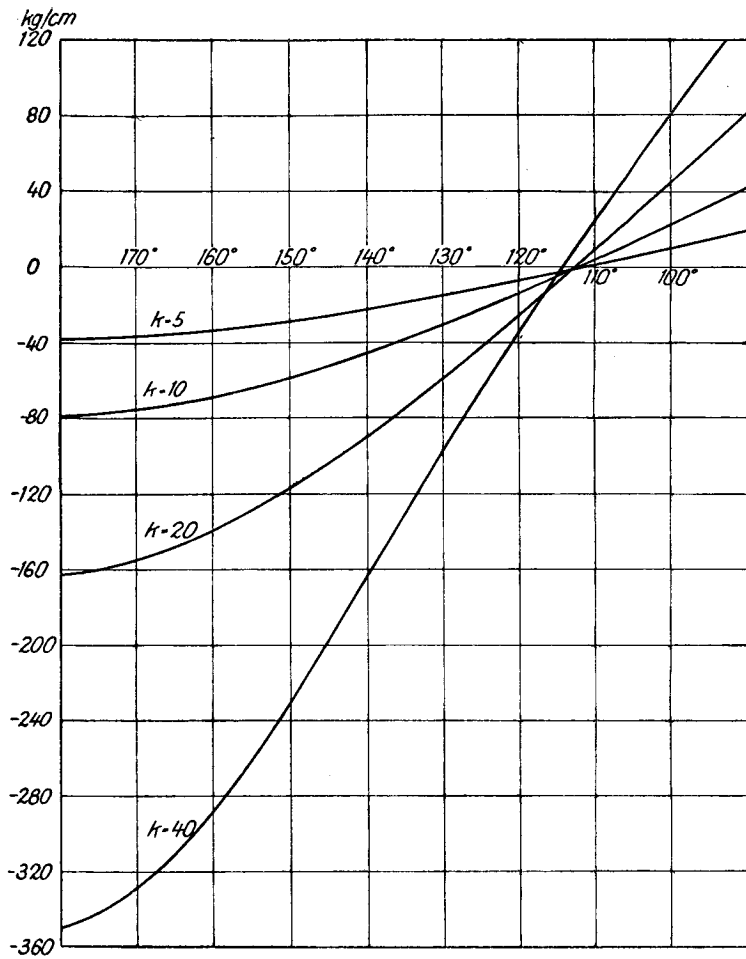


Abb 43 σ . R.-Kurven

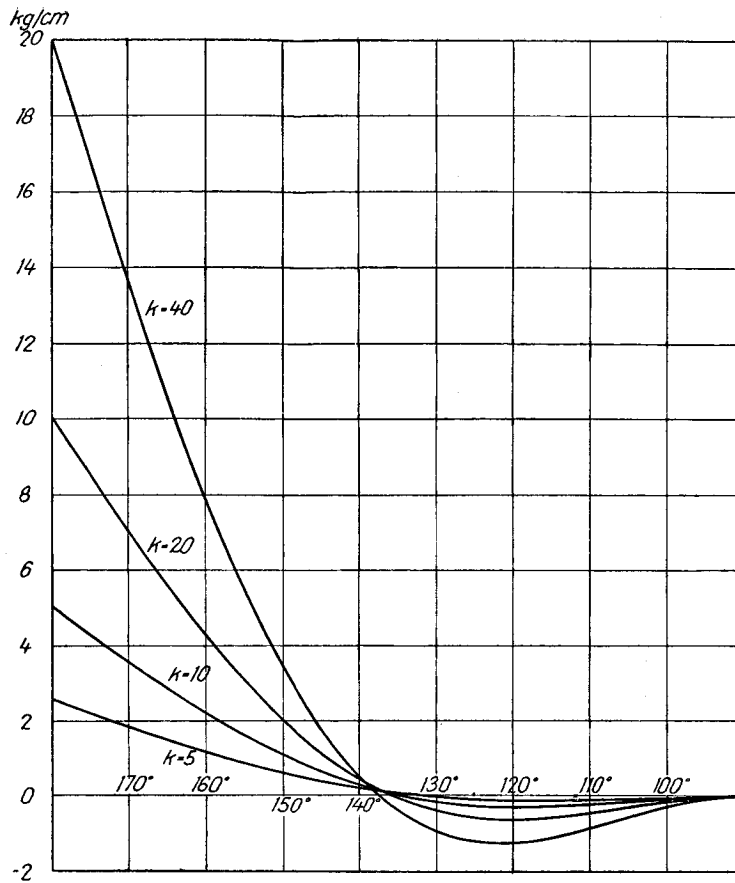


Abb 44 σ . R.-Kurven

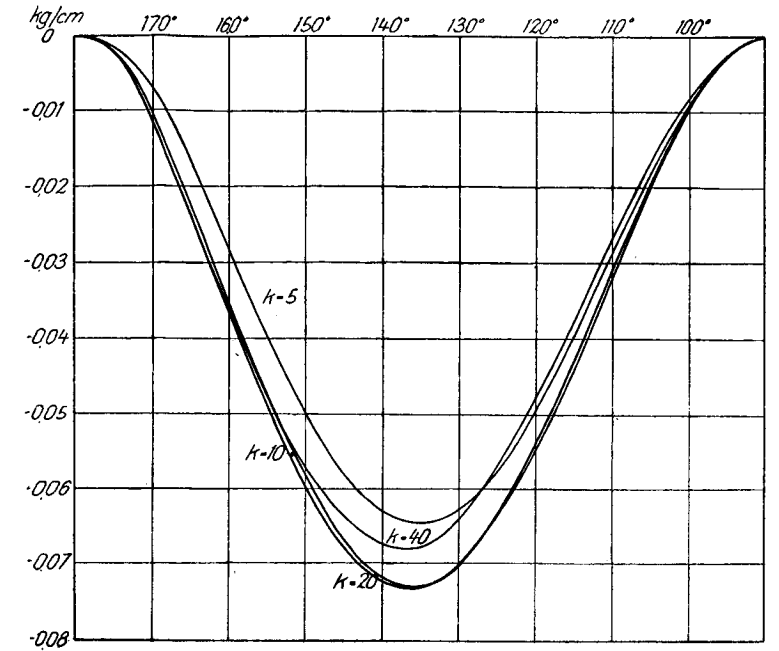


Abb 45 σ . R.-Kurven

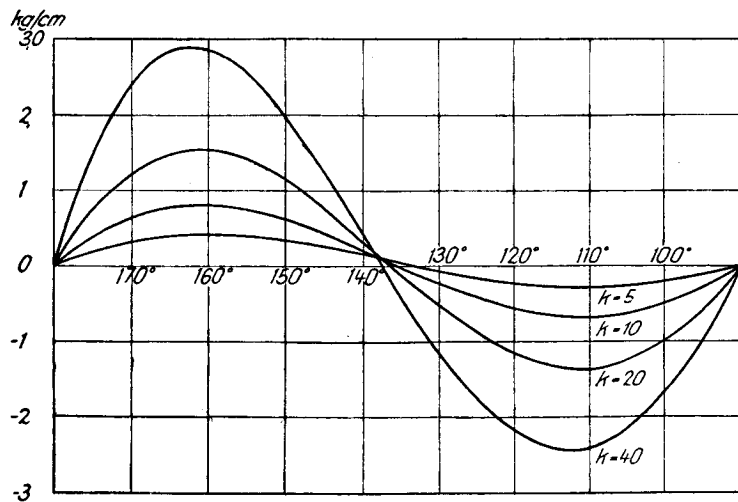


Abb 46 τ . R.-Kurven

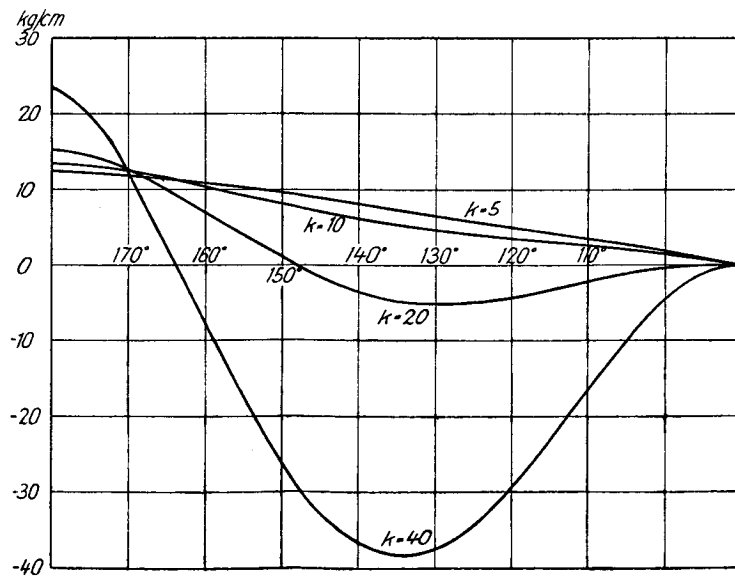


Abb 47 σ_{sym} . R.-Kurven

Vierter Belastungsfall
Spannungsverlauf
 $T_i = 1 \text{ kg}$ für 1cm Umfang $k = 10; k = 5, 10, 20, 40$.

Zahlentafel VII.

	$k =$		5	10	20	40
Schubspannung	$\tau_{\max} \cdot R_1$	kg/cm	0.407	0.782	1.532	2.855
	$\tau^*_{\max} \cdot R_1$	kg/cm	0.407	0.391	0.383	0.357
	$\alpha =$		160°	161°	162°	163°
	$\tau_{\min} \cdot R_1$	kg/cm	—	—	—	—
	$\tau^*_{\min} \cdot R_1$	kg/cm	0.304	0.344	0.342	0.301
	$\alpha =$		110°	111°	112°	113°
Radialspannung	$\sigma_{ri} \cdot R_1$	kg/cm	2.5	5.0	10.0	20.0
	$\sigma^*_{ri} \cdot R_1$	kg/cm	2.5	2.5	2.5	2.5
	$\sigma_{r,\min} \cdot R_1$	kg/cm	—	—	—	—
	$\sigma^*_{r,\min} \cdot R_1$	kg/cm	0.158	0.165	0.167	0.157
	$\alpha =$		118°	119°	120°	122°
Ringspannung	$\sigma_{ii} \cdot R_1$	kg/cm	38.238	78.805	162.533	349.832
	$\sigma^*_{ii} \cdot R_1$	kg/cm	38.238	39.403	40.633	43.729
	$\sigma_{ia} \cdot R_1$	kg/cm	19.378	41.978	81.652	134.888
	$\sigma^*_{ia} \cdot R_1$	kg/cm	19.378	20.989	20.413	16.861
Radialbiegungs- spannung	$\sigma_{zm,\max} \cdot R_1$	kg/cm	2.415	11.220	43.680	161.040
	$\sigma^*_{zm,\max} \cdot R_1$	kg/cm	2.415	5.610	10.920	20.130
	$\alpha =$		135°	136°	137°	138°
Ringbiegungs- spannung	$\sigma_{ymi} \cdot R_1$	kg/cm	12.289	13.365	15.180	22.900
	$\sigma^*_{ymi} \cdot R_1$	kg/cm	12.289	6.683	3.795	2.862

b. Radialspannungen. (Abb. 44.)

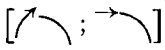
Die Randwerte dieser Spannungen sind gleichzeitig Maximalwerte. Die σ_r -Kurven fallen bei allen Schalen in der Nähe des belasteten Randes rasch gegen Null ab und bleiben nachher Druckspannungen bis an den Aussenrand; die Nullstellen liegen um so näher am Innenrand, je dünner die Schale ist [$k = 5$, $\alpha = 134^\circ$; $k = 40$, $\alpha = 138^\circ$].

Bei verhältnismässig gleicher Belastung ist die Beanspruchung durch die Radialspannungen bei in der Dicke nicht zu stark verschiedenen Schalen dieselbe.

c. Ringspannungen. (Abb. 43.)

Die Nullstellen der σ_α -Kurven liegen bei den untersuchten Schalen im Winkelraum $\alpha = 111^\circ$ [$k = 5$] bis 114° [$k = 40$], d. h. nahe am unbelasteten Rand. Die starke Zunahme der Ringspannungen am belasteten Rand gegenüber den Spannungen am Aussenrand ist hier wie im zweiten Belastungsfall viel weniger ausgeprägt als bei der Belastung der Ränder durch Kräftepaare, hier erfolgt wie bei Beispiel 2 auch bezüglich der Ringspannungen angenähert gleiche Beanspruchung bei verhältnismässig gleicher Belastung, wenn die Schalendicken nicht zu sehr verschieden sind. (Vergl. Zahlentafel VII.)

d. Ringbiegungsspannungen. (Abb. 47.)

Die Ringbiegungsspannungen nehmen am belasteten Rand mit abnehmender Schalenstärke langsam zu. Wie im Falle der Belastung des Innenrandes durch ein Kräftepaar haben wir auch hier beim Übergang zu dünneren Schalen einen Wechsel im Vorzeichen der übertragenen Momente G_2 , und zwar erfolgt dieser Wechsel bei gleichartiger Deformation durch die Belastungen 3 und 4 [] im gleichen Sinn; beide Male sind diese Momente bei dünnen Schalen grösstenteils positiv, während sie bei dicken Schalen im ganzen Verlauf negativ bleiben. Es ist dies eine Eigentümlichkeit, für die man aus der Vorstellung keine Erklärung finden kann, wie überhaupt der Verlauf der Ringbiegungsspannungen dem Gefühle nach am wenigsten abgeschätzt werden kann. (Grösse der Randspannungen σ_{ymi} bzw. σ_{ymi}^* vergl. Zahlentafel VII.)

e. Radialbiegungsspannungen. (Abb. 45.)

Abweichend vom 2. Belastungsfall treten hier bei allen untersuchten Schalen die grössten Radialbiegungsspannungen nicht in der Nähe des belasteten Randes, sondern in einer mittleren Schalenzone auf; je dünner

die Schale ist, umsomehr nähert sich diese Zone dem belasteten Rand, die Verschiebung für die 4 Schalen ist aus der Zahlentafel VII ersichtlich.

Wenn die G_1 -Kurve für eine Schale gegeben ist, so kann der Spannungsverlauf für eine Schar von Schalen, deren Wandstärken von derjenigen der ersten nicht sehr verschieden sind, für den Fall der Belastung des Innenrandes durch einen Horizontalzug mit guter Annäherung bestimmt werden. Die Spannungen sind bei gleicher Schalenbelastung um so grösser, je dünner die Schale ist. (Vergl. Spannungen σ_{max} max. in Zahlentafel VII.)

Die Biegungsspannungen treten auch hier neben den Ringspannungen mehr in den Hintergrund als bei der Belastung der Ränder durch Kräftepaare.

Die Schlussbemerkung des zweiten Falles gilt auch für diese Belastung ungeändert.

Im allgemeinen werden bei praktischen Beispielen die Schalenkonstanten und die Randverhältnisse mit denen unserer untersuchten Schalen nicht übereinstimmen, so dass die hier gefundenen Resultate nicht ohne weiteres verwendet werden können.

Andererseits liegt kein Grund vor, anzunehmen, dass das elastische Verhalten der Ringflächenschalen bei etwas geänderten Verhältnissen wesentlich anders sei; man wird die hier gemachten Erfahrungen sinnmässig auf Ringflächenschalen mit anderer Form und anderer Belastung übertragen können. Dadurch gelingt es uns freilich nicht, den genauen Spannungsverlauf für jede Schale ohne weiteres anzugeben, die Beanspruchung kann vielmehr nur abgeschätzt werden; wenn diese rohe Annäherung nicht genügt, muss die genaue Berechnung der Schale nach der hier entwickelten Theorie durchgeführt werden.

§ 13. *Der Übergang von der Kugel zum Zylinder.*

Aus den Untersuchungen des § 12 geht hervor, dass die von uns gegebene Theorie der Festigkeitsberechnung von Ringflächenschalen bei $\lambda = 10$ für alle praktisch in Betracht kommenden Werte von k , d. h. für Schalen jeder möglichen Dicke eine gut brauchbare Berechnungsmethode gibt; jetzt bleibt noch festzustellen, ob diese Brauchbarkeit auch für verschiedene Werte von λ erhalten bleibt.

Andererseits können wir dann die so gefundenen Resultate mit denen derjenigen Schalen vergleichen, die den Grenzwerten von λ entsprechen,

es sind dies die Kugelschalen [$\lambda = 0$] und die unendlich lange Zylinderschale [$\lambda = \infty$]. Voraussichtlich werden die Spannungskurven für Schalen, deren Werte von λ zwischen 0 und ∞ liegen (Ringflächenschalen) bei gleicher Stärke und gleichen Randverhältnissen der verschiedenen Schalen und bei gleicher Belastung zwischen den entsprechenden Kurven der Kugel- und der Zylinderschalen drinliegen, und werden sich den Spannungskurven der Zylinderschalen umsomehr nähern, je grösser der Wert von λ ist.

Mit der Festigkeitsberechnung der Kugelschalen brauchen wir uns hier nicht weiter zu befassen, da diese mit den gleichen Hypothesen,

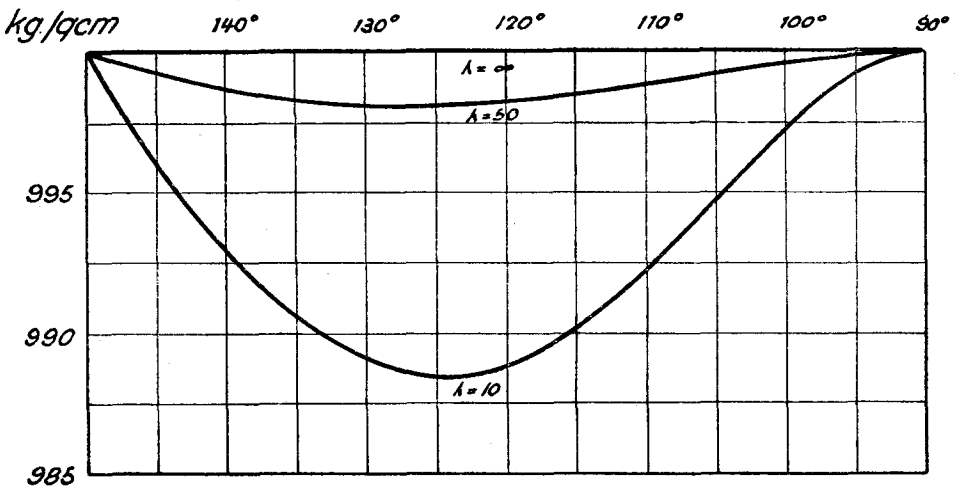


Abb. 48.

Radialbiegungsspannungen. $\sigma_{xmi} = \sigma_{xma} = 1000 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha_a = 90^\circ$, $\alpha_i = 150^\circ$, $k = 10$.

die wir der Berechnung der Ringflächenschalen zu Grunde gelegt haben, von L. Bolle¹⁾ durchgeführt wurde.

Da beim unendlich langen Zylinder die tangentialen Spannungen für jedes symmetrische Belastungsgesetz verschwinden, können die Spannungsgrössen N , T_1 , G_1 aus den 3 Gleichgewichtsbedingungen allein bestimmt werden, das Problem wird für den Zylinder statisch bestimmt.

Bei Verwendung der früher gegebenen Bezeichnungen lauten diese 3 Gleichgewichtsbedingungen, wie man sich leicht überzeugen kann:

¹⁾ L. Bolle, Festigkeitsberechnung von Kugelschalen. Promotionsarbeit. Zürich, Orell Füssli, 1916.

$$\begin{aligned}
 136) \quad & \frac{dT_1}{d\alpha} - N + X \cdot R_1 = 0, \\
 & \frac{dN}{d\alpha} + T_1 + Z \cdot R_1 = 0, \\
 & \frac{dG_1}{d\alpha} - N \cdot R_1 = 0.
 \end{aligned}$$

Die Lösung des homogenen Gleichungssystems 136 [$X = Z = 0$] lautet:

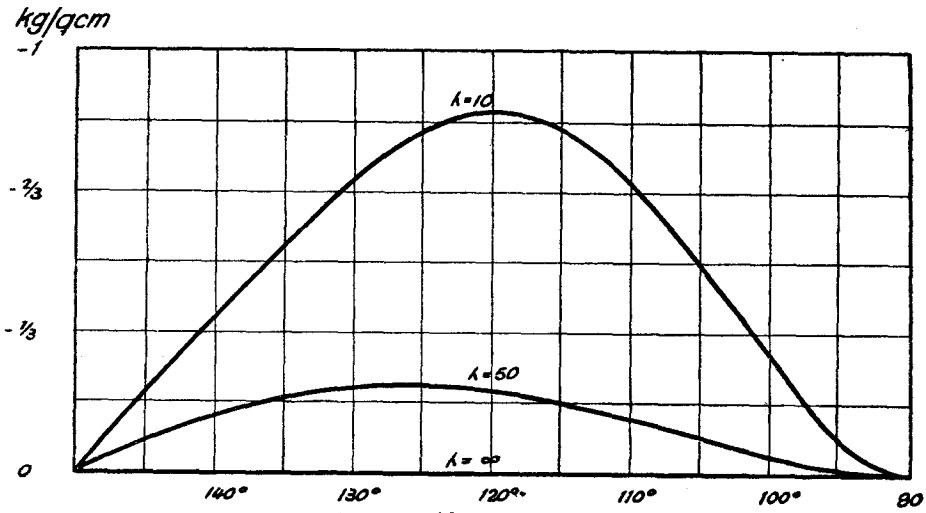


Abb. 49.

Radialspannungen. $\sigma_{rma} = 1000 \text{ kg/cm}^2 = \sigma_{zmi}$, $k = 10$, $\alpha_a = 90^\circ$, $\alpha_i = 150^\circ$.

$$\begin{aligned}
 137) \quad & T_{1.1} = c_1 \cos \alpha + c_2 \sin \alpha, \\
 & N_1 = -c_1 \sin \alpha + c_2 \cos \alpha, \\
 & G_{1.1} = R_1 c_1 \cos \alpha + R_1 c_2 \sin \alpha + c_3;
 \end{aligned}$$

dabei sind c_1, c_2, c_3 Integrationskonstanten; wir haben gerade 3 Konstanten nötig, um die 6 Randspannungsgrößen, zwischen denen 3 Gleichgewichtsbedingungen bestehen, beliebigen Randbedingungen anpassen zu können.

Für die praktisch vorkommenden Fälle können partikuläre Lö-

1) Diese Gleichungen können auch aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Ringflächenschale (Gl. 22) durch Grenzübergang erhalten werden.

zungssysteme der Gl. 136 leicht gefunden werden; für eine Belastung durch konstanten inneren Überdruck lautet dieses System:

$$T_{1,2} = R_1 \cdot p; \quad N_2 = G_{1,2} = 0.$$

Um den Vergleich mit den Grenzfällen direkt durchführen zu können, wurden die Ringflächenschalen nur für solche Randbelastungen untersucht, die gleichzeitig als mögliche Belastungsfälle für den unendlich langen Zylinder in Frage kommen.

Zuerst untersuchen wir eine Schar von Schalen, die an beiden Rändern durch Kräftepaare vom gleichen Moment $G_{1i} = G_{1a} \text{ cm. kg}$ für 1 cm

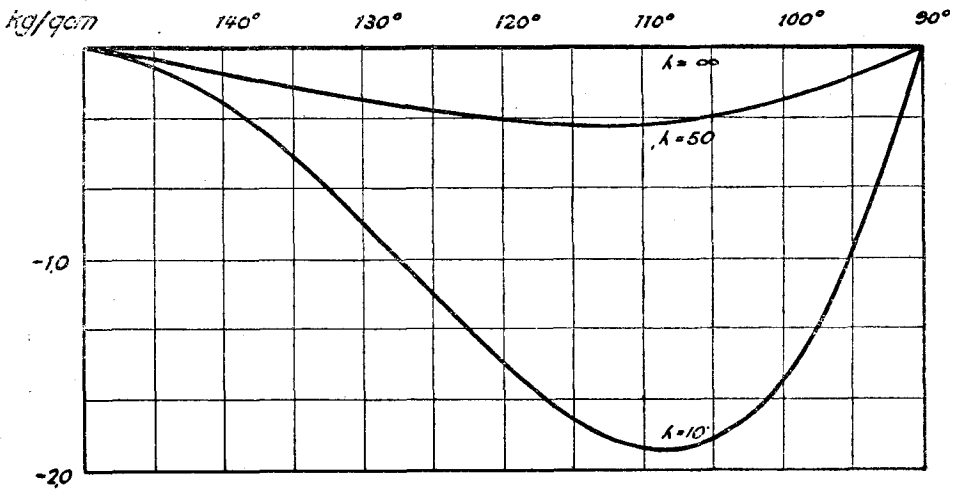


Abb. 50.

Schubspannungen. $\sigma_{cma} = \sigma_{cmt} = 1000 \text{ kg/cm}^2$, $k = 10$, $\alpha_a = 90^\circ$, $\alpha_t = 150^\circ$.

des zugehörigen Mittelparallelkreises belastet sind; bei allen Schalen wird $k = 10$; $\sigma = 0.3$ angenommen, der Öffnungswinkel des Schalenmeridians beträgt 60° [$\alpha_a = 90^\circ$; $\alpha_t = 150^\circ$].

Die entsprechenden Ringflächenschalen wurden für Werte von $\lambda = 10$ und $\lambda = 50$ durchgerechnet. Die Spannungen der Zylinderschale wurden nach Gl. 137 bestimmt; aus den Randbedingungen folgt:

$$c_1 = c_2 = 0; \quad c_3 = G_{1a}; \quad T_1 = N = 0; \quad G = \text{const} = G_{1a},$$

d. h. der Zylinder wird durch konstante radiale Biegung beansprucht.

Aus den Abb. 49 bis 51, die den Verlauf der Spannungen für 2 Ringflächenschalen und für den Zylinder bei einer Randspannung $\sigma_{cma} =$

$\sigma_{xmi} = 1000 \text{ kg/cm}^2$ angeben, ersieht man, dass die früher ausgesprochene Vermutung betreffend die Annäherung an den Zylinder mit wachsenden Werten von λ zutrifft. Es wird interessant sein, diese Resultate mit denen des entsprechenden Kugelbeispiels, das Herr Bolle zurzeit berechnet, zu vergleichen.

Die Konstanz der radialen Biegungsspannungen wird schon für Schalen mit relativ kleinen Werten von λ ziemlich genau erreicht. Bei $\lambda = 10$ beträgt die maximale Abweichung von der Randspannung nur noch 1.5 0/0 der letzteren, bei $\lambda = 50$ nur noch 2.5 0/0.

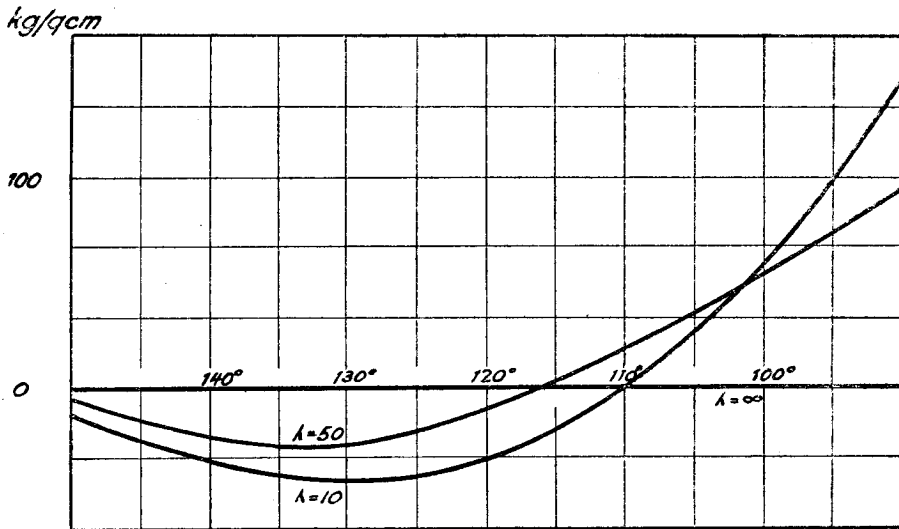


Abb. 51.

Ringspannungen. $\sigma_{xma} = \sigma_{xmi} = 1000 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha_a = 90^\circ$, $\alpha_i = 180^\circ$, $k = 10$.

Die Radial- und die Schubspannungen verschwinden für die Schale $\lambda = 50$ fast vollständig. An dem Verlauf der σ_r -Kurven in Abb. 51 ist der Einfluss des Innenrandmomentes sehr schön bemerkbar, man ersieht dort auch, dass die Belastung des Innenrandes den Spannungsverlauf weniger stark zu beeinflussen vermag, als die Aussenrandbelastung.

Die Ringbiegungsspannungen bleiben für die untersuchten 2 Schalen fast konstant, die Abweichung der G_1 -Kurve gegen die α -Achse ist sehr gering.

Bei einem zweiten Beispiele wurden dieselben Schalen am Aussenrand durch einen Horizontalzug $H_a \text{ kg}$, am Innenrand durch einen

solchen von der Grösse $H_i = H_a \text{ kg}$ und durch ein Kräftepaar vom Moment $G_i = H_i R_i \sin 60^\circ$ auf 1 cm Umfang des zugehörigen Mittelparallelkreises belastet.

Die Resultate sind denen des ersten Beispiels sehr ähnlich, wir haben auch da wieder eine um so grössere Annäherung an die entsprechenden Spannungskurven des Zylinders, je grösser λ gemacht wird.

Im allgemeinen stimmt der Spannungsverlauf der Ringflächenschalen erst für grosse Werte von λ mit demjenigen des entsprechend belasteten Zylinders genügend überein, so dass eine Abschätzung der Ringflächenspannungen an Hand der Zylinderspannungen in den seltensten Fällen möglich ist; zudem wird es kaum zutreffen, dass ein praktisch vorkommender Belastungsfall der Ringflächenschale gleichzeitig ein möglicher Zylinderbelastungsfall sein wird.

Betreffend die Konvergenz unserer Potenzreihen zeigt die Durchrechnung der obigen Beispiele, dass die Reihen mit wachsenden Werten von λ immer besser konvergieren. Würde man λ von 10 an bis zu 0 abnehmen lassen, würde die Konvergenz immer schlechter werden, für ganz kleine Werte von λ müssten wahrscheinlich schon zur Bestimmung der Lösung der homogenen Gleichungen bei einem Meridianöffnungswinkel von 90° je zwei Reihenansätze gemacht werden; die Untersuchungen von Bolle haben wenigstens gezeigt, dass man bei der Halbkugel mit einem einzigen Reihenansatz nicht auskommt. In diesem Fall wird man hier ähnlich verfahren müssen, wie wir es bei der Bestimmung der partikularen Lösungen des fünften und sechsten Belastungsfalles gezeigt haben.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wird die Festigkeitsberechnung der Ringflächenschalen unter der Annahme der Gültigkeit der in der Theorie dünner Schalen allgemein gemachten Hypothesen behandelt.

Im ersten Abschnitt werden die elastischen Gleichungen unter der Voraussetzung, dass die Dicke gegenüber den übrigen Schalendimensionen so klein sei, dass man $h:R_1$ und höhere Potenzen von $h:R_1$ gegenüber der Einheit vernachlässigen dürfe, abgeleitet. Hierauf wird gezeigt, dass das Problem in den Grunddifferentialgleichungen reduzibel ist, und dass auch beim allgemeinsten Belastungsgesetz nur eine einzige lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung integriert zu werden braucht, auch wird die Integration der homogenen Differentialgleichung und die Berechnung der partikulären Integrale mittelst Reihenansatz durchgeführt.

Die der Lösung der Grundgleichungen zugeordneten Spannungen und Deformationen werden im zweiten Abschnitt bestimmt; dort werden die 5 voneinander unabhängigen Randbelastungsfälle, durch deren Superposition man den allgemeinsten Randbedingungen genügen kann, behandelt; auch für die durch konstanten Überdruck belastete Schale wird die Lösung angegeben. Über das Problem der vollen Ringschale werden einige Bemerkungen gemacht.

Im dritten Abschnitt sind die Resultate der numerischen Berechnungen zusammengestellt. Zuerst werden an einem Beispiel die Spannungen und die Deformationen der 5 elementaren Randbelastungsfälle und der durch konstanten Überdruck belasteten Schale berechnet. Dabei hat es sich herausgestellt, dass die Ringspannungen in allen Fällen die grössten Spannungskomponenten liefern; die Schub- und die Radialspannungen bleiben klein, während auch bei dünnen Schalen beträchtliche Biegungsspannungen auftreten. An Hand der Spannungskurven für eine Schar von Schalen mit verschiedenen Wandstärken wird der Einfluss der Wandstärke auf den Spannungsverlauf diskutiert. Diese und die mit verschiedenen Werten von λ durchgeführten Rechnungen zeigen die gute Brauchbarkeit der entwickelten Theorie für die weitesten Grenzen der Parameter h und λ . Zum Schluss werden die Resultate der Ringflächenschalen mit denjenigen des unendlich langen Zylinders, der als Grenzfall der Ringflächenschale aufgefasst werden kann, verglichen.

Lebenslauf.

Am 20. November 1888 in Goldbach (Emmental) geboren, besuchte ich die Elementarschule meines Heimatortes und trat 1900 in das Progymnasium und 1904 in das Gymnasium von Burgdorf über.

Nachdem ich im Herbst 1907 daselbst die Maturität erworben hatte, bezog ich die Maschineningenieur-Abteilung an der eidgenössischen technischen Hochschule in Zürich, an der ich mit Unterbruch eines Jahres bis 1912 studierte. Von 1909 bis 1910 arbeitete ich als Volontär in den Werkstätten von Adolf Saurer in Arbon und in der Giesserei Klus der L. von Roll'schen Eisenwerke.

Nach bestandener Diplomprüfung war ich während zwei Jahren als Assistent bei Herrn Prof. Dr. E. Meissner tätig, und stand von Anfang August 1914 bis Ende November 1915 als Oberleutnant im schweizerischen Aktivdienst. Seither widmete ich mich der Ausarbeitung der vorliegenden Promotionsschrift, die ich während meiner Assistentenzeit begonnen hatte.



Zahlentafel II.

α	f_1^*	f_2^*	f_3^*	f_4^*	f_1^*	f_2^*	f_3^*	f_4^*	g_1	g_2	g_3	g_4	p_1	p_2	p_3	p_4	q_1	q_2	q_3	q_4
180	0	0	0	0	2.58317	1.07696	1.17458	2.53514	26.32417	9.31155	15.90766	15.52118	0.55494	1.55665	0.91030	0.92507	0.22837	0.32582	0.13231	0.21538
175	0.20345	0.10000	0.08959	0.20747	2.32553	1.14311	1.0240	2.37153	26.00481	9.08894	15.60842	15.38631	0.54294	1.54177	0.90483	0.90979	0.22815	0.33561	0.13983	0.21892
170	0.36354	0.21078	0.15414	0.38710	2.06155	1.19531	0.87410	2.19513	25.54321	8.60942	15.03721	15.38148	0.51529	1.51812	0.90716	0.87790	0.22247	0.34311	0.15040	0.21743
165	0.48174	0.32966	0.19556	0.53827	1.79787	1.23054	0.72984	2.00888	24.92792	7.93822	14.23764	15.46888	0.47591	1.48495	0.91500	0.83197	0.21235	0.34771	0.16315	0.21141
160	0.56057	0.45404	0.21662	0.66075	1.54018	1.24747	0.59516	1.81542	24.15137	7.12941	13.25325	15.61615	0.42804	1.44175	0.92760	0.77462	0.19864	0.34896	0.17735	0.20143
155	0.60351	0.58041	0.22067	0.75469	1.29409	1.24455	0.47318	1.61827	23.21096	6.24408	12.12341	15.78920	0.37536	1.38834	0.93924	0.70821	0.18244	0.34648	0.19219	0.18803
150	0.61453	0.70566	0.21129	0.82030	1.06439	1.22223	0.36596	1.42080	22.10715	5.32885	10.89983	15.96924	0.32071	1.32470	0.95241	0.63586	0.16458	0.34002	0.20712	0.17203
145	0.59824	0.82683	0.19209	0.85835	0.85445	1.18064	0.27437	1.22597	20.84481	4.42579	9.61343	16.13868	0.26663	1.25112	0.96481	0.55942	0.14587	0.32946	0.22166	0.15396
140	0.56006	0.94193	0.16671	0.87053	0.66733	1.12233	0.19864	1.03725	19.43239	3.56990	8.30327	16.28311	0.21526	1.16809	0.97557	0.48130	0.12705	0.31480	0.23535	0.13449
135	0.50467	1.04800	0.13815	0.85748	0.50467	1.04800	0.13815	0.85748	17.88113	2.78833	7.00779	16.39868	0.16827	1.07628	0.98442	0.40381	0.10870	0.29614	0.24797	0.11439
130	0.43786	1.14412	0.10927	0.82158	0.36746	0.96016	0.09170	0.68948	16.20341	2.09282	5.75961	16.47985	0.12681	0.97647	0.99103	0.32898	0.09128	0.27367	0.25925	0.09433
125	0.36471	1.22943	0.08211	0.76531	0.25541	0.86097	0.05750	0.53595	14.41421	1.51670	4.58665	16.53536	0.09165	0.86956	0.99590	0.25851	0.07516	0.24766	0.26920	0.07492
120	0.29020	1.30306	0.05832	0.69053	0.16757	0.75241	0.03368	0.39872	12.52801	1.04271	3.51762	16.56270	0.06304	0.75646	0.99887	0.19418	0.06051	0.21846	0.27767	0.05680
115	0.21880	1.36481	0.03884	0.59984	0.10203	0.63642	0.01809	0.27971	10.56021	0.67580	2.57430	16.56942	0.04087	0.63813	1.00041	0.13733	0.04741	0.18646	0.28470	0.04048
110	0.15461	1.41481	0.02390	0.49586	0.05627	0.51487	0.00870	0.18045	8.52550	0.40783	1.77650	16.56276	0.02468	0.51450	1.00093	0.08920	0.03581	0.15207	0.29034	0.02646
105	0.10097	1.45326	0.01340	0.38119	0.02705	0.38938	0.00359	0.10213	6.43885	0.22534	1.13953	16.54921	0.01364	0.38952	1.00083	0.05074	0.02556	0.11575	0.29462	0.01513
100	0.06070	1.48029	0.00667	0.25865	0.01071	0.26105	0.00118	0.04560	4.31361	0.11089	0.67605	16.53465	0.00671	0.26104	1.00047	0.02273	0.01640	0.07798	0.29763	0.00680
95	0.03575	1.49648	0.00263	0.13063	0.00313	0.13098	0.00023	0.01143	2.16305	0.04341	0.39460	16.52390	0.00263	0.13093	1.00013	0.00572	0.00800	0.03924	0.29941	0.00171
90	0.02727	1.50183	0	0	0	0	0	0	0	0	0.3	16.52000	0	0	1	0	0	0	0.3	0



* V O R L A G E - G R O S S - E T H *

:

Vorlage > A3

:



* V O R L A G E - G R O S S - E T H *

: