

THÉORIE GÉNÉRALE
DU
COUP DE BÉLIER

Leer - Vide - Empty

THÉORIE GÉNÉRALE

DU

COUP DE BÉLIER

Application au calcul des conduites à caractéristiques multiples
et des chambres d'équilibre

THÈSE

PRÉSENTÉE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE, ZURICH
POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES TECHNIQUES

PAR

Charles JAEGER

Ingénieur diplômé,
d'Auboranges, canton de Fribourg, Suisse.

N° 723

Rapporteur: Prof. Dr E. MEYER-PETER.
Corapporteur: Prof. R. DUBS.

PARIS



92, RUE BONAPARTE (VI)

1933

RECHERCHES SUR LA
GÉNÉRALISATION DE LA
MÉTAPHYSIQUE

PAR
M. H. G. DE
M. H. G. DE

PAR
M. H. G. DE

PAR
M. H. G. DE

PAR
M. H. G. DE

IMPRIMERIE ALBERT KUNDIG
GENÈVE

A mes parents

Leer - Vide - Empty

CURRICULUM VITÆ

Je suis né le 26 mars 1901, à Zurich, de parents suisses, originaires d'Auboranges (canton de Fribourg). J'ai fait mes études primaires et secondaires à Zurich, Buenos-Aires et Fribourg, et obtenu le titre de bachelier ès sciences à Besançon (1919). Entré en 1919 à l'Ecole polytechnique fédérale à Zurich, j'en suis sorti en 1924, avec le diplôme d'ingénieur civil. De 1924 à 1926, je travaillai à la construction du pont Butin à Genève. De 1929 à 1931, je fus assistant privé de Monsieur E. Meyer-Peter, D^r h. c., professeur à l'Ecole polytechnique fédérale. J'ai rédigé ma thèse de doctorat sur la théorie générale du coup de bélier de 1931 à 1932.

Leer - Vide - Empty

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
<i>Introduction</i>	13

PREMIÈRE PARTIE.

Théorie générale du coup de bélier dans les conduites forcées.

<i>Chapitre A.</i> — La théorie d'Allievi	17
<i>Chapitre B.</i> — Théorie générale du coup de bélier dans les conduites forcées à caractéristiques multiples .	30
<i>Chapitre C.</i> — Extension de la théorie	87
<i>Chapitre D.</i> — Application de la théorie au calcul des conduites forcées débouchant d'un bassin infiniment grand.	131

DEUXIÈME PARTIE.

Calcul du coup de bélier dans les conduites munies de chambres d'équilibre.

<i>Chapitre A.</i> — Remarques et règles générales pour le calcul du coup de bélier	171
<i>Chapitre B.</i> — Chambre d'équilibre prismatique . . .	199
<i>Chambre C.</i> — Chambres non prismatiques, avec col d'en- trée ou avec chambre inférieure tubulaire	222
<i>Chapitre D.</i> — Chambres d'équilibre avec étranglement.	249
<i>Chapitre E.</i> — Extension de la théorie — Conclusions . .	261
<i>Bibliographie</i>	267

Leer - Vide - Empty

THÉORIE GÉNÉRALE

DU

COUP DE BÉLIER

**Application au calcul des conduites à caractéristiques multiples
et des chambres d'équilibre.**

INTRODUCTION

Les travaux, très nombreux, parus sur le problème des coups de bélier dans les conduites forcées et les chambres d'équilibre, n'épuisent nullement le sujet. Une théorie générale ne pouvait être qu'utile, non seulement comme complément à l'œuvre entreprise par Lorenzo Allievi, mais, plus encore, pour donner réponse à une série de questions pratiques de toute première importance.

Considérons, de façon tout à fait générale, un système comprenant « galerie en charge, chambre d'équilibre et conduites forcées ».

Une manœuvre quelconque des organes de fermeture provoque dans ce système deux phénomènes bien distincts, à savoir le coup de bélier d'une part et l'oscillation générale des masses d'eau contenues dans tout le système d'autre part.

Le coup de bélier est caractérisé par la propagation d'ondes, de surpression et de dépression, qui dépendent entre autre de l'élasticité de l'eau et de celle des différents tronçons de la

conduite. Ces ondes subissent des réflexions multiples. La chambre d'équilibre a pour but d'arrêter ces ondes arrivant de l'obturateur et de protéger la galerie en charge, organe particulièrement délicat.

Le second phénomène, l'oscillation de masse, se manifeste par un mouvement oscillatoire du niveau d'eau dans la chambre autour d'une nouvelle position d'équilibre correspondant au nouveau régime d'écoulement. Ce dernier problème a été étudié à fond, et le calcul de ces oscillations est devenu une chose aisée. Quant au coup de bélier, Lorenzo Allievi en a publié une étude devenue classique, malheureusement limitée au cas d'une conduite à section constante débouchant d'un bassin infiniment grand.¹

A l'heure actuelle, l'opinion communément répandue est que l'on peut, en effet, considérer la chambre d'équilibre comme un bassin très grand, et que la pression sous la chambre est réellement donnée, à chaque instant, par le niveau d'eau dans cette dernière.

Nous avons de sérieuses raisons de mettre en doute pareille opinion. Une révision de ces hypothèses nous a donc semblé nécessaire. Nous entreprîmes ce travail sous la direction de M. Meyer-Peter, professeur à l'École Polytechnique Fédérale, à Zurich, auquel plusieurs expertises relatives à des conduites forcées et des chambres d'équilibre avaient été confiées. C'est pour nous un bien agréable devoir de lui adresser ici nos plus sincères remerciements pour l'intérêt qu'il a porté à notre travail et pour ses précieux conseils.

Nous avons pu démontrer (chapitre II.A.2) que les équations de l'oscillation de masse dérivent de celles du coup de bélier, mais que les deux phénomènes, loin de se confondre, se superposent. Il faut donc rechercher les lois de propagation propres

¹ Lorenzo Allievi a publié, en 1904, un premier Mémoire qui fut traduit en allemand par Dubs et Bataillard, en 1909. Quoique ce premier travail fût déjà excellent, Allievi exposa à nouveau le problème du coup de bélier, d'une façon tout à fait systématique, en une série de notes présentées à la Reale Academia dei Lincei (1912). Ce travail magistral fut traduit en français par M. Daniel Gaden, (Dunod, Paris-Lausanne, 1921, avec préface de M. le prof. Neeser).

du coup de bélier, dans la chambre et la galerie en charge, et rejeter l'ancienne conception.

Nous pensions cependant que, la théorie mise sur pied et les calculs numériques effectués, nous ne pourrions que constater l'efficacité parfaite des chambres d'équilibre. C'est, en effet, le cas ordinairement. La plupart des anciennes usines fonctionnent avec une grande sécurité. Mais il est des exceptions, plus nombreuses qu'on ne pouvait s'y attendre, où, soit la conduite forcée, soit la galerie en charge, peuvent être menacées. Des cas de rupture nous ayant été signalés, nous avons pu en retrouver les causes, grâce à notre théorie générale.

Nous avons vérifié, par exemple, que des manœuvres alternatives rythmiques de l'obturateur provoquent, dans des conduites à section variable, des surcharges dangereuses, qui peuvent causer de graves accidents. Nous attribuons de même au développement trop rapide des dimensions des ouvrages bon nombre de cas de rupture.

On accroît, par exemple, la longueur des galeries en charge, le débit et la vitesse de l'eau. Le volume des chambres d'équilibre devrait augmenter en proportion. Pour l'éviter, on a recherché des formes de chambres plus économiques: chambres non prismatiques, avec col d'entrée, avec étranglement, ou avec chambres inférieures tubulaires en cul de sac. Il fallut, d'autre part, songer à protéger l'usine contre la rupture possible d'une conduite forcée: on disposa, à cet effet, des vannes de fermeture au haut de celle-ci. Il arrive, parfois, que les organes de fermeture ordinaires soient concentrés au même point. Or, chacune de ces dispositions peut accroître le coup de bélier. C'est ainsi que certaines centrales modernes supportent des surcharges élevées, dont une partie au moins se propage tout au long de la galerie en charge, qui n'est plus entièrement protégée. On peut voir que, lors d'une manœuvre rapide des organes de fermeture, la surcharge maximum calculée au droit de la chambre peut se transmettre, intacte, assez loin dans la galerie, avant de décroître.

La théorie générale se révèle donc comme un moyen de travail utile. Le technicien pourra se laisser guider par elle en élaborant ses projets et aura la possibilité de vérifier la valeur des surcharges en divers points du système qu'il veut réaliser. Les exemples

numériques, qui illustrent notre exposé, mettent suffisamment en évidence les cas dangereux, qui sont à éviter.

La chambre d'équilibre et la galerie en charge sont des organes essentiels de l'usine. Toute défectuosité dans leur fonctionnement, tout accident qui y survient, provoquent l'arrêt complet de tout l'ensemble. Cette considération doit inciter le technicien à pousser ses études aussi loin que possible.

PREMIÈRE PARTIE

THÉORIE GÉNÉRALE DU COUP DE BÉLIER DANS LES CONDUITES FORCÉES

CHAPITRE A.

LA THÉORIE D'ALLIEVI

Toute étude des coups de bélier dans les conduites forcées doit nécessairement s'inspirer des travaux de Lorenzo Allievi qui, le premier, a su interpréter avec une rigueur mathématique le phénomène physique du coup de bélier. La théorie que nous développerons par la suite n'est qu'une généralisation des équations posées par l'ingénieur italien. Il est donc indispensable de commencer cette étude par un exposé succinct de ses travaux. Cet exposé ne saurait, d'ailleurs, être autre chose qu'un résumé des points essentiels; il ne remplace nullement la lecture de l'œuvre originale.

Considérons une conduite sous pression, horizontale ou inclinée, de section et d'épaisseur constantes (voir: fig. 1). La conduite débouche en C d'un bassin supposé infiniment grand et à niveau constant. On peut modifier à volonté le régime de l'écoulement, en manœuvrant un obturateur O situé à l'extrémité inférieure de la conduite et dont l'ouverture est variable. Dans tout ce qui va suivre, nous *négligerons les pertes de charge dues au frottement* de l'eau contre les parois de la conduite.

Lorsque l'on manœuvre l'obturateur O, afin de modifier le régime d'écoulement, le passage d'un régime à l'autre ne s'établit

ni instantanément, ni même de manière continue. Entre les deux états successifs de régime permanent, on enregistre de fortes oscillations de la pression et de la vitesse de l'eau, oscillations dont l'amplitude peut être considérable. Les variations de pression entraînent des déformations élastiques de la conduite et de la colonne d'eau. Pressions, vitesses de l'eau et déformations élastiques sont, de toute évidence, liées par certaines relations. On les obtiendra en appliquant les lois générales de l'hydraulique et de l'élasticité des matériaux.

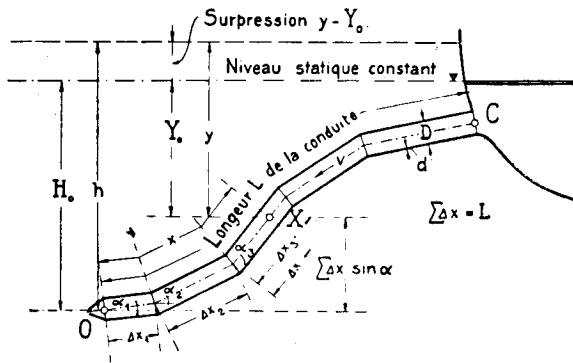


FIG. 1. — Profil en long schématisé d'une conduite sous pression.

L'étude de ces équations constitue le problème du coup de bélier. Allievi l'a résolu pour le cas d'une conduite horizontale, rectiligne, telle que nous l'avons définie plus haut. On sait cependant que ses équations sont valables pour une conduite inclinée, non rectiligne, aboutissant à un bassin infiniment grand. Nous généraliserons donc en ce sens l'exposé d'Allievi.

Définissons d'abord quelques grandeurs :

- E est le module d'élasticité de la conduite;
- ϵ et γ le module d'élasticité volumétrique et le poids spécifique de l'eau;
- S la section de la conduite, L sa longueur, R son rayon;
- D son diamètre et d l'épaisseur des parois, supposées minces.

L'axe des abscisses x se confond avec l'axe de la conduite; l'origine est en O, le sens positif va de O vers C.

Nous désignons par Q_0 le débit de régime permanent correspondant à l'ouverture totale de l'obturateur. Contrairement à ce que fait Allievi, et pour éviter certaines confusions, nous rapporterons systématiquement toutes les constantes à ce seul régime.

Soient:

Y_0 , y_0 et y la pression mesurée en hauteur d'eau pour le débit Q_0 , la pression au temps $t = 0$, et la pression à un instant quelconque, le tout en un point d'abscisse x .

D'une façon générale, on a $p = \gamma \cdot y$;

Soient, en outre:

H_0 , h_0 et h les mêmes grandeurs mesurées au point O, devant l'obturateur.

V_0 , v_0 et v la vitesse de régime Q_0 , la vitesse au temps $t = 0$ et la vitesse à un instant quelconque dans la conduite; le tout en un point quelconque d'abscisse x . Le sens positif des vitesses est choisi opposé à celui des abscisses x .

C_0 , c_0 et c les mêmes vitesses mesurées immédiatement devant l'obturateur.

Pour établir les relations qui lient les pressions et les vitesses aux déformations élastiques, nous nous servirons de deux équations classiques: l'équation générale du mouvement varié ou équation d'Euler et l'équation de continuité de masse.

La première s'écrira, en tenant compte du signe de x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\gamma}{g} \left(X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) = \frac{\gamma}{g} \left(-g \sin \varphi + \frac{dv}{dt} \right) \\ &= \frac{\gamma}{g} \left(-g \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

En négligeant le terme $\frac{\partial v}{\partial x}$, qui est certainement petit en regard de $\frac{\partial v}{\partial t}$, on obtient:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma}{g} \left(-g \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial t} \right).$$

Posons: $p = \gamma \cdot y = \gamma \left[h - \int_0^x \sin \varphi \cdot dx \right],$

équation qui exprime que la pression au point d'abscisse x , mesurée en colonne d'eau, est égale à la pression h , diminuée de l'ordonnée $\int_0^x \sin \varphi \cdot dx$ du point considéré de la conduite; ou encore que la pression y d'une conduite inclinée se déduit de la pression h d'une conduite horizontale homologue, dont on retranche l'ordonnée $\int_0^x \sin \varphi \cdot dx$ (voir fig. 1). Les surpressions sont identiques et $y - Y_0 = h - H_0$.

On a donc

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \gamma \left[\frac{\partial h}{\partial x} - \sin \varphi \right].$$

L'équation du mouvement varié devient:

$$\gamma \left[\frac{\partial h}{\partial x} - \sin \varphi \right] = \frac{\gamma}{g} \left(-g \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

ou:

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = g \frac{\partial h}{\partial x}} \quad (1)$$

La seconde équation utilisée par Allievi est l'équation de continuité de la masse. Les parois de la conduite sont supposées minces. Pendant le temps dt , la pression augmente de $\frac{\partial p}{\partial t} dt$. Par suite de l'élasticité des parois, le volume d'un élément de conduite de longueur dx et de section πR^2 augmente de:

$$\pi R^2 \cdot \frac{1}{E} \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) D \frac{\partial p}{\partial t} \cdot dt \cdot dx ,$$

où m représente l'inverse de la constante de Poisson. Le terme $\left(1 - \frac{1}{m^2} \right)$ provient de l'influence du coefficient de contraction m^1 . Dans son mémoire, Allievi a négligé cette influence en prenant

¹ Nous supposons que la conduite ne puisse pas se dilater parallèlement à son axe. En admettant au contraire que la conduite soit libre de se dilater, ce facteur deviendrait $\left(1 - \frac{1}{2m} \right)$.

ce terme égal à 1. Le volume de la colonne d'eau de même section et de même longueur diminue par contre de

$$\pi R^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \cdot dt \cdot dx .$$

Soit, d'autre part, $\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$ la variation de la vitesse entre les deux sections extrêmes, distantes de dx . A cette variation de vitesse correspond un volume d'eau emmagasiné en un temps dt , égal à

$$\pi R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt .$$

L'équation de continuité sera satisfaite si ce volume est égal à la somme des deux déformations élastiques calculées plus haut. On écrira donc:

$$\pi R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dt = \pi R^2 \left[\frac{1}{\varepsilon} + \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \frac{D}{Ed} \right] \frac{\partial p}{\partial t} dt dx .$$

ou, en simplifiant et en posant:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{\gamma}{g} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{Ed} \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \right]$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left[\frac{1}{\varepsilon} + \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \frac{D}{Ed} \right] \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{g}{\gamma a^2} \frac{\partial p}{\partial t}$$

Or:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial t} \left[h - \int_0^x \sin \varphi \cdot dx \right] = \gamma \frac{\partial h}{\partial t}$$

Il s'ensuit que:

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial h}{\partial t}} \quad (1a)$$

Les équations (1) et (1_a) forment un système d'équations linéaires aux dérivées partielles. Allievi indique, à la suite de Riemann, que ces équations sont satisfaites par les intégrales générales suivantes:

$$h = h_0 + F \left(t - \frac{x}{a} \right) + f \left(t + \frac{x}{a} \right) \quad (2)$$

$$v = v_0 - \frac{g}{a} \left[F \left(t - \frac{x}{a} \right) - f \left(t + \frac{x}{a} \right) \right] \quad (3)$$

Nous donnons à la fonction f de l'équation (2) le signe positif qu'elle a dans la solution générale. Nous verrons plus bas que f est une onde réfléchie.

On arrive à cette solution en dérivant successivement les équations (1) et (1a) par rapport à x et t . On obtient ainsi:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} .$$

Ces équations, connues sous le nom « d'équations des cordes vibrantes », ont été résolues par d'Alembert.¹

Elles constituent bien la relation cherchée entre les pressions, les vitesses et les déformations élastiques. Ces dernières sont contenues implicitement dans a qui, d'ailleurs, a les dimensions d'une vitesse.

La signification physique de la première de ces équations est aisée à trouver: Faisons dans F et f , $x = at + \text{const.}$ et $x = -at + \text{const.}$; les deux fonctions F et f représentent alors deux charges constantes qui se propagent le long de la conduite avec une célérité « a », mais en sens inverse. Les fonctions F et f sont donc des ondes et « a » leur célérité ou vitesse de propagation. Si, au contraire, nous faisons $x = \text{const.}$, nous voyons que F et f sont des grandeurs variables. Au temps t et au point d'abscisse x , la surcharge $h - H_0 = y - Y_0$ est donc égale à la somme des deux surcharges mobiles F et f qui interfèrent en cet instant au point considéré.

Les deux fonctions F et f sont inconnues. On peut en éliminer une en remarquant que, si l'on suppose le réservoir infiniment grand, et dans ce cas seulement, la pression est constante en C ; c'est-à-dire que pour $x = L$:

$$f\left(t + \frac{L}{a}\right) = -F\left(t - \frac{L}{a}\right) \quad (4)$$

Or, si nous posons en particulier $t = t_1 + \frac{x}{a} - \frac{L}{a}$ où t_1 désigne

¹ Voir: ROUCHÉ et LÉVY, *Analyse infinitésimale*, Tome II, p. 717; Paris, Gauthier Villars, 1902).

un instant quelconque de la phase de contre-coup dans la section d'abscisse x , l'équation (4) prend la forme générale :

$$f\left(t_1 + \frac{x}{a}\right) = -F\left(t_1 + \frac{x}{a} - \frac{2L}{a}\right) = -F\left(t_1 - \frac{x}{a} - \frac{2(L-x)}{a}\right) \quad (4a)$$

On voit clairement que la fonction f , au temps t_1 et à l'abscisse x , n'est autre que la fonction $-F$ au point x et au temps $t_1 - \frac{2(L-x)}{a}$. Tout revient donc à considérer une onde F qui se réfléchit entièrement au réservoir ($x = L$), pour revenir sur elle-même après changement de signe. Au point de vue physique, nous nous trouvons en présence d'ondes oscillant dans une conduite de longueur L . La période de l'oscillation est $\mu = \frac{2L}{a}$.

En combinant les équations fondamentales (2), (3) et (4_a), on élimine les fonctions inconnues F et f , et il ne reste qu'une relation entre h et v et les constantes h_0 , v_0 , a et g . Le problème est donc, en principe, résolu; toutes les recherches ultérieures n'ayant d'autre but que de classer les diverses solutions. Nous insistons sur le fait que ce sont ces équations fondamentales qui donnent la solution générale du problème, et que les résultats de problèmes particuliers traités par Allievi ne peuvent, par contre, avoir une portée aussi générale, ce que certains auteurs ont parfois oublié.

Nous reproduisons ici l'essentiel des développements d'Allievi. Pour la section d'abscisse $x = 0$, section adjacente à l'obturateur, l'équation (4 a) devient :

$$f(t) = -F\left(t - \frac{2L}{a}\right). \quad (4b)$$

Soit, t_1 un instant, tel que $0 < t_1 < \mu$. Nous considérons les instants successifs :

$$t_1; \quad t_1 + \mu; \quad t_1 + 2\mu \dots; \quad t_1 + (i-2)\mu; \quad t_1 + (i-1)\mu$$

que nous désignerons par :

$$t_1 \quad t_2 \quad t_3 \dots t_{i-1} \quad t_i$$

et qui tombent respectivement dans la phase :

$$1, 2, 3, \dots, i-1, i$$

Nous écrirons alors (4_b) sous la forme simplifiée :

$$f_i = -F_{i-1}, \tag{4c}$$

ce qui nous permet de développer les équations (2) et (3), écrites pour l'obturateur O, pendant les i premières phases. Nous avons :

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= h_0 + F_1 \\ h_2 &= h_0 + F_2 - F_1 \\ &\dots\dots\dots \\ h_{i-1} &= h_0 + F_{i-1} - F_{i-2} \\ h_i &= h_0 + F_i - F_{i-1} \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

et :

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= c_0 - \frac{g}{a} F_1 \\ c_2 &= c_0 - \frac{g}{a} (F_1 + F_2) \\ &\dots\dots\dots \\ c_{i-1} &= c_0 - \frac{g}{a} (F_{i-2} + F_{i-1}) \\ c_i &= c_0 - \frac{g}{a} (F_{i-1} + F_i) \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

En additionnant deux à deux les équations (5) et en soustrayant les équations (6), on élimine la fonction F_i et l'on obtient les *séries enchainées* d'Allievi :

$$\left\{ \begin{aligned} h_1 - h_0 &= \frac{a}{g} (c_0 - c_1) \\ h_1 + h_2 - 2h_0 &= \frac{a}{g} (c_1 - c_2) \\ &\dots\dots\dots \\ h_{i-2} + h_{i-1} - 2h_0 &= \frac{a}{g} (c_{i-2} - c_{i-1}) \\ h_{i-1} + h_i - 2h_0 &= \frac{a}{g} (c_{i-1} - c_i) \end{aligned} \right. \tag{7}$$

Il est intéressant, surtout en vue de la construction d'abaques classificateurs, de rendre ces équations indépendantes de la hauteur h_0 . Nous définissons, à cet effet, la pression relative:

$$\zeta_{*i}^2 = \frac{h_i}{H_0} \quad (7a)$$

et la constante:

$$\rho_* = \frac{\alpha C_0}{2gH_0} \quad (7b)$$

Cette dernière est la *caractéristique* de la conduite. Elle ne dépend que de la pression statique H_0 et de la vitesse de régime C_0 . Cette vitesse est d'ailleurs égale à V_0 , puisque la conduite est de section constante et que le régime est permanent. On a, en outre, en négligeant les frottements et en partant de l'état initial statique: $h_0 = H_0$.

Les équations (7) deviennent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_{*1}^2 - 1 = 2\rho_* \left[\frac{c_0}{C_0} - \frac{c_1}{C_0} \right] \\ \zeta_{*1}^2 + \zeta_{*2}^2 - 2 = 2\rho_* \left[\frac{c_1}{C_0} - \frac{c_2}{C_0} \right] \\ \dots\dots\dots \\ \zeta_{*i-1}^2 + \zeta_{*i}^2 - 2 = 2\rho_* \left[\frac{c_{i-1}}{C_0} - \frac{c_i}{C_0} \right] \end{array} \right. \quad (8)$$

Nous pouvons exprimer les vitesses en fonction du degré d'ouverture η_i de l'obturateur, au temps i . Nous conformant à nos définitions, nous choisissons la fonction η_i de façon à ce que $\eta_0 = 1$, pour le régime Q_0 , corresponde à l'ouverture complète de l'obturateur. On a dans ce cas:

$$c_i = \eta_i \cdot C_0 \sqrt{\frac{h_i}{H_0}} \quad (9)$$

ou:

$$\eta_i = \frac{c_i}{C_0} \sqrt{\frac{H_0}{h_i}} = \frac{c_i}{C_0} \cdot \frac{1}{\zeta_{*i}} \quad (9a)$$

Calculons la valeur de ζ_{*1} en posant dans la première équation de (10):

$$\zeta_{*0} = 1 \quad \text{et} \quad \eta_0 = 1 ,$$

ce qui nous donne:

$$\zeta_{*1}^2 - 1 = 2\rho_* [1 - \eta_1 \zeta_{*1}]$$

d'où:

$$\zeta_{*1} = -\rho_* \eta_1 + \sqrt{\rho_*^2 \eta_1^2 + 1 + 2\rho_*} . \quad (13)$$

Pour calculer η_1 , on fera $0 < i < 1$. La valeur particulière $i = 1$ nous livre $\eta_1 = 1 - \frac{1}{\Theta}$ et ζ_{*1} qui est la première « valeur de rythme entier » correspondant à la première discontinuité de la courbe des pressions. Nous l'appelons le *coup direct*.

Si la fermeture est assez brusque pour être terminée avant la fin de la première phase, c'est-à-dire si $\Theta < 1$, on obtient $\eta_1 = 0$ et

$$\zeta_{*1}^2 - 1 = 2\rho_* \quad (14)$$

qui est, par le fait, la valeur du coup direct pour une fermeture instantanée. C'est la plus grande valeur que la surpression relative $\zeta_*^2 - 1$ puisse prendre au cours d'une fermeture linéaire quelconque.

On calculera successivement

$$\zeta_{*2}^2, \zeta_{*3}^2 \dots \zeta_{*i-1}^2, \zeta_{*i}^2 ,$$

de préférence pour des rythmes entiers.

Allievi a démontré que ces valeurs tendent toujours vers une limite ζ_{*m}^2 , que ce soit par valeurs croissantes ou par valeurs alternativement plus grandes ou plus petites que ζ_{*m}^2 .

Pour calculer ζ_{*m}^2 , nous poserons dans la dernière des équations (10):

$$\zeta_{*i-1} \simeq \zeta_{*i} \simeq \zeta_{*m}$$

et

$$\eta_{i-1} - \eta_i = 1 - \frac{i-1}{\Theta} - 1 + \frac{i}{\Theta} = \frac{1}{\Theta} ,$$

ce qui nous donnera :

$$\zeta_{*m}^2 - 1 = \frac{\rho_*}{\sigma} \zeta_{*m} \quad (15)$$

et

$$\zeta_{*m} = \frac{\rho_*}{2(\sigma)} + \sqrt{\left(\frac{\rho_*}{2(\sigma)}\right)^2 + 1} . \quad (15a)$$

Au cours d'une étude des plus remarquables, Allievi a mis en relief les lois qui régissent le cas de fermeture linéaire de

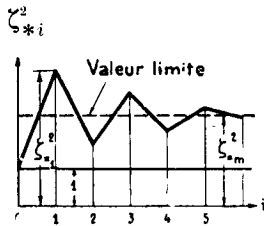


FIG. 2.

l'obturateur (équations (10) et (12)). Il a montré que les courbes des pressions devant l'obturateur pouvaient être classées en

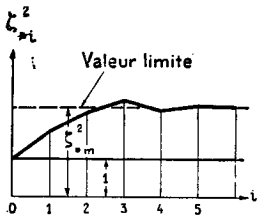


FIG. 3.

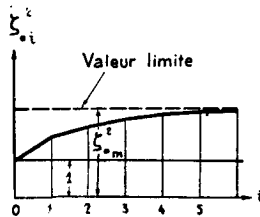


FIG. 4.

un certain nombre de courbes-types. Nous en reproduisons schématiquement 3 d'entre elles (Fig. 2, 3, et 4)¹.

On voit que le maximum $\zeta_{* \max}^2$ peut se produire, soit à la fin de la première phase (fig. 2), soit pendant ou à la fin d'une des phases suivantes (fig. 3 et 4). Après avoir observé, en outre.

¹ Voir ALLIEVI-GADEN, Tome II, diagrammes 11a à 17a.

que tout le phénomène dépendait uniquement des valeurs relatives ρ_* et Θ , Allievi est arrivé à construire un abaque unique, qui donne à la fois la valeur du maximum ainsi que la phase au cours ou à la fin de laquelle se produit le maximum, ce qui permet de se rendre compte de l'allure de la courbe, sans la construire¹.

Ce résultat est remarquable.

En pratique, on se contente de calculer ζ_{*1}^2 et ζ_{*m}^2 . La plus grande de ces valeurs sera, avec une exactitude suffisante, prise pour ζ_{*max}^2 .

Allievi a résolu, de même, le problème pour l'ouverture linéaire de l'obturateur, problème qui se présente sous une forme analogue à celui que nous avons traité. Il a donné, également, des formules et des abaques pour les « *contre-coups* de retour au régime » et les « *manceuvres rythmiques* » de l'obturateur.

Nous voulions, par ce bref et unique exemple, faire ressortir les points essentiels de la méthode suivie par Allievi, c'est-à-dire la transformation des équations (2) et (3) en un système de « *séries enchaînées* » (10) qui permet, soit le calcul point par point de la courbe des pressions, soit le calcul des valeurs ζ_{*1}^2 et ζ_{*m}^2 , et la construction d'abaques classificateurs. Allievi applique la même méthode à l'étude de tous les autres cas.

Ces divers problèmes ne sont que des cas particuliers de l'étude plus générale que nous allons tenter. Nous indiquerons les solutions essentielles, au cours de l'étude qui va suivre, et renvoyons, pour le reste, le lecteur aux œuvres d'Allievi.

¹ Voir ALLIEVI-GADEN, Tome II, diagramme 24.

CHAPITRE B.

THÉORIE GÉNÉRALE DU COUP DE BÉLIER
DANS LES CONDUITES FORCÉES
A CARACTÉRISTIQUES MULTIPLES

1. *Enoncé du problème général.*

Nous avons vu que les travaux d'Allievi constituent une étude, en bien des points définitive, du coup de bélier dans une conduite forcée rectiligne et de section constante, débouchant d'un bassin infiniment grand. La complexité des usines hydro-électriques modernes soulève cependant bien des problèmes, auxquels les formules d'Allievi ne donnent peut-être qu'une réponse imparfaite. Au cours de notre introduction, nous en avons exposé quelques uns. Qu'il nous soit permis d'énumérer ici, à nouveau, les principaux cas qui peuvent se poser dans la pratique:

- a) Conduites présentant une ou plusieurs discontinuités (variations de section ou bifurcations).
- b) Systèmes de plusieurs conduites, munies à leur base d'obturateurs indépendants et se réunissant à leur partie supérieure en une seule conduite.
- c) Conduite munie d'un obturateur, non à sa base, mais à une certaine distance de son extrémité inférieure.
- d) Conduite forcée aboutissant à une chambre d'équilibre prismatique étroite qui ne peut pas être assimilée à un bassin infiniment grand.

- e) Conduite forcée aboutissant à une chambre d'équilibre non prismatique, à étranglement ou avec chambre inférieure.
- f) Combinaison des cas précédents.

Ces quelques exemples nous font voir qu'il est nécessaire de généraliser le problème posé et résolu par Allievi. Pour exposer notre théorie, nous étudierons les coups de bélier dans un

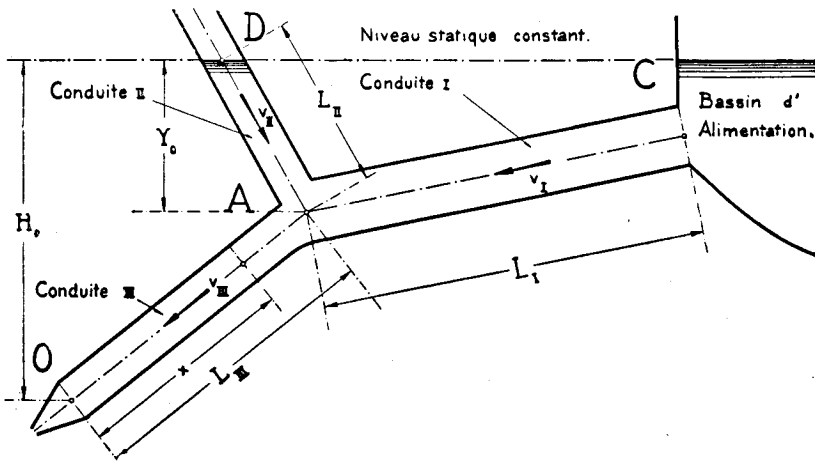


FIG. 5. — Schéma d'une conduite forcée avec chambre d'équilibre prismatique.

système de 3 conduites sous pression, de section constante, se coupant en un point A, dit *point d'intersection* (voir fig. 5).

La conduite I aboutit en C à un bassin infiniment grand, où les ondes se réfléchiront en changeant de signe, ainsi que l'a montré Allievi. La conduite II sera ouverte à son extrémité D.

Nous admettrons au préalable que le niveau d'eau est constant en ce point; les ondes s'y réfléchissent alors totalement en changeant de signe. Nous appellerons les surfaces C et D des « surfaces de réflexion totale » avec changement de signe. La conduite III est munie d'un obturateur O, dont la manœuvre provoque les variations de pression et de vitesse dans le système.

Nous négligeons systématiquement l'influence des frottements et celle de l'énergie cinétique de l'eau en mouvement¹.

La figure 5 caractérise donc un système de 3 conduites concourantes, dont l'une est munie d'un obturateur et les 2 autres aboutissent à des « surfaces de réflexion totale ». Nous voyons immédiatement que le cas représenté à la figure 6 correspond également à cette définition, et nous pouvons lui appliquer sans autre les équations que nous obtiendrons. Nous

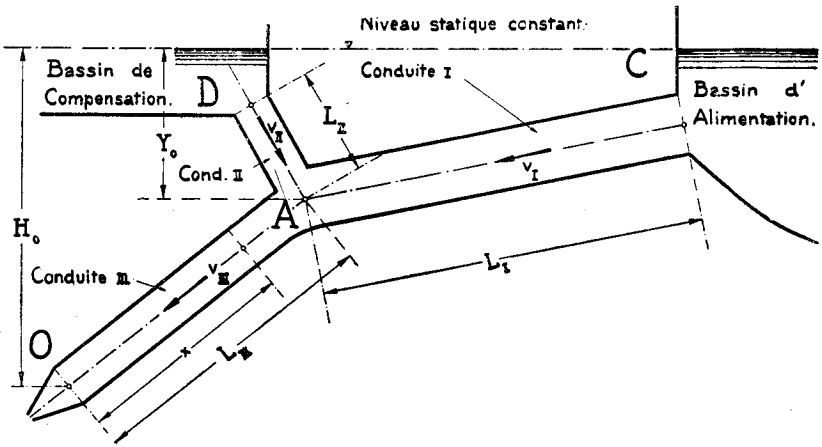


FIG. 6. — Schéma d'une conduite forcée avec bassin de compensation.

passons aisément de la figure 5 à la figure 7, en faisant tendre vers zéro le diamètre de la conduite II. Nous verrons que nos équations seront applicables à ce cas également.

Avant d'aborder l'étude mathématique du problème, nous allons brièvement chercher à nous représenter ce phénomène physique. Nous verrons par la suite que cette représentation est exacte en tous points et se déduit aisément des formules mathématiques. Notre anticipation a pour but, non pas de

¹ Dans le premier de ses mémoires (voir la traduction allemande Dubs-Bataillard), Allievi a tenu compte de l'influence de l'énergie cinétique. Loewy, a cherché à introduire les pertes de charge par frottements. Voir également le travail de M. Bergeron « Mémoire à la Soc. des Ing. civils de France » 1926.

servir de point de départ à nos formules (que nous déduirons directement de théorèmes généraux), mais uniquement de permettre au lecteur de mieux suivre le fil des développements mathématiques ultérieurs.

Nous avons vu que les équations d'Allievi prouvent que la surpression en un point quelconque de la conduite est constamment égale à la somme algébrique des deux surcharges mobiles. L'équation (2) exprime, en effet, qu'il y a, en chaque

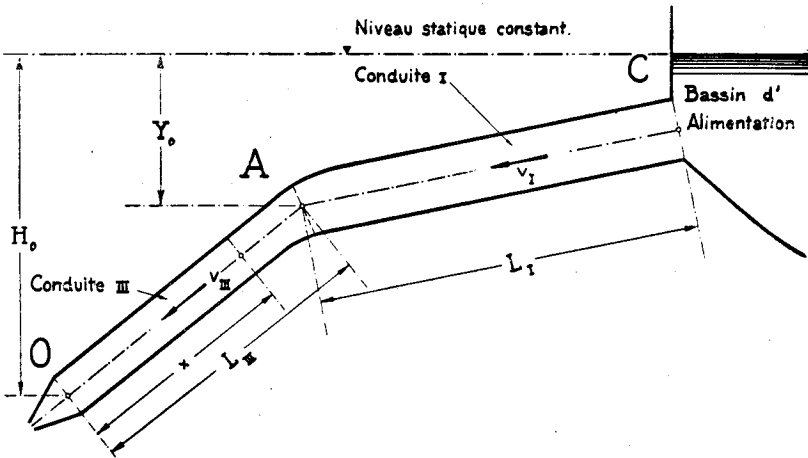


FIG. 7. — Schéma d'une conduite forcée à caractéristiques multiples.

point, superposition des ondes incidentes et réfléchies. Etendons cette notion au système que nous étudions. Une onde partant du point O, en direction de A, ne sera réfléchiée que partiellement en A, puisque la section des conduites I et II n'est pas infiniment grande. Par le fait, la pression en A ne sera pas constante. Une fraction de l'onde incidente continuera à progresser dans la conduite I, ainsi que dans la conduite II. En C (bassin infiniment grand), la pression est constante; la réflexion est donc totale avec changement du signe de la pression de l'onde incidente. Il en est de même en D, si la conduite est ouverte et la surface d'eau libre (cas d'une chambre d'équilibre). Considérons l'onde réfléchiée en D. Elle progresse vers A, où elle sera partiellement réfléchiée vers D, alors qu'une autre

fraction de l'onde bifurquera en direction de O et de C. L'onde venant de C subira un sort analogue. L'onde primitive, partie de O, subit donc des réflexions multiples et engendre des oscillations ou battements, dans chacune des trois conduites I, II et III.

En fait, ce n'est pas une onde solitaire qui monte de O, mais un train d'ondes successives, et ce sont également des trains d'ondes qui sont successivement réfléchis en C et en D. Si, à un instant t quelconque, on mesure la surpression en un point de la conduite III d'abscisse x , situé entre O et A, elle sera la somme de l'onde montant de O vers A et de toutes les ondes réfléchies en A, C et D qui, après avoir oscillé dans les conduites I et II, passent, à l'instant t , au point d'abscisse x de la conduite III.

La pression en A sera variable et fonction, à la fois, des battements dans les conduites I et II et des manœuvres effectuées à l'obturateur O.

Nous aurions donc pu n'envisager le problème que sous son aspect physique, et procéder à l'addition systématique des ondes incidentes et réfléchies. Cependant, une pareille méthode ne serait pas convaincante et laisserait la porte ouverte à plus d'une erreur.

Mieux vaut envisager le problème sous son seul aspect analytique. Il est, en effet, possible de combiner les équations d'Allievi de façon à résoudre le problème en ne faisant que les deux hypothèses suivantes, relatives au point A :

- a) *L'équation de continuité des masses d'eau est satisfaite au point A.*
- b) La pression au point A, calculée séparément dans les conduites I, II et III, selon les équations d'Allievi, doit être la même pour les 3 conduites. Nous appellerons l'équation relative à cette condition : *équation de continuité des pressions.*

La légitimité de ces hypothèses est évidente: elles sont des conditions nécessaires et, ainsi que nous le verrons, suffisantes.

Nous étudierons successivement sous :

- I.B.2) les équations fondamentales pour le cas de trois conduites dont deux aboutissent à des surfaces de réflexion totale avec changement de signe;
- I.B.3) les conditions de réflexion au point A;
- I.B.4) la loi des charges devant l'obturateur O;

le tout dans le cas où la conduite I est très longue, de façon à ce que le mouvement de l'obturateur soit achevé avant le retour en A de l'onde réfléchiée en C. Nous dirons alors nous trouver dans la première phase de la conduite I.

Sous I.B.5), nous étendrons notre étude aux phases successives de la conduite I, et sous I.B.6) nous étudierons la loi des charges au point de discontinuité A et en un point quelconque de la conduite.

2. Equations fondamentales pour le cas de trois conduites concourantes, dont deux aboutissent à des surfaces de réflexion totale avec changement de signe.

Nous étudierons le cas (fig. 5 et 6) où les conduites I et II aboutissent respectivement, en C et D, à des surfaces sur lesquelles les ondes se réfléchissent totalement en changeant de signe. Nous désignons par II la plus petite des deux conduites I et II.

Soient :

- H_0 la pression statique au point O
- h_i la pression statique en O au temps t
- Y_0 la pression statique au point A.
- y_i la pression en A au temps t .
- $\zeta_i^2 = \frac{y_i}{Y_0}$ la pression relative au point A.

Si y_0 est la valeur de y_i pour $i = 0$, nous aurons, en négligeant les frottements, $y_0 = Y_0$.

Nous définissons, pour les 3 conduites, les valeurs suivantes :

Conduites	I	II	III
Longueurs	L_I	L_{II}	L_{III}
Sections	S_I	S_{II}	S_{III}
Célérités des ondes	a_I	a_{II}	a_{III}
Périodes d'oscillation	$\nu_I = \frac{2L_I}{a_I}$	$\nu_{II} = \frac{2L_{II}}{a_{II}}$	$\nu_{III} = \frac{2L_{III}}{a_{III}}$
Rapports des périodes	$n_I = \frac{\nu_I}{\nu_{II}}$	$n_{II} = 1$	$n_{III} = \frac{\nu_{III}}{\nu_{II}}$
Durée totale d'un mouvement de fermeture ou d'ouverture linéaire	$\Theta_I = \frac{\tau}{\nu_I}$	$\Theta_{II} = \frac{\tau}{\nu_{II}}$	$\Theta_{III} = \frac{\tau}{\nu_{III}}$
Débîts au temps t	Q_{Ii}	Q_{IIi}	Q_{IIIi}
Vitesses en A au temps t	v_{Ii}	v_{IIi}	v_{IIIi}
Vitesses en A au temps $t = 0$	v_{I0}	v_{II0}	v_{III0}
Vitesses de régime Q_0	$V_{I0} = \frac{Q_0}{S_I}$	$V_{II0} = \frac{Q_0}{S_{II}}$	$V_{III0} = \frac{Q_0}{S_{III}}$
Caractéristiques (relatives au point A)	$\varphi_I = \frac{a_I V_{I0}}{2g Y_0}$	$\varphi_{II} = \frac{a_{II} V_{II0}}{2g Y_0}$	$\varphi_{III} = \frac{a_{III} V_{III0}}{2g Y_0}$
Surcharges	F_{Ii}, f_{Ii}	F_{IIi}, f_{IIi}	F_{IIIi}, f_{IIIi}
Surcharges relatives en A	Ξ_i, ξ_i	Ψ_i, ψ_i	Φ_i, φ_i
Surcharges relatives en O			Φ_{*i}, φ_{*i}

Nous définirons plus bas ces diverses surcharges relatives par les équations (16), (68) et (81).

Le temps est désigné par t . Nous définissons, en outre, un temps relatif i , qui sera mesuré par les battements de la conduite II que nous supposons, pour plus de simplicité, être la plus courte des 3 conduites (hypothèse vérifiée dans le plus grand nombre de cas). Ce temps relatif sera donc donné par $i = \frac{t}{\nu_{II}}$. Le temps $t = 0$; $i = 0$ coïncide avec le moment où

la première onde arrive en A. Nous justifions cette définition en remarquant que l'essentiel de notre étude intéresse les phénomènes de réflexion au point A, et que c'est celle qui simplifie le plus les notations.

Nous considérons donc les temps :

$$t = 0, \mu_{\text{II}}, 2\mu_{\text{II}}, 3\mu_{\text{II}}, \dots, (i-1)\mu_{\text{II}}, i\mu_{\text{II}}, \dots$$

c'est-à-dire :

$$i = 0, 1, 2, 3, \dots, (i-1), i, \dots$$

comme premiers instants des phases :

$$1^{\text{re}}, 2^{\text{me}}, 3^{\text{me}}, 4^{\text{me}}, \dots, i^{\text{ème}}, (i+1)^{\text{ème}}, \dots$$

ou bien comme derniers instants des phases :

$$1^{\text{re}}, 2^{\text{me}}, 3^{\text{me}}, \dots, (i-1)^{\text{ème}}, i^{\text{ème}}, \dots$$

Ces temps :

$$i = 0, 1, 2, 3, \dots, (i-1), i, \dots$$

désignent donc les instants de rythme entier pour la conduite II.

Ces mêmes nombres serviront d'indices pour la spécification des diverses grandeurs: $v_i, y_i, \zeta_i \dots$ relatives à une phase i .

Par le fait que nous avons défini les périodes relatives $n_1 = \frac{\nu_1}{\nu_{\text{II}}}$ et $n_{\text{III}} = \frac{\nu_{\text{III}}}{\nu_{\text{II}}}$, nous pouvons aisément suivre une onde qui, partant de l'obturateur O au temps $i - \frac{n_{\text{III}}}{2}$, arrive en A au temps i . Une partie de l'onde se réfléchit vers l'obturateur O et y arrive au temps $i + \frac{n_{\text{III}}}{2}$.

La fraction d'onde partie de A et réfléchiée en D revient en A au temps $i + 1$; celle réfléchiée en C, au temps $i + n_1$.

D'autre part, il ressort des équations (2) et (3) que les surcharges mobiles $F\left(t - \frac{x}{a}\right)$ et $f\left(t + \frac{x}{a}\right)$ sont constantes si l'on y fait

$x = at + \text{const.}$ et $x = -at + \text{const.}$, c'est-à-dire que les ondes F et f , mobiles avec une célérité « a », restent constantes entre O et A. Nous pourrions donc définir des surcharges relatives Φ_* et Φ , ou φ_* et φ , au moyen des relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{i - \frac{n_{III}}{2}} = H_0 \cdot \Phi_{*i - \frac{n_{III}}{2}} = Y_0 \Phi_i \\ f_{i + \frac{n_{III}}{2}} = H_0 \cdot \varphi_{*i + \frac{n_{III}}{2}} = Y_0 \varphi_i \end{array} \right. \quad (16)$$

La relation (16) ne dit rien sur les conditions de la réflexion en A. Il est certain, cependant, que Φ_i et φ_i sont liés par une relation qui exprime ces conditions. Si notre représentation physique est exacte, il sera commode de définir les conditions de réflexion au moyen d'une fonction α_i telle que :

$$\boxed{\alpha_i = -\frac{\varphi_i}{\Phi_i}} \quad (17)$$

Avant de continuer, nous voulons nous arrêter un moment sur cette définition de α_i et fixer définitivement certaines notations. D'une façon toute générale, nous aurons à l'instant $(i + t')$ de la $(i + 1)^{\text{me}}$ phase: (voir fig. 8).

$$\alpha_{(i+t')} = -\frac{\varphi_{(i+t')}}{\Phi_{(i+t')}}$$

équation dans laquelle t' est donné par l'inégalité $0 < t' < 1$.

Cette méthode, comme celle d'Allievi du reste, se base sur le calcul des valeurs φ et Φ aux instants de rythme intercalaire bien déterminés :

$t', t' + 1, t' + 2, \dots (i - 1 + t'), (i + t'), (i + 1 + t') \dots$

L'intervalle entre ces instants reste toujours constant, et est égal à la phase de l'oscillation du système envisagé.

Il sera donc assez logique, pour simplifier, de désigner l'instant envisagé dans une certaine phase par l'indice de la phase elle-

même. Nous poserons pour les surcharges $\Phi_{(i+t')}$, pendant la $(i+1)$ me phase, $\Phi_{(i+1)}$.

Il ne faudra donc jamais perdre de vue que $\Phi_i, \Phi_{(i+1)}, \Phi_{(i+2)} \dots$ désignent, non pas Φ aux instants $i, (i+1), (i+2) \dots$, mais bel et bien aux instants de rythme intercalaire des phases respectives, caractérisés par t' qui est alors sous-entendu.

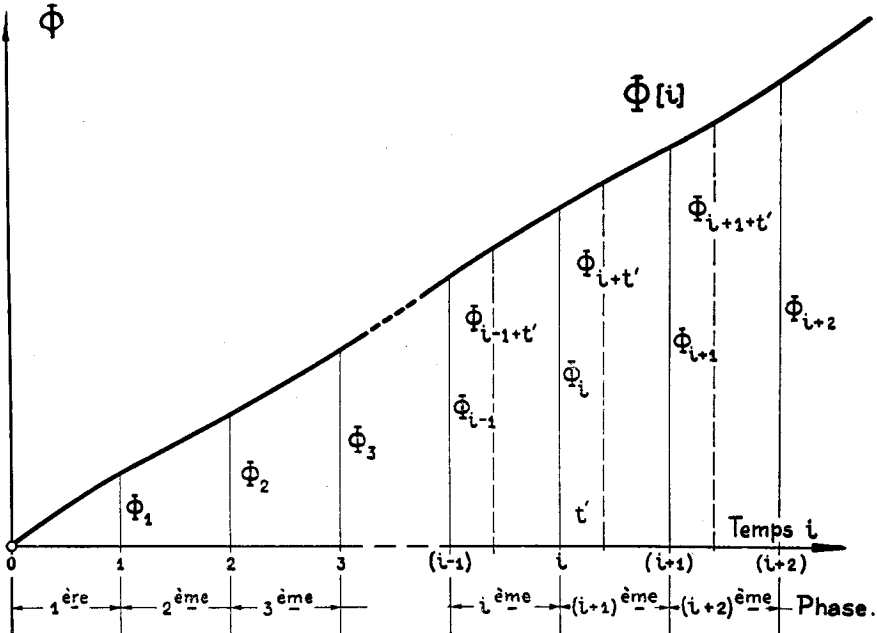


FIG. 8.

Nous poserons donc dorénavant:

$$\alpha_{(i+1)} = - \frac{\varphi_{i+1}}{\Phi_{i+1}} \quad \text{pour un instant de la } (i+1)\text{me phase,}$$

$$\alpha_i = - \frac{\varphi_i}{\Phi_i} \quad \text{pour un instant de la } i\text{me phase.}$$

Dans certains cas, nous envisagerons les instants de rythme entier: $i = 0, 1, 2, 3, \dots i, (i+1) \dots$; ce qui revient à poser $t' = 0$.

La formule $\alpha_i = -\frac{\varphi_i}{\Phi_i}$, qui nous donne le coefficient de réflexion à un instant quelconque de la i^{me} phase, sera encore valable à la limite pour l'instant $i - 1$, qui détermine le début de la i^{me} phase.

Il en résulte que si nous envisageons les instants de rythme entier, α_i sera relatif à l'instant $(i - 1)$. La même remarque s'impose pour les valeurs φ_i et Φ_i .

Cette méthode de notations a évidemment l'avantage de la simplicité, mais elle peut aussi donner lieu à des confusions. Si nous considérons, par exemple, les termes de rythme entier, Φ_1 désignera par définition la surcharge au temps $i = 0$. Nous aurons alors $\Phi_1 = 0$. (Sauf mention spéciale nous désignerons toujours par i un instant intercalaire de la i^{me} phase).

La relation (17) n'est qu'une définition implicite de la fonction α_i . Il s'agit de la rendre explicite.

On voit immédiatement que le cas de la réflexion totale étudié par Allievi est représenté par $\alpha_i \equiv 1$. Nous vérifierons au fur et à mesure de notre exposé que l'on retrouve, en faisant cette hypothèse, les formules déduites directement par Allievi.

Des équations (2), (16) et (17), nous déduisons la relation à laquelle satisfait la surpression relative en A; soit :

$$\zeta_i^2 - 1 = \Phi_i + \varphi_i = \Phi_i(1 - \alpha_i) \quad (18)$$

Cette dernière relation permet le calcul direct de ζ_i^2 , pression relative en A, en fonction de la surcharge $\Phi_i = \frac{H_0}{Y_0} \Phi_{*i - \frac{n_{III}}{2}}$ et de la fonction α_i .

Les relations (17) et (18) sont fondamentales.

Exprimons que la condition de continuité du volume d'eau ainsi que celle de la continuité de la pression sont satisfaites. En tenant compte du signe des vitesses, telles qu'elles sont dessinées dans la fig. 5, nous écrivons l'équation de continuité du volume :

$$Q_{Ii} + Q_{IIi} = Q_{IIIi}$$

ou :

$$S_1 v_{Ii} + S_{II} v_{IIi} = S_{III} v_{IIIi} .$$

On a, par ailleurs:

$$S_I = \frac{Q_0}{V_{I_0}} ; \quad S_{II} = \frac{Q_0}{V_{II_0}} \quad \text{et} \quad S_{III} = \frac{Q_0}{V_{III_0}}$$

ce qui permet d'écrire:

$$\frac{v_{I_i}}{V_{I_0}} + \frac{v_{II_i}}{V_{II_0}} = \frac{v_{III_i}}{V_{III_0}} \quad (19)$$

Nous rappelons que les équations (2) et (3) d'Allievi sont valables quelles que soient les conditions de réflexion à l'extrémité A de la conduite. Nous pouvons donc écrire l'équation (3), en valeurs relatives, appliquée à la conduite III pour le point A:

$$v_{III_i} = v_{III_0} - \frac{g}{a} (Y_0 \Phi_i - Y_0 \varphi_i)$$

ou, en tenant compte de (17):

$$\boxed{\frac{v_{III_i}}{V_{III_0}} = \frac{v_{III_0}}{V_{III_0}} - \frac{1}{2\rho_{III}} \Phi_i (1 + \alpha_i)} \quad (20)$$

Pour exprimer la loi de pression dans les conduites I et II, nous emploierons l'équation (8), valable pour le cas d'une réflexion totale avec changement du signe de la surcharge. En remarquant que, si la condition de continuité des pressions est réalisée au point A, la pression y_i est la même pour les 3 conduites, nous écrivons, en valeurs relatives, pour la conduite II, dont la durée d'oscillation est μ_{II} :

$$\zeta_i^2 + \zeta_{i+1}^2 - 2 = 2\rho_{II} \left(\frac{v_{II_i}}{V_{II_0}} - \frac{v_{II_{i+1}}}{V_{II_0}} \right) \quad (21)$$

et, pour la conduite I, dont la durée d'oscillation est μ_I :

$$\zeta_i^2 + \zeta_{i+n_I}^2 - 2 = 2\rho_I \left(\frac{v_{I_i}}{V_{I_0}} - \frac{v_{I_{i+n_I}}}{V_{I_0}} \right).$$

Les équations (17) à (21) sont valables pour une phase quelconque de l'une des 3 conduites. Elles permettent de résoudre entièrement le problème. Les deux conditions de continuité sont satisfaites: par ailleurs, nous avons utilisé les seules équations d'Allievi, soit sous la forme (2) — (3), soit sous la forme (8), selon le cas. Aucune hypothèse secondaire n'a été introduite; l'équation (17) n'étant pas une condition, mais une définition. Il reste à calculer α_i . Nous tenons, au préalable, à rendre le lecteur attentif à une difficulté d'exposition: pour calculer α_i , il faudrait connaître Φ_i . Or, Φ_i ne peut être connu que par le calcul des surcharges à l'obturateur O, qui sont, à leur tour, fonction de α_i . Il faut donc, nécessairement, supposer l'une des deux valeurs connues, pour calculer l'autre. Nous supposons Φ_i connu et développerons la valeur α_i pour le cas de la première phase de la conduite I.

3. *Conditions de réflexion au point A: calcul de la fonction α_i pour la première phase de la conduite I.*

Nous nous limitons ici au calcul de α_i pour la première phase de la conduite I, calcul qui se subdivise lui-même en deux cas, suivant qu'on se trouve dans la première phase de la conduite II, ou dans une phase ultérieure de cette même conduite. Le cas général, dont l'étude est assez longue, mais qui n'exige aucune notion nouvelle, ne sera traité qu'au paragraphe I.B.5).

a) *Cas de la première phase dans la conduite II.*

Dans ce cas, les équations d'Allievi, appliquées à la conduite I, s'écriront, pour toute la durée de la phase:

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + F_{I_1} ; \\ v_{I_1} = v_{I_0} - \frac{g}{a_i} F_{I_1} ; \end{cases} \quad (23)$$

d'où:

$$\frac{v_{I_1}}{V_{I_0}} = \frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} - \frac{g}{V_{I_0} a_i} (y_1 - y_0) = \frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} - \frac{1}{2c_1} (z_1^2 - 1)$$

ou, en tenant compte de la relation (18):

$$\boxed{\frac{v_{I_1}}{V_{I_0}} = \frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} - \frac{1}{2\rho_I} \Phi_1 (1 - \alpha_1)} \quad (23a)$$

Nous écrivons de façon identique pour la conduite II, pendant toute la première phase:

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + F_{II} \\ v_{II_1} = v_{II_0} - \frac{g}{a_{II}} F_{II} \end{cases} \quad (24)$$

d'où nous déduisons, comme plus haut:

$$\boxed{\frac{v_{II_1}}{V_{II_0}} = \frac{v_{II_0}}{V_{II_0}} - \frac{1}{2\rho_{II}} \Phi_1 (1 - \alpha_1)} \quad (24a)$$

Pour la conduite III, nous disposons de l'équation (20), dans laquelle nous faisons $i = 1$:

$$\frac{v_{III_1}}{V_{III_0}} = \frac{v_{III_0}}{V_{III_0}} - \frac{1}{2\rho_{III}} \Phi_1 (1 + \alpha_1). \quad (20a)$$

Multiplions les deux équations (23a) et (24a) par -1 et additionnons les à l'équation (20a). En tenant compte de l'équation de continuité des masses (19), on tire :

$$\frac{1}{2\rho_I} \Phi_1 (1 - \alpha_1) + \frac{1}{2\rho_{II}} \Phi_1 (1 - \alpha_1) - \frac{1}{2\rho_{III}} \Phi_1 (1 + \alpha_1) = 0$$

d'où:

$$\frac{1 - \alpha_1}{\rho_I} + \frac{1 - \alpha_1}{\rho_{II}} - \frac{1 + \alpha_1}{\rho_{III}} = 0 \quad (25)$$

et

$$\alpha_1 = \frac{1/\rho_I + 1/\rho_{II} - 1/\rho_{III}}{1/\rho_I + 1/\rho_{II} + 1/\rho_{III}} = r_{III}.$$

Nous vérifions que r_{III} est un coefficient constant qui ne dépend que des seules dimensions géométriques des 3 conduites et des célérités a_{I} , a_{II} et a_{III} . — r_{III} est un « coefficient de réflexion ».

Nous définissons, de façon analogue, des « coefficients de transmission » qui satisfont aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= F_{\text{II}} = s_{\text{III-II}} Y_0 \Phi_1, & \text{ou} & \quad \zeta_1^2 - 1 = s_{\text{III-II}} \Phi_1 \\ y_1 - y_0 &= F_{\text{I}} = s_{\text{I-I}} Y_0 \Phi_1, & \text{ou} & \quad \zeta_1^2 - 1 = s_{\text{III-I}} \Phi_1 \end{aligned}$$

L'équation (18) nous livre, de plus :

$$\zeta_1^2 - 1 = (1 - r_{\text{III}}) \Phi_1 .$$

La comparaison de ces diverses équations nous donne :

$$F_{\text{II}} = F_{\text{I}}$$

et :

$$1 - r_{\text{III}} = s_{\text{III-I}} = s_{\text{III-II}} = s_{\text{III}} ,$$

c'est-à-dire :

$$s_{\text{III}} = \frac{2/\zeta_{\text{III}}}{1/\zeta_{\text{I}} + 1/\zeta_{\text{II}} + 1/\zeta_{\text{III}}}$$

Par raison de symétrie, nous définirons :

$$\left\{ \begin{aligned} s_{\text{I}} &= \frac{2/\zeta_{\text{I}}}{1/\zeta_{\text{I}} + 1/\zeta_{\text{II}} + 1/\zeta_{\text{III}}}; & r_{\text{I}} &= \frac{1/\zeta_{\text{II}} + 1/\zeta_{\text{III}} - 1/\zeta_{\text{I}}}{1/\zeta_{\text{I}} + 1/\zeta_{\text{II}} + 1/\zeta_{\text{III}}} \\ s_{\text{II}} &= \frac{2/\zeta_{\text{II}}}{1/\zeta_{\text{I}} + 1/\zeta_{\text{II}} + 1/\zeta_{\text{III}}}; & r_{\text{II}} &= \frac{1/\zeta_{\text{I}} + 1/\zeta_{\text{III}} - 1/\zeta_{\text{II}}}{1/\zeta_{\text{I}} + 1/\zeta_{\text{II}} + 1/\zeta_{\text{III}}} \\ s_{\text{III}} &= \frac{2/\zeta_{\text{III}}}{1/\zeta_{\text{I}} + 1/\zeta_{\text{II}} + 1/\zeta_{\text{III}}}; & r_{\text{III}} &= \frac{1/\zeta_{\text{I}} + 1/\zeta_{\text{II}} - 1/\zeta_{\text{III}}}{1/\zeta_{\text{I}} + 1/\zeta_{\text{II}} + 1/\zeta_{\text{III}}} \end{aligned} \right. \quad (26)$$

quantités qui vérifient les trois relations suivantes :

$$s_{\text{I}} + r_{\text{I}} = 1 \quad s_{\text{II}} + r_{\text{II}} = 1 \quad s_{\text{III}} + r_{\text{III}} = 1 .$$

La bifurcation des conduites au point A peut être considérée comme une discontinuité de la conduite III. Il existe d'autres formes de discontinuité. Supposons, par exemple, que la section

S_{II} tende vers 0; $V_{II_0} \rightarrow \infty$, $\rho_{II} \rightarrow \infty$, $1/\rho_{II}$ tend également vers 0. La discontinuité se réduit alors à un changement de section dans une conduite, qui passe de S_I à S_{III} (fig. 9). Il y aurait également discontinuité, si, la section restant constante, un changement de l'épaisseur de la conduite entraînait une discontinuité de la célérité a , puisque, dans ce cas, la valeur ρ serait également discontinue.

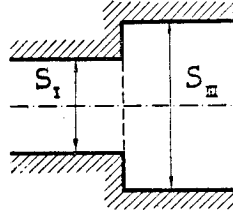


FIG. 9.

Nous définissons, en conséquence, les coefficients: ¹

$$\left\{ \begin{array}{l} s_I = \frac{2/\rho_I}{1/\rho_I + 1/\rho_{III}} \quad r_I = \frac{1/\rho_{III} - 1/\rho_I}{1/\rho_I + 1/\rho_{III}} \\ s_{III} = \frac{2/\rho_{III}}{1/\rho_I + 1/\rho_{III}} \quad r_{III} = \frac{1/\rho_I - 1/\rho_{III}}{1/\rho_I + 1/\rho_{III}} \end{array} \right. \quad (26a)$$

tels que

$$s_I + r_I = 1 \quad \text{et} \quad s_{III} + r_{III} = 1 .$$

On vérifie immédiatement que, si la discontinuité est très petite, r tend vers 0 et s vers 1.

Il n'y a donc pas de différence de principe entre les coefficients de discontinuité provenant d'une bifurcation des conduites et ceux dus à une variation de la section ou de l'épaisseur de la conduite. Nous verrons plus loin comment on peut, grâce aux coefficients (26a), rattacher sans difficultés l'étude du cas de la fig. (7) au cas général (fig. 5).

b) Cas d'une phase quelconque de la conduite II.

La relation $\alpha_1 = r_{III}$ qui définit α_1 au cours de la première phase, nous permet de supposer qu'au cours des phases suivantes α_i définira également les conditions de réflexion au point A. Si tel est le cas, il sera utile d'écrire α_i sous la forme suivante:

$$\alpha_i = r_{III} + q_i \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} . \quad (27)$$

¹ Voir Löwy, *op. cit.*, page 60, qui démontre l'existence de ces coefficients de façon quelque peu différente.

Il y a lieu de vérifier que cette définition convient, et de calculer la fonction q_i .

Pour autant que nous nous trouvons dans la *première* phase de la conduite I, nous écrivons:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i = y_0 + F_{I_i} \\ v_{I_i} = v_{I_0} - \frac{g}{a_I} \cdot F_{I_i} \end{array} \right.$$

d'où nous déduisons:

$$\begin{aligned} \frac{v_{I_i}}{V_{I_0}} &= \frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} - \frac{1}{2\varphi_I} \Phi_i (1 - \alpha_i) \\ &= \frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} - \frac{1}{2\varphi_I} \Phi_i \left(1 - r_{III} - q_i \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} \right). \end{aligned} \quad (23b)$$

Si nous considérons, au contraire, la conduite II, qui se trouve dans une phase i quelconque, nous écrivons:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i = y_0 + F_{II_i} - F_{II_{i-1}} \\ v_{II_i} = v_{II_0} - \frac{g}{a_{II}} \cdot (F_{II_i} + F_{II_{i-1}}) \end{array} \right. \quad (28)$$

Nous définissons des quantités $s_{III_{i-1}}$, s_{III_i} ... qui satisfont aux relations:

$$F_{III_{i-1}} = s_{III_{i-1}} Y_0 \Phi_{i-1}; \quad F_{III_i} = s_{III_i} Y_0 \Phi_i \dots$$

Les équations (18) et (27) nous donnent de plus:

$$y_i - y_0 = Y_0 \Phi_i (1 - \alpha_i) = Y_0 \Phi_i \left(1 - r_{III} - q_i \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} \right)$$

Si nous introduisons ces relations dans (28), nous en tirons, après élimination de F_{II_i} :

$$\begin{aligned} \frac{v_{II_i}}{V_{II_0}} &= \frac{v_{II_0}}{V_{II_0}} - \frac{g}{a_{II} V_{II_0}} (2F_{II_{i-1}} + y_i - y_0) \\ &= \frac{v_{II_0}}{V_{II_0}} - \frac{1}{2\varphi_{II}} \Phi_i \left(2s_{III_{i-1}} \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} + 1 - r_{III} - q_i \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} \right) \end{aligned} \quad (28a)$$

Passons à la conduite III. L'équation (20) est encore valable. Nous l'écrivons sous la forme:

$$\begin{aligned} \frac{v_{III_i}}{V_{III_0}} &= \frac{v_{III_0}}{V_{III_0}} - \frac{1}{2\rho_{III}} \Phi_i (1 + \alpha_i) \\ &= \frac{v_{III_0}}{V_{III_0}} - \frac{1}{2\rho_{III}} \Phi_i \left(1 + r_{III} + q_i \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} \right) \end{aligned} \quad (20b)$$

Multiplions les équations (23b), (28a) et (20b) respectivement par -1 , -1 et $+1$ et additionnons. Ceci nous donne, en simplifiant par $\frac{\Phi_i}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1 - r_{III} - q_i \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i}}{\rho_I} + \frac{2s_{III_{i-1}} \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i}}{\rho_{II}} + \frac{1 - r_{III} - q_i \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i}}{\rho_{III}} \\ - \frac{1 + r_{III} + q_i \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i}}{\rho_{III}} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

ou:

$$\begin{aligned} \frac{1 - r_{III}}{\rho_I} + \frac{1 - r_{III}}{\rho_{II}} - \frac{1 + r_{III}}{\rho_{III}} - q_i \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} \left[\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{II}} + \frac{1}{\rho_{III}} \right] \\ + \frac{2s_{III_{i-1}}}{\rho_{II}} \cdot \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} = 0 \end{aligned}$$

Puisque $r_{III} = \alpha_1$, l'équation (25) nous donne:

$$\frac{1 - r_{III}}{\rho_I} + \frac{1 - r_{III}}{\rho_{II}} - \frac{1 + r_{III}}{\rho_{III}} = 0$$

et (30) nous livre:

$$q_i = s_{III_{i-1}} \cdot \frac{2/\rho_{II}}{1/\rho_I + 1/\rho_{II} + 1/\rho_{III}} = s_{III_{i-1}} \cdot s_{II}$$

Nous vérifions par là que notre définition (27) avait été heureuse. Nous écrivons:

$$\alpha_i = r_{III} + q_i \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} = r_{III} + s_{III_{i-1}} \cdot s_{II} \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} \quad (31)$$

La valeur α_i sera entièrement connue, dès que nous saurons calculer $s_{III_{i-1}}$.

Nous tirons des équations (28) la relation:

$$\begin{aligned} \frac{v_{II_i}}{V_{II_0}} &= \frac{v_{II_0}}{V_{II_0}} - \frac{g}{a_{II} V_{II_0}} (2F_{II_{i-1}} + y_i - y_0) \\ &= \frac{v_{II_0}}{V_{II_0}} - \frac{g}{a_{II} V_{II_0}} (y_0 - y_i + 2F_{II_i}) \end{aligned}$$

et, par le fait:

$$y_i - y_0 + 2F_{II_{i-1}} = y_0 - y_i + 2F_{II_i}$$

que nous écrivons:

$$Y_0(1 - \alpha_i)\Phi_i + 2s_{III_{i-1}}Y_0\Phi_{i-1} = -Y_0(1 - \alpha_i)\Phi_i + 2s_{III_i}Y_0\Phi_i$$

Nous en tirons enfin:

$$s_{III_i} = 1 - \alpha_i + s_{III_{i-1}} \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i}$$

Introduisons l'équation (31) dans cette dernière relation:

$$s_{III_i} = 1 - r_{III} - s_{III_{i-1}} s_{II} \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} + s_{III_{i-1}} \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i}$$

En nous rappelant que:

$$1 - r_{III} = s_{III} \quad \text{et} \quad 1 - s_{II} = r_{II}$$

nous pouvons poser:

$$\boxed{s_{III_i} = s_{III} + s_{III_{i-1}} r_{II} \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i}} \quad (32)$$

Il est donc possible d'exprimer α_i en fonction de Φ_i en combinant les équations (31) et (32). Il nous est d'ailleurs facile de donner la loi de formation de α_i en calculant successivement $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$. Les équations (31) et (32) nous permettent de dresser le *tableau I.*

TABLEAU I.

Calcul des valeurs α_i au moyen des équations (31) et (32).

i	$s_{III_{i-1}}$	α_i
1	—	r_{III}
2	s_{III}	$r_{III} + s_{III} s_{II} \frac{\Phi_1}{\Phi_2}$
3	$s_{III} + s_{III} r_{II} \frac{\Phi_1}{\Phi_2}$	$r_{III} + s_{III} s_{II} \frac{\Phi_2}{\Phi_3}$ $+ s_{III} r_{II} s_{II} \frac{\Phi_1}{\Phi_2} \cdot \frac{\Phi_2}{\Phi_3}$
4	$s_{III} + s_{III} r_{II} \frac{\Phi_2}{\Phi_3} + s_{III} r_{II}^2 \frac{\Phi_1}{\Phi_2} \cdot \frac{\Phi_2}{\Phi_3}$	$r_{III} + s_{III} s_{II} \frac{\Phi_3}{\Phi_4}$ $+ s_{III} r_{II} s_{II} \frac{\Phi_2}{\Phi_3} \cdot \frac{\Phi_3}{\Phi_4}$ $+ s_{III} r_{II}^2 s_{II} \frac{\Phi_1}{\Phi_2} \cdot \frac{\Phi_2}{\Phi_3} \cdot \frac{\Phi_3}{\Phi_4}$
5	$s_{III} + s_{III} r_{II} \frac{\Phi_3}{\Phi_4}$ $+ s_{III} r_{II}^2 \frac{\Phi_2}{\Phi_3} \cdot \frac{\Phi_3}{\Phi_4}$ $+ s_{III} r_{II}^3 \frac{\Phi_1}{\Phi_2} \cdot \frac{\Phi_2}{\Phi_3} \cdot \frac{\Phi_3}{\Phi_4}$	$r_{III} + s_{III} s_{II} \frac{\Phi_4}{\Phi_5}$ $+ s_{III} r_{II} s_{II} \frac{\Phi_3}{\Phi_4} \cdot \frac{\Phi_4}{\Phi_5}$ $+ s_{III} r_{II}^2 s_{II} \frac{\Phi_2}{\Phi_3} \cdot \frac{\Phi_3}{\Phi_4} \cdot \frac{\Phi_4}{\Phi_5}$ $+ s_{III} r_{II}^3 s_{II} \frac{\Phi_1}{\Phi_2} \cdot \frac{\Phi_2}{\Phi_3} \cdot \frac{\Phi_3}{\Phi_4} \cdot \frac{\Phi_4}{\Phi_5}$
6	etc.	etc.

En simplifiant, nous écrivons sans difficulté aucune le terme général, sous la forme suivante :

$$\alpha_i = r_{\text{III}} + s_{\text{II}} s_{\text{III}} \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} + s_{\text{II}} s_{\text{III}} r_{\text{II}} \frac{\Phi_{i-2}}{\Phi_i} \quad (33)$$

$$+ s_{\text{II}} s_{\text{III}} r_{\text{II}}^2 \frac{\Phi_{i-3}}{\Phi_i} + \dots + s_{\text{II}} s_{\text{III}} r_{\text{II}}^{i-2} \frac{\Phi_1}{\Phi_i} .$$

Cette équation (33) n'est valable que pour autant que nous nous trouvons dans la première phase de la conduite I, c'est-à-dire tant que l'onde réfléchie en C n'a pas encore atteint le point d'intersection A. Elle s'applique indifféremment au cas d'une bifurcation, comme au cas d'une simple discontinuité de ρ . (fig. 5, 6 et 7).

Nous sommes donc en mesure de calculer la fonction α_i , soit directement au moyen de (33), soit en appliquant successivement les formules (31) et (32). Nous développerons au chapitre I.B.5) une troisième formule donnant α_i au moyen d'une autre série. Le choix de la méthode de calcul dépendra, en fait, du problème à résoudre, chacune des méthodes de calcul ayant ses avantages propres.

Dans le cas d'une conduite de section constante, débouchant d'un bassin infiniment grand, la série α_i , calculée en un point A quelconque, se réduit à

$$\alpha_i = \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i}$$

en prenant comme unité du temps la durée d'une oscillation dans le secteur AC de la conduite, C étant l'extrémité côté bassin (voir fig. 1). Cette dernière relation se déduit d'ailleurs directement des équations (2) et (4a) du chapitre I A. Nous développerons au chapitre I.B.6) le calcul des pressions, en un point quelconque d'une conduite.

Il convient de rechercher l'interprétation physique de la série (33). Pour cela, nous allons énumérer les ondes qui, à un instant donné i , se détachent de A vers O.

Nous rappelons que par définition, le temps $i = 0$ coïncide avec le moment où la première onde arrive en A.

Nous désignons par r_I , r_{II} et r_{III} , les divers « coefficients de réflexion » et par s_I , s_{II} et s_{III} , les « coefficients de transmission » de la discontinuité A, ces diverses valeurs étant données, soit par les formules (26), soit par (26 a), selon le caractère de la discontinuité. Nous supposons en outre, pour simplifier, que les ondes partant de O, vers A, sont toutes positives.

Le phénomène que nous étudions est régi par un système de deux équations différentielles linéaires. Or, une propriété fondamentale de ces équations réside dans le fait que la somme de deux ou plusieurs solutions partielles est également une solution. Nous avons là, sous une forme mathématique, la loi de superposition. Chaque onde considérée séparément sera donc une solution partielle de nos équations fondamentales, et se propagera dans notre système de conduite *absolument indépendamment des autres ondes*. La superposition de toutes ces ondes partielles nous fournira la solution générale cherchée.

Considérons une surcharge $\Phi_{t'}$ venant de O et arrivant en A à l'instant t' de la *première* phase. Cette onde $\Phi_{t'}$ sera réfléchié partiellement en A et l'on aura par définition :

$$\varphi_{t'} = -\alpha_{t'} \Phi_{t'} ;$$

c'est-à-dire d'après nos notations

$$\varphi_1 = -\alpha_1 \Phi_1 = -r_{III} \Phi_1$$

tandis que l'autre fraction de $\Phi_{t'}$, égale à $+s_{III} \Phi_{t'}$ ou $+s_{III} \Phi_1$ traversera la discontinuité à l'instant t' .

Représentons nous une autre surcharge $\Phi_{(1+t')} = \Phi_2$ arrivant en A au temps $i = (1 + t')$ de la *seconde* phase. Cette onde reviendra partiellement et on aura bien la fraction réfléchié

$$= -r_{III} \Phi_{(1+t')} = -r_{III} \Phi_2 .$$

A cette onde $-r_{III} \Phi_{(1+t')}$ viendra encore s'ajouter une fraction de l'onde $+s_{III} \Phi_1$, qui a traversé la discontinuité A au temps $i = t'$, pour être ensuite réfléchié négativement en D et revenir en A au temps $i = (1 + t')$. Une partie $+s_{III} r_{II} \Phi_1$ de cette onde se réfléchit en A vers D, alors que la fraction

— $s_{III} s_{II} \Phi_1$ traverse la discontinuité A en direction de O, et s'additionne à l'onde — $r_{III} \Phi_{(1+t')}$, réfléchiée vers O au même instant $(1 + t')$. Ceci nous permet d'écrire :

$$\varphi_2 = - r_{III} \Phi_{(1+t')} - s_{III} s_{II} \Phi_{t'} = - r_{III} \Phi_2 - s_{III} s_{II} \Phi_1$$

où φ_2 désigne alors la surcharge partant de A en direction de O à un instant quelconque $(1 + t')$ de la seconde phase.

Un phénomène tout semblable se passera au temps $i = (2 + t')$ de la *troisième* phase. Une onde $\Phi_{(2+t')}$ arrivant en ce moment en A sera réfléchiée partiellement vers O et prendra la valeur :

$$= - r_{III} \Phi_{(2+t')} = - r_{III} \Phi_3$$

à laquelle viendra s'ajouter au même instant la fraction de l'onde — $s_{III} s_{II} \Phi_2$, ayant traversé la discontinuité pour la première fois au moment $(1 + t')$, ainsi qu'une fraction de l'onde $s_{III} r_{II} \Phi_1$, qui a été réfléchiée en A vers D à l'instant $(1 + t')$ et qui vaudra, après avoir retraversé la discontinuité A au temps $(2 + t')$, — $s_{III} s_{II} r_{II} \Phi_1$. Ceci nous donne :

$$\varphi_3 = - r_{III} \Phi_3 - s_{III} s_{II} \Phi_2 - s_{III} s_{II} r_{II} \Phi_1$$

où φ_3 désigne de nouveau une onde partant de A en direction de O à un instant quelconque $(2 + t')$ de la troisième phase.

On montrerait de même que :

$$\begin{aligned} \varphi_i = - \alpha_i \Phi_i = & - r_{III} \Phi_i - s_{III} s_{II} \Phi_{(i-1)} - s_{III} s_{II} r_{II} \Phi_{(i-2)} \\ & - s_{III} s_{II} r_{II}^2 \Phi_{(i-3)} - \dots \end{aligned}$$

relation qui est identique à l'équation (33).

L'interprétation physique à donner à la fonction α_i est maintenant évidente. α_i décrit les conditions de réflexion au point de discontinuité A à un instant quelconque de la $i^{\text{ème}}$ phase, ou, de façon plus précise :

La grandeur $\varphi_i = - \alpha_i \Phi_i$ représente la somme de toutes les ondes qui, à un instant quelconque $(i - 1 + t')$ de la $i^{\text{ème}}$ phase, sont, ou réfléchiées de A vers O, ou traversent la discontinuité A en direction de O.

α_i satisfait pleinement à la définition que nous avons donnée sous (17). Nous verrons d'ailleurs que cette interprétation physique de α_i est tout à fait générale.

La relation (33) contient les surcharges relatives $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_i$, qui ne nous sont pas encore connues. Ainsi que nous l'avons dit plus haut, ces valeurs nous sont données par le calcul des surcharges devant l'obturateur O.

Avant de passer au calcul de Φ_i , nous définissons la série:

$$\bar{\alpha}_i = r_{\text{III}} + s_{\text{II}}s_{\text{III}} + s_{\text{II}}s_{\text{III}}r_{\text{II}} + s_{\text{II}}s_{\text{III}}r_{\text{II}}^2 + \dots \\ \dots + s_{\text{II}}s_{\text{III}}r_{\text{II}}^{i-2}, \quad (33a)$$

qui ne contient que les coefficients constants de (33), à l'exclusion des valeurs Φ_i . Cherchons la limite de $\bar{\alpha}_i$

$$\bar{\alpha}_i = r_{\text{III}} + s_{\text{II}}s_{\text{III}}(1 + r_{\text{II}} + r_{\text{II}}^2 + r_{\text{II}}^3 + \dots + r_{\text{II}}^{i-2}).$$

Nous constatons que la valeur absolue de r_{II} est toujours inférieure à 1. Nous écrirons donc :

$$\bar{\alpha}_i = r_{\text{III}} + s_{\text{II}}s_{\text{III}} \frac{1 - r_{\text{II}}^{i-1}}{1 - r_{\text{II}}}.$$

Passons à la limite:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\alpha}_i = r_{\text{III}} + s_{\text{II}}s_{\text{III}} \frac{1}{1 - r_{\text{II}}} = r_{\text{III}} + s_{\text{III}} = 1.$$

La série (33 a) ne dépend que de la forme géométrique de la conduite, et nullement des manœuvres de l'obturateur. Il y a donc intérêt à en calculer les termes, qui restent les mêmes pour toutes les manœuvres, et à pouvoir vérifier que leur somme tend bien vers 1.

4. Loi des charges devant l'obturateur O.

Nous considérons une charge mobile $F_{i-n_{\text{III}}} = H_0 \Phi_{*i-n_{\text{III}}}$ quittant l'obturateur O au temps $i - n_{\text{III}}$, et arrivant en A au temps $i - \frac{n_{\text{III}}}{2}$; elle est réfléchiée en A et revient en O au temps i .

L'équation (17) qui donne la réflexion au point A, au temps $\left(i - \frac{n_{III}}{2}\right)$, s'écrira donc:

$$\alpha_{i - \frac{n_{III}}{2}} = - \frac{\varphi_{i - \frac{n_{III}}{2}}}{\Phi_{i - \frac{n_{III}}{2}}} = - \frac{\varphi_{*i}}{\Phi_{*i - n_{III}}} = - \frac{f_i}{F_{i - n_{III}}} \quad (34)$$

et les équations fondamentales (2) et (3), écrites pour le point O, deviennent par le fait:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i = h_0 + F_i + f_i = h_0 + F_i - \alpha_{i - \frac{n_{III}}{2}} F_{i - n_{III}} \\ c_i = c_0 - \frac{g}{a_{III}} (F_i - f_i) = c_0 - \frac{g}{a_{III}} \left(F_i + \alpha_{i - \frac{n_{III}}{2}} F_{i - n_{III}} \right) \end{array} \right.$$

Il nous est facile de développer des « séries enchainées » analogues à celles d'Allievi, en considérant successivement les instants de rythme entier. L'origine du temps $i = 0$ coïncidant, par définition, avec l'arrivée de la première onde en A, les instants de rythme entier pour la section adjacente à l'obturateur seront donc:

$$- \frac{n_{III}}{2} ; + \frac{n_{III}}{2} ; + \frac{3n_{III}}{2} ; + \frac{5n_{III}}{2} ; \dots ; \\ + \left(\frac{2k-1}{2} \right) n_{III} ; + \left(\frac{2k+1}{2} \right) n_{III} ; \dots$$

On obtiendra alors, en introduisant ces valeurs dans (2) et (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{-\frac{n_{III}}{2}} = h_0 \\ h_{+\frac{n_{III}}{2}} = h_0 + F_{\frac{n_{III}}{2}} \\ h_{+\frac{3n_{III}}{2}} = h_0 + F_{\frac{3n_{III}}{2}} - \alpha_{n_{III}} F_{\frac{n_{III}}{2}} \\ \dots \\ h_{+\frac{(2k+1)n_{III}}{2}} = h_0 + F_{\left(\frac{2k+1}{2}\right)n_{III}} - \alpha_{kn_{III}} F_{\left(\frac{2k-1}{2}\right)n_{III}} \end{array} \right. \quad (35)$$

Ainsi qu'une série analogue pour les vitesses c_i :

$$\left. \begin{aligned}
 c_{+\frac{n_{\text{III}}}{2}} &= c_0 - \frac{g}{a_{\text{III}}} F_{\frac{n_{\text{III}}}{2}} \\
 c_{+\frac{3n_{\text{III}}}{2}} &= c_0 - \frac{g}{a_{\text{III}}} \left(F_{\frac{3n_{\text{III}}}{2}} + \alpha_{n_{\text{III}}} F_{\frac{n_{\text{III}}}{2}} \right) \\
 c_{+\frac{5n_{\text{III}}}{2}} &= c_0 - \frac{g}{a_{\text{III}}} \left(F_{\frac{5n_{\text{III}}}{2}} + \alpha_{2n_{\text{III}}} F_{\frac{3n_{\text{III}}}{2}} \right) \\
 &\dots\dots\dots \\
 c_{+\left(\frac{2k+1}{2}\right)n_{\text{III}}} &= c_0 - \frac{g}{a_{\text{III}}} \left(F_{\left(\frac{2k+1}{2}\right)n_{\text{III}}} + \alpha_{kn_{\text{III}}} F_{\left(\frac{2k-1}{2}\right)n_{\text{III}}} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Il est aisé d'éliminer les fonctions F_i . Nous additionnons deux équations successives de la série (35), après avoir multiplié la première par le coefficient α_i qui figure dans la seconde. On soustrait de même, deux à deux, les équations de la série (36), après avoir multiplié la première par le coefficient α_i qui figure dans la seconde. On obtient alors sans difficulté la « série enchaînée »:

$$\left. \begin{aligned}
 &+ \frac{h_{\frac{n_{\text{III}}}{2}}}{2} - h_0 = \frac{a_{\text{III}}}{g} \left[c_0 - c_{\frac{n_{\text{III}}}{2}} \right]. \\
 \alpha_{n_{\text{III}}} \cdot \frac{h_{\frac{n_{\text{III}}}{2}}}{2} + \frac{h_{\frac{3n_{\text{III}}}{2}}}{2} - h_0 (1 + \alpha_{n_{\text{III}}}) \\
 &= \frac{a_{\text{III}}}{g} \left[\alpha_{n_{\text{III}}} c_{\frac{n_{\text{III}}}{2}} - c_{\frac{3n_{\text{III}}}{2}} + c_0 (1 - \alpha_{n_{\text{III}}}) \right]. \quad (37) \\
 \alpha_{2n_{\text{III}}} \cdot \frac{h_{\frac{3n_{\text{III}}}{2}}}{2} + \frac{h_{\frac{5n_{\text{III}}}{2}}}{2} - h_0 (1 + \alpha_{2n_{\text{III}}}) \\
 &= \frac{a_{\text{III}}}{g} \left[\alpha_{2n_{\text{III}}} c_{\frac{3n_{\text{III}}}{2}} - c_{\frac{5n_{\text{III}}}{2}} + c_0 (1 - \alpha_{2n_{\text{III}}}) \right]. \\
 &\dots\dots\dots \\
 \alpha_{kn_{\text{III}}} \cdot \frac{h_{\left(\frac{2k-1}{2}\right)n_{\text{III}}}}{2} + \frac{h_{\left(\frac{2k+1}{2}\right)n_{\text{III}}}}{2} - h_0 (1 + \alpha_{kn_{\text{III}}}) \\
 &= \frac{a_{\text{III}}}{g} \left[\alpha_{kn_{\text{III}}} c_{\left(\frac{2k-1}{2}\right)n_{\text{III}}} - c_{\left(\frac{2k+1}{2}\right)n_{\text{III}}} + c_0 (1 - \alpha_{kn_{\text{III}}}) \right].
 \end{aligned} \right\}$$

En joignant à la série enchainée (37) l'équation:

$$\eta_i = \frac{c_i}{C_0} \sqrt{\frac{H_0}{h_i}} = \frac{c_i}{C_0} \frac{1}{\zeta_{*i}} \quad (9a)$$

qui établit une relation entre les vitesses devant l'obturateur et les pressions, nous sommes en mesure de résoudre le problème.

Pour nous conformer aux notations d'Allievi, nous écrirons la dernière des équations (37) en valeurs relatives:

$$\begin{aligned} \alpha_{kn_{III}} \cdot \zeta_*^2 \left(\frac{2k-1}{2}\right)_{n_{III}} + \zeta_*^2 \left(\frac{2k+1}{2}\right)_{n_{III}} - (1 + \alpha_{kn_{III}}) \\ = \frac{a_{III} C_0}{g \cdot H_0} \left[\alpha_{kn_{III}} \cdot \eta \left(\frac{2k-1}{2}\right)_{n_{III}} \zeta_* \left(\frac{2k-1}{2}\right)_{n_{III}} \right. \\ \left. - \eta \left(\frac{2k+1}{2}\right)_{n_{III}} \zeta_* \left(\frac{2k+1}{2}\right)_{n_{III}} + \frac{c_0}{C_0} (1 - \alpha_{kn_{III}}) \right] \quad (38) \end{aligned}$$

Nous avons développé systématiquement nos formules, en gardant les indices qui découlent de notre définition initiale des temps relatifs. L'équation (38), à laquelle nous arrivons, ne permet aucune hésitation, quant à la signification exacte de chaque valeur.

Dans la suite de notre démonstration nous adopterons des notations simplifiées plus commodes. Pour calculer les séries enchainées relatives à la conduite III, nous considérons les battements propres de cette conduite, qui nous définissent les instants de rythme entier:

$$0, 1, 2, 3, \dots (k-1), k, (k+1)$$

ce qui revient à prendre, pour les calculs, n_{III} comme unité des temps relatifs.

Nous pouvons, dans ces conditions, simplifier l'écriture de tous les indices et nous aurons avec cette nouvelle notation au lieu de:

$$\begin{aligned} h_{-\frac{n_{III}}{2}}; h_{+\frac{n_{III}}{2}}; h_{+\frac{3n_{III}}{2}}; \dots; h_{+\left(\frac{2k-1}{2}\right)n_{III}}; \dots \\ h_0; h_1; h_2; \dots; h_k; \dots \end{aligned}$$

les charges absolues h_{k+1} , soit les surcharges relatives $\zeta_{*k+1}^2 - 1$ par voie de récurrence.

Il nous manque encore la relation qui nous fournira la fonction Φ_i nécessaire au calcul de la série (33). La dernière équation de la série (35)

$$h_{\frac{(2k+1)n_{III}}{2}} = h_0 + F_{\frac{(2k+1)n_{III}}{2}} - \alpha_{kn_{III}} F_{\frac{(2k-1)n_{III}}{2}}$$

écrite sous forme relative, donne:

$$\zeta_{*\frac{(2k+1)n_{III}}{2}}^2 - 1 = \Phi_{*\frac{(2k+1)n_{III}}{2}} - \alpha_{kn_{III}} \Phi_{*\frac{(2k-1)n_{III}}{2}} \quad (40)$$

qui est la relation cherchée.

Nous l'écrivons encore, en faisant usage des nouvelles notations et en ordonnant:

$$\boxed{\Phi_{*k} = \zeta_{*k}^2 - 1 + \alpha_{k-1} \Phi_{*k-1}} \quad (40a)$$

Pour résoudre un problème quelconque, nous nous servirons simultanément de la série (33) qui exprime les conditions de réflexion au point A, des séries enchainées (38) ou (39), et de l'équation (40) qui nous donne Φ_{*k} . Quant à la fonction η_k , elle est donnée par la loi d'ouverture ou de fermeture linéaires, par des mouvements rythmiques de l'obturateur, etc. On résoudra successivement les équations (38) et (40), pour $(i+1) = \frac{n_{III}}{2}, \frac{3n_{III}}{2}, \text{etc.}$ (ou encore (39) et (40 a) pour $(k+1) = 1, 2, 3, \dots$) et la série (33) pour: $i = n_{III}, 2n_{III}, \dots kn_{III}$.

Il est intéressant de remarquer que l'équation (38) dépend exclusivement des caractéristiques de la conduite III et de la valeur α_i , ce qui se voit encore mieux sous la forme (39). Au contraire, la série α_i dépend essentiellement des conditions de réflexion en A. Nous verrons que, dans le cas général, ces conditions sont fonctions de la longueur et des caractéristiques des

conduites I, II et III. Cette possibilité de disjoindre, en une certaine mesure, le problème, et de calculer séparément les valeurs α_i et ζ_{*i} , aura plusieurs conséquences heureuses: on en déduit, en particulier, que des conduites nettement distinctes, mais qui, pour une manœuvre identique de l'obturateur, donnent des séries $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots \alpha_i$ semblables, seront nécessairement régies par des lois de charges ζ_{*k}^2 analogues. Nous utiliserons largement cette remarque au cours de la II^{me} partie de cette étude, relative aux chambres d'équilibre.

Les propriétés des séries enchaînées (37) confirment ce que nous disions au chapitre précédent, à savoir qu'il est indifférent que les valeurs s et r de la série (33) proviennent d'une discontinuité de section, ou d'une bifurcation. Quelle que soit la nature de la discontinuité A, les équations (37) restent inchangées. Cette remarque nous permettra d'étendre, sans autre, notre théorie générale à des cas plus complexes, dès que nous saurons calculer la série α correspondante, les équations (37) restant inchangées.

Il est intéressant de remarquer que la première des équations (37) est indépendante de α . Cette équation est, par ailleurs, identique à la première des équations (7), ce qui s'explique aisément par le fait que l'accroissement de la pression au point O ne peut pas être influencé par les conditions de réflexion au point A, tant que la première onde réfléchie n'est pas de retour.

Si nous posons $\alpha_i \equiv 1$, (cas de la réflexion totale), on voit immédiatement que les équations (35), (36) et (37) se confondent avec les équations (5), (6) et (7) de la théorie d'Allievi. On le voit mieux encore avec les équations (37 a), écrites en notations simplifiées.

Nous allons passer en revue les principales manœuvres de l'obturateur et rechercher la forme que nos équations prennent de cas en cas. Afin de simplifier l'écriture des formules, nous nous en tiendrons aux nouvelles notations.

L'équation (39) peut être ordonnée en fonction de ζ_{*k+1}^2 :

$$\zeta_{*k+1}^2 + 2\rho_* \gamma_{k+1} \zeta_{*k+1} + \alpha_k (\zeta_{*k}^2 - 1) - 1 - 2\rho_* \left[\alpha_k \gamma_k \zeta_{*k} + \frac{c_0}{C_0} (1 - \alpha_k) \right] = 0$$

Nous en tirons ζ_{*k+1}

$$\zeta_{*k+1} = -\rho_* \eta_{k+1} + \sqrt{\rho_*^2 \eta_{k+1}^2 + 1 + 2\rho_* \left[\alpha_k \eta_k \zeta_{*k} + \frac{c_0}{C_0} (1 - \alpha_k) \right] - \alpha_k (\zeta_{*k} - 1)}$$

(41)

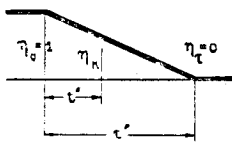
Cette équation donne explicitement ζ_{*k+1} en fonction de ζ_{*k} , de ρ_* , de $\frac{c_0}{C_0}$ et de α_k dès que la loi de manœuvre de η_k est connue.

a) *Loi des charges pour les cas de fermeture linéaire complète en τ secondes.*

Nous définissons les temps de fermeture relatifs :

$$\Theta_{II} = \frac{\tau''}{\mu_{II}} \quad \text{et} \quad \Theta_{III} = \frac{\tau''}{\mu_{III}},$$

et de même (fig. 10) :



$$\begin{aligned} i &= \frac{t''}{\mu_{II}}; & k &= \frac{t''}{\mu_{III}}. \\ \eta_k &= \frac{\tau'' - t''}{\tau''} = 1 - \frac{t''}{\tau''} \\ &= 1 - \frac{i}{\Theta_{II}} = 1 - \frac{k}{\Theta_{III}}. \end{aligned} \quad (42)$$

FIG. 10. — Diagramme de fermeture linéaire complète.

η_k est bien une fonction linéaire du temps, telle que $\eta_0 = 1$ pour $i = k = 0$ et $\eta_{\Theta} = 0$ pour $i = \Theta_{II}$ ou $k = \Theta_{III}$. Il est évident que η_k est, par définition, indépendant de la loi des charges. Les équations (41) et (42) permettent de résoudre sans difficulté le problème. Comme nous définissons en général ρ_* pour une valeur C_0 correspondant à l'ouverture complète $\eta_0 = 1$, on aura, par le fait $\frac{c_0}{C_0} = 1$ dans l'équation (41).

Si $k = 0$, c'est-à-dire, si $\eta_0 = 1$ et $\zeta_{*0} = 1$, l'équation (41) devient :

$$\zeta_{*1} = -\rho_* \eta_1 + \sqrt{\rho_*^2 \eta_1^2 + 1 + 2\rho_*} \quad (13)$$

équation que nous connaissons déjà par Allievi.

On voit également que, si nous posons $\alpha_h \equiv 1$, l'équation (41) devient :

$$\zeta_{*h+1} = -\rho_* \eta_{h+1} + \sqrt{\rho_*^2 \eta_{h+1}^2 + 2 + 2\rho_* \eta_h \zeta_{*h} - \zeta_{*h}^2} \quad (43)$$

qui n'est autre que l'équation (10) d'Allievi, résolue en fonction de ζ_{*h+1} .

b) *Loi des charges après immobilisation de l'obturateur, consécutive à une fermeture.*

Les oscillations des charges devant l'obturateur ne sont nullement interrompues par le fait que l'obturateur s'immobilise. On le voit en faisant $\eta_h = \text{const.}$, dans la formule (41). Il est évident que cette valeur $\eta_h = \text{const.}$ peut être quelconque, mais nous nous arrêterons au cas particulièrement intéressant où $\eta_h = 0$, c'est-à-dire au contre-coup de fermeture complète.

Contrairement à Allievi, nous faisons coïncider le temps $t=0$ avec le t début de la manoeuvre de fermeture, et non avec l'arrêt de l'obturateur¹.

L'équation (39) devient alors (en supposant $\frac{c_0}{C_0} = 1$):

$$\alpha_h (\zeta_{*h}^2 - 1) + \zeta_{*h+1}^2 - 1 = 2\rho_* (1 - \alpha_h) \quad (44)$$

et (41):

$$\zeta_{*h+1} = \sqrt{1 + 2\rho_* (1 - \alpha_h) - \alpha_h (\zeta_{*h}^2 - 1)} \quad (45)$$

L'équation (40 a), qui livre Φ_{*h+1} en fonction de Φ_{*h} ne change pas.

La forme très spéciale que prend la loi des charges lors du contre-coup de fermeture est mieux mise en lumière, si nous faisons de nouveau $\alpha_h \equiv 1$. L'équation (44) devient alors :

$$\zeta_{*h}^2 - 1 + \zeta_{*h+1}^2 - 1 = 0, \quad (46)$$

équation déjà donnée par Allievi.

¹ Voir ALLIEVI-GADEN, Tome I, page 83.

On voit immédiatement que les surcharges relatives $\zeta_{*h}^2 - 1$ sont constantes en valeur absolue, mais changent de signe d'un intervalle à l'autre. Les oscillations sont pendulaires et ne s'amortissent pas. En général, l'équation (44) donnera lieu à un mouvement pendulaire qui s'amortit.

c) *Loi des charges pour le cas de l'ouverture linéaire.*

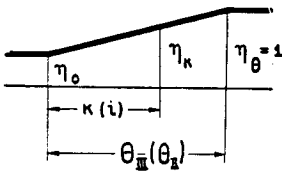


FIG. 11. — Diagramme d'ouverture linéaire.

Nous avons (fig. 11):

$$\eta_k = \eta_0 + \frac{k}{\Theta_{III}} (1 - \eta_0) = \eta_0 + \frac{i}{\Theta_{II}} (1 - \eta_0) \quad (47)$$

Un cas particulièrement intéressant est celui où l'ouverture s'effectue à partir de $\eta_0 = 0$. L'équation (47) devient alors:

$$\eta_k = \frac{k}{\Theta_{III}} = \frac{i}{\Theta_{II}} \quad (47a)$$

k n'est pas nécessairement un nombre entier, mais ce sera le cas ordinairement. Pour éviter toute confusion, nous pouvons spécifier que k est entier et écrire, ainsi que l'a fait Allievi

$$\eta_k = \frac{i' + k - 1}{\Theta_{III}}, \quad (47b)$$

où:

$$0 < i' < 1.$$

Pour étudier le cas de l'ouverture linéaire à partir de 0, nous

¹ Voir ALLIEVI-GADEN, tome I, page 65.

Nous spécifions que ces équations ne sont valables que si le mouvement se fait à partir de $c_0 = 0$. Pour obtenir les valeurs de rythme entier, généralement les seules recherchées, on fera $t' = 1$.

d) *Loi des charges, lors du contre-coup d'ouverture.*

Le contre-coup d'ouverture fera souvent l'objet d'une étude spéciale, surtout pour les hautes chutes, pour lesquelles $\rho_* < 1$ ¹. Il suffit, comme pour le contre-coup de fermeture, de faire $\eta_h = \text{const.}$ dans l'équation (41), à partir du moment où le mouvement d'ouverture prend fin. Nous n'examinerons, ici, que le cas où l'ouverture est totale, c'est-à-dire, partant de $\eta_0 = 0$ pour aboutir à $\eta_{\text{eIII}} = 1$. Dans ce cas l'équation (41) devient:

$$\zeta_{*h+1} = -\rho_* + \sqrt{\rho_*^2 + 1 + 2\rho_* \alpha_h \zeta_{*h} - \alpha_h (\zeta_{*h}^2 - 1)} \quad (51)$$

e) *Loi des charges pour les manœuvres alternatives rythmiques de l'obturateur.*

Considérons des manœuvres alternatives d'ouverture et de fermeture de l'obturateur, telles que le premier mouvement parte de 0, c'est-à-dire que $c_0 = 0$. Il est évident que non seulement les mouvements d'ouverture seront calculés d'après la formule (50), mais que, pour la fermeture également, l'équation (41) devient:

$$\zeta_{*h+1} = -\rho_* \eta_{h+1} + \sqrt{\rho_*^2 \eta_{h+1}^2 + 1 + 2\rho_* \alpha_h \eta_h \zeta_{*h} - \alpha_h (\zeta_{*h}^2 - 1)} \quad (52)$$

En effet, si nous reprenons les équations (37a), nous voyons qu'en chacune d'elles la vitesse c_0 s'annule, quelle que soit

¹ Voir ALLIEVI-GADEN, pp. 83 et ss.

l'allure de la fonction η_h , pour autant qu'au temps $t = 0$, la condition initiale $c_0 = 0$ est satisfaite.

Nous faisons remarquer que nous nous sommes séparés des notations employées par Allievi. Pour Allievi, ρ_* est fonction de la vitesse de régime à l'état initial. Cette notation oblige Allievi à modifier toutes ses définitions pour étudier le cas d'ouverture à partir de $\eta_0 = 0$, cas pour lequel ses équations générales n'ont plus de signification¹. En définissant une fois pour toutes ρ_* comme une constante, relative à un débit donné Q_0 caractéristique, et en introduisant le rapport $\frac{c_0}{C_0}$ dans nos équations, nous avons évité cet écueil, et notre formule (41) garde toute sa généralité. Nous montrerons au chapitre I.D (Application de la théorie au calcul des conduites forcées), que les définitions choisies par Allievi lui ont fait commettre une erreur au cours du chapitre qu'il a consacré aux manœuvres alternatives. Il fut ainsi amené à sous-estimer leur importance réelle.

Pour conclure, nous relevons combien il est facile de passer de nos formules générales aux formules d'Allievi, valables pour le cas $\alpha \equiv 1$. Cette étroite parenté entre notre théorie générale et la théorie d'Allievi se retrouvera au cours des applications numériques.

5. Calcul de la série α_i pour une phase quelconque de la conduite I.

a) Equations fondamentales.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que la conduite I était très longue, de façon que l'ensemble du phénomène soit terminé avant le retour de la première onde réfléchie en C. Cette hypothèse limite par trop la portée de la théorie. Il devient indispensable d'étendre notre étude au cas où les ondes des deux conduites I et II interfèrent.

¹ Voir ALLIEVI-GADEN, p. 77.

Ecrivons les équations d'Allievi, s'appliquant à une conduite à réflexion totale:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 - y_0 = \frac{a}{g} (v_0 - v_1) \\ y_1 + y_2 - 2y_0 = \frac{a}{g} (v_1 - v_2) \\ y_2 + y_3 - 2y_0 = \frac{a}{g} (v_2 - v_3) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ y_{i-1} + y_i - 2y_0 = \frac{a}{g} (v_{i-1} - v_i) \\ y_i + y_{i+1} - 2y_0 = \frac{a}{g} (v_i - v_{i+1}) \end{array} \right. \quad (7)$$

En additionnant, on obtient:

$$\begin{aligned} 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{i-1} + 2y_i + y_{i+1} - (2i + 1)y_0 \\ = \frac{a}{g} (v_0 - v_{i+1}) \end{aligned}$$

ou encore, en valeurs relatives:

$$\begin{aligned} 2(\zeta_1^2 - 1) + 2(\zeta_2^2 - 1) + 2(\zeta_3^2 - 1) + \dots \\ + 2(\zeta_{i-1}^2 - 1) + 2(\zeta_i^2 - 1) + (\zeta_{i+1}^2 - 1) = 2\rho \left(\frac{v_0}{V_0} - \frac{v_{i+1}}{V_0} \right) \end{aligned} \quad (53)$$

Cette équation est évidemment tout à fait générale, et nous pouvons l'appliquer aussi bien à la conduite I qu'à la conduite II, l'une et l'autre étant « à réflexion totale ».

Considérons le point A: nous pouvons écrire, qu'à un instant quelconque, les deux conditions de continuité doivent être satisfaites. Nous aurons donc toujours:

Equation de continuité des volumes:

$$\frac{v_{I_i}}{V_{I_0}} + \frac{v_{II_i}}{V_{II_0}} = \frac{v_{III_i}}{V_{III_0}} \quad (19)$$

Equation de continuité des pressions, appliquée aussi bien à la conduite I qu'à la conduite II:

$$\zeta_i^2 - 1 = \Phi_i(1 - \alpha_i) \quad (18)$$

Par le fait, $Y_0 \zeta_i^2 = y_i$ est la pression *unique* régnant en A, au temps i .

En utilisant la relation (18), nous écrivons l'équation (53):

Pour la conduite I:

$$\begin{aligned} \frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} - \frac{v_{I_i}}{V_{I_i}} = \\ \frac{1}{2\rho_I} \left[\Phi_i(1 - \alpha_i) + 2\Phi_{i-n_1}(1 - \alpha_{i-n_1}) + 2\Phi_{i-2n_1}(1 - \alpha_{i-2n_1}) + \dots \right] \end{aligned} \quad (54)$$

Pour la conduite II:

$$\begin{aligned} \frac{v_{II_0}}{V_{II_0}} - \frac{v_{II_i}}{V_{II_i}} = \\ \frac{1}{2\rho_{II}} \left[\Phi_i(1 - \alpha_i) + 2\Phi_{i-1}(1 - \alpha_{i-1}) + 2\Phi_{i-2}(1 - \alpha_{i-2}) + \dots \right. \\ \left. + 2\Phi_2(1 - \alpha_2) + 2\Phi_1(1 - \alpha_1) \right] \end{aligned} \quad (55)$$

Par contre, le régime de la conduite III, est donné comme précédemment par l'équation (20) que nous écrivons:

$$\frac{v_{III_i}}{V_{III_0}} - \frac{v_{III_0}}{V_{III_0}} = -\frac{1}{2\rho_{III}} \Phi_i(1 + \alpha_i) \quad (20)$$

En additionnant les 3 équations (54), (55) et (20), et en tenant compte de (19), nous obtenons la relation:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\rho_I} \left[\Phi_i(1 - \alpha_i) + 2\Phi_{i-n_1}(1 - \alpha_{i-n_1}) + 2\Phi_{i-2n_1}(1 - \alpha_{i-2n_1}) + \dots \right] \\ + \frac{1}{2\rho_{II}} \left[\Phi_i(1 - \alpha_i) + 2\Phi_{i-1}(1 - \alpha_{i-1}) + 2\Phi_{i-2}(1 - \alpha_{i-2}) + \dots \right. \\ \left. + 2\Phi_2(1 - \alpha_2) + 2\Phi_1(1 - \alpha_1) \right] - \frac{1}{2\rho_{III}} \Phi_i(1 + \alpha_i) = 0 \end{aligned}$$

que nous transformons comme suit :

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi_i}{2} \left(\frac{1 - \alpha_i}{\rho_I} + \frac{1 - \alpha_i}{\rho_{II}} - \frac{1 + \alpha_i}{\rho_{III}} \right) \\ &= -1/\rho_I \left[\Phi_{i-n_I} (1 - \alpha_{i-n_I}) + \Phi_{i-2n_I} (1 - \alpha_{i-2n_I}) + \dots \right] \\ &- 1/\rho_{II} \left[\Phi_{i-1} (1 - \alpha_{i-1}) + \Phi_{i-2} (1 - \alpha_{i-2}) + \dots + \Phi_1 (1 - \alpha_1) \right]. \end{aligned}$$

Isolons α_i et divisons par $\frac{\Phi_i}{2} (1/\rho_I + 1/\rho_{II} + 1/\rho_{III})$; nous obtenons :

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{1/\rho_I + 1/\rho_{II} - 1/\rho_{III}}{1/\rho_I + 1/\rho_{II} + 1/\rho_{III}} + \frac{2/\rho_{II}}{1/\rho_I + 1/\rho_{II} + 1/\rho_{III}} \times \\ & \left[(1 - \alpha_{i-1}) \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} + (1 - \alpha_{i-2}) \frac{\Phi_{i-2}}{\Phi_i} + \dots + (1 - \alpha_1) \frac{\Phi_1}{\Phi_i} \right] \\ & \quad + \frac{2/\rho_I}{1/\rho_I + 1/\rho_{II} + 1/\rho_{III}} \times \\ & \left[(1 - \alpha_{i-n_I}) \frac{\Phi_{i-n_I}}{\Phi_i} + (1 - \alpha_{i-2n_I}) \frac{\Phi_{i-2n_I}}{\Phi_i} + \dots \right]. \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$\begin{aligned} \alpha_i &= r_{III} + s_{II} \left[(1 - \alpha_{i-1}) \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} + (1 - \alpha_{i-2}) \frac{\Phi_{i-2}}{\Phi_i} + \dots \right. \\ & \quad \left. + (1 - \alpha_1) \frac{\Phi_1}{\Phi_i} \right] \\ & + s_I \left[(1 - \alpha_{i-n_I}) \frac{\Phi_{i-n_I}}{\Phi_i} + (1 - \alpha_{i-2n_I}) \frac{\Phi_{i-2n_I}}{\Phi_i} + \dots \right]. \end{aligned}$	(56)
---	------

Cette relation (56) est fondamentale. On peut, soit l'utiliser telle quelle, soit la développer sous une forme explicite, analogue à l'équation (33), ainsi que nous le montrerons plus bas. Il est intéressant de souligner qu'au cours de la démonstration qui précède, nous n'avons utilisé que les deux équations de continuité, les équations d'Allievi transformées (53) et l'équation (20) déjà connue. Nous n'avons donc introduit aucune hypothèse secondaire.

b) *Développements.*

Il est évident que la relation (56), réduite aux seules oscillations de la conduite II, doit satisfaire également à la relation (33). Dans ce cas, la relation (56) se réduit à :

$$\alpha_i = r_{III} + s_{II} \left[(1 - \alpha_{i-1}) \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} + (1 - \alpha_{i-2}) \frac{\Phi_{i-2}}{\Phi_i} + \dots \right. \\ \left. + (1 - \alpha_2) \frac{\Phi_2}{\Phi_i} + (1 - \alpha_1) \frac{\Phi_1}{\Phi_i} \right]. \quad (56a)$$

Supposons que les $(i - 1)$ premières valeurs $(1 - \alpha_{i-1})$ satisfassent à la relation (33), c'est-à-dire qu'on aura successivement :

$$(1 - \alpha_1) = (1 - r_{III}) = s_{III}$$

$$(1 - \alpha_2) = s_{III} - s_{II} s_{III} \frac{\Phi_1}{\Phi_2}$$

.....

$$(1 - \alpha_{i-1}) = s_{III} - s_{II} s_{III} \frac{\Phi_{i-2}}{\Phi_{i-1}} - s_{II} s_{III} r_{II} \frac{\Phi_{i-3}}{\Phi_{i-1}} - \dots \\ - s_{II} s_{III} r_{II}^{i-3} \frac{\Phi_1}{\Phi_{i-1}}.$$

La quantité entre crochets de la relation (56a) s'écrira alors :

$$\left[(1 - \alpha_1) \frac{\Phi_1}{\Phi_i} + (1 - \alpha_2) \frac{\Phi_2}{\Phi_i} + \dots + (1 - \alpha_{i-2}) \frac{\Phi_{i-2}}{\Phi_i} \right. \\ \left. + (1 - \alpha_{i-1}) \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} \right] \\ = s_{III} \frac{\Phi_1}{\Phi_i} \\ + s_{III} \frac{\Phi_2}{\Phi_i} - s_{II} s_{III} \frac{\Phi_1}{\Phi_2} \cdot \frac{\Phi_2}{\Phi_i} \quad (57) \\ + s_{III} \frac{\Phi_3}{\Phi_i} - s_{II} s_{III} \frac{\Phi_2}{\Phi_3} \cdot \frac{\Phi_3}{\Phi_i} - s_{II} s_{III} r_{II} \frac{\Phi_1}{\Phi_3} \cdot \frac{\Phi_3}{\Phi_i} \\ \dots \\ \dots$$

$$\begin{aligned}
 & + s_{\text{III}} \frac{\Phi_{i-2}}{\Phi_i} - s_{\text{II}} s_{\text{III}} \frac{\Phi_{i-3}}{\Phi_{i-2}} \cdot \frac{\Phi_{i-2}}{\Phi_i} - s_{\text{II}} s_{\text{III}} r_{\text{II}} \frac{\Phi_{i-4}}{\Phi_{i-2}} \cdot \frac{\Phi_{i-2}}{\Phi_i} - \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad - s_{\text{II}} s_{\text{III}} r_{\text{II}}^{i-4} \frac{\Phi_1}{\Phi_{i-2}} \cdot \frac{\Phi_{i-2}}{\Phi_i} \\
 & + s_{\text{III}} \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} - s_{\text{II}} s_{\text{III}} \frac{\Phi_{i-2}}{\Phi_{i-1}} \cdot \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} - s_{\text{II}} s_{\text{III}} r_{\text{II}} \frac{\Phi_{i-3}}{\Phi_{i-1}} \cdot \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} - \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad - s_{\text{II}} s_{\text{III}} r_{\text{II}}^{i-4} \frac{\Phi_2}{\Phi_{i-1}} \cdot \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} - s_{\text{II}} s_{\text{III}} r_{\text{II}}^{i-3} \frac{\Phi_1}{\Phi_{i-1}} \cdot \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i}
 \end{aligned}$$

En ordonnant les termes de l'équation (57), on obtient :

$$\begin{aligned}
 & = [s_{\text{III}} - s_{\text{II}} s_{\text{III}} - s_{\text{II}} s_{\text{III}} r_{\text{II}} - \dots - s_{\text{II}} s_{\text{III}} r_{\text{II}}^{i-4} - s_{\text{II}} s_{\text{III}} r_{\text{II}}^{i-3}] \frac{\Phi_1}{\Phi_i} \\
 & + [s_{\text{III}} - s_{\text{II}} s_{\text{III}} - s_{\text{II}} s_{\text{III}} r_{\text{II}} - \dots - s_{\text{II}} s_{\text{III}} r_{\text{II}}^{i-4}] \frac{\Phi_2}{\Phi_i} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + [s_{\text{III}} - s_{\text{II}} s_{\text{III}}] \frac{\Phi_{i-2}}{\Phi_i} \\
 & + s_{\text{III}} \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i},
 \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}
 & = s_{\text{III}} [1 - s_{\text{II}} (1 + r_{\text{II}} + r_{\text{II}}^2 + \dots + r_{\text{II}}^{i-4} + r_{\text{II}}^{i-3})] \frac{\Phi_1}{\Phi_i} \\
 & + s_{\text{III}} [1 - s_{\text{II}} (1 + r_{\text{II}} + r_{\text{II}}^2 + \dots + r_{\text{II}}^{i-4})] \frac{\Phi_2}{\Phi_i} \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + s_{\text{III}} [1 - s_{\text{II}}] \frac{\Phi_{i-2}}{\Phi_i} \\
 & + s_{\text{III}} \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i}
 \end{aligned}$$

ou :

$$\begin{aligned}
 & = s_{\text{III}} \left[1 - s_{\text{II}} \frac{1 - r_{\text{II}}^{i-2}}{1 - r_{\text{II}}} \right] \frac{\Phi_1}{\Phi_i} + s_{\text{III}} \left[1 - s_{\text{II}} \frac{1 - r_{\text{II}}^{i-3}}{1 - r_{\text{II}}} \right] \frac{\Phi_2}{\Phi_i} + \dots \\
 & \qquad \qquad \qquad + s_{\text{III}} (1 - s_{\text{II}}) \frac{\Phi_{i-2}}{\Phi_i} + s_{\text{III}} \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i}.
 \end{aligned}$$

Ce qui donne, en se rappelant que $1 - r_{II} = s_{II}$:

$$= s_{III} r_{II}^{i-2} \frac{\Phi_1}{\Phi_i} + s_{III} r_{II}^{i-3} \frac{\Phi_2}{\Phi_i} + \dots + s_{III} r_{II} \frac{\Phi_{i-2}}{\Phi_i} + s_{III} \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i}.$$

On retrouve bien la relation (33) :

$$\begin{aligned} \alpha_i = r_{III} + s_{II} s_{III} \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} + s_{II} s_{III} r_{II} \frac{\Phi_{i-2}}{\Phi_i} + \dots \\ + s_{II} s_{III} r_{II}^{i-3} \frac{\Phi_2}{\Phi_i} + s_{II} s_{III} r_{II}^{i-2} \frac{\Phi_1}{\Phi_i}. \end{aligned} \quad (33)$$

Cette démonstration va nous servir de point de départ pour le calcul explicite de la relation (56). Nous allons calculer cette dernière série en supposant d'abord que nous nous trouvons dans la deuxième phase de la conduite I; c'est-à-dire que $n_1 < i < 2n_1$. Dans ce cas, le développement (33) n'est plus valable; il doit être complété par des termes complémentaires. Désignons par $|\alpha_i|$ le développement (33) pour $i > n_1$.

Nous aurons :

$$\alpha_i = |\alpha_i| + \text{termes complémentaires.}$$

α_i sera connu dès que nous saurons calculer ces termes complémentaires :

Calcul de $\alpha_i = \alpha_{n_1+1}$

$$\begin{aligned} \alpha_{n_1+1} = r_{III} + s_{II} \left[(1 - \alpha_{n_1}) \frac{\Phi_{n_1}}{\Phi_{n_1+1}} + (1 - \alpha_{n_1-1}) \frac{\Phi_{n_1-1}}{\Phi_{n_1+1}} + \dots \right] \\ + s_I (1 - \alpha_1) \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_1+1}} \\ = r_{III} + s_{II} s_{III} \frac{\Phi_{n_1}}{\Phi_{n_1+1}} + s_{II} s_{III} r_{II} \frac{\Phi_{n_1-1}}{\Phi_{n_1+1}} + \dots \\ + s_{II} s_{III} r_{II}^{n_1-1} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_1+1}} + s_I (1 - \alpha_1) \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_1+1}} ; \end{aligned}$$

d'où :

$$\alpha_{n_I+1} = |\alpha_{n_I+1}| + s_I s_{III} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_I+1}}$$

Calcul de $\alpha_i = \alpha_{n_I+2}$

Développons α_{n_I+2} d'après la formule (56):

$$\alpha_{n_I+2} = r_{III} + s_{II} \left[(1 - \alpha_{n_I+1}) \frac{\Phi_{n_I+1}}{\Phi_{n_I+2}} + (1 - \alpha_{n_I}) \frac{\Phi_{n_I}}{\Phi_{n_I+2}} + \dots \right] \\ + s_I \left[1 - \alpha_2 \cdot \frac{\Phi_2}{\Phi_{n_I+2}} \right].$$

Nous pouvons transformer la première parenthèse $s_{II}[\dots]$ sur le modèle du développement (57), exception faite de la valeur $(1 - \alpha_{n_I+1}) \frac{\Phi_{n_I+1}}{\Phi_{n_I+2}}$ pour laquelle nous devons tenir compte du calcul précédent. Nous remplaçons, en conséquence, la dernière ligne du développement (57) par :

$$(1 - \alpha_{n_I+1}) \frac{\Phi_{n_I+1}}{\Phi_{n_I+2}} = s_{III} \frac{\Phi_{n_I+1}}{\Phi_{n_I+2}} - s_{II} s_{III} \frac{\Phi_{n_I}}{\Phi_{n_I+2}} - \dots \\ - s_{II} s_{III} r_{II}^{n_I} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_I+2}} - s_I s_{III} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_I+1}} \cdot \frac{\Phi_{n_I+1}}{\Phi_{n_I+2}}$$

c'est-à-dire que nous ajoutons au développement (57) le terme $- s_I s_{III} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_I+2}}$. Si nous faisons les mêmes développements que précédemment, il est évident que nous trouverons :

$$\alpha_{n_I+2} = |\alpha_{n_I+2}| + s_{II} \left[- s_I s_{III} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_I+2}} \right] + s_I \left[(1 - \alpha_2) \frac{\Phi_2}{\Phi_{n_I+2}} \right] \\ = |\alpha_{n_I+2}| - s_I s_{II} s_{III} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_I+2}} + s_I \left[\left(s_{III} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_I+1}} - s_{II} s_{III} \frac{\Phi_1}{\Phi_2} \right) \frac{\Phi_2}{\Phi_{n_I+2}} \right] \\ \alpha_{n_I+2} = |\alpha_{n_I+2}| + s_I s_{III} \frac{\Phi_2}{\Phi_{n_I+2}} - 2 s_I s_{II} s_{III} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_I+2}}$$

On trouve de même :

$$\begin{aligned} \alpha_{n_1+3} &= |\alpha_{n_1+3}| + s_I s_{III} \frac{\Phi_3}{\Phi_{n_1+3}} - 2s_I s_{II} s_{III} \frac{\Phi_2}{\Phi_{n_1+3}} \\ &\quad + s_I s_{II} s_{III} (s_{II} - 2r_{II}) \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_1+3}} \\ \alpha_{n_1+4} &= |\alpha_{n_1+4}| + s_I s_{III} \frac{\Phi_4}{\Phi_{n_1+4}} - 2s_I s_{II} s_{III} \frac{\Phi_3}{\Phi_{n_1+4}} \\ &\quad + s_I s_{II} s_{III} (s_{II} - 2r_{II}) \frac{\Phi_2}{\Phi_{n_1+4}} + s_I s_{II} s_{III} r_{II} (2s_{II} - 2r_{II}) \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_1+4}} \\ \alpha_{n_1+5} &= |\alpha_{n_1+5}| + s_I s_{III} \frac{\Phi_5}{\Phi_{n_1+5}} - 2s_I s_{II} s_{III} \frac{\Phi_4}{\Phi_{n_1+5}} \\ &\quad + s_I s_{II} s_{III} (s_{II} - 2r_{II}) \frac{\Phi_3}{\Phi_{n_1+5}} + s_I s_{II} s_{III} r_{II} (2s_{II} - 2r_{II}) \frac{\Phi_2}{\Phi_{n_1+5}} \\ &\quad + s_I s_{II} s_{III} r_{II}^2 (3s_{II} - 2r_{II}) \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_1+5}} \end{aligned}$$

Il est aisé de déceler la loi de formation des termes successifs. Supposons savoir calculer la série α_{n_1+p-1} pendant la deuxième phase de la conduite I. Le dernier terme de cette série sera :

$$s_I s_{II} s_{III} r_{II}^{p-4} [(p-3)s_{II} - 2r_{II}] \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_1+p-1}} .$$

On démontre sans difficulté que, si cette proposition est satisfaite, le dernier terme de la série α_{n_1+p} sera :

$$s_I s_{II} s_{III} r_{II}^{p-3} [(p-2)s_{II} - 2r_{II}] \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_1+p}} .$$

Nous pouvons donc développer α_{n_1+p} pour toute la durée de la deuxième phase de la conduite I, c'est-à-dire tant que $p \leq n_1$:

$$\begin{aligned} \alpha_{n_1+p} &= r_{III} + s_{II} s_{III} \frac{\Phi_{n_1+p-1}}{\Phi_{n_1+p}} + s_{II} s_{III} r_{II} \frac{\Phi_{n_1+p-2}}{\Phi_{n_1+p}} + \dots \\ &\quad + s_{II} s_{III} r_{II}^{n_1+p-2} \cdot \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_1+p}} \tag{58} \\ &+ s_I s_{III} \frac{\Phi_p}{\Phi_{n_1+p}} - 2s_I s_{II} s_{III} \frac{\Phi_{p-1}}{\Phi_{n_1+p}} + s_I s_{II} s_{III} (s_{II} - 2r_{II}) \frac{\Phi_{p-2}}{\Phi_{n_1+p}} + \dots \\ &\quad + s_I s_{II} s_{III} r_{II}^{p-3} [(p-2)s_{II} - 2r_{II}] \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_1+p}} . \end{aligned}$$

Pour calculer les termes de la série α_i , pendant la troisième phase, c'est-à-dire pour $2n_1 < i \leq 3n_1$, nous définissons une série $\|\alpha_i\|$ identique au développement (58), mais pour $n_1 + p > 2n_1$. Nous écrivons donc :

$$\alpha_i = \|\alpha_i\| + \text{termes complémentaires.}$$

Calculons ces termes pour $\alpha_i = \alpha_{2n_1+1}$. D'après la relation (56) :

$$\begin{aligned} \alpha_{2n_1+1} = r_{III} + s_{II} & \left[(1 - \alpha_{2n_1}) \frac{\Phi_{2n_1}}{\Phi_{2n_1+1}} + (1 - \alpha_{2n_1-1}) \frac{\Phi_{2n_1-1}}{\Phi_{2n_1+1}} + \dots \right. \\ & \left. + (1 - \alpha_1) \frac{\Phi_1}{\Phi_{2n_1+1}} \right] \\ & + s_I \left[(1 - \alpha_{n_1+1}) \frac{\Phi_{n_1+1}}{\Phi_{2n_1+1}} + (1 - \alpha_1) \frac{\Phi_1}{\Phi_{2n_1+1}} \right]. \end{aligned}$$

Développons cette série comme nous l'avons fait précédemment sous (57). Il est inutile de répéter tous les calculs : il suffit de rechercher les termes complémentaires. Le calcul des termes $(1 - \alpha_1)$ à $(1 - \alpha_{n_1})$ de la première parenthèse $s_{II}[\dots]$, pour lesquels la relation $1 - |\alpha_i| = 1 - \alpha_i$ est valable, se fait d'après la série (33). Pour les termes $(1 - \alpha_{n_1+1})$ à $(1 - \alpha_{2n_1})$, nous avons la relation $1 - \|\alpha_i\| = 1 - \alpha_i$. On voit donc que les termes de l'expression $s_{II}[\dots]$ se développent exactement comme pour le calcul de la formule (58) et ne donnent lieu à aucune correction. Passons aux valeurs contenues dans la deuxième parenthèse $s_I[\dots]$. Dans tous les calculs faits pour obtenir la formule (58), le terme unique de la 2^{me} parenthèse se développait d'après la série (33). Ce n'est plus le cas pour $1 - \alpha_{n_1+1}$, car :

$$\alpha_{n_1+1} = |\alpha_{n_1+1}| + s_I s_{III} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_1+1}}.$$

Nous devons donc introduire deux termes correcteurs :

pour $(1 - \alpha_{n_1+1})$: le terme correcteur $- s_I s_{III} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_1+1}}$

pour $(1 - \alpha_1)$: le terme nouveau $1 - r_{III} = s_{III}$.

Nous écrivons:

$$\alpha_{2n_1+1} = \|\alpha_{2n_1+1}\| + s_I \left[\left(-s_I s_{III} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_1+1}} \right) \frac{\Phi_{n_1+1}}{\Phi_{2n_1+1}} + s_{III} \frac{\Phi_1}{\Phi_{2n_1+1}} \right]$$

or:

$$s_{III} - s_I s_{III} = s_{III} (1 - s_I) = s_{III} r_I .$$

on obtient:

$$\alpha_{2n_1+1} = \|\alpha_{2n_1+1}\| + s_I s_{III} r_I \frac{\Phi_1}{\Phi_{2n_1+1}} .$$

Si nous développons la série α_{2n_1+2} d'après le schéma (57), nous voyons que le terme $(1 - \alpha_{2n_1+1})$ de la première parenthèse exige un terme correcteur, car:

$$\alpha_{2n_1+1} = \|\alpha_{2n_1+1}\| + s_I s_{III} r_I \frac{\Phi_1}{\Phi_{2n_1+1}}$$

Dans la seconde parenthèse, nous aurons à corriger le terme $(1 - \alpha_{n_1+2})$, car:

$$\alpha_{n_1+2} = |\alpha_{n_1+2}| + s_I s_{III} \frac{\Phi_2}{\Phi_{n_1+2}} - 2s_I s_{II} s_{III} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_1+2}}$$

et à ajouter le terme $1 - \alpha_2 = s_{III} - s_{II} s_{III} \frac{\Phi_1}{\Phi_2}$.

Nous écrivons, par le fait:

$$\begin{aligned} \alpha_{2n_1+2} = & \|\alpha_{2n_1+2}\| + s_{II} \left[\left(-s_I s_{III} r_I \right) \frac{\Phi_1}{\Phi_{2n_1+1}} \cdot \frac{\Phi_{2n_1+1}}{\Phi_{2n_1+2}} \right] \\ & + s_I \left[\left(-s_I s_{III} \frac{\Phi_2}{\Phi_{n_1+2}} + 2s_I s_{II} s_{III} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_1+2}} \right) \frac{\Phi_{n_1+2}}{\Phi_{2n_1+2}} \right. \\ & \left. + \left(s_{III} - s_{II} s_{III} \frac{\Phi_1}{\Phi_2} \right) \frac{\Phi_2}{\Phi_{2n_1+2}} \right] . \end{aligned}$$

Ce qui donne, tous calculs faits:

$$\alpha_{2n_1+2} = \|\alpha_{2n_1+2}\| + s_I s_{III} r_I \frac{\Phi_2}{\Phi_{2n_1+2}} + s_I s_{II} s_{III} (s_I - 2r_I) \frac{\Phi_1}{\Phi_{2n_1+2}} .$$

Nous pouvons développer, de façon identique: α_{2n_1+3} , α_{2n_1+4} , ... etc.

Nous obtiendrons, d'une manière générale: ($p \leq n_1$)

$$\begin{aligned}
 \alpha_{2n_1+p} &= r_{\text{III}} + s_{\text{II}} s_{\text{III}} \frac{\Phi_{2n_1+p-1}}{\Phi_{2n_1+p}} + s_{\text{II}} s_{\text{III}} r_{\text{II}} \frac{\Phi_{2n_1+p-2}}{\Phi_{2n_1+p}} + \dots \\
 &\quad + s_{\text{II}} s_{\text{III}} r_{\text{II}}^{2n_1+p-2} \frac{\Phi_1}{\Phi_{2n_1+p}} \tag{59} \\
 &+ s_{\text{I}} s_{\text{III}} \frac{\Phi_{n_1+p}}{\Phi_{2n_1+p}} - 2s_{\text{I}} s_{\text{II}} s_{\text{III}} \frac{\Phi_{n_1+p-1}}{\Phi_{2n_1+p}} + \dots \\
 &\quad + s_{\text{I}} s_{\text{II}} s_{\text{III}} r_{\text{II}}^{n_1+p-3} [(n_1 + p - 2) s_{\text{II}} - 2r_{\text{II}}] \frac{\Phi_1}{\Phi_{2n_1+p}} \\
 &+ s_{\text{I}} s_{\text{III}} r_{\text{I}} \frac{\Phi_p}{\Phi_{2n_1+p}} + s_{\text{I}} s_{\text{II}} s_{\text{III}} (s_{\text{I}} - 2r_{\text{I}}) \frac{\Phi_{p-1}}{\Phi_{2n_1+p}} \\
 &\quad + s_{\text{I}} s_{\text{II}} s_{\text{III}} \left[r_{\text{II}} (s_{\text{I}} - 2r_{\text{I}}) + s_{\text{II}} (r_{\text{I}} - 2s_{\text{I}}) \right] \frac{\Phi_{p-2}}{\Phi_{2n_1+p}} + \dots \\
 &\dots + s_{\text{I}} s_{\text{II}} s_{\text{III}} \left[r_{\text{II}}^{p-2} (s_{\text{I}} - 2r_{\text{I}}) + (p - 2) s_{\text{II}} r_{\text{II}}^{p-3} (r_{\text{I}} - 2s_{\text{I}}) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(p - 2)!}{2!(p - 4)!} s_{\text{I}} s_{\text{II}}^2 r_{\text{II}}^{p-4} \right] \frac{\Phi_1}{\Phi_{2n_1+p}} .
 \end{aligned}$$

Considérons ce développement: il représente exactement, en valeurs relatives, la somme de toutes les oscillations d'ondes dans les conduites I et II. La signification physique des formules (58) et (59) est donc la même que celle de la formule (33), mais étendue aux oscillations des 2 conduites. Cette remarque est capitale. Elle va nous permettre d'écrire directement le terme général de la série α_{qn_1+p} , q et p étant quelconques.

Supposons, à titre d'exemple, que nous voulions calculer le dernier terme du développement de α_{3n_1+4} , terme qui repré-

sente une onde qui a oscillé $q = 3$ fois dans la conduite I, et $p - 1 = 3$ fois dans la conduite II. Nous désignons par a une onde qui oscille dans la conduite II, et par b une onde qui oscille dans la conduite I. Une onde a , ayant achevé son oscillation dans II, peut osciller à nouveau dans II; nous aurons alors la combinaison: aa . Si elle oscille au contraire dans I, nous aurons la combinaison: ab , et ainsi de suite.

Enumérons toutes les combinaisons possibles de ces oscillations dans le cas où il y a 3 oscillations dans I et 3 oscillations dans II et classons-les dans le tableau suivant :

(1) $bbb\ aaa$	(2) $abb\ baa$	(5) $bab\ baa$	(8) $bba\ baa$
(1) $aaa\ bbb$	(3) $abb\ aba$	(6) $bab\ aba$	(9) $bba\ aba$
	(4) $abb\ aab$	(7) $bab\ aab$	(10) $bba\ aab$
(2) $aab\ bba$	(3) $aba\ bba$	(4) $baa\ bba$	
(5) $aab\ bab$	(6) $aba\ bab$	(7) $baa\ bab$	
(8) $aab\ abb$	(9) $aba\ abb$	(10) $baa\ abb$	

On vérifie qu'il y a bien $\frac{(3+3)!}{3!3!} = 20$ combinaisons.

Transcrivons ce tableau en utilisant nos notations. Nous remarquons que:

aa correspond à une réflexion en A d'une onde qui revient dans la conduite II, c'est-à-dire à r_{II}

bb correspond à une réflexion en A d'une onde qui revient dans la conduite I, c'est-à-dire à r_I

ab correspond à une onde qui passe de II en I, c'est-à-dire s_{II}

ba correspond à une onde qui passe de I en II, c'est-à-dire s_I

A la fin d'une combinaison, a sera remplacé par s_{II} et b par s_I , puisque l'onde se dirige alors vers la conduite III.

D'autre part, chaque terme contiendra le facteur s_{III} qui indique que l'onde primitive vient de la conduite III. Transcrivons le tableau précédent, en remarquant, en outre, qu'un certain nombre de combinaisons sont identiques. (Pour les reconnaître

aisément, nous les avons numérotées de 1 à 10). Dans ces conditions, il vient :

$$\begin{array}{l|l}
 (1) - 2s_{III}r_I^2 s_I r_{II}^2 s_{II} & (6) - 2s_{III} s_I s_{II} s_I s_{II} s_I s_{II} \\
 (2) + 2s_{III} s_{II} r_I^2 s_I r_{II} s_{II} & (7) + 2s_{III} s_I s_{II} s_I r_{II} s_{II} s_I \\
 (3) + 2s_{III} s_{II} r_I s_I s_{II} s_I s_{II} & (8) - 2s_{III} r_I s_I s_{II} s_I r_{II} s_{II} \\
 (4) - 2s_{III} s_{II} r_I s_I r_{II} s_{II} s_I & (9) - 2s_{III} r_I s_I r_{II} s_{II} s_I s_{II} \\
 (5) - 2s_{III} s_I s_{II} r_I s_I r_{II} s_{II} & (10) + 2s_{III} r_I s_I r_{II}^2 s_{II} s_I
 \end{array}$$

Il est aisé de vérifier que le signe d'un terme quelconque est positif, si le nombre des coefficients s_I et s_{II} est impair, et négatif, si leur nombre est pair. En additionnant les 10 termes de la combinaison, nous obtenons l'expression :

$$\begin{aligned}
 & s_I s_{II} s_{III} [-2r_I^2 r_{II}^2 + 2s_{II} r_I^2 r_{II} + 2s_I s_{II}^2 r_I - 8s_I s_{II} r_I r_{II} - 2s_I^2 s_{II}^2 \\
 & \quad + 2s_I^2 s_{II} r_{II} + 2s_I r_I r_{II}^2] \\
 & = s_I s_{II} s_{III} [r_I r_{II}^2 (2s_I - 2r_I) + 2s_{II} r_{II} (r_I^2 - 4s_I r_I + s_I^2) \\
 & \quad + 2s_{II}^2 (s_I r_I - s_I^2)]
 \end{aligned}$$

qui, multipliée par $\frac{\Phi_1}{\Phi_{3n_1+4}}$, donne le dernier terme de la série α_{3n_1+4} .

On calculera de même le dernier terme de la série α_{3n_1+5} :

$$\begin{aligned}
 & s_I s_{II} s_{III} [r_I r_{II}^3 (2s_I - 2r_I) + 3s_{II} r_{II}^3 (r_I^2 - 4s_I r_I + s_I^2) \\
 & \quad + 6s_{II}^2 r_{II} (s_I r_I - s_I^2) + s_I^2 s_{II}^3] \frac{\Phi_1}{\Phi_{3n_1+5}},
 \end{aligned}$$

qui contient $\frac{(3+4)!}{3!4!} = 35$ oscillations.

Recherchons, d'une façon plus générale, la loi de formation des termes.

Toute formule doit être symétrique par rapport aux deux conduites I et II. En effet, si nous permutons les indices I et II du dernier terme de α_{qn_1+p} , nous devons retrouver le dernier

et dont le dernier terme sera (pour $p > 1$):

$$+ s_I s_{II} s_{III} \left\{ \begin{aligned} & r_I^{q-2} r_{II}^{p-2} [(q-1)s_I - 2r_I] + (p-2)s_{II} r_{II}^{p-3} \left[r_I^{q-1} - 2 \cdot (q-1) s_I r_I^{q-2} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{(q-1)!}{2!(q-3)!} s_I^2 r_I^{q-3} \right] \\ & + \frac{(p-2)!}{2!(p-4)!} s_{II}^2 r_{II}^{p-4} \left[(q-1) s_I r_I^{q-2} - 2 \cdot \frac{(q-1)!}{2!(q-3)!} s_I^2 r_I^{q-3} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{(q-1)!}{3!(q-4)!} s_I^3 r_I^{q-4} \right] + \frac{(p-2)!}{3!(p-5)!} s_{II}^3 r_{II}^{p-5} \left[\frac{(q-1)!}{2!(q-3)!} s_I^2 r_I^{q-3} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. - 2 \cdot \frac{(q-1)!}{3!(q-4)!} s_I^3 r_I^{q-4} + \frac{(q-1)!}{4!(q-5)!} s_I^4 r_I^{q-5} \right] \\ & + \dots \end{aligned} \right\} \frac{\Phi_I}{\Phi_{q_{n_1+p}}}$$

Dans cette dernière formule, les divers facteurs et exposants $p-2, p-3, \dots, q-1, q-2, q-3, \dots$ doivent tous être positifs.

En pratique, nous calculerons souvent la série $\bar{\alpha}_{q_{n_1+p}}$, dont tous les termes sont constants et qui ne contient plus les quotients $\frac{\Phi_{q_{n_1+p-1}}}{\Phi_{q_{n_1+p}}}$... Cette série est indépendante de la manœuvre de l'obturateur et, par le fait, se répète pour chaque nouveau problème. Il est très intéressant de connaître la limite de $\bar{\alpha}_{q_{n_1+p}}$ pour q et p très grands. Nous utiliserons souvent cette notion de limite au cours de l'étude des chambres d'équilibre (deuxième partie). En outre, la connaissance de cette limite permettra de contrôler à chaque instant les calculs numériques; d'où son importance.

Nous avons vu que:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (r_{III} + s_{II} s_{III} + s_{II} s_{III} r_{II} + s_{II} s_{III} r_{II}^2 + \dots) = 1.$$

On démontre, sans difficulté, en se servant du calcul des combinaisons, que:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (s_I s_{III} - 2s_I s_{II} s_{III} + s_I s_{II} s_{III} (s_{II} - 2r_{II}) + s_I s_{II} s_{III} r_{II} (2s_{II} - 2r_{II}) + \dots) = 0$$

et que, de même:

$$\lim_{p=\infty} \{ s_I s_{III} r_I + s_I s_{II} s_{III} (s_I - 2r_I) + s_I s_{II} s_{III} [r_{II} (s_I - 2r_I) + s_{II} (r_I - 2s_I)] + \dots \} = 0 .$$

Il est évident que l'on peut généraliser ces résultats et que, en additionnant toutes ces séries, on trouve:

$$\lim_{q=\infty, p=\infty} \bar{\alpha}_{q n_I + p} = 1 . \quad (61)$$

En résumé, nous pouvons calculer α_i , dans le cas de trois conduites concourantes dont l'une est munie d'un obturateur et les deux autres, de surfaces de réflexion totale négative. Nous nous servirons, à cet effet, soit de la formule de récurrence (56), soit de la formule explicite (60). Au point de vue physique, la quantité $Y_0 \alpha_i \Phi_i$ représente exactement la somme de toutes les ondes passant, au temps i , par le point A, en direction de O. Il n'est, dès lors, pas étonnant que le développement de α_i obéisse à des lois systématiques et que l'on puisse faire usage du calcul des combinaisons.

6. *Loi des charges au point de discontinuité A, et en un point quelconque de la conduite.*

a) *Loi des charges au point de discontinuité A.*

Quel que soit le genre de discontinuité en A, et quelle que soit la phase dans laquelle nous nous trouvons, l'équation

$$\zeta_i^2 - 1 = \Phi_i (1 - \alpha_i) \quad (18)$$

est toujours valable. Or, nous savons calculer α_i et Φ_i ; la surcharge relative $\zeta_i^2 - 1$ en un instant quelconque est donc connue.

Dans l'équation (18), ζ_i^2 et Φ_i sont des valeurs relatives, calculées en fonction de Y_0 . Il y a intérêt, dans bien des cas, et en particulier pour les calculs numériques, à exprimer toutes

les valeurs relatives en fonction de la hauteur H_0 . Nous définissons donc une surcharge relative B_i au point A, à l'instant i , donnée par :

$$B_i = \frac{y_i - y_0}{H_0} = \frac{Y_0}{H_0} \Phi_i (1 - \alpha_i) = \Phi_{*i} (1 - \alpha_i) \quad (18a)$$

Le calcul des surcharges au point de discontinuité A prendra toute son importance au cours de l'étude des chambres d'équi-

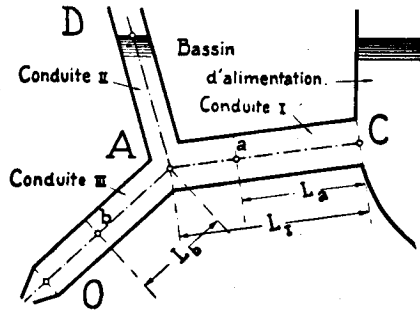


FIG. 12.

libre, que nous entreprendrons dans la deuxième partie de notre travail.

b) *Lois des charges en un point quelconque de la conduite.*

aa) Nous considérons d'abord un point a situé à la distance L_a de l'extrémité libre C de la conduite I (fig. 12). Les ondes se réfléchissent totalement en C, en changeant de signe.

Soient :

$$\mu_a = \frac{2L_a}{a_I} \quad \text{et} \quad n_a = \frac{\mu_a}{\mu_{II}}$$

Le battement dans la conduite II, supposée la plus courte, est choisi comme unité de temps; d'où: $n_{II} = 1$.

Ecrivons les équations générales (2) et (4a) en les appliquant à la conduite I :

$$y_{a,i} = y_{a,0} + F_I \left(t - \frac{x}{a_1} \right) + f_I \left(t + \frac{x}{a_1} \right) \quad (2)$$

$$f_I \left(t + \frac{x}{a_1} \right) = - F_I \left(t + \frac{x}{a_1} - \frac{2L_1}{a_1} \right) \quad (4a)$$

dans lesquelles $x = L_1 - L_a$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} y_{a,i} &= y_{a,0} + F_I \left(t - \frac{L_1 - L_a}{a_1} \right) - F_I \left(t + \frac{L_1 - L_a}{a_1} - \frac{2L_1}{a_1} \right) \\ &= y_{a,0} + F_I \left(t - \frac{L_1 - L_a}{a_1} \right) - F_I \left(t - \frac{L_1 - L_a}{a_1} - \frac{2L_a}{a_1} \right). \end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\frac{L_1 - L_a}{a_1} = \frac{\nu_1 - \nu_a}{2} \quad \text{et} \quad \frac{2L_a}{a_1} = \mu_a$$

nous écrivons :

$$y_{a,i} - y_{a,0} = F_{I, i - \frac{n_1 - n_a}{2}} - F_{I, i - \frac{n_1 - n_a}{2} - n_a}.$$

Définissons une valeur relative $\Xi_i = \frac{F_{I_i}}{H_0}$ pour la conduite I.

Nous écrivons, en décalant les temps de $\frac{n_1 - n_a}{2}$:

$$B_{a, i + \frac{n_1 - n_a}{2}} = \Xi_i - \Xi_{i - n_a} \quad (62)$$

équation dans laquelle $B_{a,i} = \frac{y_{a,i} - y_{a,0}}{H_0}$.

Pour obtenir la fonction Ξ_i , nous écrivons les équations (2) et (4a) pour le point A, considéré comme extrémité de la conduite I. On obtient :

$$y_i - y_0 = F_{I_i} + f_{I_i} = F_{I_i} - F_{I_{i-n_1}}$$

d'où, en valeurs relatives :

$$B_i = \Xi_i - \Xi_{i-n_1}$$

ou, résolu par rapport à Ξ_i :

$$\Xi_i = B_i + \Xi_{i-n_1} . \quad (63)$$

Au cours de la première phase de la conduite I, on a :

$$\Xi_p = B_p , \quad \text{où : } 0 < p < n_1 .$$

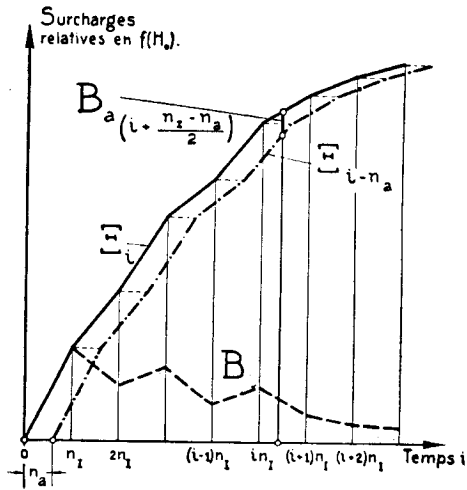


FIG. 13. — Schéma du calcul graphique des surcharges en un point quelconque de la conduite.

En écrivant ces équations successivement pour i , $i - n_1$, $i - 2n_1$, ... $p + n_1$, p , et en additionnant, on obtient :

$$\Xi_i = B_i + B_{i-n_1} + B_{i-2n_1} + \dots + B_{p+n_1} + B_p . \quad (63a)$$

En pratique, le calcul se fait aisément en reportant graphiquement la courbe des valeurs B_i (voir fig. 13). Par addition, on obtient la courbe des Ξ_i (équation (63)). En décalant cette

dernière courbe de n_a par rapport à l'origine, on obtient, par différence, les valeurs $B_{a,i}$ cherchées (équation (62)).

b b). Nous traitons, de façon analogue, le cas où le point b se trouve sur un élément de conduite OA, la réflexion en A n'étant que partielle: nous définissons comme précédemment les valeurs L_b, μ_b et n_b et prenons, de nouveau, comme mesure des temps, les battements de la conduite II. ($n_{II} = 1$).

Au temps i , on a en A:

$$f_{III_i} = -\alpha_i F_{III_i} \quad \text{ou} \quad \varphi_{*i} = -\alpha_i \Phi_{*i}.$$

Cette onde réfléchie rencontre au point b à l'instant $i + \frac{n_b}{2}$ l'onde montante relative Φ_{*i+n_b} qui arrivera en A au temps $i + n_b$. Nous écrivons donc:

$$\boxed{B_{b, i + \frac{n_b}{2}} = \Phi_{*i+n_b} - \alpha_i \Phi_{*i}.} \quad (64)$$

Le calcul des charges ζ_{*k}^2 fournit la fonction Φ_{*i} que nous calculons au moyen de la relation connue:

$$\Phi_{*k} = \zeta_{*k}^2 - 1 + \alpha_{k-1} \Phi_{*k-1} \quad (40a)$$

que nous écrivons encore, en revenant à nos notations primitives (équations 37), c'est-à-dire en prenant $n_{II} = 1$ comme unité des temps et en remplaçant l'indice k par $i + n_{III}$ et $(k - 1)$ par i :

$$\zeta_{*i+n_{III}}^2 - 1 = \Phi_{*i+n_{III}} - \alpha_i \Phi_{*i}$$

En soustrayant cette équation de l'équation (64), ce qui est possible, puisque les deux équations sont exprimées en pourcents de H_0 , on obtient

$$B_{b, i + \frac{n_b}{2}} - (\zeta_{*i+n_{III}}^2 - 1) = \Phi_{*i+n_b} - \Phi_{*i+n_{III}}$$

ou:

$$\boxed{B_{b, i + \frac{n_b}{2}} = \zeta_{*i+n_{III}}^2 - 1 - (\Phi_{*i+n_{III}} - \Phi_{*i+n_b})} \quad (65)$$

équation analogue à l'équation (62), qu'il est aisé de résoudre par la même méthode.

c) Si nous considérons, enfin, une conduite de section constante, aboutissant à un bassin infiniment grand (cas d'Allievi), l'équation (33) nous donne au point A, situé à une distance L_1 du bassin :

$$\alpha_i = + \frac{\Phi_{i-n_1}}{\Phi_i}$$

et d'après (18):

$$\zeta_i^2 - 1 = \Phi_i (1 - \alpha_i) = \Phi_i \left(1 - \frac{\Phi_{i-n_1}}{\Phi_i} \right)$$

soit :

$$\boxed{\zeta_i^2 - 1 = \Phi_i - \Phi_{i-n_1} = \frac{H_0}{Y_0} (\Phi_{*i} - \Phi_{*i-n_1})} \quad (66)$$

Cette équation se déduit d'ailleurs directement des équations générales (2) et (4) appliquées au point A. Pour calculer la pression en A, on dessinera la courbe Φ_{*i} , puis on la décalera de n_1 . La différence entre les ordonnées des deux courbes nous donne la pression en A en pourcents de H_0 . Cette méthode est d'ailleurs connue depuis le premier mémoire d'Allievi.

7. Conclusions du chapitre I. B.

Nous sommes en mesure de calculer la variation des pressions en un point quelconque d'une conduite munie à sa base d'un obturateur O, et présentant une discontinuité A, en supposant que la conduite débouche d'un bassin infiniment grand. La discontinuité A peut consister, soit en une bifurcation (fig. 5 et 6), soit en une variation de section (fig. 7). Nous avons donc en mains une méthode de calcul qui nous permettra de résoudre un grand nombre de problèmes pratiques. Certains, cependant, nous échappent encore.

CHAPITRE C.

EXTENSION DE LA THÉORIE

Nous nous rendons aisément compte que, si la méthode exposée au chapitre I.B est générale, les formules développant α_i ne le sont pas. En pratique, nous aurons parfois à résoudre des cas plus complexes. L'exemple classique sera celui d'une conduite bifurquant en plusieurs conduites parallèles, munies chacune d'un obturateur indépendant. D'autre part, certains cas spéciaux (conduite fermée à l'une de ses extrémités; conduite à deux ou plusieurs discontinuités; etc.) présentent un intérêt particulier pour l'étude des chambres d'équilibre. Il convient d'examiner tous ces cas. C'est ce que nous ferons dans la première partie du présent chapitre. Pour calculer des exemples numériques, il est indispensable de pouvoir indiquer la valeur de la célérité «*a*» dans le cas général. Allievi n'a étudié la propagation des ondes que dans une conduite à parois minces. Il convient donc de placer dans ce chapitre l'étude de la propagation des ondes dans les conduites à parois épaisses et les galeries avec ou sans revêtement ou cuirasse.

1. *Extension de la théorie à d'autres systèmes de conduites.*

a) *Cas de deux conduites II et III, munies à leur base d'obturateurs indépendants.*

L'étude du cas représenté par la fig. 14 où les conduites II et III sont toutes deux munies d'obturateurs manœuvrés de

façon indépendante, mérite d'être au moins esquissée dans ses grandes lignes.

Nous avons défini pour la conduite III une fonction:

$$\alpha_i = -\frac{\varphi_i}{\Phi_i} = -\frac{\varphi_{*i}}{\Phi_{*i}} \quad (17)$$

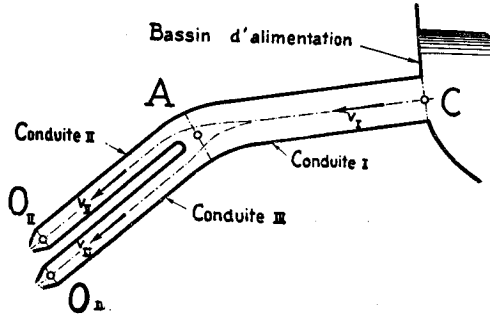


FIG. 14.

Nous définissons de façon analogue une fonction:

$$\beta_i = -\frac{\psi_i}{\Psi_i} = -\frac{\psi_{*i}}{\Psi_{*i}} \quad (17a)$$

caractérisant les conditions de réflexion au point d'intersection A, par rapport à la conduite II. Ψ_i et ψ_i sont les charges variables relatives de la conduite II, munie d'un obturateur.

Nous prendrons comme unité de temps la durée μ_{II} de la phase dans la conduite II que nous supposons être la plus petite. En pratique, on aura vraisemblablement: $\mu_{II} = \mu_{III}$.

Nous numérotons les périodes $i - 1, i, i + 1, \dots$. Ecrivons l'équation de continuité sous la forme:

$$\frac{v_{Ii}}{V_{I_0}} = \frac{v_{IIi}}{V_{II_0}} + \frac{v_{IIIi}}{V_{III_0}} \quad (67)$$

Les directions positives des vitesses sont alors celles indiquées sur la fig. 14 pour v_{II} , le sens positif ne coïncide donc plus avec le sens choisi au cours des chapitres précédents. Mais, pour le

cas qui nous occupe, ce sont bien les seules compatibles avec les équations d'Allievi, que nous donnons plus bas.

La condition de continuité des pressions au point A s'écrira, en valeurs relatives :

$$\zeta_i^2 - 1 = \Phi_i(1 - \alpha_i) = \Psi_i(1 - \beta_i). \quad (68)$$

aa) *Première phase de la conduite I.*

Nous écrivons les équations d'Allievi, pour la première phase de I. En reprenant l'équation (23), nous écrivons pour la conduite I, pour toute la durée de la première phase :

$$\frac{v_{I1}}{V_{I0}} = \frac{v_{I0}}{V_{I0}} - \frac{1}{2\rho_I}(\zeta_1^2 - 1). \quad (69)$$

Pour la conduite II, munie d'un obturateur, nous aurons par analogie avec l'équation (20) :

$$\frac{v_{II1}}{V_{II0}} = \frac{v_{II0}}{V_{II0}} - \frac{1}{2\rho_{II}}\Psi_1(1 + \beta_1). \quad (70)$$

Et pour la conduite III, de même :

$$\frac{v_{III1}}{V_{III0}} = \frac{v_{III0}}{V_{III0}} - \frac{1}{2\rho_{III}}\Phi_1(1 + \alpha_1). \quad (20)$$

Multiplions les équations (69), (70), (20), respectivement par + 1, - 1 et - 1, et additionnons. En tenant compte de l'équation de continuité des volumes (67), nous obtenons :

$$-\frac{1}{2\rho_I}(\zeta_1^2 - 1) + \frac{1}{2\rho_{II}}\Psi_1(1 + \beta_1) + \frac{1}{2\rho_{III}}\Phi_1(1 + \alpha_1) = 0.$$

En raison de l'équation des pressions (68), nous pouvons écrire cette équation de deux façons différentes, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2\rho_I}\Phi_1(1 - \alpha_1) + \frac{1}{2\rho_{II}}\Psi_1(1 + \beta_1) + \frac{1}{2\rho_{III}}\Phi_1(1 + \alpha_1) = 0 \\ \text{ou :} \\ -\frac{1}{2\rho_I}\Psi_1(1 - \beta_1) + \frac{1}{2\rho_{II}}\Psi_1(1 + \beta_1) + \frac{1}{2\rho_{III}}\Phi_1(1 + \alpha_1) = 0, \end{array} \right.$$

ou, en ordonnant par rapport à α_1 et β_1 :

$$\begin{cases} \Phi_1 \alpha_1 \left(\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{III}} \right) + \Psi_1 \frac{\beta_1}{\rho_{II}} + \Phi_1 \left(\frac{1}{\rho_{III}} - \frac{1}{\rho_I} \right) + \frac{\Psi_1}{\rho_{II}} = 0 \\ \Psi_1 \beta_1 \left(\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{III}} \right) + \Phi_1 \frac{\alpha_1}{\rho_{III}} + \Psi_1 \left(\frac{1}{\rho_{II}} - \frac{1}{\rho_I} \right) + \frac{\Phi_1}{\rho_{III}} = 0 \end{cases} \quad (71)$$

équations qui nous livrent α_1 et β_1 .

En multipliant la première des équations (71) par $\left(\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{III}} \right)$ et la deuxième par $-\frac{1}{\rho_{II}}$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \Phi_1 \alpha_1 \left[\left(\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{III}} \right) \left(\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{III}} \right) - \frac{1}{\rho_{II}} \cdot \frac{1}{\rho_{III}} \right] \\ + \Phi_1 \left[\left(\frac{1}{\rho_{III}} - \frac{1}{\rho_I} \right) \left(\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{III}} \right) - \frac{1}{\rho_{II}} \cdot \frac{1}{\rho_{III}} \right] \\ + \Psi_1 \left[\frac{1}{\rho_{II}} \left(\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{III}} \right) - \frac{1}{\rho_{II}} \left(\frac{1}{\rho_{II}} - \frac{1}{\rho_I} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned} \Phi_1 \alpha_1 \left[\frac{1}{\rho_I^2} + \frac{1}{\rho_I} \cdot \frac{1}{\rho_{II}} + \frac{1}{\rho_I} \cdot \frac{1}{\rho_{III}} \right] \\ + \Phi_1 \left[-\frac{1}{\rho_I^2} - \frac{1}{\rho_I} \cdot \frac{1}{\rho_{II}} + \frac{1}{\rho_I} \cdot \frac{1}{\rho_{III}} \right] + \Psi_1 \frac{2}{\rho_I \rho_{II}} = 0. \end{aligned}$$

Simplifions par $1/\rho_I$; cette équation nous livre α_1 :

$$\alpha_1 = \frac{\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{II}} - \frac{1}{\rho_{III}} - \frac{2}{\rho_{II}} \cdot \frac{\Psi_1}{\Phi_1}}{\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{II}} + \frac{1}{\rho_{III}}};$$

ou:

$$\boxed{\alpha_1 = r_{III} - s_{II} \frac{\Psi_1}{\Phi_1}} \quad (72)$$

Cette formule exprime de nouveau que la loi de superposition

des ondes (venant des obturateurs II et III) est valable. On trouvera de même en permutant :

$$\beta_1 = r_{II} - s_{III} \frac{\Phi_1}{\Psi_1} \quad (72a)$$

En remarquant que $s_{II} = 1 - r_{II}$ et $s_{III} = 1 - r_{III}$, on vérifie immédiatement que l'équation des pressions (68) est satisfaite. En effet, si :

$$\Phi_1(1 - \alpha_1) = \Psi_1(1 - \beta_1),$$

on a :

$$\Phi_1(1 - r_{III}) + \Psi_1 s_{II} = \Psi_1(1 - r_{II}) + \Phi_1 s_{III},$$

identité qui est vérifiée quels que soient Φ_1 et Ψ_1 .

On vérifiera également que pour $\Psi_1 = 0$, on retrouve $\alpha_1 = r_{III}$ relation connue des chapitres précédents.

Supposons maintenant que la surcharge Φ_1 , arrivant en A à un instant t' de la 1^{re} phase et provenant d'une manœuvre de l'obturateur O_{III} , soit égale à la surcharge Ψ_1 , qui arrive en A au même instant, mais qui est engendrée par l'obturateur de la conduite II. Ce cas se présenterait, par exemple, lorsque nous aurions affaire à deux conduites II et III identiques, dont les manœuvres de fermeture seraient synchrones.

En posant $\Phi_1 = \Psi_1$, nous obtiendrons alors :

$$\begin{aligned} \alpha_1 = r_{III} - s_{II} &= \frac{1/\rho_I + 1/\rho_{II} - 1/\rho_{III} - 2/\rho_{II}}{1/\rho_I + 1/\rho_{II} + 1/\rho_{III}} \\ &= - \frac{1/\rho_{II} + 1/\rho_{III} - 1/\rho_I}{1/\rho_I + 1/\rho_{II} + 1/\rho_{III}} = - r_I. \end{aligned}$$

On trouve de même :

$$\beta_1 = - r_I \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \beta_1$$

d'où :

$$\boxed{\zeta_1^2 - 1 = \Phi_1(1 + r_I)} \quad (73)$$

Considérons une conduite unique de section $S' = S_{II} + S_{III}$ et soit $Q'_0 = Q_{0,II} + Q_{0,III}$ son débit de régime. Supposons que

la vitesse v' et la célérité a' de cette conduite unique soient les mêmes que pour les conduites II et III, c'est-à-dire que :

$$v' = \frac{Q'_0}{S'} = \frac{Q_{0II}}{S_{II}} = \frac{Q_{0III}}{S_{III}}$$

et :

$$a' = a_{II} = a_{III} .$$

Dans ce cas : $\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho_{II}} = \frac{1}{\rho_{III}}$. Au point de jonction de cette conduite et de la conduite I, il y a réflexion partielle et le coefficient de réflexion est donné par :

$$r' = \frac{1/\rho_I - 1/\rho'}{1/\rho_I + 1/\rho'} . \quad (26a)$$

D'où :

$$\boxed{\zeta_1^2 - 1 = \Phi(1 - r')} \quad (74)$$

En comparant les formules (73) et (74), on arrive au résultat remarquable que les conditions de pression au point A ne sont pas les mêmes si, au lieu de 2 conduites II et III, le débit s'écoule *par une seule conduite*, même si les vitesses, les célérités et la loi de fermeture sont par ailleurs identiques.

Considérons encore le cas où $\Phi_1 = -\Psi_1$ et où les conduites II et III étant identiques, $s_{II} = s_{III}$.

Alors :

$$\alpha_1 = r_{III} + s_{III} = 1 \quad \text{et} \quad \zeta_1^2 - 1 = 0 .$$

Ce cas produit les mêmes effets qu'une réflexion totale en A. La pression en A est nulle au cours de la première phase. On voit par là que des mouvements simultanés de fermeture à l'un des obturateurs, et d'ouverture à l'autre, compenseront, au moins partiellement, leurs effets (même si $\Phi_1 \neq -\Psi_1$). En pratique, le cas $\Phi_1 = -\Psi_1$ sera très rare, car nous savons que même si les mouvements d'ouverture et de fermeture s'effectuent en des temps identiques, les fonctions Φ et Ψ croîtront différemment.

Il est bien entendu que ces développements ne sont valables qu'au cours de la première phase de la conduite I.

b b) *Cas général: phase quelconque de la conduite I.*

Les équations (70) et (20) pour les conduites II et III sont générales et valables pour une phase quelconque. Nous écrivons donc:

$$\frac{v_{IIi}}{V_{II_0}} = \frac{v_{II_0}}{V_{II_0}} - \frac{1}{2\rho_{II}} \Psi_i (1 + \beta_i) \quad (70)$$

et:

$$\frac{v_{IIIi}}{V_{III_0}} = \frac{v_{III_0}}{V_{III_0}} - \frac{1}{2\rho_{III}} \Phi_i (1 + \alpha_i) . \quad (20)$$

Pour la conduite I, nous écrivons, comme au chapitre I.B.5 formule (53), en divisant par $2\rho_I$ et en ordonnant:

$$\frac{v_{Ii}}{V_{I_0}} = \frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} - \frac{1}{2\rho_I} \left[(\zeta_i^2 - 1) + 2(\zeta_{i-n_I}^2 - 1) + 2(\zeta_{i-2n_I}^2 - 1) + \dots + 2(\zeta_{i-pn_I}^2 - 1) \right] . \quad (53a)$$

En effectuant les mêmes opérations que sous *a.a*), on obtient, de façon analogue, les 2 équations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Psi_i}{2\rho_{II}} (1 + \beta_i) + \frac{\Phi_i}{2\rho_{III}} (1 + \alpha_i) - \frac{\Phi_i}{2\rho_I} (1 - \alpha_i) \\ \quad - \frac{1}{\rho_I} \left[\Phi_{i-n_I} (1 - \alpha_{i-n_I}) + \Phi_{i-2n_I} (1 - \alpha_{i-2n_I}) + \dots \right] = 0 \\ \\ \frac{\Psi_i}{2\rho_{II}} (1 + \beta_i) + \frac{\Phi_i}{2\rho_{III}} (1 + \alpha_i) - \frac{\Psi_i}{2\rho_I} (1 - \beta_i) \\ \quad - \frac{1}{\rho_I} \left[\Psi_{i-n_I} (1 - \beta_{i-n_I}) + \Psi_{i-2n_I} (1 - \beta_{i-2n_I}) + \dots \right] = 0 \end{array} \right.$$

ou, en ordonnant par rapport à α_i et β_i :

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_i \alpha_i \left(\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{III}} \right) + \frac{\Psi_i \beta_i}{\rho_{II}} &= \Phi_i \left(\frac{1}{\rho_I} - \frac{1}{\rho_{III}} \right) \\ &- \frac{\Psi_i}{\rho_{II}} + \frac{2}{\rho_I} \left[\Phi_{i-n_I} (1 - \alpha_{i-n_I}) + \Phi_{i-2n_I} (1 - \alpha_{i-2n_I}) \dots \right] \\ \Psi_i \beta_i \left(\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{II}} \right) + \frac{\Phi_i \alpha_i}{\rho_{III}} &= \Psi_i \left(\frac{1}{\rho_I} - \frac{1}{\rho_{II}} \right) \\ &- \frac{\Phi_i}{\rho_{III}} + \frac{2}{\rho_I} \left[\Psi_{i-n_I} (1 - \beta_{i-n_I}) + \Psi_{i-2n_I} (1 - \beta_{i-2n_I}) \dots \right] \end{aligned} \right. \quad (75)$$

On éliminera la valeur β_i en multipliant les 2 équations, respectivement par $\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{II}}$ et $-\frac{1}{\rho_{II}}$. En effectuant les mêmes opérations et simplifications que sous *a.a*), on obtient de même, après division par $\frac{1}{\rho_I}$:

$$\begin{aligned} \Phi_i \alpha_i \left(\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{II}} + \frac{1}{\rho_{III}} \right) &= \Phi_i \left(\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{II}} - \frac{1}{\rho_{III}} \right) - \Psi_i \frac{2}{\rho_{II}} \\ + 2 \left(\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{II}} \right) &\left[\Phi_{i-n_I} (1 - \alpha_{i-n_I}) + \Phi_{i-2n_I} (1 - \alpha_{i-2n_I}) \dots \right] \\ - \frac{2}{\rho_{II}} &\left[\Psi_{i-n_I} (1 - \beta_{i-n_I}) + \Psi_{i-2n_I} (1 - \beta_{i-2n_I}) + \dots \right] \end{aligned}$$

En remarquant que, d'après l'équation (68):

$$\Phi_{i-n_I} (1 - \alpha_{i-n_I}) = \Psi_{i-n_I} (1 - \beta_{i-n_I}) \text{ etc.,}$$

on simplifie et on obtient:

$$\begin{aligned} \Phi_i \alpha_i \left(\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{II}} + \frac{1}{\rho_{III}} \right) &= \Phi_i \left(\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{II}} - \frac{1}{\rho_{III}} \right) - \Psi_i \frac{2}{\rho_{II}} \\ + \frac{2}{\rho_I} &\left[\Phi_{i-n_I} (1 - \alpha_{i-n_I}) + \Phi_{i-2n_I} (1 - \alpha_{i-2n_I}) + \dots \right] \end{aligned}$$

ou encore :

$$\alpha_i = r_{III} - s_{II} \frac{\Psi_i}{\Phi_i} + s_I \left[(1 - \alpha_{i-n_I}) \frac{\Phi_{i-n_I}}{\Phi_i} + (1 - \alpha_{i-2n_I}) \frac{\Phi_{i-2n_I}}{\Phi_i} + \dots \right]$$

(76)

équation qui livre α_i par voie de récurrence.

On trouve, par raison de symétrie :

$$\beta_i = r_{II} - s_{III} \frac{\Phi_i}{\Psi_i} + s_I \left[(1 - \beta_{i-n_I}) \frac{\Psi_{i-n_I}}{\Psi_i} + (1 - \beta_{i-2n_I}) \frac{\Psi_{i-2n_I}}{\Psi_i} + \dots \right]$$

(76a)

On peut, soit utiliser directement les équations (76) et (76a), soit les développer.

A titre d'exemple, nous calculons α_i pour $i \leq 2n_I$.

$$\alpha_i = r_{III} - s_{II} \frac{\Psi_i}{\Phi_i} + s_I \left(1 - r_{III} + s_{II} \frac{\Psi_{i-n_I}}{\Phi_{i-n_I}} \right) \frac{\Phi_{i-n_I}}{\Phi_i};$$

ou, en simplifiant :

$$\alpha_i = r_{III} + s_I s_{III} \frac{\Phi_{i-n_I}}{\Phi_i} - s_{II} \frac{\Psi_i}{\Phi_i} + s_I s_{II} \frac{\Psi_{i-n_I}}{\Phi_i}$$

On obtient de même, pour $i \leq 3n_I$:

$$\alpha_i = r_{III} - s_{II} \frac{\Psi_i}{\Phi_i} + s_I \left[\left(1 - r_{III} - s_I s_{III} \frac{\Phi_{i-2n_I}}{\Phi_{i-n_I}} \right. \right. \\ \left. \left. + s_{II} \frac{\Psi_{i-n_I}}{\Phi_{i-n_I}} - s_I s_{II} \frac{\Psi_{i-2n_I}}{\Phi_{i-n_I}} \right) \frac{\Phi_{i-n_I}}{\Phi_i} + \left(1 - r_{III} + s_{II} \frac{\Psi_{i-2n_I}}{\Phi_{i-2n_I}} \right) \frac{\Phi_{i-2n_I}}{\Phi_i} \right];$$

ou, en effectuant toutes les opérations :

$$\alpha_i = r_{III} + s_I s_{III} \frac{\Phi_{i-n_I}}{\Phi_i} + s_I s_{III} r_I \frac{\Phi_{i-2n_I}}{\Phi_i} - s_{II} \frac{\Psi_i}{\Phi_i} + s_I s_{II} \frac{\Psi_{i-n_I}}{\Phi_i} + s_I s_{II} r_I \frac{\Psi_{i-2n_I}}{\Phi_i}$$

La loi de formation de la série α_i est évidente: $\Phi_i \alpha_i$ est constamment égal à la somme de deux séries qui représentent, l'une, la série des ondes $\Phi_i, \Phi_{i-n_I}, \Phi_{i-2n_I}, \dots$, l'autre, la série des ondes $\Psi_i, \Psi_{i-n_I}, \Psi_{i-2n_I}, \dots$ après réflexion.

Le terme général sera:

$$\alpha_i = r_{III} + s_I s_{III} \frac{\Phi_{i-n_I}}{\Phi_i} + s_I s_{III} r_I \frac{\Phi_{i-2n_I}}{\Phi_i} + s_I s_{III} r_I^2 \frac{\Phi_{i-3n_I}}{\Phi_i} + \dots$$

$$- s_{II} \frac{\Psi_i}{\Phi_i} + s_I s_{II} \frac{\Psi_{i-n_I}}{\Phi_i} + s_I s_{II} r_I \frac{\Psi_{i-2n_I}}{\Phi_i} + s_I s_{II} r_I^2 \frac{\Psi_{i-3n_I}}{\Phi_i} + \dots \quad (77)$$

Cette dernière équation résout entièrement le problème. Il est intéressant de rechercher la limite de la série $\bar{\alpha}_i$. On a:

$$\lim_{i=\infty} \bar{\alpha}_i = r_{III} + s_I s_{III} + s_I s_{III} r_I + \dots$$

$$- s_{II} + s_I s_{II} + s_I s_{II} r_I + \dots$$

$$\lim_{i=\infty} \bar{\alpha}_i = r_{III} + s_I s_{III} (1 + r_I + r_I^2 + \dots)$$

$$- s_{II} + s_I s_{II} (1 + r_I + r_I^2 + \dots)$$

$$\lim_{i=\infty} \bar{\alpha}_i = r_{III} + \frac{s_I s_{III}}{1-r_I} - s_{II} + \frac{s_I s_{II}}{1-r_I} = 1.$$

La limite de la série $\bar{\alpha}_i$ tend vers 1, comme pour les cas examinés au chapitre précédent.

Le cas pratique le plus intéressant à étudier est certainement celui de la manœuvre synchrone des deux obturateurs. Pour simplifier notre étude, nous supposons les deux conduites II et III symétriques, c'est-à-dire $s_{II} = s_{III}$ et $r_{II} = r_{III}$. Par suite du synchronisme des mouvements, on aura de plus:

$$\Phi_i = \Psi_i ,$$

et l'équation (77) se réduit à :

$$\alpha_i = r_{III} - s_{III} + 2s_I s_{III} \frac{\Phi_{i-n_I}}{\Phi_i} + 2s_I s_{III} r_I \frac{\Phi_{i-2n_I}}{\Phi_i} + 2s_I s_{III} r_I^2 \frac{\Phi_{i-3n_I}}{\Phi_i} + \dots \quad (78)$$

La comparaison entre cette équation et l'équation fondamentale (33) ne peut se faire que sur des valeurs numériques se rapportant à un problème bien défini, car les coefficients r_{III} et s_{III} ne seront en général pas les mêmes, selon qu'il y a une ou deux conduites.

La démonstration que nous avons entreprise pour le cas de deux conduites munies chacune d'un obturateur peut être étendue sans autres difficultés au cas de n conduites avec obturateur et de m conduites à réflexion totale. Il suffit d'écrire correctement l'équation de continuité des volumes en choisissant convenablement les signes des vitesses, et d'appliquer ensuite l'équation de continuité des pressions. Nous pouvons donc nous abstenir de donner cette démonstration: on voit immédiatement que le procédé de calcul est général et que les résultats seront analogues à ceux que nous venons de trouver. Dans les cas complexes, on aura intérêt à ne pas développer α_i , mais à l'écrire sous une forme analogue à l'équation (76).

b) *Cas ou la conduite II est fermée à son extrémité inférieure.*

Pour étudier ce cas, nous nous reportons au chapitre I.B.5 et aux développements qui ont conduit à l'équation (60). Nous remarquons que la réflexion en D sur une surface fermée est totale, mais s'effectue sans changer le signe des ondes. Il suffit donc de changer, dans l'équation (60), le signe de tous les termes où le nombre des réflexions en D est impair. On obtient sans autre:

$$\alpha_i = r_{III} - s_{II} s_{III} \frac{\Phi_{i-1}}{\Phi_i} + s_{II} s_{III} r_{II} \frac{\Phi_{i-2}}{\Phi_i} - s_{II} s_{III} r_{II}^2 \frac{\Phi_{i-3}}{\Phi_i} + \dots + (-1)^{i-1} s_{II} s_{III} r_{II}^{i-2} \frac{\Phi_1}{\Phi_i} \quad (79)$$

$$\begin{aligned}
 &+ s_I s_{III} \frac{\Phi_{i-n_I}}{\Phi_i} + 2s_I s_{II} s_{III} \frac{\Phi_{i-n_I-1}}{\Phi_i} + s_I s_{II} s_{III} (s_{II} - 2r_{II}) \frac{\Phi_{i-n_I-2}}{\Phi_i} \dots \\
 &+ s_I s_{III} r_I \frac{\Phi_{i-2n_I}}{\Phi_i} - s_I s_{II} s_{III} (s_I - 2r_I) \frac{\Phi_{i-2n_I-1}}{\Phi_i} + \dots
 \end{aligned}$$

Nous écrivons encore le terme général:

$$\begin{aligned}
 &(-1)^{p-1} s_I s_{II} s_{III} \left\{ r_I^{q-2} r_{II}^{p-2} [(q-1)s_I - 2r_I] \right. \\
 &+ (p-2) s_{II} r_{II}^{p-3} [r_I^{q-1} - 2(q-1)s_I r_I^{q-2}] \\
 &\left. + \frac{(q-1)!}{2!(q-3)!} s_I^2 r_I^{q-3} \right\} + \dots \left\{ \frac{\Phi_{i-qn_I-(p-1)}}{\Phi_i} \right.
 \end{aligned} \tag{80}$$

c) *Cas où la conduite possède 2 discontinuités successives.*

Nous allons traiter le cas où une même conduite présente deux discontinuités que l'onde, venant de O, doit franchir

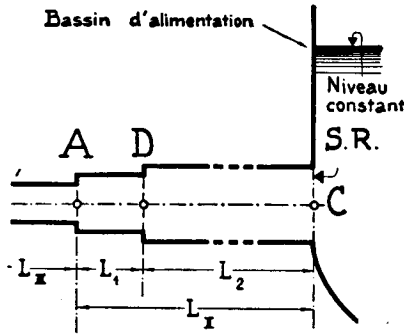


FIG. 15. — Cas de deux discontinuités successives.

successivement avant de se réfléchir sur la surface de réflexion S.R. Les figures 15 et 16 représentent deux cas fréquents en pratique. Sur la figure 15, l'onde rencontre, sur la conduite

II, deux variations de section, en A et D. Dans le cas de la figure 16, elle doit franchir une bifurcation en A et une variation de section en D. Dans ce dernier cas, L_I est supposé très grand (première phase de I).

Nous savons, par ailleurs, que, si les coefficients de réflexion et de transmission sont correctement définis en fonction des caractéristiques ρ de la conduite, le calcul sera le même pour l'un et l'autre cas.

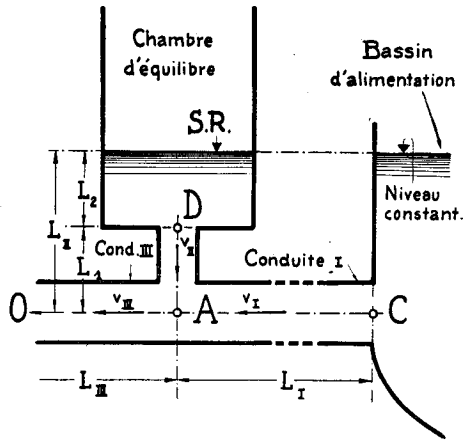


FIG. 16. — Cas d'une bifurcation suivie d'une variation de section.

Nous définissons les coefficients de réflexion et de transmission suivants :

	en A	en D
Si l'onde principale, venant de III, se dirige vers S.R., on a :		
Coefficient de réflexion	r_{III}	r_1
Coefficient de transmission	s_{III}	s_1
Si l'onde principale, réfléchiée par S. R., revient vers III, on a :		
Coefficient de réflexion	r_{II}	r_2
Coefficient de transmission	s_{II}	s_2

Les coefficients s et r sont donnés, comme toujours, soit par les formules (26), soit par (26a), et sont liés par la relation $s + r = 1$.

Nous appelons L_1 et L_2 les longueurs AD et D-S.R. On a : $L_{II} = L_1 + L_2 = A - S.R.$

$$\text{Définissons: } \mu_1 = \frac{2L_1}{a_1}, \mu_2 = \frac{2L_2}{a_2} \text{ et } \mu_{II} = \mu_1 + \mu_2$$

Les périodes μ_1 , μ_2 et μ_{II} sont exprimées en secondes; n_1 , n_2 et $n_{II} = n_1 + n_2$ représentent les périodes exprimées en fonction du temps relatif. On fera bien de choisir comme unité de temps le battement dans le plus petit des secteurs L_1 ou L_2 .

Pour fixer les idées, nous supposerons que nous nous trouvons dans le cas de la fig. 16, c'est-à-dire que la discontinuité au point A est une bifurcation.

Nous choisissons comme origine des temps l'arrivée de la première onde $F_{III_0} = Y_0 \Phi_0$ au point A. Soit, par exemple, n_1 la plus petite des phases ($n_1 < n_2$). Nous la prendrons comme unité de temps; c'est-à-dire: $n_1 = 1$.

Considérons une onde relative $\Phi_i = \frac{y_i}{Y_0}$ arrivant en A au temps i . Elle se réfléchit partiellement, et nous avons comme toujours:

$$\alpha_i = - \frac{\varphi_i}{\Phi_i}, \quad (17)$$

φ_i représentant la somme des ondes traversant au temps i la discontinuité A en direction de O. Tout le problème consiste à calculer α_i .

L'onde Φ_i bifurque en A. Soit Ψ_i l'onde relative qui se détache en ce même instant de A vers la conduite II et Ξ_i l'onde relative qui pénètre dans la conduite I. Nous définissons une fonction s_{III_i} , telle qu'à chaque instant:

$$\Psi_i = \Xi_i = s_{III_i} \Phi_i. \quad (81)$$

Ψ_i et Ξ_i sont exprimés en fonction de Y_0 , de même façon que Φ_i .

L'onde relative Ψ_i arrive, à l'instant $i + \frac{n_1}{2}$, au deuxième point de discontinuité D, où elle est partiellement réfléchie. Nous désignons par:

$$\psi_{i+n_1} = -\gamma_i \Psi_i, \quad (82)$$

l'onde réfléchie qui revient en A au temps $i + n_1$. Dans cette relation, γ_i est évidemment une fonction analogue à la valeur calculée aux chapitres précédents. Nous pouvons même écrire γ_i directement, en constatant que, puisque la réflexion en S.R est totale, la fonction γ_i est donnée par la série (33), que nous écrivons:

$$\gamma_i \Psi_i = r_1 \Psi_i + s_1 s_2 \Psi_{i-n_2} + s_1 s_2 r_2 \Psi_{i-2n_2} + s_1 s_2 r_2^2 \Psi_{i-3n_2} + \dots$$

ou, en introduisant la définition (81):

$$\gamma_i s_{III_i} \Phi_i = r_1 s_{III_i} \Phi_i + s_1 s_2 s_{III_{i-n_2}} \Phi_{i-n_2} + s_1 s_2 r_2 s_{III_{i-2n_2}} \Phi_{i-2n_2} + \dots$$

(83)

Les conditions de réflexion au point D s'expriment donc au moyen de la fonction Φ_i , que nous savons calculer, et d'une fonction s_{III_i} , définie par la relation (81).

Pour exprimer les conditions de réflexion au point A, nous nous servons, comme de coutume, des deux équations de continuité. L'équation des pressions au point A nous donne:

$$\Phi_i (1 - \alpha_i) = \zeta_i^2 - 1,$$

ou:

$$\Phi_i (1 - \alpha_i) = \Psi_i + \psi_i = \Psi_i - \gamma_{i-n_1} \Psi_{i-n_1}. \quad (84)$$

Nous utiliserons l'équation de continuité des volumes:

$$\frac{v_{I_i}}{V_{I_0}} + \frac{v_{II_i}}{V_{II_0}} = \frac{v_{III_i}}{V_{III_0}}, \quad (19)$$

comme nous l'avons fait au chapitre I.B.3.

Puisque nous nous trouvons, par hypothèse, dans la première phase de la conduite I, nous écrivons :

$$\frac{v_{I_i}}{V_{I_0}} = \frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} - \frac{1}{2\rho_I} \Phi_i (1 - \alpha_i) . \quad (23b)$$

Les équations générales de la conduite II deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_i = y_0 + F_{II_i} + f_{II_i} = y_0 + Y_0 (\Psi_i - \gamma_{i-n_1} \Psi_{i-n_1}) \\ v_{II_i} = v_{II_0} - \frac{g}{a_{II}} [F_{II_i} - f_{II_i}] = v_{II_0} - \frac{g Y_0}{a_{II}} (\Psi_i + \gamma_{i-n_1} \Psi_{i-n_1}) . \end{array} \right. \quad (85)$$

En éliminant Ψ_i , nous en tirons :

$$\frac{v_{II_i}}{V_{II_0}} = \frac{v_{II_0}}{V_{II_0}} - \frac{1}{2\rho_{II}} [2\gamma_{i-n_1} \Psi_{i-n_1} + \zeta_i' - 1] ,$$

ou :

$$\frac{v_{II_i}}{V_{II_0}} = \frac{v_{II_0}}{V_{II_0}} - \frac{1}{2\rho_{II}} \Phi_i \left[2\gamma_{i-n_1} s_{III_{i-n_1}} \frac{\Phi_{i-n_1}}{\Phi_i} + (1 - \alpha_i) \right] . \quad (86)$$

L'équation de la conduite III reste toujours la même, soit :

$$\frac{v_{III_i}}{V_{III_0}} = \frac{v_{III_0}}{V_{III_0}} - \frac{1}{2\rho_{III}} \Phi_i (1 + \alpha_i) . \quad (20)$$

Procédons comme nous l'avons fait au chapitre I.B.3 et posons :

$$\alpha_i = r_{III} + q_i \frac{\Phi_{i-n_1}}{\Phi_i} . \quad (27)$$

Remplaçons α_i dans (20), (23b) et (86) ; multiplions respectivement ces équations par $+1$, -1 et -1 et additionnons ; nous obtenons, en tenant compte de (19) :

$$\frac{1 - r_{III} - q_i \frac{\Phi_{i-n_1}}{\Phi_i}}{\rho_I} + \frac{2\gamma_{i-n_1} s_{III_{i-n_1}} \frac{\Phi_{i-n_1}}{\Phi_i}}{\rho_{II}} + \frac{1 - r_{III} - q_i \frac{\Phi_{i-n_1}}{\Phi_i}}{\rho_{II}} - \frac{1 + r_{III} + q_i \frac{\Phi_{i-n_1}}{\Phi_i}}{\rho_{III}} = 0 .$$

Nous en tirons sans difficulté, en tenant compte de la relation (25):

$$q_i = \frac{2/\rho_{II}}{1/\rho_I + 1/\rho_{II} + 1/\rho_{III}} \gamma_{i-n_1} \cdot s_{III i-n_1} = \gamma_{i-n_1} \cdot s_{III i-n_1} s_{II}.$$

En introduisant cette valeur de q_i dans (27), nous obtenons pour α_i la formule de récurrence:

$$\alpha_i = r_{III} + \gamma_{i-n_1} \cdot s_{III i-n_1} s_{II} \frac{\Phi_{i-n_1}}{\Phi_i}. \quad (87)$$

Calculons $s_{III i-n_1}$.

Les équations (84) et (85) nous livrent:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{II_i}}{V_{II_0}} &= \frac{\rho_{II_0}}{V_{II_0}} - \frac{1}{2\rho_{II}} [2\gamma_{i-n_1} \Psi_{i-n_1} + \zeta_i^2 - 1] \\ &= \frac{\rho_{II_0}}{V_{II_0}} - \frac{1}{2\rho_{II}} [2\Psi_i - (\zeta_i^2 - 1)]. \end{aligned}$$

On en tire:

$$2\Psi_i - (\zeta_i^2 - 1) = 2\gamma_{i-n_1} \Psi_{i-n_1} + (\zeta_i^2 - 1)$$

d'où:

$$s_{III_i} \Phi_i = \gamma_{i-n_1} s_{III i-n_1} \Phi_{i-n_1} + \Phi_i (1 - \alpha_i).$$

Or, α_i est donné par (87). On obtient donc:

$$s_{III_i} = s_{III} + \gamma_{i-n_1} s_{III i-n_1} r_{II} \frac{\Phi_{i-n_1}}{\Phi_i}. \quad (88)^1$$

¹ Les équations (87) et (88) sont générales. Dans le cas où nous aurons plus de deux discontinuités successives, et où il serait presque impossible de développer pour α_i une formule explicite, nous écrirons pour chaque discontinuité deux équations du type (87) et (88), avec les modifications voulues, et nous calculerons α_i par voie de récurrence, sans chercher de formule explicite.

Nous pouvons transformer l'équation (83) en tenant compte de (88). Nous obtenons:

$$\begin{aligned} \gamma_i s_{III_i} &= r_1 \left(s_{III} + \gamma_{i-n_1} s_{III_{i-n_1}} r_{II} \frac{\Phi_{i-n_1}}{\Phi_i} \right) \\ &+ s_1 s_2 \left(s_{III} + \gamma_{i-n_1-n_2} s_{III_{i-n_1-n_2}} r_{II} \frac{\Phi_{i-n_1-n_2}}{\Phi_{i-n_2}} \right) \frac{\Phi_{i-n_2}}{\Phi_i} \\ &+ s_1 s_2 r_2 \left(s_{III} + \gamma_{i-n_1-2n_2} s_{III_{i-n_1-2n_2}} r_{II} \frac{\Phi_{i-n_1-2n_2}}{\Phi_{i-2n_2}} \right) \frac{\Phi_{i-2n_2}}{\Phi_i} + \dots \end{aligned}$$

ou encore:

$$\begin{aligned} \gamma_i s_{III_i} &= s_{III} r_1 + r_{II} r_1 \gamma_{i-n_1} s_{III_{i-n_1}} \frac{\Phi_{i-n_1}}{\Phi_i} \\ &+ s_1 s_2 r_{II} \gamma_{i-n_1-n_2} s_{III_{i-n_1-n_2}} \frac{\Phi_{i-n_1-n_2}}{\Phi_i} \\ &+ s_1 s_2 r_{II} r_2 \gamma_{i-n_1-2n_2} s_{III_{i-n_1-2n_2}} \frac{\Phi_{i-n_1-2n_2}}{\Phi_i} \\ &+ s_1 s_2 r_{II} r_2^2 \gamma_{i-n_1-3n_2} s_{III_{i-n_1-3n_2}} \frac{\Phi_{i-n_1-3n_2}}{\Phi_i} + \dots \\ &+ s_{III} s_1 s_2 \left[\frac{\Phi_{i-n_2}}{\Phi_i} + r_2 \frac{\Phi_{i-2n_2}}{\Phi_i} + r_2^2 \frac{\Phi_{i-3n_2}}{\Phi_i} + \dots \right]. \end{aligned} \tag{89}$$

Cette équation (89) permet de calculer $\gamma_i s_{III_i}$ par récurrence, et, par le fait α_i , en se servant de la relation (87).

A titre d'exemple, nous allons calculer les premiers développements de α_i . Puisque $n_1 = 1$, nous donnons à i successivement les valeurs 1, 2, 3, ... n_2 , $n_2 + 1$, $n_2 + 2$... $2n_2$, $2n_2 + 1$, ... etc. Nous obtenons:

Pour $i = 1$:

$$\alpha_1 = r_{III} ;$$

$$s_{III_1} = s_{III} ; \quad \gamma_1 s_{III_1} = r_1 s_{III} .$$

Pour $i = 2$:

$$\alpha_2 = r_{III} + s_{II} s_{III} r_1 \frac{\Phi_1}{\Phi_2} ;$$

$$\gamma_2 s_{III_2} = s_{III} r_1 + s_{III} r_{II} r_1^2 \frac{\Phi_1}{\Phi_2} .$$

Pour $i = 3$:

$$\alpha_3 = r_{III} + s_{II} s_{III} r_1 \frac{\Phi_2}{\Phi_3} + s_{II} s_{III} r_{II} r_1^2 \frac{\Phi_1}{\Phi_3} ;$$

$$\gamma_3 s_{III_3} = s_{III} r_1 + s_{III} r_{II} r_1^2 \frac{\Phi_2}{\Phi_3} + s_{III} r_{II}^2 r_1^3 \frac{\Phi_1}{\Phi_3} .$$

.....

Etc., etc.,

Il est aisé de développer les deux séries, tant que $i \leq n_2$. On trouve:

pour $i = n_2$:

$$\alpha_{n_2} = r_{III} + s_{II} s_{III} r_1 \frac{\Phi_{n_2-1}}{\Phi_{n_2}} + s_{II} s_{III} r_{II} r_1^2 \frac{\Phi_{n_2-2}}{\Phi_{n_2}} + \dots + s_{II} s_{III} r_{II}^{n_2-2} r_1^{n_2-1} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_2}}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{n_2} s_{III_{n_2}} &= s_{III} r_1 + s_{III} r_{II} r_1^2 \frac{\Phi_{n_2-1}}{\Phi_{n_2}} + s_{III} r_{II}^2 r_1^3 \frac{\Phi_{n_2-2}}{\Phi_{n_2}} + \dots \\ &+ s_{III} r_{II}^{n_2-1} r_1^{n_2} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_2}} . \end{aligned}$$

Pour $i = n_2 + 1 = n_{II}$:

$$\alpha_{n_2+1} = r_{III} + s_{II} s_{III} r_1 \frac{\Phi_{n_2}}{\Phi_{n_2+1}} + s_{II} s_{III} r_{II} r_1^2 \frac{\Phi_{n_2-1}}{\Phi_{n_2+1}} + \dots + s_{II} s_{III} r_{II}^{n_2-1} r_1^{n_2} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_2+1}}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{n_2+1} s_{III_{n_2+1}} &= s_{III} r_1 + s_{III} r_{II} r_1^2 \frac{\Phi_{n_2}}{\Phi_{n_2+1}} + s_{III} r_{II}^2 r_1^3 \frac{\Phi_{n_2-1}}{\Phi_{n_2+1}} + \dots \\ &+ s_{III} r_{II}^{n_2} r_1^{n_2+1} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_2+1}} + s_{III} s_1 s_2 \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_2+1}} . \end{aligned}$$

Pour $i = n_2 + 2$:

$$\alpha_{n_2+2} = r_{III} + s_{II} s_{III} r_1 \frac{\Phi_{n_2+1}}{\Phi_{n_2+2}} + s_{II} s_{III} r_{II} r_1^2 \frac{\Phi_{n_2}}{\Phi_{n_2+2}} + \dots$$

$$+ s_{II} s_{III} r_{II}^{n_2} r_1^{n_2+1} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_2+2}} + s_{II} s_{III} s_1 s_2 \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_2+2}}$$

$$\gamma_{n_2+2} s_{III n_2+2} = s_{III} r_1 + s_{III} r_{II} r_1^2 \frac{\Phi_{n_2+1}}{\Phi_{n_2+2}} + s_{III} r_{II}^2 r_1^3 \frac{\Phi_{n_2}}{\Phi_{n_2+2}} + \dots$$

$$+ s_{III} r_{II}^{n_2+1} r_1^{n_2+2} \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_2+2}} + s_{III} s_1 s_2 \frac{\Phi_2}{\Phi_{n_2+2}} + 2s_{III} s_1 s_2 r_{II} r_1 \frac{\Phi_1}{\Phi_{n_2+2}}$$

Etc., etc.

On reconnaît aisément la loi de formation de ces séries, et l'on aura pour:

$$i = 2n_2 + 1 = n_{II} + n_2.$$

$$\alpha_{2n_2+1} = r_{III} + s_{II} s_{III} r_1 \frac{\Phi_{2n_2}}{\Phi_{2n_2+1}} + s_{II} s_{III} r_{II} r_1^2 \frac{\Phi_{2n_2-1}}{\Phi_{2n_2+1}} + \dots$$

$$+ s_{II} s_{III} r_{II}^{2n_2-1} r_1^{2n_2} \frac{\Phi_1}{\Phi_{2n_2+1}} + s_{II} s_{III} s_1 s_2 \frac{\Phi_{n_2}}{\Phi_{2n_2+1}}$$

$$+ 2s_{II} s_{III} s_1 s_2 r_{II} r_1 \frac{\Phi_{n_2-1}}{\Phi_{2n_2+1}} + \dots + n_2 s_{II} s_{III} s_1 s_2 r_{II} r_1^{n_2-1} \frac{\Phi_1}{\Phi_{2n_2+1}}$$

$$\gamma_{2n_2+1} s_{III 2n_2+1} = s_{III} r_1 + s_{III} r_{II} r_1^2 \frac{\Phi_{2n_2}}{\Phi_{2n_2+1}} + s_{III} r_{II}^2 r_1^3 \frac{\Phi_{2n_2-1}}{\Phi_{2n_2+1}} + \dots$$

$$+ s_{III} r_{II}^{2n_2} r_1^{2n_2+1} \frac{\Phi_1}{\Phi_{2n_2+1}} + s_{III} s_1 s_2 \frac{\Phi_{n_2+1}}{\Phi_{2n_2+1}} + 2s_{III} s_1 s_2 r_{II} r_1 \frac{\Phi_{n_2}}{\Phi_{2n_2+1}} + \dots$$

$$+ (n_2 + 1) s_{III} s_1 s_2 r_{II} r_1^{n_2} \frac{\Phi_1}{\Phi_{2n_2+1}} + s_{III} s_1 s_2 r_2 \frac{\Phi_1}{\Phi_{2n_2+1}}$$

.....

etc., etc.

Pour éviter de longs développements, nous nous contentons de donner la formule générale permettant de calculer α_i , pour $i = qn_2 + p$, q et p étant des nombres entiers quelconques. On trouve :

$$\alpha_{qn_2+p} \Phi_{qn_2+p} = \tag{90}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ r_{III} \Phi_{qn_2+p} + s_{II} s_{III} r_1 [\Phi_{qn_2+p-1} + r_{II} r_1 \Phi_{qn_2+p-2} \\ &\quad + \dots \frac{\overline{qn_2+p-2}}{r_{II} r_1} \Phi_1] \\ &+ s_{II} s_{III} s_1 s_2 \left[\Phi_{(q-1)n_2+p-1} + 2r_{II} r_1 \Phi_{(q-1)n_2+p-2} + 3 \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{[(q-1)n_2+p-1]!}{[(q-1)n_2+p-2]!} \frac{\overline{(q-1)n_2+p-2}}{r_{II} r_1} \Phi_1 \right] \\ &+ s_{II} s_{III} s_1 s_2 r_2 \left[\Phi_{(q-2)n_2+p-1} + 2r_{II} r_1 \Phi_{(q-2)n_2+p-2} + 3 \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{[(q-2)n_2+p-1]!}{[(q-2)n_2+p-2]!} \frac{\overline{(q-2)n_2+p-2}}{r_{II} r_1} \Phi_1 \right] \\ &+ s_{II} s_{III} s_1 s_2 r_2^2 \left[\Phi_{(q-3)n_2+p-1} + 2r_{II} r_1 \Phi_{(q-3)n_2+p-2} + 3 \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{[(q-3)n_2+p-1]!}{[(q-3)n_2+p-2]!} \frac{\overline{(q-3)n_2+p-2}}{r_{II} r_1} \Phi_1 \right] + \\ &\dots \\ &\dots \\ &+ s_{II} s_{III} s_1 s_2 r_2^{q-1} \left[\Phi_{p-1} + 2r_{II} r_1 \Phi_{p-2} + 3r_{II}^2 r_1 \Phi_{p-3} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(p-1)!}{(p-2)!} \frac{\overline{p-2}}{r_{II} r_1} \Phi_1 \right] \\ &+ s_{II} s_{III} s_1 s_2 r_{II}^2 \left[\Phi_{(q-2)n_2+p-2} + 3r_{II} r_1 \Phi_{(q-2)n_2+p-3} + 6 \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{[(q-2)n_2+p-1]!}{2! [(q-2)n_2+p-3]!} \frac{\overline{(q-2)n_2+p-3}}{r_{II} r_1} \Phi_1 \right] \end{aligned} \right\}$$

$$+ 2s_{II}s_{III}\overline{s_1s_2}^2r_{II}r_2\left[\Phi_{(q-3)n_2+p-2}+3r_{II}r_1\Phi_{(q-3)n_2+p-3}+6\dots\right. \\ \left.+\frac{[(q-3)n_2+p-1]!}{2![(q-3)n_2+p-3]!}\overline{r_{II}r_1}^{-(q-3)n_2+p-3}\Phi_1\right]$$

$$+ 3s_{II}s_{III}\overline{s_1s_2}^2r_{II}r_2^2\left[\Phi_{(q-4)n_2+p-2}+3r_{II}r_1\Phi_{(q-4)n_2+p-3}+6\dots\right. \\ \left.+\frac{[(q-4)n_2+p-1]!}{2![(q-4)n_2+p-3]!}\overline{r_{II}r_1}^{-(q-4)n_2+p-3}\Phi_1\right]$$

$$+ 4s_{II}s_{III}\overline{s_1s_2}^2r_{II}r_2^3\left[\Phi_{(q-5)n_2+p-2}+3r_{II}r_1\Phi_{(q-5)n_2+p-3}+6\dots\right. \\ \left.+\frac{[(q-5)n_2+p-1]!}{2![(q-5)n_2+p-3]!}\overline{r_{II}r_1}^{-(q-5)n_2+p-3}\Phi_1\right]$$

$$\dots \\ \dots \\ + \frac{(q-1)!}{(q-2)!}s_{II}s_{III}\overline{s_1s_2}^2r_{II}r_2^{q-2}\left[\Phi_{p-2}+3r_{II}r_1\Phi_{p-3}+6\overline{r_{II}r_1}^2\Phi_{p-4}\dots\right. \\ \left.+\frac{(p-1)!}{2!(p-3)!}\overline{r_{II}r_1}^{p-3}\Phi_1\right]$$

$$+ s_{II}s_{III}\overline{s_1s_2}^3r_{II}^2\left[\Phi_{(q-3)n_2+p-3}+4r_{II}r_1\Phi_{(q-3)n_2+p-4}+10\dots\right. \\ \left.+\frac{[(q-3)n_2+p-1]!}{3![(q-3)n_2+p-4]!}\overline{r_{II}r_1}^{-(q-3)n_2+p-4}\Phi_1\right]$$

$$+ 3s_{II}s_{III}\overline{s_1s_2}^3r_{II}^2r_2\left[\Phi_{(q-4)n_2+p-3}+4r_{II}r_1\Phi_{(q-4)n_2+p-4}+10\dots\right. \\ \left.+\frac{[(q-4)n_2+p-1]!}{3![(q-4)n_2+p-4]!}\overline{r_{II}r_1}^{-(q-4)n_2+p-4}\Phi_1\right]$$

$$+ 6s_{II}s_{III}\overline{s_1s_2}^3r_{II}^2r_2^2\left[\Phi_{(q-5)n_2+p-3}+4r_{II}r_1\Phi_{(q-5)n_2+p-4}+10\dots\right. \\ \left.+\frac{[(q-5)n_2+p-1]!}{3![(q-5)n_2+p-4]!}\overline{r_{II}r_1}^{-(q-5)n_2+p-4}\Phi_1\right]$$

Nous aurons l'occasion de revenir sur la formule (90) dans la II^e partie de notre étude.

Etudions enfin la $\lim_{i=\infty} \bar{\alpha}_i$, $\bar{\alpha}_i$ représentant la somme de tous les coefficients constants qui figurent dans la série α_i . L'importance de cette limite se révélera au cours de l'étude des chambres d'équilibre.

Nous devons faire précéder notre étude de quelques considérations d'ordre mathématique, qui nous familiariseront avec les propriétés de certaines séries. Nous remarquons que les diverses séries figurant dans la formule (90), soit dans les lignes horizontales, soit dans les colonnes verticales, sont toutes de la forme de l'une des séries du tableau suivant :

.....

N ^o	0	1	2	3	4	5	6	7	...	m-1	m
X ₁	1	+ a	+ a ²	+ a ³	+ a ⁴	+ a ⁵	+ a ⁶	+ a ⁷	+ ...		a ^m
X ₂	1	+ 2a	+ 3a ²	+ 4a ³	+ 5a ⁴	+ 6a ⁵	+ 7a ⁶	+ 8a ⁷	+ ...	$\frac{(m+1)!}{m!}$	a ^m
X ₃	1	+ 3a	+ 6a ²	+ 10a ³	+ 15a ⁴	+ 21a ⁵	+ 28a ⁶	+ 36a ⁷	+ ...	$\frac{(m+2)!}{2! m!}$	a ^m
X ₄	1	+ 4a	+ 10a ²	+ 20a ³	+ 35a ⁴	+ 56a ⁵	+ 84a ⁶	+ 120a ⁷	+ ...	$\frac{(m+3)!}{3! m!}$	a ^m
X ₅	1	+ 5a	+ 15a ²	+ 35a ³	+ 70a ⁴	+ 126a ⁵	+ ...			$\frac{(m+4)!}{4! m!}$	a ^m
X ₆	1	+ 6a	+ 21a ²	+ 56a ³	+ 126a ⁴	+ ...				$\frac{(m+5)!}{5! m!}$	a ^m
X _{n-1}	1	+ $\frac{(n-1)!}{(n-2)!} a$	+							$\frac{(m+n-2)!}{(n-2)! m!}$	a ^m
X _n	1	+ $\frac{n!}{(n-1)!} a$	+ $\frac{(n+1)!}{(n-1)! 2!} a^2$	+ ...						$\frac{(m+n-2)!}{(n-1)! (m-1)!} a^{m-1}$	+ $\frac{(m+n-1)!}{(n-1)! m!} a^m$
X _{n+1}	1	+								$\frac{(m+n-1)!}{n! (m-1)!} a^{m-1}$	+ $\frac{(m+n)!}{n! m!} a^m$

(91)

Remarquons que d'une façon générale :

$$\begin{aligned} \frac{(m+n-2)!}{(n-2)!m!} + \frac{(m+n-2)!}{(n-1)!(m-1)!} &= \frac{(m+n-2)!}{(n-2)!(m-1)!} \left[\frac{1}{m} + \frac{1}{n-1} \right] \\ &= \frac{(m+n-2)!}{(n-2)!(m-1)!} \frac{(m+n-1)}{m(n-1)} = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}. \quad (92) \end{aligned}$$

Cette relation nous permet de calculer le coefficient du m^{me} degré de la n^{me} ligne, lorsqu'on connaît le coefficient du $(m-1)^{\text{me}}$ degré de cette ligne et le coefficient du m^{me} degré de la ligne précédente : le m^{me} coefficient de la n^{me} ligne est la somme du $(m-1)^{\text{me}}$ coefficient de cette ligne et du m^{me} coefficient de la ligne précédente. On vérifie immédiatement que les coefficients du tableau (91) satisfont bien à cette loi. Il est donc très facile de les calculer de proche en proche.

Cette remarque va nous permettre, en outre, de calculer la somme de l'une quelconque des séries (91). Désignons par X_1^m la série :

$$X_1^m = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^m = \frac{1 - a^{m+1}}{1 - a}.$$

Sa valeur limite est connue; on a (pour autant que $|a| < 1$)

$$X_1^\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} X_1^m = \frac{1}{1 - a}$$

Calculons la série :

$$X_2^m = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \dots + ma^{m-1}.$$

Nous l'écrivons :

Série	Somme partielle
$X_2^m = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots a^{m-1}$	$= \frac{1 - a^m}{1 - a}$
$+ a(1 + a + a^2 + a^3 + \dots a^{m-2})$	$= \frac{a}{1 - a} (1 - a^{m-1})$
$+ a^2(1 + a + a^2 + \dots a^{m-3})$	$= \frac{a^2}{1 - a} (1 - a^{m-2})$
$+ a^3(1 + a + \dots a^{m-4})$	$= \frac{a^3}{1 - a} (1 - a^{m-3})$
.....
$+ a^{m-2}(1 + a)$	$= \frac{a^{m-2}}{1 - a} (1 - a^2)$
$+ a^{m-1}$	$= \frac{a^{m-1}}{1 - a} (1 - a)$

Si nous faisons la somme des valeurs de la colonne de droite, nous obtenons, quel que soit a :

$$X_2^m = \frac{1}{1-a} \left[(1-a^m) + a(1-a^{m-1}) + a^2(1-a^{m-2}) + a^3(1-a^{m-3}) + \dots + a^{m-2}(1-a^2) + a^{m-1} \cdot (1-a) \right]$$

$$X_2^m = \frac{1}{1-a} [1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots + a^{m-2} + a^{m-1} - ma^m]$$

$$X_2^m = \frac{1}{1-a} \left[\frac{1-a^m}{1-a} - ma^m \right].$$

A la limite on trouve, pour $|a| < 1$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} X_2^m = X_2^\infty = \frac{1}{(1-a)^2}$$

Etudions la troisième série :

$$X_3^m = 1 + 3a + 6a^2 + 10a^3 + 15a^4 + 21a^5 + 28a^6 \\ + \dots + \frac{(m+2)!}{2!m!} a^m,$$

qui se laisse mettre sous la forme :

$$X_2^m = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + 5a^4 + 6a^5 + 7a^6 \\ + \dots + \frac{(m+1)!}{m!} a^m \\ + a(1 + 3a + 6a^2 + 10a^3 + 15a^4 + 21a^5 \\ + \dots + \frac{(m+1)!}{2!(m-1)!} a^{m-1})$$

ou encore :

$$X_3^m = X_2^m + aX_3^{m-1}.$$

Passons à la limite. Pour m très grand et $|a| < 1$, on a :

$$X_3^m \cong X_3^{m-1} = X_3^\infty \quad \text{et} \quad X_2^\infty = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

On obtient :

$$X_3^\infty (1-a) = \frac{1}{(1-a)^2},$$

et

$$\boxed{X_3^\infty = \frac{1}{(1-a)^3}}$$

Or, la relation (92) :

$$\frac{(m+n-2)!}{(n-2)!m!} + \frac{(m+n-2)!}{(n-1)!(m-1)!} = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$$

qui est à la base de cette démonstration, est générale.

Il s'en suit qu'on a, de façon générale également :

$$X_n^m = X_{n-1}^m + aX_n^{m-1}.$$

Passons à la limite; on obtient, pour $|a| < 1$:

$$(1 - a) X_n^\infty = X_{n-1}^\infty.$$

Si :

$$X_{n-1}^\infty = \frac{1}{(1 - a)^{n-1}},$$

il s'en suit que :

$$\boxed{X_n^\infty = \frac{1}{(1 - a)^n}}$$

(93)

Nous allons pouvoir calculer la valeur limite de $\bar{\alpha}_i$ (voir équation (90)). On a, par définition :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\alpha}_i = r_{III} + s_{II} s_{III} r_1 [1 + r_{II} r_1 + \overline{r_{II} r_1^2} + \overline{r_{II} r_1^3} + \dots] \quad (94)$$

$$+ s_{II} s_{III} s_1 s_2 [1 + 2r_{II} r_1 + 3\overline{r_{II} r_1^2} + 4\overline{r_{II} r_1^3} + \dots]$$

$$+ s_{II} s_{III} s_1 s_2 r_2 [1 + 2r_{II} r_1 + 3\overline{r_{II} r_1^2} + 4\overline{r_{II} r_1^3} + \dots]$$

$$+ s_{II} s_{III} s_1 s_2 r_2^2 [1 + 2r_{II} r_1 + 3\overline{r_{II} r_1^2} + 4\overline{r_{II} r_1^3} + \dots]$$

.....

.....

$$+ s_{II} s_{III} s_1 s_2^2 r_{II} [1 + 3r_{II} r_1 + 6\overline{r_{II} r_1^2} + 10\overline{r_{II} r_1^3} + \dots]$$

$$+ 2s_{II} s_{III} s_1 s_2^2 r_{II} r_2 [1 + 3r_{II} r_1 + 6\overline{r_{II} r_1^2} + 10\overline{r_{II} r_1^3} + \dots]$$

$$+ 3s_{II} s_{III} s_1 s_2^2 r_{II} r_2^2 [1 + 3r_{II} r_1 + 6\overline{r_{II} r_1^2} + 10\overline{r_{II} r_1^3} + \dots]$$

.....

.....

$$+ \frac{s_{II} s_{III} s_1^4 s_2^3 r_{II}^3}{(1 - r_{II} r_1)^5} [1 + 4r_2 + 10r_2^2 + \dots]$$

.....

etc., etc.

ou encore:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\alpha}_i = r_{III} + \frac{s_{II} s_{III} r_1}{1 - r_{II} r_1} + \frac{s_{II} s_{III} s_1 s_2}{(1 - r_{II} r_1)^2 (1 - r_2)} \left\{ 1 + \frac{s_1 s_2 r_{II}}{(1 - r_{II} r_1) (1 - r_2)} + \left[\frac{s_1 s_2 r_{II}}{(1 - r_{II} r_1) (1 - r_2)} \right]^2 + \left[\frac{s_1 s_2 r_{II}}{(1 - r_{II} r_1) (1 - r_2)} \right]^3 + \dots \right\}$$

Or, $r_2 + s_2 = 1$. Nous obtenons donc:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\alpha}_i = r_{III} + \frac{s_{II} s_{III} r_1}{1 - r_{II} r_1} + \frac{s_{II} s_{III} s_1}{(1 - r_{II} r_1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{s_1 r_{II}}{(1 - r_{II} r_1)}}$$

Rappelons que $s_{II} + r_{II} = 1$ et $s_1 + r_1 = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\alpha}_i &= r_{III} + \frac{s_{II} s_{III} r_1}{1 - r_{II} r_1} + \frac{s_{II} s_{III} s_1}{(1 - r_{II} r_1)^2} \cdot \frac{(1 - r_{II} r_1)}{(1 - r_{II} r_1 - s_1 r_{II})} \\ &= r_{III} + \frac{s_{II} s_{III} r_1}{1 - r_{II} r_1} + \frac{s_{II} s_{III} s_1}{(1 - r_{II} r_1) [1 - r_{II} (s_1 + r_1)]} \\ &= r_{III} + \frac{s_{II} s_{III} (r_1 + s_1) - s_{II} s_{III} r_{II} r_1 (s_1 + r_1)}{[1 - r_{II} (s_1 + r_1)] (1 - r_{II} r_1)} \\ &= r_{III} + \frac{s_{II} s_{III} (s_1 + r_1)}{1 - r_{II} (s_1 + r_1)} \end{aligned}$$

$\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{\alpha}_i = r_{III} + \frac{s_{II} s_{III}}{1 - r_{II}} = r_{III} + s_{III} = 1$	(95)
--	------

Nous retrouvons ainsi la même valeur limite qu'aux chapitres précédents, c'est-à-dire 1.

Cette démonstration n'est valable que si la condition $|a| < 1$ est satisfaite pour les diverses séries qui entrent en jeu. Or, on sait qu'un coefficient de réflexion r quelconque varie entre -1 et $+1$. Les séries:

$$\begin{aligned}
 & 1 + r_{II}r_1 + r_{II}r_1^2 + r_{II}r_1^3 + \dots \\
 & 1 + 2r_{II}r_1 + 3r_{II}r_1^2 + 4r_{II}r_1^3 + \dots \\
 & \dots \\
 & \dots \\
 & \text{etc.,}
 \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned}
 & 1 + r_2 + r_2^2 + r_2^3 + \dots \\
 & 1 + 2r_2 + 3r_2^2 + 4r_2^3 + \dots \\
 & \dots \\
 & \dots \\
 & \text{etc.,}
 \end{aligned}$$

remplissent donc la condition imposée.

Reste la série:

$$1 + \frac{s_1 r_{II}}{1 - r_{II} r_1} + \left(\frac{s_1 r_{II}}{1 - r_{II} r_1} \right)^2 + \left(\frac{s_1 r_{II}}{1 - r_{II} r_1} \right)^3 + \dots$$

Il faut que:

$$\frac{s_1 r_{II}}{1 - r_{II} r_1} < 1 .$$

Or, $1 - r_{II} r_1$ est positif; la condition devient:

$$s_1 r_{II} < 1 - r_{II} r_1 ,$$

ou:

$$r_{II}(s_1 + r_1) = r_{II} < 1.$$

Cette dernière inégalité est également toujours satisfaite, et le théorème démontré est général, aucune condition spéciale n'en limitant la portée.

d) *Conclusions du chapitre I.C.1.*

Le but de ce chapitre était de montrer que notre méthode est générale. Nous avons pu calculer, grâce à elle, la série α_i , dans le cas de deux obturateurs montés sur deux conduites indépendantes et dans le cas où une même conduite possède deux discontinuités successives. En suivant les développements que nous avons faits, on se rend compte aisément que la méthode est susceptible d'être étendue à des cas plus complexes encore.

Le choix des trois exemples étudiés sous I.C.1.a, b et c, a été dicté par plusieurs considérations. Nos formules permettent, en effet, l'étude des types de conduites que le technicien rencontrera le plus souvent en pratique. Ces mêmes formules constitueront, en outre, le point de départ de notre étude des chambres d'équilibre.

Il va sans dire que le spécialiste chargé de l'étude de conduites forcées se heurtera encore à d'autres cas plus complexes (p. ex.: cas de l'obturateur situé au milieu d'une conduite, et non à sa base, problème de la chambre élastique, etc.). Nous ne pouvons les aborder tous; mais, nous pensons que, là encore, notre méthode se montrera efficace.

Rappelons aussi que nous disposons en général de plusieurs formules pour le calcul de α_i . Les formules explicites ne sont pas nécessairement les plus maniables.

Au cours du chapitre I.C.1, nous avons vérifié la généralité des deux théorèmes suivants:

aa. La série $Y_0 \Phi_i \alpha_i$ représente la somme de toutes les ondes réfléchies de A vers O à l'instant i .

bb. La série $\bar{\alpha}_i$ a pour limite 1, si i tend vers l'infini.

Ce second théorème a, lui aussi, une signification physique précise. On voit immédiatement que, si nous considérons une onde unique $Y_0 \Phi_0$, qui, venant de O, passe par A au temps $i = 0$, la valeur $Y_0 \Phi_0 \bar{\alpha}_i$ représente la somme de toutes les ondes *secondaires engendrées par l'onde primitive* $Y_0 \Phi_0$, qui auront été réfléchies de A vers O entre l'origine du temps et l'instant i .

Pour démontrer cette proposition, il suffit de compter les réflexions successives que subit l'onde $Y_0 \Phi_0$ primitive au cours de ses passages à travers les diverses discontinuités: on vérifie que l'on obtient bien la série $Y_0 \Phi_0 \bar{\alpha}_i$. Si nous passons à la limite, c'est-à-dire si nous faisons tendre i vers l'infini, la valeur $\bar{\alpha}_i$ tend vers 1, c'est-à-dire que la somme de toutes les ondes réfléchies est égale à l'onde primitive, quel que soit le système dans lequel se produisent les réflexions.

Ce théorème est évidemment tout aussi général que le précédent. Son importance n'est pas moindre.

Au point de vue pratique, il permet, en outre, un contrôle constant des calculs numériques.

2. Calcul de la célérité a et des tensions dans le cas de conduites dont les parois ne sont pas minces, et de galeries sous pression.

Si nous nous reportons au calcul de la célérité a que nous avons donné au début du chapitre I.A, nous voyons que le seul terme à modifier au cours du développement est celui qui donne la déformation élastique de la conduite.

Nous remplacerons donc dans la formule

$$a = \sqrt{\frac{\frac{g}{\gamma}}{\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{E} \cdot \frac{D}{d}}}$$

le terme $\frac{1}{E} \cdot \frac{D}{d}$ par une valeur nouvelle qui dépendra exclusive-

ment, elle aussi, de la déformation de la conduite. Nous sommes ainsi ramenés à une étude générale de l'élasticité de conduites dont les parois ne sont pas minces ou à l'élasticité de galeries creusées dans la roche.

Le principe de ces calculs de déformations est connu et un certain nombre d'auteurs ont étudié de façon détaillée des cas particulièrement intéressants pour les constructeurs d'usines. La difficulté du problème général n'est nullement de résoudre les équations d'élasticité, mais bien de discuter les résultats et leur application aux cas réels. On conçoit aisément à quelles difficultés on se heurte si l'on veut, par exemple, estimer avec quelque exactitude le module d'élasticité d'une roche à l'intérieur d'un massif.

L'exposé de ce chapitre pouvait se concevoir de deux manières différentes: on pouvait reprendre en détail et généraliser la théorie de l'élasticité des conduites et galeries en charge. Un pareil travail devrait aborder de difficiles problèmes de l'élasticité et de la résistance des matériaux, de la technique des constructions, et de la géologie. On pouvait aussi s'en tenir au strict exposé du calcul des célérités α , sans entrer dans le détail du calcul des tensions, toutes réserves étant faites quant à l'application des formules théoriques aux cas réels. Afin de ne point sortir du cadre que nous nous sommes tracé, nous avons choisi la seconde méthode.

a) *Cas d'une conduite à parois épaisses.*

Le point de départ de nos calculs nous est donné par l'étude des conduites à parois épaisses, parue dans l'ouvrage classique de Föppl¹, auquel nous nous reportons. La méthode que nous employons étant classique, elle aussi, nous pouvons abrégé l'exposé.

Nous faisons remarquer que les formules qui suivent au cours

¹ *Vorlesungen über technische Mechanik*, Tome III p. 321 et suivantes Berlin 1919 (traduction française par Hahn).

de ce chapitre sont établies dans l'hypothèse d'un état de sollicitation à deux dimensions, où l'on néglige les tensions et les déformations parallèles à l'axe. Cette simplification, qui est d'ailleurs généralement admise dans la pratique (voir aussi page 20), est nécessaire pour éviter des formules trop peu maniables.

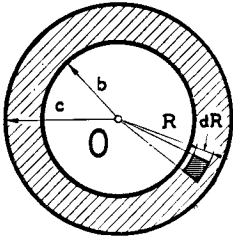


FIG. 17.

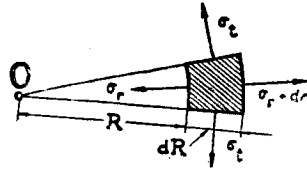


FIG. 18.

Soient b et c les deux rayons, intérieur et extérieur, de la conduite; R un rayon quelconque, tel que $b < R < c$; E le module d'élasticité et m l'inverse de la constante de Poisson; σ_r et σ_t les tensions radiales et tangentielles (voir fig. 17 et 18) et u l'allongement du rayon R .

A l'intérieur de la conduite règne une pression $-p$. Les déformations élémentaires sont données par les relations suivantes:
Déformation tangentielle:

$$\delta_t = \frac{u}{R} = \frac{1}{E} \left(\sigma_t - \frac{1}{m} \sigma_r \right). \quad (96)$$

Déformation radiale:

$$\delta_r = \frac{du}{dR} = \frac{1}{E} \left(\sigma_r - \frac{1}{m} \sigma_t \right). \quad (96a)$$

On en tire:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_t = \frac{mE}{m^2-1} \left(m \frac{u}{R} + \frac{du}{dR} \right) \\ \sigma_r = \frac{mE}{m^2-1} \left(m \frac{du}{dR} + \frac{u}{R} \right) \end{array} \right. \quad (97)$$

Föppl démontre aisément que l'allongement u du rayon R est donné par l'équation différentielle:

$$R^2 \frac{d^2u}{dR^2} + R \frac{du}{dR} - u = 0$$

dont la solution générale est:

$$\boxed{u = BR + \frac{C}{R}} \quad (98)$$

B et C étant des constantes. Introduisons (98) dans (97), on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{mE}{m-1} B - \frac{mE}{m+1} \frac{C}{R^2} \\ \sigma_t = \frac{mE}{m-1} B + \frac{mE}{m+1} \frac{C}{R^2} \end{array} \right. \quad (97a)$$

ou, pour simplifier:

$$\sigma_r = B' - \frac{C'}{R^2} \quad \text{et} \quad \sigma_t = B' + \frac{C'}{R^2}$$

Les conditions aux limites nous livrent aisément B' et C' .
Pour $R = b$, on a:

$$\sigma_r = -p = B' - \frac{C'}{b^2}$$

Pour $R = c$,

$$\sigma_r = 0 = B' - \frac{C'}{c^2}$$

On en tire :

$$B' = p \frac{b^2}{c^2 - b^2} \quad \text{et} \quad C' = p \frac{b^2 c^2}{c^2 - b^2}.$$

La déformation u donnée par (98), s'écrira :

$$u = p \frac{b^2}{mE(c^2 - b^2)} \left[(m - 1) R + (m + 1) \frac{c^2}{R} \right]. \quad (99)$$

L'augmentation de volume d'un élément de conduite de longueur dx et de rayon intérieur $R = b$, sous l'influence d'une variation de pression $\frac{\partial p}{\partial t} dt$, sera donnée par :

$$2\pi b \frac{b}{mE(c^2 - b^2)} [(m - 1) b^2 + (m + 1) c^2] \frac{\partial p}{\partial t} dt \cdot dx \quad (100)$$

et la formule de la célérité a devient :

$$a = \sqrt{\frac{\frac{g}{\gamma}}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{mE(c^2 - b^2)} [(m - 1) b^2 + (m + 1) c^2]}}. \quad (101)$$

Si l'on néglige le coefficient de contraction m , a sera donné par

$$a = \sqrt{\frac{\frac{g}{\gamma}}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{E} \cdot \frac{b^2 + c^2}{c^2 - b^2}}}. \quad (103)$$

On emploiera de préférence cette formule, dans les cas où le matériel n'est pas homogène (béton armé) et où on ne sait plus ce que signifie le coefficient m . Dans le cas du béton armé, par exemple, on estimera le module d'élasticité moyen E en écrivant que les déformations tangentielles δ_t sont les mêmes pour les deux matériaux. Soient F' et F'' (tels que $F' + F'' = F$) les sections du fer et du béton, E' et E'' leurs modules d'élasticité, tels que $\frac{E'}{E''} = n$, Z' et Z'' les résultantes des forces agissant sur le fer et le béton, de façon que $Z' + Z'' = Z$. On

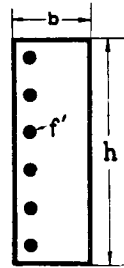


FIG. 19.

écrira en première approximation:

$$\delta_t = \frac{Z'}{E'F'} = \frac{Z''}{E''F''} = \frac{Z}{EF},$$

d'où:

$$\frac{Z'}{Z''} = \frac{E'F'}{E''F''} = n \cdot \frac{F'}{F''}.$$

On en tire:

$$E = \frac{Z}{Z''} \cdot \frac{F''}{F} E'' = \frac{Z' + Z'' \frac{F''}{F}}{Z''} E'' = \frac{(nF' + F'') \frac{F''}{F}}{F''} E''$$

ou

$$E = \frac{(nF' + F'')}{F} E'' \cong (n \cdot \mu + 1) E''$$

où μ désigne le pourcentage d'armatures.

Cette méthode n'est évidemment qu'une approximation, puisqu'on suppose que δ_t est le même pour toute la section. Cette hypothèse est suffisante pour le calcul de la célérité a , mais non pas pour celui des tensions.

b) *Cas d'une galerie sous pression sans revêtement.*

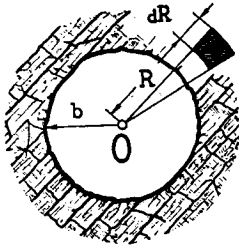


FIG. 20.

Nous supposons que le massif, dans lequel est perforée la galerie, est infiniment grand. Les équations fondamentales (97a) et (98) s'écrivent comme précédemment (voir Fig. 20).

Les conditions limites nous livrent:

Pour $R = \infty$:

$$\sigma_r = \frac{mE}{m-1} B = 0; \quad \text{d'où} \quad B = 0.$$

Pour $R = b$:

$$\sigma_r = -\frac{mE}{m+1} \frac{C}{b^2} = -p; \quad \text{d'où} \quad C = \frac{pb^2(m+1)}{E}.$$

Nous obtenons alors :

$$u = \frac{pb^2}{E} \cdot \frac{(m+1)}{m} \cdot \frac{1}{R}$$

L'équation exprimant la déformation élastique d'un élément de galerie de longueur dx , et de rayon intérieur $R = b$, sous l'influence d'une variation de pression $\frac{\partial p}{\partial t} dt$, devient :

$$2\pi b \frac{b(m+1)}{Em} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} dt \cdot dx$$

et la célérité a s'écrit :

$$a = \sqrt{\frac{\frac{g}{\gamma}}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{E} \cdot \frac{m+1}{m}}} \quad (104)$$

Si l'on néglige le coefficient m , la célérité a devient :

$$a = \sqrt{\frac{\frac{g}{\gamma}}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{E}}} \quad (105)$$

c) *Cas des galeries sous pression revêtues d'un manchon en béton ou en béton armé.*

Soient p la pression régnant à l'intérieur de la galerie, b et c les rayons, intérieur et extérieur, du manchon, E_1 son module d'élasticité moyen, E_2 le module d'élasticité du rocher, m_1 et m_2 les coefficients de contraction (fig. 21). Soit enfin p_c la pression inconnue transmise du manchon au rocher, de façon que la déformation radiale u_c soit la même pour le manchon que pour le rocher.

On écrit comme précédemment, pour le manchon et pour le rocher séparément, les équations (97a) et (98), qui donnent les tensions et les déformations. Elles contiendront quatre cons-

tantes B_1 , C_1 , B_2 et C_2 . On calcule les conditions aux limites pour $R = b$, $R = c$ (béton), $R = c$ (rocher) et $R = \infty$. La condition de déformation élastique pour $R = c$ nous donne en outre une équation de liaison. On a donc cinq équations à cinq inconnues.

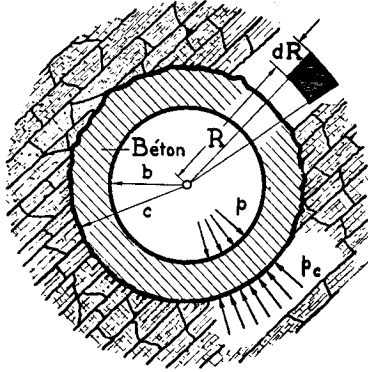


FIG. 21.

Tous calculs effectués, la déformation élastique d'un élément de galerie avec revêtement, de longueur dx et de rayon intérieur $R = b$, soumise à une variation de pression $\frac{\partial p}{\partial t} dt$, devient:

$$2\pi b \frac{b}{m_1 E_1 (c^2 - b^2)} [(m_1 - 1)(b^2 - \lambda c^2) + (m_1 + 1)c^2(1 - \lambda)] \frac{\partial p}{\partial t} dt \cdot dx$$

où

$$\lambda = \frac{p_c}{p} = \frac{\frac{2b^2}{E_1(c^2 - b^2)}}{\frac{m_2 + 1}{m_2 E_2} + \frac{(m_1 - 1)c^2 + (m_1 + 1)b^2}{m_1 E_1(c^2 - b^2)}} \quad (106)$$

et enfin:

$$a = \sqrt{\frac{\frac{g}{\gamma}}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{m_1 E_1 (c^2 - b^2)} [(m_1 - 1)(b^2 - \lambda c^2) + (m_1 + 1)(1 - \lambda)c^2]}} \quad (107)$$

Si l'on néglige les coefficients m_1 et m_2 , on a :

$$a = \sqrt{\frac{\frac{g}{\gamma}}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2}{E_1(c^2 - b^2)}(b^2 + c^2 - 2\lambda'c^2)}} \quad (108)$$

où

$$\lambda' = \frac{pc}{p} = \frac{\frac{2b^2}{c^2 - b^2}}{\frac{E_1}{E_2} + \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2}} \quad (109)$$

d) *Cas d'une galerie sous pression munie d'une cuirasse.*

Nous supposons que la galerie est revêtue d'une cuirasse en tôle d'acier. L'espace compris entre la tôle et le rocher est rempli de béton. (fig. 22). Il y aura deux cas à distinguer, selon que ce béton est encore intact, ou fissuré.

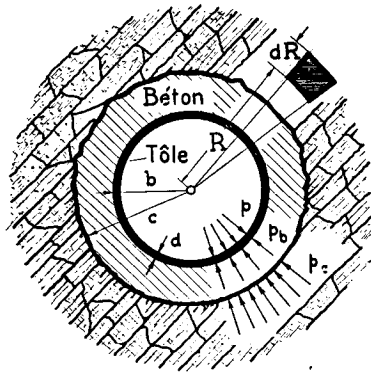


FIG. 22.

La méthode que nous allons développer ici s'applique également au cas d'un manchon en béton armé, avec armature unique, située du côté intérieur, qui peut être assimilée à une cuirasse.

aa. Le béton n'est pas fissuré.

La cuirasse en tôle d'acier absorbe une pression $p - p_b$. La pression p_b est transmise de la cuirasse, de module E , au manchon de béton, de module E_1 ; et la pression p_c , du manchon de béton, au rocher de module E_2 . Les conditions de déformations élastiques nous permettront donc d'écrire deux équations de liaison. Le calcul est en tous points semblable au calcul précédent.

Nous supposons l'épaisseur d de la tôle négligeable par rapport à son rayon b , qui est, par le fait, le rayon intérieur du manchon de béton.

On établit successivement les relations suivantes:

$$\lambda_2 = \frac{p_c}{p_b} = \frac{\frac{2b^2}{E_1(c^2 - b^2)}}{\frac{m_2 + 1}{m_2 E_2} + \frac{(m_1 - 1)c^2 + (m_1 + 1)b^2}{m_1 E_1(c^2 - b^2)}} \quad (110)$$

$$\lambda_1 = \frac{p_b}{p} = \frac{\frac{b^2}{Ed}}{\frac{b^2}{Ed} + \frac{b}{m_1 E_1(c^2 - b^2)} [(m_1 - 1)(b^2 - \lambda_2 c^2) + (m_1 + 1)(1 - \lambda_2)c^2]} \quad (111)$$

L'allongement u_b sera:

$$u_b = \frac{p - p_b}{Ed} b^2 = \frac{p(1 - \lambda_1) b^2}{Ed}$$

La déformation élastique d'un élément de galerie cuirassée de longueur dx , soumise à une variation de pression $\frac{\partial p}{\partial t} dt$, devient:

$$2\pi b \frac{(1 - \lambda_1) b^2}{Ed} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} dt dx$$

et l'on trouve:

$$a = \sqrt{\frac{\frac{g}{\gamma}}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2b}{Ed}(1 - \lambda_1)}} \quad (112)$$

Si nous négligeons les coefficients de contraction m , nous trouvons sans difficultés que les relations (110) et (111) deviennent

$$\lambda'_2 = \frac{p_c}{p_b} = \frac{\frac{2b^2}{(c^2 - b^2)}}{\frac{E_1}{E_2} + \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2}} \quad (113)$$

$$\lambda'_1 = \frac{p_b}{p} = \frac{\frac{b^2}{Ed}}{\frac{b^2}{Ed} + \frac{b}{E_1(c^2 - b^2)}[b^2 + c^2 - 2\lambda'_2 c^2]} \quad (114)$$

bb) *Le manchon de béton est fissuré (cas ordinaire).*

Si les efforts de traction dans le béton dépassent la tension de rupture, il faut supposer que le béton se fissure. Dans ce cas, le problème se pose comme suit :

L'allongement u_b du rayon b de la cuirasse reste :

$$u_b = \frac{p - p_b}{E} \cdot \frac{b^2}{d} = p(1 - \lambda_3) \frac{b^2}{Ed}, \quad \text{en posant } p_b = \lambda_3 p. \quad (115)$$

Le manchon de béton subit un écrasement moyen

$$\Delta(bc) = \frac{p_b + p_c}{2} \cdot \frac{(b - c)}{E_1}$$

qui sera petit et souvent négligeable. De plus, nous avons entre les pressions p_b et p_c , la relation très simple :

$$p_c = p_b \frac{b}{c} \quad \text{d'où} \quad \lambda_4 = \frac{b}{c}. \quad (116)$$

Nous calculons que :

$$\lambda_3 = \frac{\frac{b^2}{Ed}}{\frac{b^2}{Ed} + \frac{c^2 - b^2}{2cE_1} + \frac{(m_2 + 1)b}{m_2 E_2}} \quad (117)$$

et:

$$a = \sqrt{\frac{\frac{g}{\gamma}}{\frac{1}{\varepsilon} + \frac{2b}{Ed}[1 - \lambda_3]}} \quad (118)$$

Nous ne traiterons pas ici le cas très complexe et souvent discuté où le rocher est fissuré. La méthode de calcul est la même, mais les résultats numériques sont très incertains.

On n'éprouvera aucune difficulté à passer du calcul des célérités a , au calcul des tensions dans la conduite ou dans le rocher.

CHAPITRE D.

APPLICATION DE LA THÉORIE AU CALCUL DES
CONDUITES FORCÉES DÉBOUCHANT D'UN BASSIN
INFINIMENT GRAND

Il ne s'agit point pour nous de reproduire ici les tableaux détaillés, parfois assez longs, de nos calculs. L'équation fondamentale (41) est une équation du 2^{me} degré, que l'on résoudra autant de fois qu'il y aura de battements dans la conduite principale III aboutissant à l'obturateur O. On calculera, en général, les valeurs principales en faisant coïncider η_1 avec la fin de la première phase; si l'on veut connaître des points intermédiaires, on recommencera le calcul à partir de la première phase, en choisissant pour η_1 une valeur précédant la fin de la première phase. Le calcul des valeurs α_k se fait à part. α_k est fonction des battements dans la conduite II, supposée plus courte que I. A chacun de conduire les calculs comme il l'entend. La disposition des tableaux 1a et 1b nous paraît commode.

Le but du chapitre D est de signaler, avec exemples à l'appui, les points qu'il y a lieu d'étudier dans une conduite forcée, et de grouper les résultats essentiels. Nous indiquerons également quelles simplifications utiles on peut apporter à la méthode générale de calcul.

La méthode développée par Allievi permet le calcul rapide d'une conduite forcée à caractéristique unique. Un regard sur l'abaque classificateur (Allievi-Gaden, Tome II, Fig. 24) relatif à la fermeture linéaire totale de l'obturateur permet, non seulement de lire immédiatement la valeur de la charge maximum, mais encore de se rendre compte de l'allure générale de la courbe des surcharges devant l'obturateur. On procède de même pour l'ouverture totale linéaire. L'étude du contre-coup

d'ouverture ne présente d'intérêt que si $\rho_* < 1$, c'est-à-dire pour les hautes chutes. Ce calcul, pas plus que l'étude des mouvements rythmiques de l'obturateur, ne sont effectués en pratique. Allievi, en effet, a fait une remarque selon laquelle une conduite calculée pour une surcharge normale de 10 % à 30%, correspondant à la fermeture linéaire totale de l'obturateur, peut, sans danger de rupture, supporter les surcharges parfois plus élevées,

TABLEAU 1 b.

Calcul des valeurs α_k d'après la formule:

$$\alpha_k = 0.2245 + 0.95 \frac{\Phi_{k-n_1}}{\Phi_k} - 0.213 \frac{\Phi_{k-2n_1}}{\Phi_k} + 0.04786 \frac{\Phi_{k-3n_1}}{\Phi_k} - 0.01072 \frac{\Phi_{k-4n_1}}{\Phi_k} + \dots$$

$$\alpha_1 = \mathbf{0.2245}$$

$$\alpha_2 = \mathbf{0.2245}$$

$$\alpha_3 = 0.2245 + 0.95 \frac{0.0305}{0.1939} = \mathbf{0.3703}$$

$$\alpha_4 = 0.2245 + 0.95 \frac{0.0946}{0.2696} = \mathbf{0.5578^5}$$

$$\alpha_5 = 0.2245 + 0.95 \frac{0.1635}{0.3309} = \mathbf{0.6939}$$

$$\alpha_6 = 0.2245 + 0.95 \frac{0.2342}{0.3997} - 0.213 \frac{0.0610}{0.3997} = \mathbf{0.7486}$$

$$\alpha_7 = 0.2245 + 0.95 \frac{0.3002}{0.4675} - 0.213 \frac{0.1282}{0.4675} = \mathbf{0.7762}$$

$$\alpha_8 = 0.2245 + 0.95 \frac{0.3653}{0.5372} - 0.213 \frac{0.1988}{0.5372} + 0.04786 \frac{0.0305}{0.5372} = \mathbf{0.7943}$$

$$\alpha_9 = 0.2245 + \frac{1}{0.607} [0.95 \cdot 0.4336 - 0.213 \cdot 0.2696 + 0.04786 \cdot 0.0946] = \mathbf{0.8160}$$

$$\alpha_{10} = 0.2245 + \frac{1}{0.6753} [0.95 \cdot 0.5023^5 - 0.213 \cdot 0.3309 + 0.04786 \cdot 0.1635] = \mathbf{0.8384}$$

Etc.

mais exceptionnelles, provenant du contre-coup d'ouverture ou de mouvements alternatifs de l'obturateur.

Si le calculateur n'a pas les abaques d'Allievi sous la main, il suffit d'appliquer les formules (13) et (15) qui donnent ζ_{*1} et ζ_{*m} pour le temps de fermeture Θ choisi. En pratique, le calcul

complet des séries enchainées, quoique très facile à effectuer, soit analytiquement, soit graphiquement, n'est exécuté que très rarement.

Quelles que soient les divergences entre les résultats que nous fournira la théorie exacte et ceux donnés par les formules d'Allievi, dont nous venons de rappeler l'usage, nous conseillons de commencer tout calcul par l'application de ces formules,

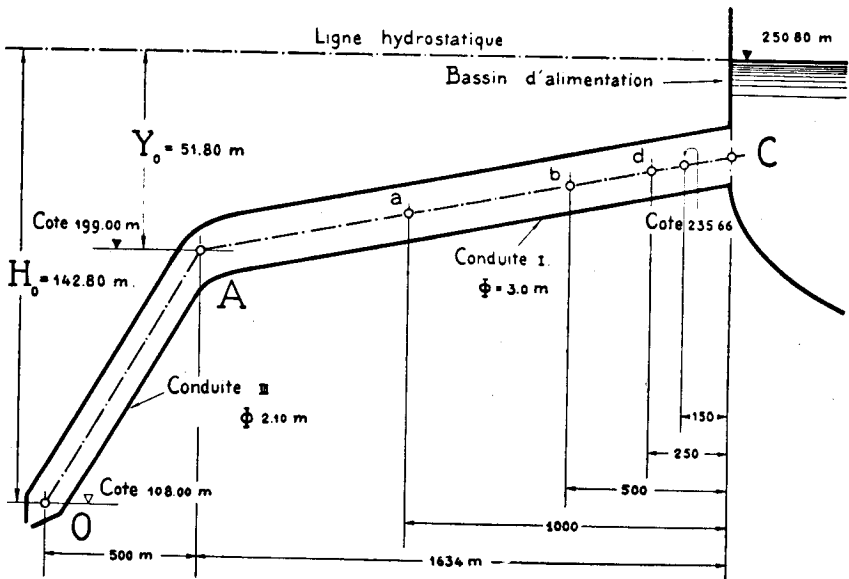


FIG. 23. — Profil en long de la conduite.

afin de classer la conduite. Les données que nous avons rappelées au chapitre A suffisent amplement à ce travail. Puis, on étudiera successivement, au moyen de notre théorie générale, le cas de la fermeture linéaire, celui de l'ouverture linéaire et du contre-coup d'ouverture. Mais, l'essentiel du travail portera, à l'encontre de ce que préconise Allievi, sur les mouvements rythmiques de l'obturateur et la répartition réelle des pressions le long de la conduite.

1. *Mouvements linéaires de l'obturateur.*

a) *Fermeture linéaire totale.*

Considérons la conduite OAC (fig. 23).

Elle se compose d'une section en tôle d'acier OA (III), longue de 508 m. et de 2,10 m. de diamètre, qui est doublée d'une deuxième section II identique à III. Le tronçon AC (I), long de 1634 m., est un tube en béton armé de 3,00 m. de diamètre. Des fissures se produisirent aux points *a* et *d*.

Le débit maximum est $Q_0 = 12 \text{ m}^3/\text{sec.}$; la retenue est à la cote 250,80. Voici les principales données du problème:

TABLEAU 2.

Principales données.

Point	O	A	a	b	d
Distance du point à l'embouchure C	2142 m	1634 m	1000 m	500 m	250 m
Cote du point	108.0	199.0	216.32	224.75	234.40
Pression hydrostatique y_0	142.80	51.8	34.48	26.05	16.4
Pression atmosphérique admise	9.5	9.5	9.5	9.5	9.5
Pression absolue en m	152.3	61.3	43.98	35.55	25.9
» » en % de H_0	106.7	42.9	30.8	24.90	18.1

Conduite	I.	III.
Diamètre	$D_I = 3,00 \text{ m.}$	$D_{III} = 2,10 \text{ m.}$
Section	$S_I = 7,06 \text{ m}^2$	$S_{III} = 3,46 \text{ m}^2$
Vitesse de régime.	$V_{I_0} = 1,70 \text{ m./sec.}$	$V_{III_0} = 3,47 \text{ m./sec.}$
Célérité	$a_I = 1150 \text{ m./sec.}$	$a_{III} = 890 \text{ m./sec.}$

Caractéristiques:

$$\begin{array}{ll} \text{en O, } \rho_* = 1,10 & \\ \text{en A, } \rho_1 = 1,923 & \rho_{III} 3,04 \end{array}$$

Coefficients de réflexion		de transmission	
$r_I = -0,2245$		$s_I = 1,2245$	
$r_{III} = 0,2245$		$s_{III} = 0,7755$	

Périodes d'oscillations:

$$\mu_I = 2",84 \qquad \mu_{III} = 1",14$$

Périodes relatives:

$$n_I = 2.5 \qquad n_{III} = 1.$$

aa) *Calculs d'après Allievi.*

Calculons d'abord d'après la formule d'Allievi pour conduite à caractéristique unique:

$$\zeta_{*m} = \frac{\rho_*}{2^{(\cdot)}} + \sqrt{\left(\frac{\rho_*}{2^{(\cdot)}}\right)^2 + 1} \quad (15a)$$

dans laquelle Θ est variable et où ρ_* prend les valeurs 1,36 et 1,10. En effet, nous conformant à la proposition arbitraire d'Allievi (voir Allievi-Gaden, pages 10 et 11), nous avons déterminé une valeur moyenne de la caractéristique ρ_* pour toute la conduite. Cette valeur de ρ_{*m} a été obtenue en calculant la célérité moyenne pour les deux tronçons de la conduite, d'après l'équation:

$$\frac{L_{\text{total}}}{a_{\text{moyen}}} = \frac{L_I}{a_I} + \frac{L_{III}}{a_{III}} = \mu_{\text{total}}. \quad (119)$$

$\rho_{*m} = 1,36$ sera valable pour toutes les manœuvres dont la durée dépassera la phase du coup direct; c'est-à-dire pour la section adjacente à l'obturateur, si $\Theta > 1$.

Pour les manœuvres encore plus rapides, nous introduirons dans les calculs, à titre de comparaison, $\rho_* = 1.10$, valeur de la caractéristique pour la conduite III au point O. Nous verrons, au cours de cet exemple, que la proposition d'Allievi, quoique assez plausible et universellement admise dans la pratique, n'est pas heureuse, car elle nous amène à des solutions qui s'éloignent plus de la réalité que les résultats obtenus en introduisant pour ρ_* la valeur du bas de la conduite.

Nous désignons d'une façon générale par :

$$B_{*h} = (\zeta_{*h}^z - 1) \quad \text{et} \quad B_h = \frac{Y_0}{H_0} (\zeta_h^2 - 1)$$

les surcharges aux points O et A, exprimées en % de H_0 .

Il existe entre les valeurs limites B_{*m} et B_m la relation approximative (voir démonstration au chapitre II B 2, formule 150):

$$B_m \cong \frac{n_I}{n_I + n_{III}} B_{*m} \cong 0.714 B_{*m}$$

qui exprime que les pressions le long de la conduite sont proportionnelles, non pas aux longueurs, mais aux temps de parcours.

Toutefois, si nous calculons d'après la méthode tracée par Allievi, nous devons admettre une répartition linéaire des surcharges le long de la conduite, et poser la relation :

$$B_m = \frac{L_I}{L_I + L_{III}} B_{*m} = 0.762 B_{*m} . \quad (120)$$

Nous avons classé dans le tableau 3 les valeurs que nous avons trouvées.

Nous avons reporté ces valeurs sur la (fig. 24) en nous rappelant que B_{*m} atteint son maximum absolu $2\rho_* = 2,2$, sitôt que $\tau \leq \mu_I + \mu_{III} = 3'',98$. B_m atteint la même valeur si $\tau \leq 2'',84$. En réalité, B_{*max} n'est pas nécessairement toujours égal à B_{*m} , le maximum pouvant aussi se produire au cours de la 1^{re}, 2^{me}, 3^{me} ... phase. Nous renonçons à effectuer ce calcul de contrôle, que nous fournit la théorie d'Allievi.

La conclusion de cette étude, faite d'après Allievi, est que

TABEAU 3.

Valeur des surcharges limites B_{*m} en O, et B_m en A, pour une conduite à caractéristique unique $\rho_* = 1,36$ et $1,10$ en fonction du temps de fermeture variable.

$\rho_{*m} = 1.36$ ($a_m = 1100$ m./sec.)								
Pour τ		5"	10"	15"	20"	25"	30"	50"
B_{*m}	%	181.0	70.5	43.0	31.0	24.0	19.5	12.5
$H_0 B_{*m}$	m	258.50	100.50	61.40	43.25	34.30	27.85	17.85
$H_0 B_m$	m	196.20	76.40	46.70	33.55	26.00	21.15	13.60
$\rho_* = 1.10$ ($a_{III} = 890$ m./sec.)								
B_{*m}	%	133.5	54.3	33.8	24.3	19.0	15.7	9.1
$H_0 B_{*m}$	m	190.70	77.50	48.3	34.70	27.15	22.40	13.00
$H_0 B_m$	m	150.00	59.00	36.80	26.40	20.70	17.10	9.90

le projet de conduite paraît parfaitement viable pour des temps de fermeture plus grands que, ou égaux à, 20'' à 25''. Ce fut la solution adoptée en réalité.

bb. *Calcul d'après la théorie générale.*

Nous reprenons le calcul précédent d'après la théorie générale. Nous nous servons des formules:

$$\xi_{*k+1} = -\rho_* \eta_{k+1} + \sqrt{\left[\rho_*^2 \eta_{k+1}^2 + 1 + 2\rho_* \left[\alpha_h \eta_h \zeta_{*k} + \frac{c_0}{C_0} (1 - \alpha_h) \right] - \alpha_h (\zeta_{*k}^2 - 1) \right]} \quad (41)$$

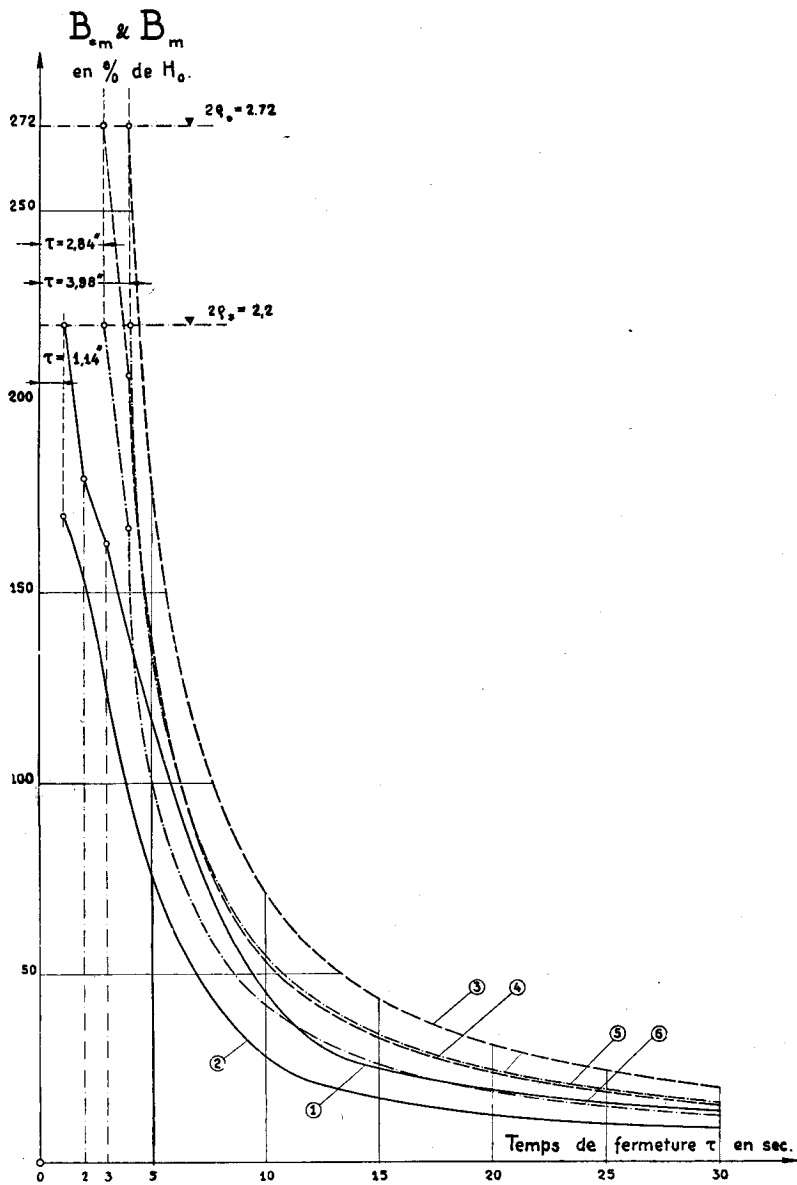


FIG. 24. — Courbes caractéristiques des surcharges maxima B_{*max} devant l'obturateur O, et B_m au point d'intersection A en fonction des temps de fermeture.

Courbe 1: surcharges B_{*max} .	} $\rho_* = 1,36$ {	Calculées d'après la théorie d'Allievi.
Courbe 2: surcharges $B_{max} = 0,762 B_{*max}$.		
Courbe 3: surcharges B_{*max} .	} $\rho_* = 1,40$ {	Calculées d'après la théorie générale.
Courbe 4: surcharges $B_{max} = 0,762 B_{*max}$.		
Courbe 5: surcharges B_{*max} .		
Courbe 6: surcharges B_{max} .		

(dans laquelle $c_0 = C_0$, puisqu'il s'agit d'une fermeture à partir de l'ouverture totale), et:

$$\alpha_k = r_{III} + s_I s_{III} \frac{\Phi_{k-n_I}}{\Phi_k} + s_I s_{III} r_I \frac{\Phi_{k-2n_I}}{\Phi_k} + s_I s_{III} r_I^2 \frac{\Phi_{k-3n_I}}{\Phi_k} + \dots \quad (33)$$

dont la valeur numérique est:

$$\begin{aligned} \alpha_k = & 0.2245 + 0.95 \frac{\Phi_{k-n_I}}{\Phi_k} - 0.213 \frac{\Phi_{k-2n_I}}{\Phi_k} + 0.04786 \frac{\Phi_{k-3n_I}}{\Phi_k} \\ & - 0.01072 \frac{\Phi_{k-4n_I}}{\Phi_k} + 0.00241 \frac{\Phi_{k-5n_I}}{\Phi_k} - 0.000541 \frac{\Phi_{k-6n_I}}{\Phi_k} \\ & + 0.000121 \frac{\Phi_{k-7n_I}}{\Phi_k} - \dots \end{aligned}$$

Comme $n_I = 2,5$, les valeurs $k - n_I$, $k - 3n_I$, etc., ne sont pas des nombres entiers. Il faudrait calculer, non seulement les valeurs Φ_0 , Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 , mais $\Phi_{0,5}$, $\Phi_{1,5}$, $\Phi_{2,5}$, etc. etc. Nous tournons la difficulté, en supposant qu'entre Φ_0 et Φ_1 , Φ_1 et Φ_2 , Φ_2 et Φ_3 , etc., la fonction Φ_i est linéaire, hypothèse très proche de la réalité, et en tous cas suffisante pour notre calcul,

Dans ces conditions, nous calculons les charges relatives ζ_{*max} , pour $\tau = 2''$, $3''$, $5''$, $10''$, $20''$. L'exemple reproduit partiellement au tableau 1 n'est autre que le début du calcul relatif à $\tau = 20''$. Nous reproduisons au tableau 4 les résultats de ces calculs.

Nous reportons les valeurs B_{*max} . et B_{max} . sur la fig. 24 et obtenons ainsi « les courbes caractéristiques des surcharges maxima devant l'obturateur et au point d'intersection ». Ces courbes donnent les surcharges maxima en fonction du temps de fermeture et caractérisent la façon dont une conduite se comporte aux fermetures linéaires.

On vérifie aisément que la valeur maximum $2\rho_* = 2,2$ de B_{*max} . n'est atteinte que pour autant que $\tau \leq \mu_{III} = 1,14$. ($< \mu_I = 2''84$). Il en est de même du maximum de B_{max} , puisque

TABLEAU 4.

Valeurs des surcharges maxima $B_{*max.}$ en O, et $B_{max.}$ en A, pour une conduite à caractéristiques multiples en fonction du temps de fermeture variable τ .

τ	2"	3"	5"	10"	20"
Θ_{III}	1.755	2.632	4.39	8.78	17.55
$k_{max.}$	2	3	4	4	4
$\zeta_{*max.}$	1.671	1.616	1.4712	1.200	1.094
$B_{*max.}$	1.797	1.6117	1.161	0.440	0.196
$B_{max.}$	1.550	1.232	0.7575	0.2782	0.1252
$\frac{B_{max.}}{B_{*max.}}$	0.863	0.762	0.6525	0.6325	0.639

$\mu_{III} < \mu_I$. Sa valeur maximum sera: $s_{III} \cdot 2\rho_* = 1,706$ en raison de la relation:

$$B_I = \frac{Y_0}{H_0} (\zeta_1^2 - 1) = \Phi_{*1} (1 - \alpha_1) = 2\rho_* (1 - r_{III}) = s_{III} 2\rho_* .$$

Il ressort du tableau 4, que le maximum des surcharges est atteint dès le début du mouvement de fermeture, pour $k_{max.} \cong 2$ à 4, selon les cas. De plus, la loi de répartition linéaire des surcharges le long de la conduite est mal vérifiée, puisque la valeur théorique de $\frac{P_m}{B_{*m}} \cong \frac{n_I}{n_I + n_{III}}$ est 0,714. On peut expliquer ce fait, en remarquant qu'une augmentation de section diminue les surcharges.

La fig. 25 reproduit « la loi des surcharges devant l'obturateur en fonction du temps » dans le cas d'une fermeture linéaire en $\tau = 20''$. L'allure de cette courbe est tout à fait caractéris-

tique. On y reconnaît un premier maximum $B_{*max.} = 0,196$ pour $k_{max.} = 4$. Puis la courbe tend vers une valeur limite B_{*m} . Cette courbe est à rapprocher des fig. 2, 3 et 4 pour conduites à caractéristique unique. On reconnaîtra aisément leur similitude. C'est là un fait général que nous pouvons étayer sur un grand nombre d'exemples.

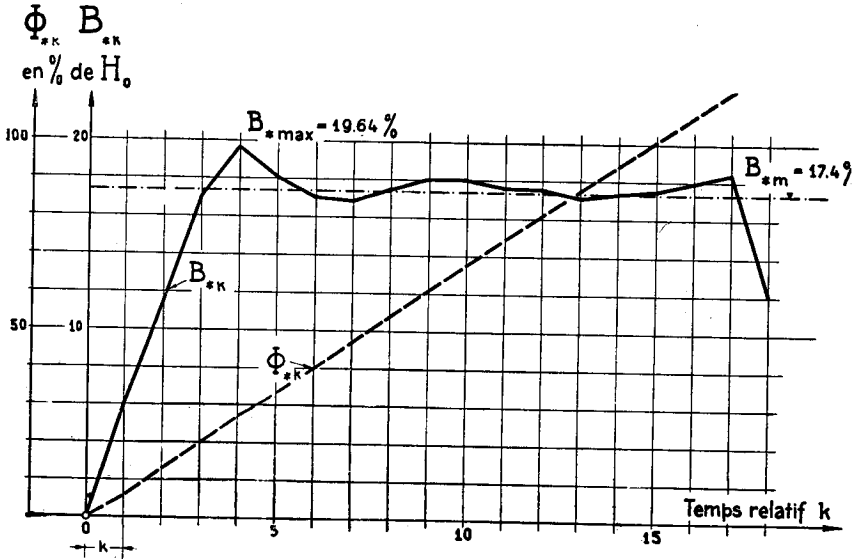


FIG. 25. — Loi de surcharges devant l'obturateur en fonction du temps. Fermeture totale en $\tau = 20$ sec.

Le premier maximum $B_{*max.}$ n'existera pas toujours (de même que dans le cas d'Allievi), par contre, B_m toujours. Dans ce cas, le calcul de B_m , qui devient indispensable, peut être long, puisqu'il faut calculer successivement $B_1, B_2, \dots B_m$, ainsi que $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{m-1}$. Nous nous sommes demandés s'il n'existait point une méthode approchée pour déterminer B_{*m} . Il en existe une, en effet; cependant cette méthode, que nous avons élaborée en nous appuyant sur des considérations de calculateur, déplaira aux mathématiciens. Elle se justifie cependant par les résultats numériques très exacts qu'elle donne, et par le fait qu'elle sera, en plus d'un cas, indispensable au calculateur.

L'exposé que nous allons faire de cette méthode ne prétend point à la rigueur mathématique, et nous sommes conscients de ce qu'il contient d'intuition. *Notre attention a été attirée par le fait que, pour une fermeture linéaire de l'obturateur, la fonction Φ_i est assimilable à une droite* (voir fig. 25). Cette constatation tout à fait générale nous permet de calculer *a priori*, avec une approximation suffisante, une valeur α_i quelconque, pourvu que i soit assez grand et la fermeture assez lente. (Si la fermeture est rapide, ou i petit, α_i se laisse calculer directement, sans difficulté.)

Appuyons notre affirmation d'un exemple précis, et comparons les valeurs α_i ou α_h exactes et celles calculées par la méthode *a priori* pour le cas $\tau = 20''$.

TABLEAU 5.

Comparaison entre les valeurs de α_h calculées exactement (tableau 1) et celles calculées a priori.

h	α_h exact	α_h approché	Différence	h	α_h exact	α_h approché	Différence
1	0.2245	0.2245	—	8	0.7943	0.8008	+ 0.0065
2	0.2245	0.2245	—	9	0.8160	0.8239	+ 0.0079
3	0.3703	0.3829	+ 0.0126	10	0.8384	0.8425	+ 0.0041
4	0.5578	0.5805	+ 0.0227	12	0.8690	0.8690	\pm 0.00
5	0.6939	0.6995	+ 0.0056	14	0.8885	0.8880	— 0.0005
6	0.7486	0.7430	— 0.0056	16	0.8975	0.9028	+ 0.0053
7	0.7762	0.7741	— 0.0021				

Le calcul de α_i par la méthode approchée n'exige d'ailleurs point que l'on développe la série α_i . Nous pouvons calculer α_i par différence, en supposant Φ linéaire.

Dans ce cas, nous aurons d'une façon générale (fig. 26):

$$A \frac{\Phi_{m-p}}{\Phi_m} = A - A \frac{\Phi_m - \Phi_{m-p}}{\Phi_m} = A - A \frac{p}{m}$$

et nous pourrons écrire l'équation (33) sous la nouvelle forme :

$$\alpha_i = 1 - s_I s_{III} \frac{\Phi_i - \Phi_{i-n_I}}{\Phi_i} - s_I s_{III} r_I \frac{\Phi_i - \Phi_{i-2n_I}}{\Phi_i} - \dots - s_I s_{III} r_I^{i-2n_I} \cdot \frac{\Phi_i - \Phi_1}{\Phi_i}$$

Si la fonction Φ_i est linéaire, ainsi que nous le supposons pour ce calcul approximatif, nous aurons :

$$\alpha_i = 1 - \frac{n_I}{i} [s_I s_{III} + 2s_I s_{III} r_I + 3s_I s_{III} r_I^2 + \dots]$$

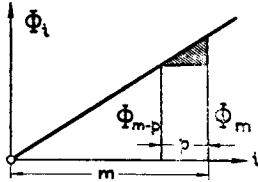


FIG. 26.
Hypothèse N° 2
(Φ linéaire).

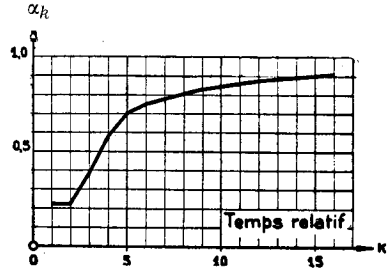


FIG. 27. — « Courbe caractéristique normale de réaction » ou « Courbe de réaction de la conduite ».

Nous n'effectuerons ce calcul approché que si i est assez grand. Dans ce cas, nous écrirons :

$$\alpha_i = 1 - \frac{n_I}{i} \cdot \frac{s_I s_{III}}{(1 - r_I)^2} = 1 - \frac{n_I}{i} \cdot \frac{s_{III}}{s_I} \quad (121)$$

Cette formule approchée donne α_i en fonction des oscillations dans la conduite I. On peut aussi exprimer α_i en fonction des oscillations dans la conduite III, en se rappelant que : $i = kn_{III}$; d'où :

$$\alpha_k = 1 - \frac{n_I}{kn_{III}} \cdot \frac{s_{III}}{s_I} \quad (121a)$$

En reportant graphiquement en fonction de k , les valeurs de α_k , calculées a priori pour Φ_{*k} croissant linéairement, nous

obtenons la *courbe caractéristique normale de réaction*, ou, en abrégé, *courbe de réaction* (fig. 27). Cette courbe ne dépend que des éléments géométriques de la conduite. Alors qu'Allievi définissait une conduite par la seule caractéristique ρ_* , nous y joindrons dorénavant la *courbe de réaction*.

Il est évident que l'on peut aussi calculer point par point une courbe de réaction exacte, qui dépendra alors des conditions de fermeture.

La concordance des deux séries de valeurs α_k du tableau 5 est excellente pour les valeurs de k supérieures à 5. Nous avons obtenu une concordance du même ordre dans d'autres cas. Nous pourrions en particulier calculer a priori la valeur α_{m-1} , indispensable pour exprimer B_{*m} .

Partons de la formule:

(39)

$$\alpha_k (\zeta_{*k}^2 - 1) + (\zeta_{*k+1}^2 - 1) = 2\rho_* [\alpha_k \eta_k \zeta_{*k} - \eta_{k+1} \zeta_{*k+1} + (1 - \alpha_k)]$$

S'il existe une limite de ζ_{*k} , pour k tendant vers $(m - 1)$, — ce que nous supposons par analogie avec la théorie d'Allievi, mais sans pouvoir le démontrer de façon rigoureuse — nous aurons:

$$\zeta_{*k} \cong \zeta_{*k+1} = \zeta_{*m}$$

et en remplaçant dans (39) k par $(m - 1)$, c'est-à-dire α_k par α_{m-1} , η_k par η_{m-1} et η_{k+1} par η_m :

(122)

$$(\alpha_{m-1} + 1) (\zeta_{*m}^2 - 1) = 2\rho_* [\zeta_{*m} (\eta_{m-1} \alpha_{m-1} - \eta_m) + 1 - \alpha_{m-1}]$$

Faisons $\eta_m = 0$ (fermeture complète). Alors: $\eta_{m-1} = \frac{1}{\Theta_{III}}$, puisque la courbe de fermeture est représentée par une droite, Nous tirons de (122):

(122a)

$\zeta_{*m} = \frac{\rho_* \frac{\alpha_{m-1}}{\Theta_{III}} + \sqrt{\left(\frac{\rho_* \alpha_{m-1}}{\Theta_{III}}\right)^2 + (\alpha_{m-1} + 1) [\alpha_{m-1} + 1 + 2\rho_* (1 - \alpha_{m-1})]}}{\alpha_{m-1} + 1}$
--

équation qui s'identifie, pour $\alpha_m = 1$, à :

$$\zeta_{*m} = \frac{\rho_*}{2(\tau)} + \sqrt{\left(\frac{\rho_*}{2(\tau)}\right)^2 + 1}. \quad (15a)$$

En pratique, nous prendrons pour m le plus grand nombre entier contenu dans Θ_{III} . Vérifions notre formule pour $\tau = 20''$, $\Theta_{III} = 17,55$; $m = 17$; $\alpha_{16} = 0,9028$; nous obtenons :

$$\zeta_{*m} = \frac{1,1 \cdot 0,9028/17,55 + \sqrt{(1,1 \cdot 0,9028/17,55)^2 + 1,9028 (1,9028 + 2,2 \cdot 0,0972)}}{1,9028} = 1,083$$

d'où

$$B_{*m} = 0,174.$$

Le calcul exact nous avait donné :

$$\zeta_{*17} = 1,086; B_{*17} = 0,179; B_{17} = 0,1105; \frac{B_m}{B_{*m}} = 0,6175.$$

La différence entre les deux valeurs de ζ_{*m} n'est que de 3 ‰. En fait, on ne peut parler d'erreur, puisque les dernières valeurs de B_{*k} oscillent entre 0,171 et 0,179, c'est-à-dire, autour de $B_{*m} = 0,174$.

Il faut donc reconnaître que notre formule approchée (122a) donne des résultats très satisfaisants, malgré la façon intuitive de sa détermination.

En reportant graphiquement les valeurs B_{*m} en fonction des temps de fermeture, on obtiendra « la courbe caractéristique des surcharges limites devant l'obturateur », courbe qui joue un rôle analogue à celle des surcharges maxima, avec laquelle elle se confondra en plus d'un cas (Fig. 24).

En résumé, pour juger de quelle façon une conduite réagit aux fermetures totales, nous procéderons de la manière suivante :

L'abaque classificateur d'Allievi nous orientera d'une façon générale sur les propriétés de la conduite et, en particulier, sur la position probable de la surcharge maximum. Si celle-ci se présente au début du mouvement de fermeture, on trouvera

sans difficulté la valeur exacte de ζ_{*max} , et B_{max} au moyen du calcul direct pour diverses valeurs de τ , choisies, si possible, aux environs de la valeur envisagée pour l'exécution. On tracera ainsi, sans difficulté, la « courbe caractéristique des surcharges maxima », tant devant l'obturateur qu'au point de discontinuité. Le problème est alors entièrement résolu.

Si l'abaque d'Allievi laisse prévoir que les valeurs ζ_{*max} et ζ_{*m} sont pratiquement identiques, on aura avantage à traiter le problème au moyen de la formule approchée (122a) et à tracer la « courbe de réaction » et la « courbe caractéristique des surcharges limites devant l'obturateur » qui est sensée se couvrir avec la courbe des maxima. Il sera toujours utile de vérifier au moins l'un des points de cette courbe par un calcul direct, si possible, aux environs de la valeur τ qui sera définitivement adoptée. On vérifiera par ce même calcul les valeurs correspondantes de B_{max} et de B_m . Si Θ_{III} est assez grand, la formule approchée (149), que nous développerons au chapitre IIB2, donne pour B_m des résultats acceptables.

En pratique, le diamètre des conduites forcées diminue de l'amont vers l'aval. Si tel est le cas, on peut s'attendre aux résultats suivants :

a) Les surcharges réelles sont sensiblement inférieures à celles indiquées par Allievi.

b) les valeurs B_{max} seront plus petites que $\frac{n_I}{n_I + n_{III}} B_{*max}$, sauf pour les valeurs très petites de Θ_{III} .

Ces deux conclusions s'expliquent facilement : la discontinuité renvoie des ondes négatives vers l'obturateur, et l'ensemble de la pression dans la conduite diminue. Nous avons donc là une indication précise, selon laquelle la vitesse de fermeture de l'obturateur peut être augmentée par rapport aux valeurs admises en appliquant l'ancienne méthode.

b) *Ouverture linéaire totale, et contre-coup d'ouverture.*

Un mouvement d'ouverture peut être dangereux pour une conduite forcée en raison, soit du contre-coup d'ouverture, soit

des pressions absolues « négatives », c'est-à-dire, — celles-ci étant impossibles — en provoquant la rupture de la colonne liquide et l'évaporation de l'eau dans le vide produit. Nous ne sommes que très mal renseignés sur les conséquences possibles d'une pareille rupture et sur ses répercussions. Cependant, les phénomènes de cavitation relevés dans les turbines doivent nous inciter à la prudence, et les techniciens feront bien d'éliminer de leurs projets tout danger de rupture de la colonne liquide. L'étude des conditions d'ouverture se restreint donc à l'examen de deux points bien définis.

aa) *D'après Allievi.*

Allievi a montré qu'il n'y a possibilité de contre-coup positif, que si $\rho_* < 1$. Dans notre cas, $\rho_* = 1,1$; le contre-coup reste négatif et sans danger.

Etudions la question de la rupture de la colonne liquide. Considérons le point A. D'après la fig. 23, la pression absolue y_0 est de 61,30^m. Pour éviter la rupture, il faudra que la surcharge négative reste supérieure à — 61,30^m.

Ecrivons l'équation fondamentale (2) appliquée au point A:

$$y = y_0 + F_A(t) + f_A(t) = y_0 + F(t) - F(t - \mu_1)$$

Il est évident que le moment critique sera l'arrivée en A de la première onde réfléchie en C et qui marque la fin de la première phase de la conduite I et, par le fait, le minimum de la pression en A, l'ouverture étant rapide. Il faut qu'à ce moment la colonne d'eau ne soit pas encore rompue. Nous ferons donc: $t = \mu_1$; d'où: $F(o) = 0$, et:

$$y_1 - y_0 = F(\mu_1) = Y_0(\zeta_1^2 - 1) .$$

Pour que

$$F(\mu_1) = Y_0(\zeta_1^2 - 1) \geq -61,30 \text{ m.}$$

au point A, il faut que la même surcharge :

$$F(\mu_1) = H_0 (\zeta_{*1}^2 - 1) \geq -61,30 \text{ m.}$$

se soit auparavant produite en O, à l'instant $t = \mu_1 = 2''84$, après le début du mouvement de l'obturateur. Raisonnons maintenant sur ce qui se passe en O. Reprenons les équations générales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_{*1}^2 - 1 = 2\rho_* (\eta_0 \zeta_{*0} - \eta_1 \zeta_{*1}) \\ \zeta_{*1}^2 + \zeta_{*2}^2 - 2 = 2\rho_* (\eta_1 \zeta_{*1} - \eta_2 \zeta_{*2}) \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (10)$$

qu'Allievi transforme en :

$$\begin{array}{l} \zeta_{*1}^2 - 1 = 2\rho_* \left(-\frac{t_*}{\Theta} \zeta_{*1} \right) \\ \zeta_{*1}^2 + \zeta_{*2}^2 - 2 = 2\rho_* \left(\frac{t_*}{\Theta} \zeta_{*1} - \frac{t_* + 1}{\Theta} \zeta_{*2} \right) \\ \dots \dots \dots \end{array}$$

dans lesquelles $0 < t_* < 1$. Dans notre cas, nous faisons : $t_* = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_{III}} = 0,714$; $\mu_1 + \mu_{III}$ étant la durée de l'oscillation dans OAC.

L'équation

$$\zeta_{*1}^2 - 1 = -2\rho_* \frac{t_*}{\Theta} \zeta_{*1} = -\frac{61,30}{142,80} = -0,429$$

devient : $-0,429 = -2 \cdot 1,1 \cdot \frac{0,714}{\Theta} \sqrt{1 - 0,429}$ et nous en tirons :

$$\Theta = 2,76; \text{ d'où: } \tau = (\mu_1 + \mu_{III}) \Theta = 3'',98 \times 2,76 = 11'',03$$

Il faut donc que l'ouverture se fasse en $\tau \geq 11'',03$, pour qu'il n'y ait point rupture de la colonne liquide en A. Nous

avons refait ce calcul pour un point a quelconque, situé sur la conduite I, entre A et C, et vérifié que le point A est bien le plus menacé.

bb. *D'après la théorie générale.*

Nous allons contrôler ces résultats d'après la théorie générale. Il nous faut, à cet effet, changer de méthode et effectuer des calculs directs, en calculant point par point la courbe des surcharges devant l'obturateur 0 et au point A. Le calcul est analogue à celui que nous avons donné en exemple au tableau 1. Nous n'en reproduirons donc pas les détails.

Après avoir calculé, successivement et point par point, des mouvements d'ouverture s'effectuant en $\tau = 3'', 4'', 6'', 8'', \dots$ nous avons constaté que, si $\tau = 6''$, la surcharge en A est: $H_0 B_1 = -142,80 \times 0,419 = -59,9$ m., soit, presque égale à la surcharge de rupture $-61,30$ m. C'est dire que, si l'ouverture se fait en $\tau \geq 6''$, il n'y a pas de rupture de la colonne liquide en A.

Vérifions, pour une ouverture en $\tau = 6''$, les pressions en un point a , situé sur la conduite I, à ~ 1000 m. de l'embouchure C, tel que $n_a = \frac{\mu_a}{\mu_{III}} = 1,5$. Nous utilisons, à cet effet, les relations:

$$B_{a_k} = \Xi_k - \Xi_{k-n_a} \quad (62)$$

et:

$$\Xi_k = (\zeta_k^2 - 1) + \Xi_{k-n_1} \quad (63)$$

où toutes les valeurs sont exprimées en pourcentage de H_0 . Le calcul direct des surcharges en A nous a donné les valeurs $\zeta_k^2 - 1$ qu'il suffit de relever dans nos tableaux. Il est commode d'effectuer le calcul de Ξ_k et B_{a_k} graphiquement, et nous l'avons reproduit sur la figure 28. La courbe 1 représente les valeurs $B_k = \zeta_k^2 - 1$. La courbe 2 est celle des Ξ_k obtenue par addition graphique. En la déplaçant de n_a , nous obtenons la courbe 3

des Ξ_{k-n_a} . B_a est égal à la différence des ordonnées des courbes 2 et 3. On lit aisément que :

$$B_{a \text{ min}} = -0,342.$$

Or, d'après le tableau 2, B_a ne devrait pas descendre au-dessous de $-\frac{43,98}{142,80} = -0,308$. Le point a est donc plus menacé que le point A; mais la différence est peu sensible.

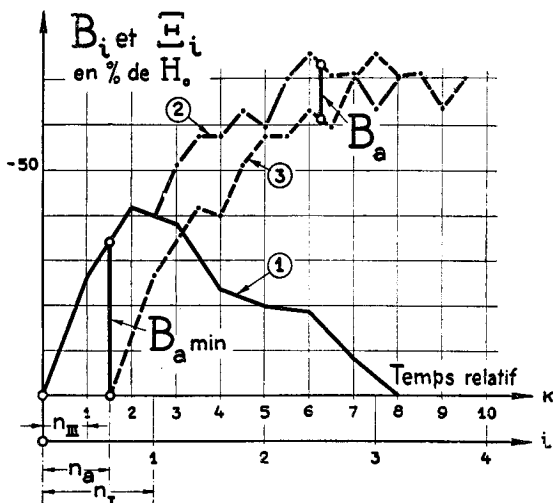


FIG. 28. — Calcul graphique des surcharges en un point a , situé à 1000 m de C. Ouverture totale en 6 sec. $n_a = 1,5$; $n_I = 2,5$; $n_{III} = 1$.

1. Courbe des valeurs $\zeta_r^2 - 1 = B_r$;
2. Courbe des valeurs $\Xi_k = (\zeta_k^2 - 1) + \Xi_{k-n_I}$;
3. Courbe des valeurs Ξ_{k-n_a} .

Nous pouvons donc affirmer que si le temps d'ouverture est compris entre 6'' et 7'', la colonne d'eau se rompra entre A et C sur la conduite I. Si $\tau \cong 6''$, la rupture se fait en A, et si $\tau < 6''$, la rupture s'effectue entre 0 et A, sur la conduite III. Ces conclusions sont quelque peu différentes de celles trouvées par application des formules d'Allievi.

On vérifie également par le calcul direct que le contre-coup d'ouverture en A est positif (contrairement à ce que dit Allievi);

mais que sa valeur absolue est très faible ($B_{* \max} = \pm 0,0$ et $B_{\max} = + 0,005$). Il n'en reste pas moins qu'on fera bien de calculer exactement la valeur du contre-coup chaque fois que $\rho_* < 1$, c'est-à-dire lorsqu'on a à étudier des conduites à haute pression.

Nous pouvons conclure que, dans notre cas particulier, la conduite est, dans son ensemble, moins sensible à une ouverture brusque que ne le laissaient prévoir les formules d'Allievi. Il faut que l'ouverture se fasse en moins de 6'' à 7'' (au lieu de 11'' d'après Allievi) pour qu'il y ait rupture de la colonne d'eau.

La théorie d'Allievi indiquait que la rupture de la colonne liquide ne pouvait avoir lieu qu'en A, ou entre O et A. Par contre, la théorie générale montre que la rupture peut aussi s'effectuer sur la conduite I, c'est-à-dire sur l'élément de conduite qui a, en réalité, le plus souffert.

Cependant, une ouverture brusque ne peut avoir lieu que si le régulateur de la turbine lui-même est avarié. Ceci nous conduit à rechercher une cause plus générale de l'accident. Nous la trouverons dans des « manœuvres alternatives rythmiques » de l'obturateur, mouvement qu'Allievi avait déjà étudié, sans cependant épuiser le sujet.

2. *Manœuvres alternatives rythmiques de l'obturateur.*

a) *Généralités sur les mouvements rythmiques.*

Allievi a recherché si certaines manœuvres non linéaires de l'obturateur ne pouvaient pas être plus dangereuses, pour une conduite, que les mouvements linéaires. Son attention fut sollicitée par les phénomènes de résonance, auxquels tous les systèmes élastiques sont sensibles¹.

Il a donc étudié successivement:

A) Les manœuvres de fermeture et d'ouverture partielles se succédant au rythme 2μ . Il désigne les phénomènes hydro-

¹ Voir ALLIEVI-GADEN; tome I, page 100.

dynamiques qui en sont la conséquence par: *résonances provoquées par manœuvres alternatives rythmiques*.

B) Les manœuvres de fermeture ou d'ouverture progressives exécutées par saccades rythmiques. Allievi appelle les phénomènes qui découlent de ce genre de manœuvres: *résonances provoquées par fermeture ou ouverture saccadées rythmiques*.

Occupons-nous des seules manœuvres alternatives rythmiques.

Allievi classe tous les résultats de son étude en un seul abaque¹ et conclut son étude en montrant que la charge relative limite devant l'obturateur ne peut, en aucun cas, dépasser la valeur limite $Z_1^2 = 2,00$, c'est-à-dire que la charge limite absolue en 0 ne dépassera pas $2H_0$. Il ressort de cet abaque que la limite $Z_1^2 = 2$ n'est atteinte que dans des cas très rares (très hautes chutes), et que dans les cas pratiques, la limite Z_1^2 sera inférieure à 2, et souvent même $Z_1^2 < \zeta_{* \max}^2$. Allievi, d'ailleurs, estimait qu'une conduite capable de résister à la surcharge de fermeture linéaire (qui est de 10 à 30% de H_0), sans que les tensions admissibles ne soient dépassées, ne pourrait en aucun cas se rompre sous l'effet d'une charge égale à $2H_0$, c'est-à-dire d'une surcharge de 100% de H_0 . En effet, le rapport de la charge exceptionnelle ($Z_1^2 = 2$) à la charge normale ($\zeta_{h \max}^2 = 1,1$ à $1,3$) sera de $\frac{2}{1,3} = 1,54$ à $\frac{2}{1,1} = 1,82$. Or, le coefficient habituel de sécurité est, dans tous les cas, supérieur à 2, et Allievi de conclure: « ... il n'y a que des conduites défectueuses qui puissent éclater ». Le fait que, depuis quelques années, on a tendance à diminuer le coefficient de sécurité pour la charge normale, devrait nous inciter à la prudence et à une précision plus grande dans les calculs des charges exceptionnelles.

La proposition d'Allievi pourrait se soutenir pour le cas d'une conduite de section constante et de tracé rectiligne, ainsi que nous le verrons en étudiant les surcharges le long d'une pareille conduite. Dans le cas général, par contre, l'opinion d'Allievi se révélera inexacte, et nous pensons que c'est à l'application trop confiante de ses conclusions que l'on doit attribuer la majorité

¹ ALLIEVI-GADEN; fig. 53 du tome II.

des accidents, parfois très graves, survenus à des conduites forcées.

Nous allons rectifier l'opinion émise par Allievi, en examinant d'abord son abaque classificateur relatif à des conduites de section constante. Voici comment Allievi pose les équations de son abaque:

Il fait, dans les équations de son système fondamental (10),

$$\eta_0 = \eta_2 = \eta_4 \dots = 1. \quad \eta_1 = \eta_3 = \eta_5 = \dots = \eta_{(2k-1)}$$

Les mouvements alternatifs rythmiques pouvant être amorcés à partir d'une position de l'obturateur quelconque, l'état $\eta_0 = 1$ devient dans ce cas un état quelconque, compris entre l'ouverture et la fermeture complètes.

A ce degré d'ouverture de l'orifice d'écoulement $\eta_0 = 1$ ne correspond donc plus une vitesse C_0 du régime normal Q_0 , mais une vitesse initiale $c_0 \neq C_0$.

En définissant $\rho_* = \frac{ac_0}{2gH_0}$, la caractéristique cesse d'avoir une valeur définie en fonction des seules dimensions de la conduite, mais elle devient une valeur variable, dépendant de la position de l'obturateur.

Quant à la valeur Θ , Allievi fait de nouvelles hypothèses:

Il désigne par Θ , dans le cas d'une fermeture, la durée de la manœuvre à partir de l'état initial $\eta_0 = 1$ jusqu'à fermeture complète.

Dans le cas de l'ouverture, Θ désigne le temps nécessaire pour doubler la section de l'orifice.

Nous aurons donc en nous basant sur ces nouvelles définitions (voir figure 29)

$$\eta_1 = 1 \pm \frac{1}{\Theta}$$

suyvant que nous avons affaire à une manœuvre d'ouverture ou de fermeture.

On voit donc, par ces quelques remarques, qu'Allievi a complètement abandonné les anciennes définitions utilisées et établies pour les mouvements de fermeture. Ceci lui a permis

de simplifier ses calculs, mais ôte leur valeur aux comparaisons qu'il fait, puisque $\eta_0 = 1$ ne correspond plus à l'ouverture complète et que ρ_* n'est plus une caractéristique constante de la conduite.

Les définitions de ρ_* et Θ ne se couvrant plus dans le cas d'une fermeture linéaire et d'une manœuvre alternative rythmique, nous ne pensons pas que l'abaque comparatif (fig. 53 d'Allievi) puisse être de quelque utilité. En pratique, il induira même à des conclusions erronées.

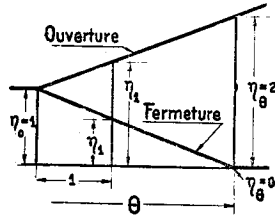


FIG. 29.

Diagramme d'ouverture et de fermeture linéaires.

Etudions maintenant un cas qu'Allievi a traité en partant de ses nouvelles définitions et pour lequel il a cependant trouvé une solution exacte pour les valeurs limites des surcharges. Il s'agit des manœuvres d'ouverture et de fermeture alternées, débutant par l'état initial $\eta_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

On montre sans difficulté aucune que, dans le cas d'une manœuvre alternative rythmique s'amorçant à partir d'une ouverture initiale nulle, les pressions oscillent entre les deux valeurs limites $Z_1^2 = 0$ et $Z_2^2 = 2$. La proposition est vraie, quelles que soient la conduite et sa caractéristique ρ_ , pourvu que la section soit constante.*

Le fait qu'Allievi soit arrivé aux mêmes conclusions que nous (voir Allievi, page 105), est aisé à expliquer.

Allievi a d'abord démontré (voir Allievi, page 102) que le rapport des deux valeurs limites

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \eta_1,$$

c'est-à-dire indépendant de la caractéristique de la conduite ρ_* .

Ensuite, pour le cas qui nous concerne, il a dû poser $\eta_1 = 0$, ce qui revient à admettre dans notre cas $\eta_0 = 0$, puisque son mouvement alternatif débute par une manœuvre de fermeture,

tandis que nous faisons coïncider l'origine du mouvement alternatif avec la fermeture complète de l'obturateur.

Nous voyons donc sans autre que, dans ce cas spécial, les nouvelles hypothèses coïncident de nouveau avec les nôtres, ou plutôt qu'elles ne sont plus en contradiction.

Nous allons démontrer cette proposition, en employant les propres méthodes d'Allievi, que nous supposons connues. La démonstration n'est d'ailleurs point essentielle, mais bien la conclusion que nous en tirons.

Nous nous reportons à la page 76, tome I, de l'ouvrage d'Allievi, traduction Gaden. Nous constatons que, dans ce paragraphe 17, les définitions des valeurs Θ et ρ_* coïncident de nouveau avec nos propres définitions. L'équation (10):

$$\zeta_k^2 + \zeta_{k+1}^2 - 2 = 2\rho_* (\eta_k \zeta_k - \eta_{k+1} \zeta_{k+1}) \quad (10)$$

se confond avec les équations (55), page 77 du volume cité.

Nous écrivons (10) sous la forme suivante:

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta_0^2 + (\zeta_1 + \eta_1 \rho_*)^2 &= \eta_1^2 \rho_*^2 + 2 \\ (\zeta_1 - \eta_1 \rho_*)^2 + (\zeta_2 + \eta_2 \rho_*)^2 &= \eta_1^2 \rho_*^2 + \eta_2^2 \rho_*^2 + 2 \\ (\zeta_2 - \eta_2 \rho_*)^2 + (\zeta_3 + \eta_3 \rho_*)^2 &= \eta_2^2 \rho_*^2 + \eta_3^2 \rho_*^2 + 2 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right. \quad (123)$$

On voit aisément que les équations (123) représentent, en coordonnées ζ_{i-1} et ζ_i , un système de cercles $\gamma_1; \gamma_2; \gamma_3; \gamma_4 \dots$ dont les centres et les rayons sont donnés par le tableau suivant:

Cercles	Coordonnées des Centres	Carré du Rayon
γ_1	0 et $-\eta_1 \rho_*$	$\eta_1^2 \rho_*^2 + 2$
γ_2	$\eta_1 \rho_*$ et $-\eta_2 \rho_*$	$(\eta_1^2 + \eta_2^2) \rho_*^2 + 2$
γ_3	$\eta_2 \rho_*$ et $-\eta_3 \rho_*$	$(\eta_2^2 + \eta_3^2) \rho_*^2 + 2$
...

Ces équations sont applicables à un cas d'ouverture quelconque.

Introduisons dans les équations (123) les valeurs :

$$\gamma_0 = \gamma_2 = \gamma_4 = \dots = 0 ; \quad \text{et} : \quad \gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_5 = \dots = \frac{1}{(\tau)}$$

On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_0^2 + \left(\zeta_1 + \frac{\rho_*}{(\tau)} \right)^2 = \frac{\rho_*^2}{(\tau)^2} + 2 \\ \left(\zeta_1 - \frac{\rho_*}{(\tau)} \right)^2 + \zeta_2^2 = \frac{\rho_*^2}{(\tau)^2} + 2 \\ \zeta_2^2 + \left(\zeta_3 + \frac{\rho_*}{(\tau)} \right)^2 = \frac{\rho_*^2}{(\tau)^2} + 2 \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \quad (124)$$

qui définissent les cercles suivants :

Cercles	Coordonnées des Centres		Carré du Rayon
γ_1	0	et $-\frac{\rho_*}{(\tau)}$	$\frac{\rho_*^2}{(\tau)^2} + 2$
γ_2	$\frac{\rho_*}{(\tau)}$	et 0	$\frac{\rho_*^2}{(\tau)^2} + 2$
γ_3	0	et $-\frac{\rho_*}{(\tau)}$	$\frac{\rho_*^2}{(\tau)^2} + 2$
γ_4	$\frac{\rho_*}{(\tau)}$	et 0	$\frac{\rho_*^2}{(\tau)^2} + 2$
.....

Il n'y a donc que deux cercles, de centres $C_1(0 \text{ et } -\frac{\rho_*}{\tau})$ et $C_2(\frac{\rho_*}{\tau} \text{ et } 0)$ et de rayon $R = \sqrt{\frac{\rho_*^2}{(\tau)^2} + 2}$. Allievi montre (page 101) que, pour des manœuvres alternatives rythmiques, les deux

cercles γ_1 et γ_2 se coupent en un point K dont les coordonnées Z_1 et Z_2 , liées par la relation:

$$Z_1^2 + Z_2^2 - 2 = 0, \quad (125)$$

sont les limites vers lesquelles tendent les valeurs ζ_{*i} pair et impair. D'après la figure 30, on voit immédiatement que le point K se trouve sur l'axe pair et que:

$$Z_1^2 = 0, \quad \text{et} \quad Z_2^2 = 2$$

c'est-à-dire que les valeurs:

$$\zeta_1^2, \zeta_3^2, \zeta_5^2, \dots \text{ ont comme limite } 0,$$

et les valeurs:

$$\zeta_2^2, \zeta_4^2, \zeta_6^2, \dots \text{ ont comme limite } + 2.$$

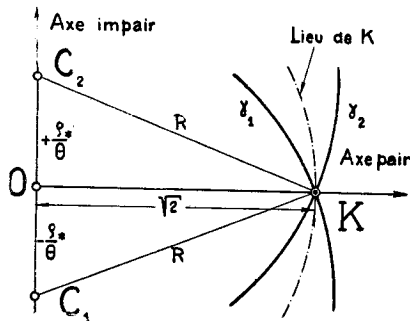


FIG. 30.

Cette démonstration est absolument générale et indépendante de ρ_* et de Θ . Si le mouvement alternatif commence par une ouverture à partir de $\eta_0 = 0$ et $c_0 = 0$, les limites des pressions maxima sont les mêmes pour toutes les conduites.

L'équation :

$$Z_1^2 + Z_2^2 - 2 = 0 \quad (125)$$

montre que le lieu des points K est un cercle de centre 0 et de rayon $OK = \sqrt{2}$. On voit par là que, si le mouvement part d'une ouverture η_0 non nulle ($\eta_0 \neq 0$), mais encore petite, l'abscisse Z_2 du point K ne sera que peu différente de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire que la limite des valeurs $\zeta_2^2, \zeta_4^2, \zeta_6^2, \dots$, sans atteindre 2, ne sera que peu inférieure à 2. De pareils mouvements sont donc presque aussi dangereux que le mouvement partant exactement de $\eta_0 = 0$.

Cette démonstration complète donc le travail d'Allievi, et prouve que des mouvements alternés rythmiques partant de 0 ont comme limite 2.

Les conduites forcées ne sont, en général, ni rectilignes, ni de section constante. Souvent, elles présentent des coudes saillants prononcés, qui sont des points très sensibles. Il convient donc de généraliser le problème et d'étudier la répartition des surcharges le long d'une conduite non rectiligne, à caractéristiques multiples, dans le cas de manœuvres alternatives rythmiques de l'obturateur.

La conduite que nous étudions nous fournit un excellent exemple. Considérons des manœuvres alternatives rythmiques de l'obturateur, c'est-à-dire une ouverture partielle à partir de $\eta_0 = 0$ jusqu'à η_c , suivie d'une fermeture partielle de η_c à 0; ce mouvement se répétant un certain nombre de fois, au même rythme. Le rythme choisi, pour la durée d'une manœuvre de sens constant, devrait être celui de la conduite, c'est-à-dire $n_I + n_{III} = 3,5$, de façon à entrer exactement en résonance avec elle. Appelons cadence d'un mouvement alternatif rythmique le rapport de sa durée à la période de la conduite totale. De même que nous avons montré plus haut, qu'il n'était point nécessaire que le mouvement se fit à partir de $\eta_0 = 0$, pour devenir dangereux, nous allons choisir un rythme de cadence $\frac{3}{3,5} = 0.857$ légèrement différent de 1, ceci afin de ne pas nous placer dans un cas qu'on pourrait croire excep-

tionnel. Nous supposons, par ailleurs, que le régulateur de la turbine fonctionne normalement, c'est-à-dire à une vitesse telle que l'ouverture totale s'effectuerait en $\tau = 25''$. Nous avons alors :

$$\tau = 25''; \Theta_{III} = \frac{\tau}{\nu_{III}} = \frac{25}{1.14} = 21,95 \text{ et } \eta_c = \frac{3}{21,95} = 0.1368 .$$

Nous calculons point par point, en faisant successivement $k = 1, 2, 3 \dots$, les valeurs de B_{*k} et B_k , en appliquant notre méthode générale. Nous ne reproduisons pas ici ces calculs, et

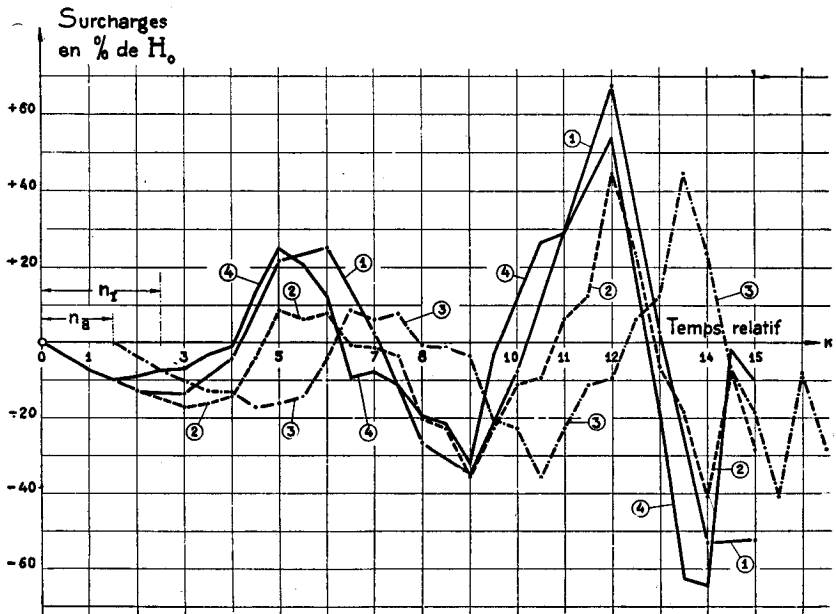


FIG. 31. — Calcul graphique des surcharges en un point a , situé à 1000 m. de C. — Manœuvres alternatives rythmiques de cadence 3 : 3,5.

Donnés : $\rho_* = 1,1$; $\eta_0 = 0$; $n_1 = 2,5$; $n_a = 1,5$.

1. Courbe des valeurs B_k (cal. analytique);
2. Courbe des valeurs $\Xi_k = (\zeta_k^2 - 1) + \Xi_{k-n_1}$;
3. Courbe des valeurs Ξ_{k-n_a} ;
4. Courbe des valeurs $B_{a_k} = \Xi_k - \Xi_{k-n_a}$.

en extrayons simplement les valeurs B_k indispensables au calcul graphique des charges en un point a quelconque, situé sur la conduite I, entre A et C. Nous utilisons les 2 relations connues: (où nous remplaçons les indices i par les indices k):

$$\Xi_k = \zeta_k^2 - 1 + \Xi_{k-n_i} \quad (63)$$

et:

$$B_{a_k} = \Xi_k - \Xi_{k-n_a} \quad (62)$$

La figure 31 reproduit ce calcul pour un point a situé à 1000 m. à l'aval de l'embouchure C. La courbe 1 n'est autre que le relevé graphique des valeurs B_k , calculées analytiquement. En déplaçant de n_a la courbe 2 représentant la fonction Ξ_k , nous obtenons Ξ_{k-n_a} (courbe 3). La différence entre les ordonnées de ces deux courbes nous donne B_{a_k} (courbe 4). Nous avons répété ce calcul pour les points b et d , situés à 500 m. et à 250 m. de C. Il n'est d'ailleurs point nécessaire de pousser les calculs très loin. Dès le troisième battement, les valeurs des surcharges tant positives que négatives atteignent des valeurs excessives, ainsi que le prouve le tableau suivant:

TABLEAU 6.

Surcharges relatives en pourcents de H_0 .

Point	O	A	a	b	d
Distance de C . . .	2142 m.	1634 m.	1000 m.	500 m.	250 m.
n	3,5	2,5	1,5	0,75	0,375
1 ^{er} minimum . . .	— 0,203	— 0,137	— 0,100	— 0,06	— 0,04
1 ^{er} maximum . . .	+ 0,311	+ 0,246	+ 0,245	+ 0,10	+ 0,05
2 ^{me} minimum . . .	— 0,420	— 0,3498	— 0,320	— 0,22	— 0,150
2 ^{me} maximum . . .	+ 0,803	+ 0,6725	+ 0,530	+ 0,34	+ 0,230
3 ^{me} minimum . . .	— 0,5985	— 0,5315	— 0,635	— 0,450	— 0,240

Ce tableau exige quelques commentaires:

a) Les surcharges positives et négatives ne diminuent point linéairement le long de la conduite.

b) Les surcharges en O croissent très rapidement dès les premiers battements, tout en restant inférieures aux valeurs limites:

$$Z_1^2 - 1 = -1 \quad \text{et} \quad Z_2^2 - 1 = +1.$$

c) Les surcharges croissent plus rapidement encore aux points A, a, b et d.

d) Nous avons dû interrompre les calculs dès le troisième battement, les valeurs négatives calculées dépassant déjà largement les valeurs limites du tableau 2, à savoir:

Aux points	O	A	a	d
En % de H_0	-106,7	-42,9	-30,8	-18,1

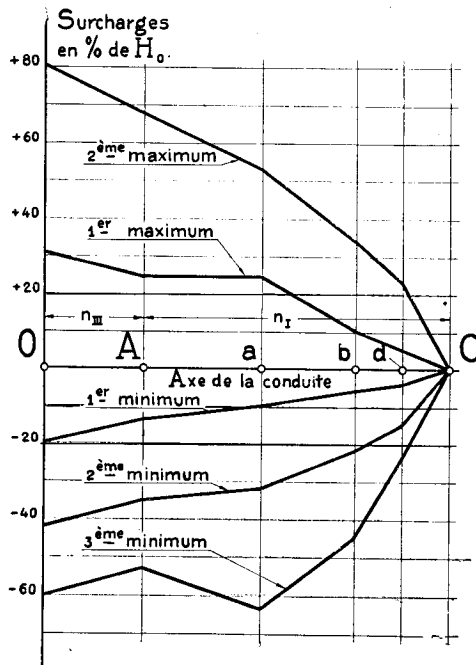


FIG. 32. — Répartition des surcharges le long de la conduite, pour des manœuvres alternatives rythmiques de cadence 3 : 3,5. Les surcharges sont exprimées en pourcents de H_0 .

C'est dire que la colonne d'eau s'est certainement rompue; la suite du calcul serait fictive.

Nous avons reporté les valeurs du tableau 6 dans la figure 32, en choisissant pour abscisses, non pas les longueurs, mais les temps relatifs de parcours.

Afin de mieux faire ressortir le danger des surcharges, tant positives que négatives, nous reproduisons au tableau 7, et sur la figure 33, les charges totales exprimées en pourcents de la pression statique locale y_{x_0} . On remarquera qu'il y a rupture de la colonne liquide, sitôt que la charge totale s'abaisse au-dessous de la valeur $-\frac{9,5}{y_{x_0}}$.

TABLEAU 7.

Charges relatives en pourcents de y_{x_0} .

Point	O	A	α	b	d
y_{x_0}	142,8	51,80	34,48	22,43	16,4
1 ^{er} minimum . .	+ 0,797	+ 0,623	+ 0,586	+ 0,618	+ 0,652
1 ^{er} maximum . .	+ 1,311	+ 1,679	+ 2,014	+ 1,636	+ 1,435
2 ^{me} minimum . .	+ 0,58	+ 0,036	— 0,324	— 0,447	— 0,306
2 ^{me} maximum . .	+ 1,803	+ 2,853	+ 3,193	+ 3,162	+ 3,00
3 ^{me} minimum . .	+ 0,402	— 0,466	— 1,629	— 1,860	— 1,09
Courbe limite					
$-\frac{9,5}{y_{x_0}}$. . .	— 0,0665	— 0,1835	— 0,276	— 0,424	— 0,58

A étudier ce tableau, la rupture de la conduite I paraît inévitable: on l'expliquera, soit par la rupture de la colonne liquide, soit par des surcharges positives excessives.

Il n'est point sans intérêt de vérifier quelle aurait été la répartition des surcharges le long d'une conduite de section constante. Nous avons donc refait les calculs pour une conduite à caractéristique unique $\rho_* = 1,1$, puis $\rho_* = 1,36$, et les résumons dans les deux tableaux suivants: le premier se rapporte à une manœuvre alternative synchrone, c'est-à-dire de cadence

3,5 à 3,5, le second à une manœuvre de cadence 3 à 3,5, identique à celle du calcul général.

TABLEAU 8.

Surcharges en pourcents de H_0 , pour une manœuvre alternative synchrone de cadence 3,5 à 3,5; $\rho_ = 1,1$ et 1,36.*

Point	O		A		a	
	$\rho_* = 1.1$	$\rho_* = 1.36$	$\rho_* = 1.1$	$\rho_* = 1.36$	$\rho_* = 1.1$	$\rho_* = 1.36$
1 ^{er} min.	- 0,294	- 0,344	- 0,215	- 0,260	- 0,125	- 0,155
1 ^{er} max.	+ 0,588	+ 0,690	+ 0,425	+ 0,515	+ 0,250	+ 0,320
2 ^{me} min.	- 0,760	- 0,856	- 0,550	- 0,690	- 0,340	- 0,420
2 ^{me} max.	+ 0,931	+ 1,000	+ 0,650	+ 0,750	+ 0,380	+ 0,455
3 ^{me} min.	- 0,980	- 0,999	- 0,700	- 0,760	- 0,420	- 0,455

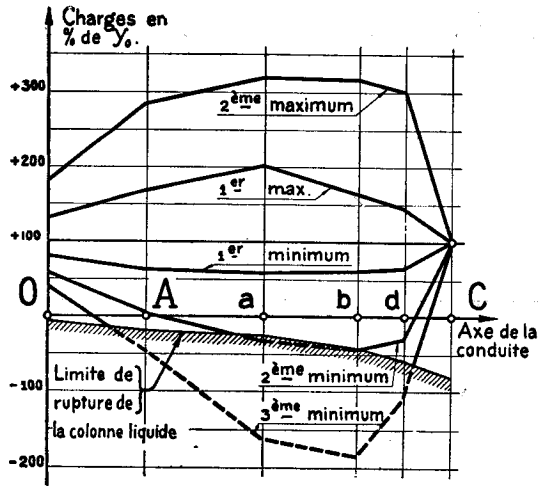


FIG. 33. — Répartition des charges le long de la conduite, exprimées en pourcents de la pression statique locale y_{x_0} .

////// Courbe limite, en dessous de laquelle il y a rupture de la colonne liquide (ordonnée $-\frac{9,5}{y_{x_0}}$).

TABLEAU 9.

Surcharges en pourcents de H_0 , pour une manœuvre alternative de cadence relative 3 à 3,5; ρ_ = 1,1 et 1,36.*

Point	O		A		a	
	$\rho_*=1.1$	$\rho_*=1.36$	$\rho_*=1.1$	$\rho_*=1.36$	$\rho_*=1.1$	$\rho_*=1.36$
1 ^{er} min.	— 0,259	— 0,320	— 0,221	— 0,275	— 0,135	— 0,188
1 ^{er} max.	+ 0,445	+ 0,500	+ 0,442	+ 0,545	+ 0,270	+ 0,365
2 ^{me} min.	— 0,600	— 0,703	— 0,490	— 0,658	— 0,320	— 0,540
2 ^{me} max.	+ 0,631	+ 0,715	+ 0,635	+ 0,720	+ 0,420	+ 0,540
3 ^{me} min.	— 0,677	— 0,787	— 0,625	— 0,825	— 0,370	— 0,560

Pour mieux comparer ces divers résultats, nous avons reporté graphiquement, sur la figure 34, les valeurs des « 2^{mes} maxima et 3^{mes} minima », extraits des tableaux 6, 8 et 9. Cette comparaison est très instructive: Les courbes 1 et 2 se rapportent aux surcharges dans la conduite à caractéristique unique $\rho_* = 1,36$, pour les manœuvres alternatives rythmiques de cadence 3,5 à 3,5 et 3 à 3,5; les courbes 3, à la manœuvre de cadence 3 à 3,5 dans la conduite réelle, avec une discontinuité. On voit que les courbes 1 et 2 se trouvent à l'intérieur d'une enveloppe « 4 », représentée par les droites CD et CD'. Il est très probable que cette propriété doit subsister si l'on calculait les maxima et minima successifs pour des mouvements de cadence quelconque.

Par contre, les courbes 3 sortent nettement de cette enveloppe. Le point a, qui est l'un des points de rupture de la conduite, est bien un point particulièrement sensible. Nous n'avons pu le déceler que par un calcul direct assez long, en utilisant la méthode générale. Nous ne voyons pas d'autre méthode, plus brève, pour arriver à ce résultat. Donc: *dans une conduite à caractéristiques multiples, les surcharges maxima et minima sortent hors de la courbe enveloppe des surcharges, calculée pour une conduite à caractéristique unique. Elles peuvent se révéler dangereuses.* Il est, par le fait, indispensable d'étudier systéma-

tiquement la répartition des charges le long de la conduite, en appliquant la théorie générale.

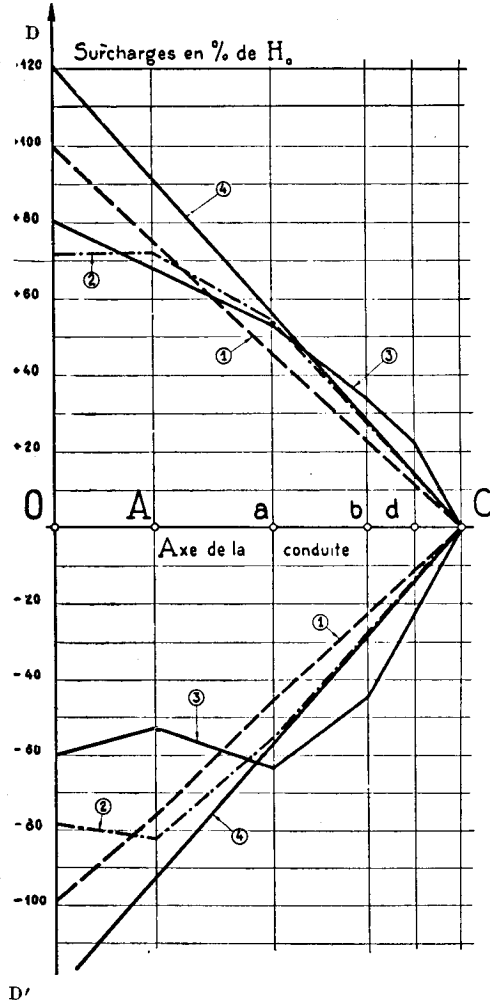


FIG. 34. — Comparaison des surcharges pour les deuxièmes maxima et troisièmes minima pour les cas suivants:

1. Conduite de section constante, cadence 3,5 à 3,5; $\rho_* = 1,36$;
2. Conduite de section constante, cadence 3 à 3,5; $\rho_* = 1,36$;
3. Conduite à caractéristiques multiples, cadence 3 à 3,5;
4. Enveloppe approximative des surcharges dans une conduite de section constante, pour des manœuvres alternatives.

Dans le cas précis qui nous occupe, le profil en long de la conduite est tel que le point a , dont les maxima exprimés en % de H_0 sont déjà élevés, deviennent excessifs, si on les calcule en % de la pression statique locale y_{x_0} (tableau 7).

Nous arrêtons ici les calculs numériques de cet exemple, non sans indiquer qu'il y aurait lieu de reprendre cette question et d'effectuer des recherches systématiques sur des exemples convenablement choisis et assez nombreux. Peut-être, pourrait-on mettre en évidence quelques propriétés générales concernant la répartition des pressions le long des conduites à caractéristiques multiples. Une pareille étude, complément indiqué de nos propres recherches, sort du cadre de notre travail actuel.

Dès maintenant, nous pouvons résumer cette étude, en énonçant les propositions suivantes :

a) Une manœuvre alternative rythmique de l'obturateur, effectuée à partir de $v_0 = 0$, à la cadence 1 : 1, provoque, le long d'une conduite à caractéristique unique, des surpressions importantes dont la courbe enveloppe est donnée approximativement par deux droites d'ordonnée +1,2 et -1,2 au point O, et passant par le point C (fig. 34).

b) Les surcharges croissent rapidement dès les premiers battements.

c) Sans atteindre en chaque point les valeurs limites mentionnées plus haut, les surcharges restent encore presque aussi élevées, lorsque la cadence du mouvement de l'obturateur est différente de 1 à 1, ou lorsque la manœuvre se fait à partir de v_0 et v_0 petits, mais différents de 0.

d) Si la conduite est à caractéristiques multiples, le phénomène de résonance est analogue.

e) Cependant, la loi de répartition des surcharges le long de la conduite n'est plus la même, les valeurs dépassant sensiblement les courbes limites définies plus haut.

f) Certains points de la conduite semblent particulièrement sensibles. Il ne nous a pas été possible de les déceler autrement que par un calcul direct.

3. Conclusion du chapitre D.

La première partie de ce chapitre, relative à la fermeture et à l'ouverture linéaires de l'obturateur, nous a montré que l'analogie entre la méthode d'Allievi et la méthode générale, déjà mise en relief, au cours de la partie théorique, par la forme des équations fondamentales, se retrouve dans les applications numériques. Les conduites à caractéristiques multiples usuelles sont cependant moins sensibles aux coups de bélier d'ouverture et de fermeture qu'une conduite à caractéristique unique. On peut donc envisager, de ce chef, une réduction des temps de manœuvre de l'obturateur couramment admis.

L'importance que les manœuvres alternatives rythmiques peuvent prendre, est un fait nouveau. L'exemple numérique que nous avons traité le met bien en relief. Certes, on ne se trouvera pas toujours en présence de conduites offrant, simultanément, les désavantages d'un profil en long à coude saillant prononcé et ceux inhérents aux conduites à section variable. On se rappellera, de plus, que ces désavantages seront surtout apparents pour des conduites à haute pression. Pour les conduites à basse pression (ρ_* variant de 1 à 10), relativement plus sensibles aux manœuvres de fermeture linéaire que les conduites à haute pression ($\rho_* < 1$), l'écart entre la charge normale et la charge exceptionnelle, due aux manœuvres alternatives, sera moindre. En ce cas, la thèse soutenue par Allievi sera exacte. Dans certains cas, on aura avantage à réduire les temps de manœuvre normale de l'obturateur. En effet, les surcharges limites calculées pour les manœuvres alternatives restent les mêmes. Ce sont elles qui déterminent l'épaisseur des conduites et l'on n'a aucune raison de réduire par trop les surcharges normales, pour autant qu'elles restent inférieures aux surcharges limites.

Ces quelques directives pourront être utiles aux spécialistes chargés de l'élaboration d'un projet de conduite forcée. Mais ils ne négligeront point les avis du constructeur des turbines et ceux de l'ingénieur-électricien, qui peuvent mieux se rendre compte de la probabilité des manœuvres alternatives mention-

nées. Peut-être proposeront-ils des dispositifs de sécurité efficaces; sinon, l'hydraulicien se verra, en certains cas, obligé d'intercaler, sur une conduite, une chambre d'équilibre, à seule fin d'amortir des coups de bélier, qui ne se produiront que rarement.

Leer - Vide - Empty

DEUXIÈME PARTIE

CALCUL DU COUP DE BÉLIER DANS DES CONDUITES MUNIES DE CHAMBRES D'ÉQUILIBRE

CHAPITRE A.

REMARQUES ET RÈGLES GÉNÉRALES POUR LE CALCUL DU COUP DE BÉLIER

L'amplitude d'un coup de bélier est fonction du temps de fermeture relatif et, par le fait, de la longueur de la conduite forcée. Les hydrauliciens ont imaginé d'intercaler, sur une conduite jugée trop longue, un bassin d'amortissement, appelé «chambre d'équilibre». On conçoit aisément que ce bassin, s'il est assez grand, réfléchira vers l'obturateur les ondes ascendantes, protégeant ainsi la section de la conduite se trouvant à l'amont.

Le problème n'est simple que si le bassin d'amortissement est très grand, car nous pourrions alors admettre que la pression au point où la conduite débouche dans le bassin est constante, le niveau de l'eau dans la chambre pouvant être considéré comme invariable.

De ce fait, la réflexion des ondes en A sera totale avec changement de signe. En d'autres termes, les ondes ne monteront que

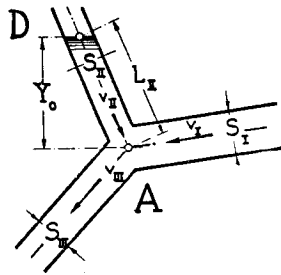


FIG. 35. — Chambre d'équilibre prismatique à section restreinte

jusqu'à la chambre d'équilibre, où elles seront réfléchies entièrement, vers l'obturateur, sans pénétrer dans la galerie en charge. Cette dernière sera donc parfaitement protégée.

En réalité, aucune chambre n'est assimilable à un bassin infiniment grand, et toute manœuvre de l'obturateur provoque, en plus du coup de bélier, une « oscillation de masse » dans la chambre d'équilibre, soit, un mouvement d'ensemble de la masse

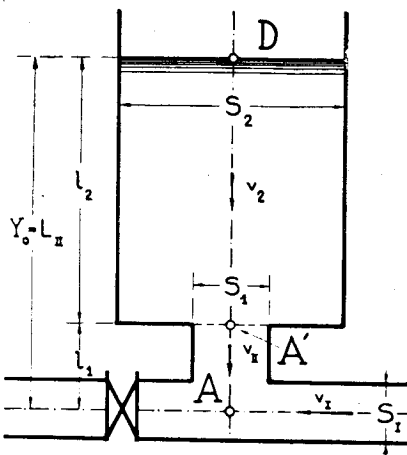


FIG. 36. — Chambre d'équilibre avec col d'entrée

$$L_{II} = 42,70 \text{ m}; \rho_I = \rho_{II} = 7,13; \frac{\rho_I}{\rho_2} = 8; \nu_{II} = 0''\text{.}064 \text{ sec};$$

$$\nu_1 = \frac{1}{8} \nu_{II}; n_2 = 7.$$

d'eau contenue dans la chambre. Pour diminuer l'amplitude de ces mouvements et, par le fait, le volume même de la chambre, on en vint à construire des chambres de formes très diverses, s'écartant de plus en plus de la conception primitive d'un bassin d'amortissement de grande section. Tels sont les types courants de chambres d'équilibre modernes:¹

- a) Chambre d'équilibre prismatique à section restreinte (fig. 35).

¹ Citons: CALAME et GADEN: *Théorie des chambres d'équilibre*. Paris 1926.

- b) Chambre d'équilibre, avec col d'entrée (fig. 36).
- c) Chambre d'équilibre, avec partie inférieure tubulaire (fig. 37).
- d) Chambre d'équilibre, avec étranglement (fig. 38).

Il est évident que, dans de pareilles chambres, la seconde hypothèse, celle de la réflexion totale des ondes à l'entrée du

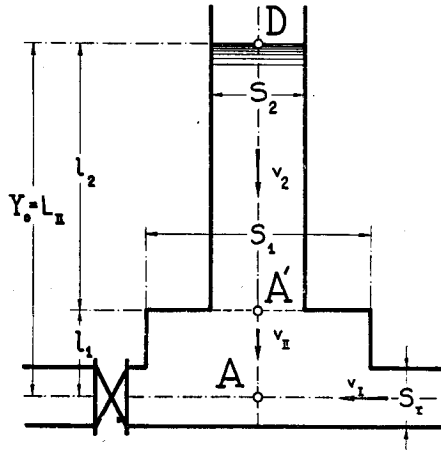


FIG. 36a. — Chambre d'équilibre à section variable

$$L_{II} = 42,70 \text{ m.}; \rho_I = 7,13; \frac{\rho_{II}}{\rho_I} = \frac{1}{8}; \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{8};$$

$$\nu_{II} = 0,064''; \nu_1 = \frac{3}{4} \nu_{II}; n_2 = 3.$$

bassin, est à son tour en défaut: le coup de bélier se transmettra vers l'amont.

Coup de bélier et oscillation de masse sont de natures différentes. Le premier est un phénomène élastique, la seconde une oscillation pendulaire du niveau d'eau autour d'une position d'équilibre. On n'en a pas moins prétendu que le niveau d'eau oscillant donnait à chaque instant la pression réelle au point d'intersection A de la chambre sur la conduite, et que le calcul des oscillations de masse, mis au point il y a des années déjà, constituait tout le problème de la chambre d'équilibre.

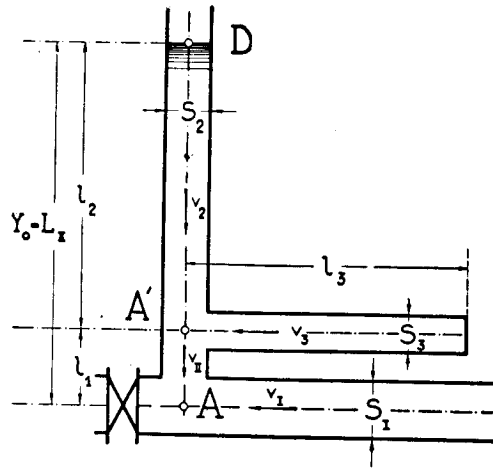


FIG. 37. — Chambre d'équilibre, avec partie inférieure tubulaire en cul-de-sac

$$L_{II} = 42,70 \text{ m}; \rho_I = \rho_{II} = 7,13; \rho_1 = \rho_2 = \rho_3;$$

$$l_2 = l_3; \mu_{II} = 0,064; \frac{\mu_I}{\mu_{II}} = \frac{1}{8}; n_2 = n_3 = 7 .$$

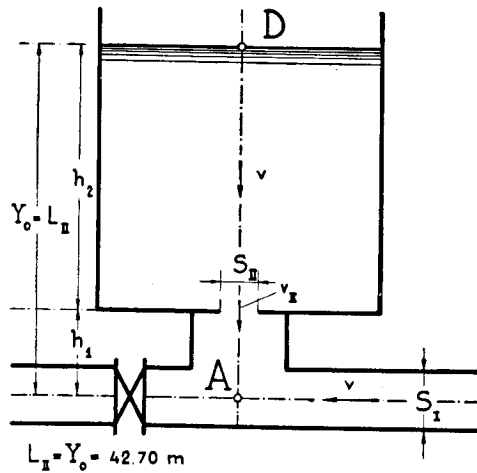


FIG. 38. — Chambre d'équilibre avec étranglement

$$L_{II} = Y_0 = 42,70 \text{ m} .$$

Nous verrons que cette opinion est erronée: nous allons aborder le coup de bélier, dans la chambre d'équilibre et dans la galerie en charge, sous son aspect propre de phénomène élastique, et rattacher le calcul des chambres d'équilibre à la théorie générale des conduites forcées, développée au cours de la première partie de notre travail. Les rapports entre les deux phénomènes, de coup de bélier et d'oscillation de masse, découleront, sans difficulté aucune, de l'analyse que nous en ferons.

1. *Méthode générale pour le calcul du coup de bélier dans les conduites avec chambres d'équilibre.*

Considérons les figures 5 et 6 du chapitre I, B, sur la base desquelles nous avons développé la théorie générale du coup de bélier dans les conduites à caractéristiques multiples. La seule hypothèse faite est celle de la stabilité du niveau de l'eau en D à l'extrémité de la conduite II. *Sous réserve de cette hypothèse, qui équivaut à la suppression des oscillations de masse, hypothèse que nous maintenons provisoirement*, le calcul développé dans la première partie s'applique intégralement à l'ensemble: galerie en charge — chambre d'équilibre — conduite forcée, considéré comme composé de trois conduites concourantes en A, la chambre d'équilibre étant supposée prismatique (fig. 35). Tout ce que nous avons dit sur la propagation des ondes le long de la conduite, leurs réflexions successives, sur le calcul des charges ζ_{*h}^2 en O et ζ_i^2 en A, sur le développement de la fonction α_i , etc., reste entièrement acquis et immédiatement applicable au calcul de la chambre prismatique. Les développements du chapitre I, C, où nous avons abordé des types de conduites plus complexes, nous permettent d'affirmer la même chose au sujet des chambres avec col d'entrée (fig. 36) et avec chambre inférieure tubulaire (fig. 37), qui coïncident, la première sans adjonction aucune, la deuxième au moyen de quelques artifices, avec les cas traités en détail dans ce chapitre. Seule, la chambre à étranglement (fig. 38) nous obligera à rechercher des bases théoriques différentes. Ce cas excepté, les formules développées aux chapitres I, B et I, C permettent de calculer en toute rigueur les surcharges résultant d'une manœuvre quelconque de l'organe de fermeture.

De prime abord, il semble que les calculs doivent être interminables, les équations étant fonctions du battement, en général très court, de la chambre elle-même. Quelques remarques très simples faciliteront les calculs.

La mise au point d'une méthode de calcul rigoureuse ne saurait nous suffire. La tâche d'une chambre d'équilibre est des plus complexes. Sans parler de l'oscillation de masse, une chambre d'équilibre doit encore amortir les surcharges positives ou négatives provenant des manœuvres de fermeture et d'ouverture de l'obturateur O. Souvent, elle fera face à des manœuvres rythmiques, que nous savons être particulièrement dangereuses, ou encore à la fermeture rapide de vannes de secours. On ne saurait exiger du calculateur qu'il abordât tous ces problèmes par la seule méthode exacte. Supposons également qu'il faille projeter une chambre d'équilibre et choisir, entre divers types, la meilleure solution. La marche à suivre dans ces recherches ne sera pas la même que pour la vérification finale d'un projet mis au point. Dans le premier cas, on cherchera à caractériser rapidement et séparément la conduite et les divers types de chambres d'équilibre, afin de se rendre compte des solutions possibles, de leurs avantages respectifs, et d'éliminer les solutions défectueuses. Dans le second cas, on considérera l'ensemble « conduite forcée — chambre d'équilibre — galerie sous pression » comme un tout, qu'on examinera systématiquement. Le choix de la méthode dépendra des problèmes à résoudre et de l'exactitude requise. De toute façon, il nous paraît indispensable de rechercher des méthodes de calcul approchées.

Avant d'élaborer notre théorie dans le détail, rappelons un certain nombre de remarques faites au cours de la première partie:

a) *Il est indifférent que les coefficients de réflexion r , et de transmission s , soient dus à une variation de section, ou à une bifurcation de la conduite.* Par le fait, le calcul numérique d'une conduite avec chambre d'équilibre au cours de la première phase de la galerie sera identique à celui d'une conduite à section variable, dont nous avons donné un exemple au chapitre I, D, exemple qui nous servira de point de repère dans la suite.

b) Allievi a démontré avec rigueur que, lors de la fermeture ou de l'ouverture linéaire d'une conduite à caractéristique unique, les surcharges tendaient vers une limite bien déterminée, qu'on peut connaître sans passer par le calcul point par point.

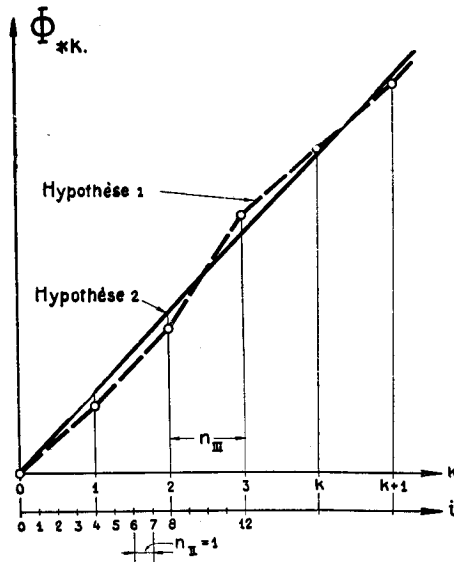


FIG. 39. — Représentation graphique des deux hypothèses de calcul faites sur la fonction Φ_{*k} pour le cas d'une fermeture lente ($n_{III} = 4$).

Hypothèse N° 1: Φ_{*k} est rectiligne entre les instants de rythme entier k et $k + 1$.

Hypothèse N° 2: Φ_{*k} est une droite passant par l'origine 0.

La même loi physique subsiste indiscutablement pour une conduite à caractéristiques multiples. Nous l'avons vérifiée dans un grand nombre de cas. L'exemple numérique détaillé, donné au chapitre I, D, est une excellente illustration de cette loi. Les calculs de chambres d'équilibre la confirmeront.

c) Nous avons montré que le calcul de la formule fondamentale (41), qui donne la pression ζ_{*k+1} en fonction de ζ_{*k} et α_k , est possible, dès qu'on connaît α_k , quelle que soit la méthode de calcul

donnant α_k . En particulier, si nous remplaçons une chambre d'équilibre par une autre, caractérisée par la même série α_k , les valeurs ζ_{*k+1} restent inchangées,

d) *Tous les calculs exacts, effectués par nous, ont mis en relief la régularité de l'accroissement de la fonction Φ_{*k} au cours d'une manœuvre de fermeture linéaire* (voir chapitre I, D, fig. 25). Nous ferons à plusieurs reprises usage de cette propriété et émettrons, selon les cas, deux « hypothèses de calcul », d'exactitude et de portée différentes, mais qui, employées à bon escient, apportent des simplifications remarquables à la marche des calculs.

Nous dirons faire appel à l'*hypothèse 1*, lorsque nous admettrons, à titre de simplification des calculs, que la fonction Φ_{*k} est linéaire entre deux points successifs k et $k + 1$ de l'oscillation dans la conduite forcée (voir fig. 39).

Nous parlerons de l'*hypothèse 2*, lorsque, pour des calculs approchés, nous supposerons Φ_{*k} linéaire entre 0 et k (voir fig. 39). Cette seconde hypothèse est, certes, moins précise que la première.

Nous avons indiqué pourquoi une méthode approchée nous paraissait parfois indispensable. En énumérant ci-dessus les points essentiels sur lesquels nous la bâtirons, nous voulons montrer que nous ne cherchons pas à construire une théorie approchée en marge de la théorie généralement exacte, mais uniquement à introduire, dans le cadre de la théorie rigoureusement exacte, certaines simplifications de calcul, dont l'exactitude reste en tout cas contrôlable. Cette méthode de calcul sera entièrement justifiée, si les calculs de contrôle prouvent qu'elle atteint l'exactitude requise.

a) *Etude préliminaire d'une conduite et choix d'une chambre d'équilibre.*

A l'heure actuelle, le choix d'une chambre d'équilibre n'est dicté que par le seul désir de réduire au minimum les oscillations de masse. Or, l'amplitude du coup de bélier à l'obturateur, au cours d'une fermeture normale, est tout aussi importante. C'est sur la base de cette amplitude, dont on peut se fixer *a priori*

une limite supérieure (entre 10 et 30 %), que nous effectuerons un premier tri entre solutions possibles et solutions à rejeter.

Recherchons avec quelles chambres d'équilibre la surcharge en O reste admissible. Caractérisons d'abord la conduite. Nous

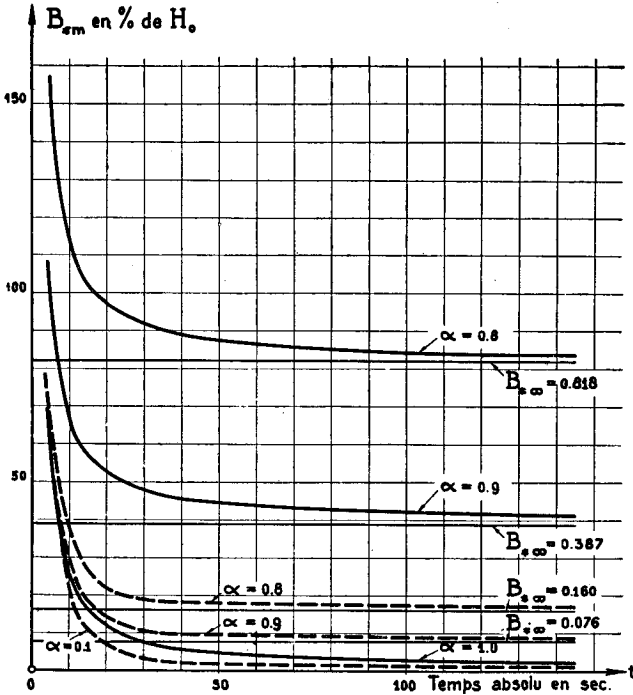


FIG. 40. — Comparaison de la « sensibilité » de deux conduites A et B.
 ---- Conduite A: $\rho_* = 0,725$; $\nu_{III} = 2,895$ sec } pour $\alpha_m = 1$; 0,9 et 0,8.
 ——— Conduite B: $\rho_* = 3,680$; $\nu_{III} = 0,623$ sec

avons vu, au chapitre I, D, sur un exemple numérique, que la valeur limite ζ_{*m} , qui ne diffère en général que peu de ζ_{*max} , est donnée par la formule:

$$\zeta_{*m} = \frac{\frac{\rho_* \alpha_{m-1}}{(\Theta_{III})^2} + \sqrt{\frac{\rho_*^2 \alpha_{m-1}^2}{(\Theta_{III})^2} + (\alpha_{m-1} + 1)[\alpha_{m-1} + 1 + 2\rho_*(1 - \alpha_{m-1})]}}{1 + \alpha_{m-1}} \quad (122a)$$

Nous pouvons faire varier Θ_{III} à volonté. Quant à α_{m-1} , il sera déterminé par la forme de la chambre d'équilibre, encore inconnue.

Nous donnerons à α_{m-1} les valeurs constantes 1; 0,98; 0,95; 0,90; 0,80; ..., choisies *a priori* et dessinerons des familles de courbes qui définissent la « sensibilité » de la conduite et donnent une idée de ce que pourront être les « courbes caractéristiques » que nous calculerons plus tard.

Nous avons reporté sur la figure 40, en fonction du temps de fermeture τ , les valeurs $B_{*m} = \zeta_{*m}^2 - 1$ qui représentent deux familles de courbes, pour les conduites « A » et « B »¹, caractérisées par :

$$\begin{aligned} \text{A: } \rho_* &= 0,725 & \mu_{III} &= 2'',895 \text{ (haute pression).} \\ \text{B: } \rho_* &= 3,68 & \mu_{III} &= 0'',623 \text{ (basse pression).} \end{aligned}$$

Ces courbes ont une asymptote horizontale pour Θ_{III} infini. En effet :

$$\zeta_{*\infty} = \zeta_{*m} = \frac{\sqrt{(\alpha_{m-1} + 1)[\alpha_{m-1} + 1 + 2\rho_*(1 - \alpha_{m-1})]}}{\alpha_{m-1} + 1}$$

($\Theta = \infty$)

et

$$\begin{aligned} B_{*\infty} = \zeta_{*\infty}^2 - 1 &= \frac{(\alpha_{m-1} + 1)[\alpha_{m-1} + 1 + 2\rho_*(1 - \alpha_{m-1})]}{(\alpha_{m-1} + 1)^2} - 1 \\ &= 2\rho_* \cdot \frac{1 - \alpha_{m-1}}{1 + \alpha_{m-1}} \end{aligned} \quad (126)$$

valeur constante, indépendante de Θ_{III} , donc de τ .

Ces deux familles de courbes montrent combien différente peut être la « sensibilité » de diverses conduites. Alors que la conduite A s'accommodera aisément de la majeure partie des solutions concevables, la conduite B n'admettra que des chambres d'équilibre réagissant bien et promptement. Elle sera particulièrement sensible aux fermetures brusques.

Nous pouvons également caractériser *a priori*, et indépen-

¹ Tous nos exemples numériques se rapportent à des cas réels. Par contre, les temps de fermeture ont été choisis arbitrairement, afin de montrer l'allure générale des courbes.

damment de la conduite, certains types de chambres d'équilibre, en traçant leur « courbe de réaction », définie au chapitre I, D comme étant la courbe α_i calculée en supposant que la fonction Φ_{*k} croisse linéairement. De nombreux calculs confirment qu'on peut appliquer en première approximation l'hypothèse 2 du calcul de la série α_i pour le cas de fermeture linéaire.

Les erreurs faites se compensent en partie dans la série même, et les résultats obtenus restent très proches des valeurs réelles de α_i . Cette « courbe de réaction » montre donc, en première approximation, comment une chambre d'équilibre réagit à la fermeture linéaire. Un bassin infiniment grand est caractérisé par l'horizontale $\alpha_i = 1$. Plus la « courbe de réaction » se rapprochera de cette droite, meilleur sera le fonctionnement de la chambre d'équilibre. La figure 41 représente un certain nombre de « courbes de réaction », reportées en fonction du temps absolu, qui caractérisent très heureusement diverses formes de chambres d'équilibre. Les courbes (2), (3) et (5) sont dressées, toutes trois, pour $\rho_I = \rho_{II} = \rho_{III}$, mais pour des périodes μ_{II} différentes. Les courbes (4) et (5) ont même période μ_{II} , mais la chambre caractérisée par (4) est de section plus grande. La courbe (6) représente une chambre avec col d'entrée.

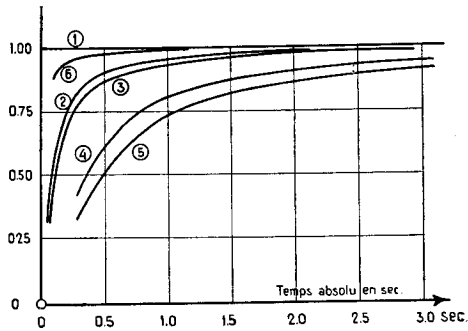


FIG. 41. — Courbes de réaction :

1. Bassin infiniment grand;
2. Chambre prismatique $\rho_I = \rho_{II} = \rho_{III}$; $\mu_{II} = 0'',049$;
3. Chambre prismatique $\rho_I = \rho_{II} = \rho_{III}$; $\mu_{II} = 0'',064$;
4. Chambre prismatique $\rho_I = \rho_{III} = 3,41$; $\rho_{II} = 2,38$; $\mu_{II} = 0'',278$;
5. Chambre prismatique $\rho_I = \rho_{II} = \rho_{III}$; $\mu_{II} = 0'',278$;
6. Chambre avec col d'entrée, $\rho_I = \rho_{III} = 11,56$; $\rho_{II} = 8,08$; $\frac{\rho_I}{\rho_2} = 8$; $\mu_I = 0'',006$; $n_2 = 7$.

En possession de ces deux diagrammes (fig. 40 et 41), le calculateur peut faire un premier tri, éliminer les solutions *a priori* incompatibles et porter son choix sur celle des formes

de chambre d'équilibre qui donnera, pour une valeur τ déterminée, une surcharge limite B_{*m} admissible. On voit, par exemple, que si une chambre du type (6) (fig. 41) est parfaitement adaptée à une conduite telle que B, une chambre du type (5) ne lui conviendrait nullement. Le choix de l'hydraulicien sera évidemment influencé par d'autres considérations, telles que l'amplitude des oscillations de masse, le prix de construction, la constitution géologique à l'emplacement de la chambre, etc., etc. Une fois le type de la chambre admis, on vérifiera par une série de calculs systématiques, s'il satisfait aux diverses exigences du problème.

Cette méthode, qui dissocie les propriétés des deux éléments, conduite forcée et chambre d'équilibre, présente quelques difficultés d'application, si la conduite elle-même est à caractéristiques multiples. On procédera, selon le cas, de l'une des deux manières suivantes: soit O_1 la discontinuité de la conduite la plus proche de O. Nous pouvons considérer que $O O_1$ représente la conduite et $O_1 A D$ la chambre d'équilibre. On peut aussi remplacer la conduite réelle $O A$ par une conduite fictive de caractéristiques ρ'_m , telle que nous l'avons calculée au chapitre I, D, 1 a.

b) *Etude systématique d'une conduite avec chambre d'équilibre.*

Les diverses considérations développées au cours du chapitre I, D, sur le calcul des conduites forcées, nous tracent la marche à suivre. Nous étudierons chaque ensemble « conduite forcée — chambre d'équilibre — galerie en charge » successivement:

- pour une fermeture linéaire;
- pour une ouverture linéaire;
- pour des manœuvres alternatives de l'obturateur.

Très souvent, le problème de la fermeture linéaire devra être envisagé sous plusieurs aspects différents: la fermeture normale de l'obturateur situé au bas de la conduite, la fermeture accidentelle brusque de ce même obturateur et, enfin, la fermeture brusque des organes de secours situés au haut de la conduite forcée. Pour l'ouverture linéaire, ce seront également les manœuvres brusques qui nous intéresseront.

Les recherches porteront tant sur les charges au point d'inter-

section A que devant l'obturateur O. Afin de ne pas accumuler les difficultés, nous supposons ici que la conduite III soit à caractéristique unique. Tous nos calculs s'effectueront au moyen de l'équation de récurrence fondamentale:

$$\zeta_{*k+1} = -\rho_* \eta_{k+1} \quad (41)$$

$$+ \sqrt{\rho_*^2 \eta_{k+1}^2 + 1 + 2\rho_* [\alpha_k \eta_k \zeta_{*k} + \frac{c_0}{C_0} (1 - \alpha_k)] - \alpha_k (\zeta_k^2 - 1)}$$

et en développant α_i au moyen de l'une des séries que nous avons indiquées, soit, les formules (33), (56), (60), (79), ou (90), selon le type de la chambre. La surcharge relative au point d'intersection est donnée, en pourcents de Y_0 , par:

$$\zeta_i^2 - 1 = \Phi_i (1 - \alpha_i) \quad (18)$$

et, en pourcents de H_0 , par:

$$B_i = \Phi_{*i} (1 - \alpha_i) = \frac{Y_0}{H_0} (\zeta_i^2 - 1). \quad (18a)$$

Nous remarquons que l'équation (41) est fonction du battement dans la conduite III, alors que la valeur α_i est fonction des battements dans la conduite II, que nous supposons plus petite et qui, en général, sera très courte (pratiquement entre 10 m. et 200 m.). Par le fait, c'est le battement $n_{II} = 1$, très court, qui devrait être pris comme unité de temps, et il y aurait lieu de calculer la formule (41) pour toutes les valeurs intermédiaires: $i, i + 1, i + 2, \dots, i + n_{III} - 1, i + n_{III}, \dots$, afin d'obtenir les valeurs $\Phi_i, \Phi_{i+1}, \dots$ nécessaires au calcul de α_i .

C'est ici qu'interviendront, suivant les cas, des simplifications intéressantes. Nous savons d'une part que les erreurs commises dans le calcul de la fonction Φ_i se compensent partiellement dans le calcul de α_i . La fonction α_i n'est point, d'ailleurs, une fonction à tangente discontinue pour $i-1, i, i+1$, comme ζ_{*k} l'est pour $k-1, k, k+1$. D'autre part, l'expérience acquise par le calcul des conduites forcées (au chapitre I.D) nous a orienté sur l'allure générale de la courbe Φ_i . Après de nombreux calculs de chambres d'équilibre, nous pouvons donc énoncer les *règles pratiques* suivantes:

Nous admettrons, pour les cas de fermeture et d'ouverture, ainsi que pour les manœuvres rythmiques synchrones, que la

fonction Φ_i est linéaire entre deux points k et $k + n_{\text{III}}$. (hypothèse 1). Tous nos calculs numériques nous ont montré que cette hypothèse est légitime, pour autant que n_{III} est plus grand que n_{II} . Un calcul effectué en utilisant la formule (41), mais en supposant la fonction Φ_{*k} rectiligne entre Φ_{*k} et Φ_{*k+1} , sera réputé un calcul *exact*.

On intercalera éventuellement 1, 2, 3, ... points intermédiaires entre k et $k + 1$, pour le calcul des manœuvres alternatives rythmiques asynchrones. Une façon élégante de systématiser les calculs est d'intercaler entre O et A un point A', tel qu'il y ait un rapport entier entre OA et OA' et la cadence du mouvement rythmique. Le battement dans le secteur OA' est alors choisi comme unité des temps. Ainsi, pour une cadence de 2 à 3, on choisira A' au tiers inférieur de la conduite, de sorte que les points $k, k + 1$, coïncident, d'une part avec la fin des mouvements rythmiques, d'autre part avec les battements de la conduite OA. Au point A', $s_{\text{II}} = s_{\text{III}} = 1$ et $r_{\text{II}} = r_{\text{III}} = 0$; il est donc aisé de calculer α_i en ce point.

Le même artifice est d'ailleurs applicable à tout calcul de contrôle plus précis, que l'on serait appelé à faire, sans qu'il y ait besoin de passer par le calcul de tous les points, $i, i + 1, \dots$

Les calculs généraux, au moyen desquels on cherche à évaluer les qualités de la chambre, en fonction du temps de fermeture, supposé variable, (courbes caractéristiques des surcharges limites en O et en A), ainsi que l'étude des fermetures lentes, donneront des résultats suffisamment exacts si l'on admet que Φ_{*i} est une droite, c'est-à-dire, si l'on a recours à l'hypothèse 2. On sera, cependant, plus prudent dans les calculs où n_{III} est petit, voire inférieur à n_{II} , que si n_{III} est grand.

Nous rappelons que la valeur de la charge relative limite de ζ_{*m} est donnée par l'équation (122a) déjà citée, dans laquelle α_{m-1} n'est plus choisi, comme sous II.A.1a), mais calculé *a priori*, en développant α_i pour Φ_i linéaire. Dans le cas simple, où α_i est donné par la série (33) et où m est grand, nous calculons α_{m-1} au moyen de:

$$\alpha_{m-1} = 1 - \frac{1}{m-1} \cdot \frac{s_{\text{III}}}{s_{\text{II}}}, \quad (127)$$

relation déjà développée au chapitre I.D.

Pour le calcul approché de B_m , nous renvoyons aux indications de détail des chapitres II.B. à II.D.

Examinons le cas où l'on ne se trouve pas dans la première phase de la conduite I. Le calcul point par point s'effectue comme précédemment, mais en développant α_i pour ce nouveau cas. Par exemple, si la chambre est prismatique, en utilisant les séries (56) ou (60) au lieu de (33).

Pour estimer B_{*m} de façon approchée, sans passer par le calcul point par point, nous procéderons comme suit: Le maximum peut se produire soit à l'arrivée, au temps $i = n_1$, de la première onde réfléchie en C, soit au temps $\Theta_{III} = m$. Dans le premier cas, nous faisons de nouveau, avec une approximation suffisante

$$\zeta_{*n_1} = \zeta_{*i+1} \cong \zeta_{*i}$$

dans:

$$\alpha_i (\zeta_{*i}^2 - 1) + \zeta_{*i+1}^2 - 1 = 2\rho_* [\alpha_i \eta_i \zeta_{*i} - \eta_{i+1} \zeta_{*i+1} + \frac{c_0}{C_0} (1 - \alpha_i)] \quad (39)$$

mais sans annuler η_{i+1} . On obtient alors:

$$\zeta_{*n_1} = \quad (128)$$

$$\frac{\rho_* (\eta_{n_1-1} \alpha_{n_1-1} - \eta_{n_1}) + \sqrt{\rho_*^2 (\eta_{n_1-1} \alpha_{n_1-1} - \eta_{n_1})^2 + (\alpha_{n_1-1} + 1) [\alpha_{n_1-1} + 1 + 2\rho_* (1 - \alpha_{n_1-1})]}}{1 + \alpha_{n_1-1}}$$

On comparera cette valeur à ζ_{*m} calculé d'après (122a), dans laquelle on aura développé α_{m-1} , non plus d'après la série (33) mais d'après (60). On choisira la plus grande des deux valeurs, comme étant la plus dangereuse.

Nous n'avons point trouvé de méthode générale permettant de calculer B_m dans le cas où l'on n'est plus dans la première phase de I. On peut cependant calculer B_{n_1} , à la fin de la première phase, en utilisant les formules que nous donnerons au cours des chapitres suivants.

Les règles pratiques énoncées, limitées aux cas cités, sont certes plausibles. Mais nous ne les donnons que pour ce qu'elles sont: des règles d'application d'une théorie, et non point des

principes théoriques. Elles ne failliront certainement point dans les cas ordinaires et nous aurons l'occasion, au cours des chapitres suivants, de les illustrer par des exemples numériques. On gardera cependant en mémoire sous quelles réserves nous les avons introduites.

2. *Problème du coup de bélier dans les chambres à niveau d'eau oscillant.*

Il convient d'aborder ici le problème des oscillations du niveau d'eau dans la chambre d'équilibre. Nous avons, jusqu'à maintenant, tenu strictement séparés le calcul des oscillations de masse et celui du coup de bélier, calculant le second comme si le premier n'existait pas. Cependant, les oscillations de masse entraînent des oscillations du niveau de l'eau dans la chambre d'équilibre, et, par le fait, des variations de pression au point A. Il est indispensable de rechercher quelle corrélation existe entre ces variations et le coup de bélier.

Nous ne croyons pas qu'on ait, à ce jour, résolu la question du passage des formules du coup de bélier à celles des oscillations de masse. On s'est contenté d'introduire la pression provenant de l'oscillation de masse, calculée d'après les méthodes usuelles, comme condition aux limites d'un calcul du coup de bélier, et d'établir une équation de liaison entre les vitesses au point A¹. Nous faisons à cette méthode deux objections de principe:

Le calcul du coup de bélier suppose que l'eau est un corps élastique. Le calcul des oscillations de masse se fait en supposant la colonne d'eau rigide et la transmission des pressions instantanée: toute équation de liaison entre des vitesses calculées de façons essentiellement différentes, est sujette à caution.

L'oscillation de masse est un phénomène consécutif au coup de bélier, mais secondaire et indépendant, qui peut être supprimé. Nous allons montrer, par l'étude de cas particuliers, que l'oscil-

¹ Voir *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*, 1932, nos 5 et 6. O. SCHNYDER: *Ueber Druckstöße in Rohrleitungen.*

lation de masse ne donne pas la condition aux limites du problème du coup de bélier, ainsi qu'on le croyait.

Supposons une fermeture instantanée de l'obturateur. La surcharge en O est donnée par:

$$B_{*1} = \zeta_{*1}^2 - 1 = 2\rho_* = \Phi_{*1} . \quad (14)$$

Au moment de l'arrivée en A de l'onde de fermeture instantanée, la pression y est donnée, en % de H_0 par:

$$B_1 = (1 - \alpha_1) \Phi_{*1} = s_{III} \cdot 2\rho_* . \quad (129)$$

B_1 est une surpression considérable; $s_{III} \cdot 2\rho_*$ sera souvent supérieur à 1, et la pression totale en A dépassera $Y_0 + H_0$. Or, à ce même instant, le calcul des oscillations de masse effectué selon les méthodes habituelles nous donne une surpression nulle en A. En effet, la surcharge en A est donnée, en ce cas, par la variation du niveau d'eau dans la chambre, variation encore nulle en ce moment. Ce serait donc commettre une erreur grossière de choisir, dans ce cas, la surcharge provenant de l'oscillation de masse, comme condition aux limites du calcul du coup de bélier.

Considérons également le cas de la fig. 6 de la première partie, dans laquelle la conduite II débouche d'un bassin infiniment grand. En pratique, cette hypothèse serait applicable au cas d'une chambre d'équilibre présentant un col étroit débouchant dans une chambre très grande, ou mieux, dans une chambre à niveau maintenu constant au moyen d'un déversoir. Dans ces conditions, le calcul de l'oscillation de masse nous dit que la surcharge en A est constamment nulle, alors que le coup de bélier s'exprime à un instant quelconque par:

$$B_i = (1 - \alpha_i) \Phi_{*i} .$$

Dans ces divers cas, nous pouvons calculer en toute rigueur le coup de bélier exact, sans tenir compte de l'oscillation de masse.

Inversement, nous pouvons supposer des oscillations de masse dans la chambre d'équilibre, sans qu'il y ait coup de bélier.

Supposons, par exemple, l'obturateur fermé; on peut imaginer des oscillations de masse dans la conduite II, dues à une cause quelconque extérieure, agissant sur le bassin d'accumulation, oscillations qui ne provoquent aucun phénomène de coup de bélier dans la conduite III.

Ces divers exemples montrent qu'on ne peut prendre les pressions dues à l'oscillation de masse comme conditions aux limites pour un calcul de coup de bélier. Nous aurions pu nous en douter, en nous souvenant que les deux phénomènes sont de nature différente: l'un est dû à des déformations élastiques, l'autre à une rupture d'équilibre des forces statiques agissant sur une colonne d'eau que l'on peut supposer rigide.

Il est donc indispensable d'étudier le problème directement.

a) *La naissance de l'oscillation de masse, à partir des équations du coup de bélier.*

Reprenons l'équation (53), appliquée à la chambre d'équilibre (conduite II) ($n_{II} = 1$):

$$\frac{v_{II_i}}{V_{II_0}} = \frac{v_{II_0}}{V_{II_0}} - \frac{1}{2\varphi_{II}} \left[\zeta_i^2 - 1 + 2(\zeta_{i-1}^2 - 1) + 2(\zeta_{i-2}^2 - 1) + \dots + 2(\zeta_2^2 - 1) + 2(\zeta_1^2 - 1) \right] \quad (53a)$$

Supposons que la manœuvre soit une fermeture linéaire. Au début $v_{II_0} = 0$. Les grandeurs $(\zeta_i^2 - 1)$ sont toutes positives, tant que l'obturateur n'est pas encore fermé. La fonction $-v_{II_i}$ sera représentée par une courbe quelconque dont nous savons, cependant, qu'elle sera croissante tant que $i < \Theta_{II}$ (voir fig. 42 et 47). De toute façon, la vitesse v_{II_i} sera constamment dirigée de A vers la surface de réflexion de la chambre d'équilibre (voir sur la fig. 47 un exemple calculé exactement). On voit donc que le niveau d'eau doit monter dans la chambre au cours de cette période et l'on peut calculer l'augmentation de pression qui en résulte.

Soit:

$$[\Delta y]_{i=b}^{i=c}$$

l'augmentation de la hauteur de la colonne d'eau, entre les temps $i = b$ et $i = c$. Nous aurons, en désignant par S_{II} la section du col, et par S_I la section de la chambre :

$$[\Delta y]_{i=b}^{i=c} = \frac{S_{II}}{S_I} \int_{i=b}^{i=c} -v_{II_i} di = \frac{S_{II}}{S_I} \int_{t=b}^{t=c} -v_{II_i} dt . \quad (130)$$

C'est-à-dire que $\frac{S_I}{S_{II}} [\Delta y]_{i=b}^{i=c}$ sera représenté par la surface rayée dans la figure 42.

On voit clairement que, tant que $i < \Theta_{II}$, la surface Δy se trouve entièrement au-dessus de l'axe des i et qu'il y a accroissement de volume dans la chambre. On vérifie également que la courbe des v_{II_i} ne peut décroître que lentement, et que le niveau continuera à monter dans la chambre pendant un certain temps.

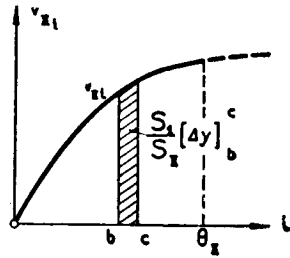


FIG. 42.

Calculons l'accroissement $[\Delta v_{I_i}]_{i-n_I}^i = v_{I_i} - v_{I_{i-n_I}}$ de la vitesse dans la conduite I, entre les instants $i - n_I$ et i . L'équation (7) s'écrira :

$$[\Delta V_I]_{i-n_I}^i = v_{I_i} - v_{I_{i-n_I}} = -\frac{g Y_0}{a_I} [\zeta_i^2 - 1 + \zeta_{i-n_I}^2 - 1]$$

Divisons par $\Delta t = \mu_I$, et remarquons que $a_I \mu_I = 2 L_I$. Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{L_I}{g} \left[\frac{\Delta v_{I_i}}{\Delta t} \right]_{\Delta t = \mu_I} &= -\frac{1}{2} Y_0 [\zeta_i^2 - 1 + \zeta_{i-n_I}^2 - 1] \\ &= -\frac{1}{2} [(y_i - Y_0) + (y_{i-n_I} - Y_0)] . \end{aligned} \quad (131)$$

D'autre part, l'équation fondamentale des oscillations de masse s'obtient en écrivant le théorème des forces vives (voir Calame et Gaden, p. 54) :

$$\frac{L}{g} \cdot \frac{dv_1}{dt} + (y - y_0) + P_w = 0 . \quad (132)$$

Négligeons les forces de frottement P_w et écrivons l'équation différentielle (132) sous forme de différence finie, pour un temps $\Delta t = \mu_1$, entre les instants $i - n_1$ et i . Nous prendrons pour y la valeur moyenne $\frac{y_i + y_{i-n_1}}{2}$. Nous obtenons alors:

$$\frac{L}{g} \left[\frac{\Delta v_1}{\Delta t} \right]_{\Delta t = \mu_1} + \frac{y_i + y_{i-n_1}}{2} - y_0 = 0. \quad (132a)$$

Equation identique, quant à sa forme, à (131).

Nous avons ainsi ramené les équations du coup de bélier à la forme de celles de l'oscillation de masse, dérivant du théorème des forces vives. Cependant, l'identité n'est point parfaite: en effet, dans (131), y_i est la pression élastique en A, et v_{i_i} la vitesse locale en A; ni l'une, ni l'autre, ne sont constantes le long de la conduite I. Dans (132a), au contraire, y et v_1 sont les mêmes tout le long de la conduite I, la colonne d'eau étant supposée rigide. Malgré cette distinction, nous sommes bien en face du même phénomène, étudié, d'une part, dans (131) sous la forme d'une déformation élastique locale, d'autre part, dans (132), comme mouvement d'une masse incompressible. En pratique, on introduit dans (132), non pas la valeur réelle de la pression élastique y_i en A, mais la pression statique. Les résultats obtenus au moyen de (132) n'en sont pas moins excellents. On pourrait donc admettre que la pression statique a , en moyenne, le même effet sur la masse d'eau de la galerie d'amenée, que toutes les oscillations de la pression y_i . Il ne faudrait cependant pas conclure, de l'identité de forme des équations (131) et (132), à l'identité réelle des deux charges y_i (élastique) et y (statique), ni des vitesses v_{i_i} (locale) et v_1 (moyenne).

Nous avons ainsi établi une méthode rigoureuse pour le calcul des oscillations de masse dans une chambre d'équilibre, en partant de l'étude du coup de bélier. Nous ne pensons d'ailleurs point qu'il y ait avantage à adopter cette méthode pour tous les cas, sans distinction, car elle néglige les frottements dans la galerie. Or, ces derniers jouent un rôle important. Mieux vaut donc s'en tenir, pour l'ensemble du calcul de l'oscillation de masse, aux formules usuelles, qui ont fait leurs preuves.

Par contre, l'emploi des formules (53a) et (130) donnera certainement des résultats plus exacts, lorsqu'on étudiera le début d'un mouvement d'oscillation. A ce moment, l'influence provenant de la variation des forces de frottement est encore faible, l'élasticité de la colonne d'eau dans les conduites I et II, par contre, essentielle. On sera donc plus près de la réalité en considérant, pour le début du mouvement, le phénomène sous son aspect de choc élastique se développant au point A.

Comparons l'amplitude relative de la surcharge due au coup de bélier, à celle due à l'oscillation de masse au début d'une manœuvre de fermeture. A la fin de la première phase d'oscillation, dans la conduite II, nous avons pour le coup de bélier :

$$y_1 - y_0 = F_{II_1} \quad \text{et} \quad v_{II_1} = -\frac{g}{a} \cdot F_{II_1}$$

d'où :

$$y_1 - y_0 = -\frac{a}{g} \cdot v_{II_1}$$

D'autre part, puisque $v_{II_0} = 0$, nous aurons :

$$[\Delta y]_0^1 = -\frac{S_{II}}{S_I} \int_0^1 v_{II_i} di \cong -\frac{S_{II}}{S_I} \cdot \frac{v_{II_1}}{2} \cdot \mu_{II} \cdot$$

Or, $\frac{a}{g}$ sera environ égal à 100; $\frac{v_{II}}{2}$ sera toujours très petit ($\sim \frac{1}{5}$ à $\frac{1}{100}$ de seconde); à la fin de la première phase, la surcharge de coup de bélier pourra être quelques centaines de fois plus grande que celle due à l'oscillation de masse. On peut donc, sans crainte d'erreur aucune, négliger cette dernière pour toutes les fermetures rapides. (Voir l'exemple calculé sous II.B.2, fig. 47).

b) *Relations entre oscillations de masse et coup de bélier dans le cas général.*

Nous avons vu (I.A) que la propagation d'une surcharge $F_i = H_0 \cdot \Phi_{*i}$, le long d'une conduite, est indépendante de la pression statique locale le long de la conduite. Il en sera de même,

au point de bifurcation A. Les lois de réflexion en ce point sont indépendantes de Y_0 . Reportons nous au chapitre I.B.3), où nous avons déduit ces lois et considérons une onde $H_0 \cdot \Phi_{*1}$ arrivant au point A. Supposons que la pression statique en A ne soit plus égale à Y_0 , mais à $Y_0 + \Delta Y_0$. Nous pouvons représenter ce fait de deux façons: soit en posant $y_0 = Y_0 + \Delta Y_0$ et incorporant, en fait, ΔY_0 à la nouvelle pression statique y_0 ; soit en écrivant $y_1 = Y_0 + F_{II_1} + \Delta Y_0 = Y_0 + F_{I_1} + \Delta Y_0$, afin d'incorporer ΔY_0 aux surcharges mobiles F_{II_1} et F_{I_1} .

Dans le premier cas, on écrira:

$$y_1 - y_0 = y_0(\zeta_1^2 - 1), \quad \text{au lieu de} \quad Y_0(\zeta_1^2 - 1),$$

et y_0 disparaît des équations comme Y_0 .

Si nous posons, au contraire:

$y_1 - Y_0 = F_{II_1} + \Delta Y_0$ en supposant que ΔY_0 , considéré comme une variation de F_{II_1} , agit sur la vitesse v_{II_1} , il suffit de remplacer $F_{II_1} + \Delta Y_0$ par F'_{II_1} , et $F_{I_1} + \Delta Y_0$ par F'_{I_1} dans les équations, d'éliminer F'_{II_1} et F'_{I_1} comme on l'a fait de F_{II_1} et F_{I_1} pour retrouver $\alpha_1 = r_{II_1}$. (Voir chapitre I.B.3a). De quelque façon qu'on s'y prenne, les équations exprimant les conditions de réflexion d'une onde, en un instant quelconque, restent indépendantes, non seulement de Y_0 (ce que nous savions du chapitre I.B.3), mais également d'un accroissement ΔY_0 de Y_0 , survenu entre temps. C'est logique, la réflexion étant un phénomène instantané. Considérons, en outre, non plus une onde isolée, mais le train d'ondes dont la somme est égale à $\Phi_i \alpha_i$. Cette valeur ne change pas, chaque onde, considérée individuellement, restant inchangée.

Les conditions de réflexion en A sont donc indépendantes de la pression statique. La série α_i ne varie pas si la pression statique varie avec le temps. On pourrait remarquer que la longueur L_{II_1} variant, il en sera de même de n_{II_1} , choisi comme unité de temps. C'est exact; mais, en pratique, ce fait joue un rôle secondaire, et l'on peut toujours choisir pour n_{II_1} une valeur moyenne.

On peut donner une explication physique de notre remarque mathématique: le coup de bélier est toujours dû à une variation du régime des vitesses C_i à l'obturateur. La loi de réflexion au point A est également déterminée uniquement par la répartition

des vitesses v_{I_i} ; v_{II_i} ; et v_{III_i} , fonction des valeurs ρ_I , ρ_{II} et ρ_{III} , dans les 3 conduites. Considérons l'ensemble « galerie en charge — chambre d'équilibre — conduite forcée » au repos ($v_{I_i} = v_{II_i} = v_{III_i} = 0$) et augmentons la pression en A (p. ex. au moyen d'un piston imaginaire, fixé sur la conduite II). Cette augmentation de pression se transmet dans les trois conduites, à la célérité a_I , a_{II} , a_{III} , comme une simple déformation élastique, telle qu'une force appliquée sur un corps solide. On a, comme avant, $v_{I_i} = v_{II_i} = v_{III_i} = 0$. Supposons la même manœuvre de piston effectuée au cours d'un état quelconque, v_{I_i} , v_{II_i} et v_{III_i} n'étant pas nulles. L'augmentation de pression en A ne change point la répartition de ces 3 vitesses, répartition qui est fonction des seules grandeurs ρ_I , ρ_{II} et ρ_{III} , mais non de Y_0 .

Le raisonnement physique rejoint le raisonnement mathématique. Nous énoncerons, sous une forme généralisée, notre observation initiale :

L'augmentation de la pression statique en A, due aux oscillations de masse, est un phénomène secondaire dans le temps, différent du coup de bélier (quoique ayant son origine dans le coup de bélier). Elle n'influence nullement les conditions de réflexion au point A. Les conditions aux limites d'un calcul de coup de bélier ne sont pas données par les oscillations de masse, qui font varier la pression statique Y_0 seule, mais uniquement par le développement de α_i qui représente les conditions élastiques en A.

Par contre, la pression *totale* en A sera donnée, de toute évidence, par la somme de la pression statique Y_0 , plus l'augmentation ΔY_{0_i} de cette pression, due aux oscillations de masse, plus la surcharge absolue $H_0 B_i$ au temps i . On a donc :

$\text{Pression totale en A} = Y_0 + \Delta Y_{0_i} + H_0 B_i$
--

Qu'en est-il de la pression en O ? La surcharge

$$\Delta Y_{0_i} \propto k^{-\frac{1}{2}} + H_0 B_i \propto k^{-\frac{1}{2}}$$

partant de A au temps $k - 1/2$, parvient en O au temps k , et nous aurons:

Pression totale en O:

$$H_T = H_0 + \Delta Y_{0_{k-\frac{1}{2}}} + H_0 B_{*k} = \overbrace{H_0 (B_{*k} + 1)}^{h_k} + H_0 \frac{\Delta Y_{0_{k-\frac{1}{2}}}}{H_0}.$$

En posant encore, pour simplifier:

$$\frac{1}{H_0} \Delta Y_{0_{k-\frac{1}{2}}} = \Delta \zeta_{*k}^2,$$

on obtient:

$$H_T = H_0 (\zeta_{*k}^2 + \Delta \zeta_{*k}^2).$$

Cependant, en O, le régime de la vitesse c_k est régi par la pression *totale*. Nous devons donc remplacer l'équation habituelle, régissant la vitesse d'écoulement c_k :

$$\eta_k = \frac{c_k}{C_0} \sqrt{\frac{H_0}{h_k}} = \frac{c_k}{C_0} \cdot \frac{1}{\zeta_{*k}} \quad (9a)$$

par:

$$\eta_k = \frac{c_k}{C_0} \sqrt{\frac{H_0}{h_k + \Delta Y_{0_{k-\frac{1}{2}}}}} = \frac{c_k}{C_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\zeta_{*k}^2 + \Delta \zeta_{*k}^2}}. \quad (133)$$

Nous introduirons cette nouvelle valeur de $\frac{c_k}{C_0}$ dans l'équation (39) et nous obtenons l'équation générale:

$$\begin{aligned} & \alpha_k (\zeta_{*k}^2 - 1) + \zeta_{*k+1}^2 - 1 \\ = & 2\rho_* \left[\alpha_k \eta_k \sqrt{\zeta_{*k}^2 + \Delta \zeta_{*k}^2} - \eta_{k+1} \sqrt{\zeta_{*k+1}^2 + \Delta \zeta_{*k+1}^2} + \frac{c_0}{C_0} (1 - \alpha_k) \right] \end{aligned} \quad (134)$$

Sous cette forme, cette équation est très incommode à résoudre.

On posera donc, avec une approximation suffisante pour les ouvertures lentes, qui seules entrent en considération :

$$\zeta_{*k}^2 - 1 = B_{*k} \quad (135)$$

et :

$$\sqrt{\zeta_{*k}^2 + \Delta\zeta_{*k}^2} = \sqrt{1 + B_{*k} + \Delta\zeta_{*k}^2} \cong 1 + \frac{1}{2}(B_{*k} + \Delta\zeta_{*k}^2)$$

d'où :

$$\begin{aligned} & \alpha_k B_{*k} + B_{*k+1} \\ = & 2\rho_* \left[\alpha_k \eta_k \left(1 + \frac{1}{2} B_{*k} + \frac{1}{2} \Delta\zeta_{*k}^2 \right) \right. \\ & \left. - \eta_{k+1} \left(1 + \frac{1}{2} B_{*k+1} + \frac{1}{2} \Delta\zeta_{*k+1}^2 \right) + \frac{c_0}{C_0} (1 - \alpha_k) \right] \end{aligned}$$

et :

$$B_{*k+1} = \quad (136)$$

$$\frac{\alpha_k B_{*k} (\rho_* \eta_k - 1) + 2\rho_{*k} \left[\alpha_k \eta_k \left(1 + \frac{1}{2} \Delta\zeta_{*k}^2 \right) - \eta_{k+1} \left(1 + \frac{1}{2} \Delta\zeta_{*k+1}^2 \right) + \frac{c_0}{C_0} (1 - \alpha_k) \right]}{1 + \rho_* \eta_{k+1}}$$

Nous pouvons extraire les valeurs $\Delta\zeta_{*k}^2$ d'une courbe des oscillations de masse, calculée en fonction du temps, au moyen des formules (53a) et (131), ce qui est possible sans tâtonnements, puisque la surcharge ΔY_{0i} n'arrive en O qu'avec un retard de $\frac{n_{III}}{2}$.

Considérons, en particulier, le cas d'une fermeture linéaire. Sitôt $\eta_k = \eta_{k+1} = 0$, $\Delta\zeta_{*k}^2$ et $\Delta\zeta_{*k+1}^2$ disparaissent de l'équation (134). On peut de nouveau séparer rigoureusement le calcul de ζ_{*k}^2 de celui de $\Delta\zeta_{*k}^2$ qui n'exerce plus aucune influence sur le régime des vitesses. Il suffira à nouveau d'additionner en chaque point A et O, et à chaque instant, les surcharges provenant de l'oscillation de masses aux surcharges du coup de bélier. L'emploi de la formule (136) sera donc limité au cas où $k < \Theta_{III}$. Or, on vérifiera que, dans ce cas, les valeurs $\Delta\zeta_{*k}^2$ sont encore très petites et ne modifient que peu l'écoulement de l'eau et la vitesse c_k . D'autre part, la loi d'ouverture de l'obturateur, qui

régit la vitesse c_h en même temps que la pression totale, n'est linéaire qu'approximativement. Il n'y aura donc, dans la plupart des cas, que peu d'intérêt à employer la formule (136). On commettra certainement une erreur bien petite en calculant les charges de coup de bélier directement au moyen de la formule (41) et en leur additionnant les valeurs $\Delta \zeta_{*k}^2$ pour $k < \Theta_{III}$ également. Le calcul au moyen de (136) est d'ailleurs toujours possible.

Nos conclusions sont donc les suivantes :

a) *Les oscillations de masse n'influencent pas les conditions de réflexion en A.* Il est, par le fait, erroné de considérer les surcharges provenant des oscillations de masse comme conditions aux limites pour le calcul du coup de bélier.

b) *Les oscillations de masse influencent uniquement la vitesse d'écoulement c_h en O, tant que $k < \Theta_{III}$.* On utilisera alors la formule (136), si l'on veut calculer ζ_{*k} exactement.

c) *Dans la plupart des cas, on obtiendra le diagramme des pressions totales en O et en A, avec une exactitude suffisante, en additionnant les deux diagrammes des surcharges dues au coup de bélier et à l'oscillation de la masse.*

Allievi a étudié¹ les lois du contre-coup de retour au régime. Après l'arrêt de l'obturateur, la charge dans la conduite oscille indéfiniment entre certaines limites, aisées à calculer dans le cas d'une conduite de diamètre constant. Dans le cas général qui nous occupe, on décèle, en poussant les calculs au-delà de l'instant $i = \Theta$, l'existence d'oscillations analogues. Il est évident que l'on rencontrera les cas les plus divers, les surcharges pouvant être tour à tour positives ou négatives. En théorie, il faudrait additionner rigoureusement à chaque instant les surcharges provenant du coup de bélier à l'oscillation de masse, qui se fait sentir plus ou moins rapidement, à partir de l'arrivée de la première onde en A. On vérifiera alors la valeur des surcharges totales tant à l'obturateur O qu'au point d'intersection A. Nous signalerons plus loin quelques cas intéressants.

¹ Voir ALLIEVI-GADEN, page 84.

Cependant, il est très probable qu'en réalité les ondes de coup de bélier s'amortissent assez rapidement, tant en raison de pertes d'énergie, qu'à cause de l'arrivée des ondes de réflexion de la conduite I.

Nous nous trouvons donc en présence d'un problème extrêmement complexe, auquel nous ne voyons de solution que dans des essais systématiques, soit en laboratoire, soit sur des ouvrages exécutés.

Cependant, il convient d'attirer l'attention du calculateur sur les dangers d'un excès d'optimisme. Il est des cas (chambres différentielles, chambres avec étranglement) où l'on fera bien d'étudier de près ce problème, sans spéculer sur des pertes d'énergie que nous ne savons pas calculer.

De toute façon, les deux phénomènes se superposent, et *il serait insuffisant d'estimer la surcharge totale que supportera l'ensemble « galerie en charge — chambre d'équilibre — conduite forcée », en ne calculant que l'un des deux phénomènes, fût-ce le plus dangereux, mais en négligeant l'autre à priori.*

Par la suite, nous négligerons cependant l'influence des oscillations de masse sur le coup de bélier, car les lois générales de ce dernier nous intéressent plus que l'exactitude numérique des résultats.

Conclusions.

Au point de vue hydrodynamique et de la propagation des coups de bélier, la chambre d'équilibre n'est que la continuation de la conduite forcée. Tout ce qui précède le prouve amplement; même l'interférence avec le phénomène des oscillations de masse n'arrive point à modifier le caractère propre du coup de bélier.

Dans ces conditions, le calcul d'une chambre d'équilibre se fera exactement sur le modèle de celui d'une conduite forcée et comprendra, comme ce dernier, deux calculs en une certaine mesure distincts: le calcul des surcharges B_{*k} et B_i en O et en A et le calcul de la série α_i . L'identité de la méthode se retrouve également dans les simplifications de calcul: nous n'avons fait que reprendre et développer les simplifications dont nous avons montré les avantages au chapitre I. D. Nous tenons d'ailleurs

à en marquer aussi les limites. Ces simplifications ne seront admissibles que si l'on est certain que l'allure de la fonction Φ_i est régulière et compatible avec les hypothèses; condition vérifiée pour le cas de fermeture linéaire et pour les manœuvres rythmiques synchrones.

Il ne nous reste plus qu'à illustrer cette méthode générale par un certain nombre d'exemples.

CHAPITRE B.

CHAMBRE D'ÉQUILIBRE PRISMATIQUE

1. *Les organes de fermeture se trouvent au droit de la chambre.*

Considérons le cas où la chambre d'équilibre se trouve au droit des organes de fermeture, et où il n'y a point de conduite forcée à l'aval de ceux-ci (fig. 43).

Le cas que nous envisageons est simple: il a déjà été traité par MM. J. Calame et D. Gaden ¹. Nous reproduisons leur théorie, en la systématisant.

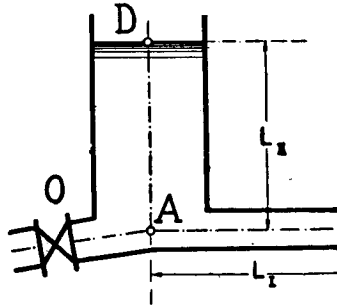


FIG. 43. — Chambre prismatique ;
organes de fermeture au droit de la chambre.

Supposons d'abord que nous nous trouvions dans la première phase de la galerie sous pression.

Ecrivons l'équation d'Allievi pour la chambre d'équilibre II, en employant nos notations habituelles:

$$\zeta_i^2 + \zeta_{i+1}^2 - 2 = 2\rho_{II} \left[\frac{\rho_{II_i}}{V_{II_0}} - \frac{\rho_{II_{i+1}}}{V_{II_0}} \right]. \quad (8)$$

¹ Voir Jules CALAME et Daniel GADEN, p. 23 et ss.

Au cours de la première phase de la galerie, nous écrivons l'équation connue:

$$\frac{v_{I_i}}{V_{I_0}} = \frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} - \frac{1}{2\rho_I} (\zeta_i^2 - 1) \quad (23a)$$

où i désigne un instant quelconque de la première phase de la conduite I.

Par contre, il nous faut une nouvelle relation pour exprimer la vitesse d'écoulement $v_{III_i} = c_i$. Nous aurons:

$$\frac{v_{III_i}}{V_{III_0}} = \eta_i \zeta_i. \quad (137)$$

Il n'y a, évidemment, rien à changer à l'équation de continuité (19), qui nous donne:

$$\frac{v_{III_i}}{V_{III_0}} = \frac{v_{III_i}}{V_{III_0}} - \frac{v_{I_i}}{V_{I_0}} = \eta_i \zeta_i - \frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} + \frac{1}{2\rho_I} (\zeta_i^2 - 1). \quad (138)$$

En portant cette valeur (138) dans l'équation fondamentale (8), nous obtenons:

$$\zeta_i^2 + \zeta_{i+1}^2 - 2 = 2\rho_{II} (\eta_i \zeta_i - \eta_{i+1} \zeta_{i+1}) + \frac{\rho_{II}}{\rho_I} (\zeta_i^2 - \zeta_{i+1}^2)$$

ou encore:

$$(\zeta_i^2 - 1) \left(1 - \frac{\rho_{II}}{\rho_I}\right) + (\zeta_{i+1}^2 - 1) \left(1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I}\right) = 2\rho_{II} (\eta_i \zeta_i - \eta_{i+1} \zeta_{i+1}).$$

(139)

Cette équation régit la loi des surcharges et permet le calcul point par point. Nous examinerons deux cas:

a) *Fermeture brusque* (première phase de la conduite I).

Faisons:

$$\zeta_0 = 1; \quad \eta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \eta_1 = 0 = \eta_2 = \eta_3 = \dots$$

L'équation (139) devient :

$$\left\{ \begin{aligned} &(\zeta_1^2 - 1) \left(1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I} \right) = 2\rho_{II} \text{ pour } i = 0 \\ &(\zeta_1^2 - 1) \left(1 - \frac{\rho_{II}}{\rho_I} \right) + (\zeta_2^2 - 1) \left(1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I} \right) = 0 \text{ pour } i = 1 \\ &(\zeta_2^2 - 1) \left(1 - \frac{\rho_{II}}{\rho_I} \right) + (\zeta_3^2 - 1) \left(1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I} \right) = 0 \text{ pour } i = 2 \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

d'où nous tirons :

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta_1^2 - 1 &= \frac{2\rho_{II}}{1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I}} = \frac{2\rho_I \rho_{II}}{\rho_I + \rho_{II}} & (140) \\ \zeta_2^2 - 1 &= -(\zeta_1^2 - 1) \frac{\rho_I - \rho_{II}}{\rho_I + \rho_{II}} = + \frac{2\rho_I \rho_{II}}{(\rho_I + \rho_{II})^2} (\rho_{II} - \rho_I) \\ \zeta_3^2 - 1 &= -(\zeta_2^2 - 1) \frac{\rho_I - \rho_{II}}{\rho_I + \rho_{II}} = + \frac{2\rho_I \rho_{II}}{(\rho_I + \rho_{II})^3} (\rho_{II} - \rho_I)^2 \\ &\dots \\ \zeta_i^2 - 1 &= -(\zeta_{i-1}^2 - 1) \frac{\rho_I - \rho_{II}}{\rho_I + \rho_{II}} = + \frac{2\rho_I \rho_{II}}{(\rho_I + \rho_{II})^i} (\rho_{II} - \rho_I)^{(i-1)}. \end{aligned} \right.$$

Les valeurs $(\zeta_i^2 - 1)$ diminuent donc en valeur absolue. Dans le cas ordinaire d'une chambre d'équilibre prismatique d'une section supérieure à celle de la conduite ($S_{II} > S_I$, $\rho_{II} < \rho_I$), les valeurs $(\zeta_i^2 - 1)$ changent alternativement de signe. On peut donc avoir, à la suite d'une fermeture brusque, des surcharges négatives, à un moment où le niveau d'eau dans la chambre d'équilibre est encore bas.

Si l'on a une chambre étroite (chambre différentielle) et que $\rho_{II} > \rho_I$, les valeurs $(\zeta_i^2 - 1)$ restent toutes positives, après la fermeture brusque et peuvent être relativement élevées. Elles s'additionnent alors à la surcharge de l'oscillation de masse, qui croît très rapidement dans une chambre différentielle.

Nous nous intéressons particulièrement à la première valeur, que nous écrivons:

$$\zeta_1^2 - 1 = \frac{2\rho_{II}}{1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I}} = \rho_{II} s_{II} = \frac{2\rho_I}{1 + \frac{\rho_I}{\rho_{II}}} = \rho_I s_I. \quad (141)$$

Dans une conduite de caractéristique ρ_{II} , sans chambre d'équilibre, le coup de bélier est égal à $2\rho_{II}$. Ici, $\zeta_1^2 - 1 < 2\rho_{II}$. On voit de même que $\zeta_1^2 - 1 < 2\rho_I$. C'est dire que le coup direct est plus petit que celui qui se produirait dans celle des deux conduites de plus grande caractéristique, si elle était seule.

b) *Fermeture lente.*

Pour le calcul d'une fermeture, nous nous servons de l'équation (139).

Posons dans (139) $i = 0$, en nous rappelant que:

$$\eta_0 = 1, \quad \zeta_0^2 = 1 \quad \text{et} \quad \eta_{i+1} \text{ pour } i=0 = \eta_1 = 1 - \frac{i+1}{\Theta_{II}} = 1 - \frac{1}{\Theta_{II}}.$$

Il vient:

$$(\zeta_1^2 - 1) \left(1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I}\right) = 2\rho_{II} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\Theta_{II}}\right)\zeta_1\right].$$

Ordonnons:

$$\zeta_1^2(\rho_I + \rho_{II}) + 2\rho_I\rho_{II}\left(1 - \frac{1}{\Theta_{II}}\right)\zeta_1 - (\rho_I + \rho_{II} + 2\rho_I\rho_{II}) = 0$$

d'où:

$$\zeta_1 = \frac{-\rho_I\rho_{II}\left(1 - \frac{1}{\Theta_{II}}\right) + \sqrt{\rho_I^2\rho_{II}^2\left(1 - \frac{1}{\Theta_{II}}\right)^2 + (\rho_I + \rho_{II})(\rho_I + \rho_{II} + 2\rho_I\rho_{II})}}{\rho_I + \rho_{II}} \quad (142)$$

On montre¹ que $\zeta_1 > \zeta_m$, si $\rho_I < \frac{\rho_I}{\rho_{II}} - 1$.

¹ Voir CALAME et GADEN, page 32.

Pour le calcul de ζ_m , nous ferons, comme de coutume, $\zeta_i \cong \zeta_{i+1} = \zeta_m$ dans (139); nous obtenons:

$$\zeta_m^2 - 1 = \rho_{II} \zeta_m (\eta_i - \eta_{i+1}) = \zeta_m \frac{\rho_{II}}{\Theta_{II}};$$

d'où:

$$\zeta_m = + \frac{\rho_{II}}{2\Theta_{II}} + \sqrt{\frac{\rho_{II}^2}{4\Theta_{II}^2} + 1}, \quad (143)$$

équation identique à l'équation (15a). La charge limite est, par le fait, identique à la charge limite de la chambre, supposée seule, quelle que soit la caractéristique ρ_I de la galerie et le rapport $\frac{\rho_{II}}{\rho_I}$.

L'efficacité de la chambre d'équilibre est donc grande, puisqu'elle substitue sa propre limite à celle de la conduite I.

c) *Cas où l'on se trouve dans une phase quelconque de la conduite I.*

Dans ce cas, nous remplaçons l'équation (23a) par (53a) que nous écrivons:

$$\frac{v_{I_i}}{V_{I_0}} = \frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} - \frac{1}{2\rho_I} (\zeta_i^2 - 1) - \frac{1}{\rho_I} [(\zeta_{i-n_I}^2 - 1) + (\zeta_{i-2n_I}^2 - 1) + \dots]$$

L'équation (138) devient:

$$\begin{aligned} \frac{v_{II_i}}{V_{II_0}} &= \frac{v_{III_i}}{V_{III_0}} - \frac{v_{I_i}}{V_{I_0}} = \eta_i \zeta_i - \frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} + \frac{1}{2\rho_I} (\zeta_i^2 - 1) \\ &+ \frac{1}{\rho_I} [(\zeta_{i-n_I}^2 - 1) + (\zeta_{i-2n_I}^2 - 1) + \dots] \end{aligned}$$

Portons cette valeur dans l'équation fondamentale (8), nous aurons:

$$\begin{aligned} \zeta_i^2 + \zeta_{i+1}^2 - 2 &= 2\rho_{II} (\eta_i \zeta_i - \eta_{i+1} \zeta_{i+1}) + \frac{\rho_{II}}{\rho_I} (\zeta_i^2 - \zeta_{i+1}^2) \\ &+ \frac{2\rho_{II}}{\rho_I} [(\zeta_{i-n_I}^2 - 1) + (\zeta_{i-2n_I}^2 - 1) + \dots \\ &- (\zeta_{i-n_I+1}^2 - 1) - (\zeta_{i-2n_I+1}^2 - 1) - \dots] \end{aligned}$$

ou encore:

$$\begin{aligned}
 (\zeta_i^2 - 1) \left(1 - \frac{\rho_{II}}{\rho_I}\right) + (\zeta_{i+1}^2 - 1) \left(1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I}\right) &= 2\rho_{II} (\eta_i \zeta_i - \eta_{i+1} \zeta_{i+1}) + \\
 \frac{2\rho_{II}}{\rho_I} \left[(\zeta_{i-n_I}^2 - 1) + (\zeta_{i-2n_I}^2 - 1) + \dots \right. \\
 \left. - (\zeta_{i-n_I+1}^2 - 1) - (\zeta_{i-2n_I+1}^2 - 1) - \dots \right] &\quad (144)
 \end{aligned}$$

équation générale, dont l'application sera évidemment laborieuse. On peut, cependant, se rendre compte de ce qui se passe à la fin de la fermeture linéaire, en supposant que celle-ci ne tombe pas dans la première phase. Faisons: $\zeta_i \cong \zeta_{i+1} = \zeta_m$. Nous obtenons, en désignant par A la valeur entre crochets, pour $i + 1 = m$:

$$\zeta_m^2 - 1 = \frac{\rho_{II}}{(\rho_{II})} \zeta_m + \frac{\rho_{II}}{\rho_I} A .$$

Nous observons que A sera, en général, une quantité assez petite en valeur absolue, puisqu'elle est obtenue par différences des termes successifs: $\zeta_{i-pn_I+1}^2$ et $\zeta_{i-pn_I}^2$, etc. . . . , qui sont presque identiques. Elle sera, d'autre part, en général négative. La valeur:

$$\zeta_m = \frac{\rho_{II}}{2(\rho_{II})} + \sqrt{\frac{\rho_{II}^2}{4(\rho_{II})^2} + 1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I} A}$$

sera donc plus petite que celle donnée par la formule (143) (première phase de I), chaque fois que A sera négatif. Le calcul exact au moyen de (144) est en général sans intérêt. En effet, si la fermeture est brusque, on reste dans la première phase de I. Si elle est lente, ζ_m est tellement petit, qu'il est inutile de faire des calculs précis.

La vérification exacte reste toujours possible. Elle se fait sans difficultés pour la deuxième phase de la conduite I. Calculons, en effet, point par point les valeurs de ζ_i^2 , jusqu'à $i = \Theta - n_I + 1$. Dans ce cas, $A = \zeta_{\Theta - n_I}^2 - \zeta_{\Theta - n_I + 1}^2$; or, ces deux valeurs sont contenues dans le tableau ayant servi au calcul point par point.

d) *Manœuvres alternatives rythmiques.*

Des oscillations synchronisées avec la période de la chambre sont-elles dangereuses ? Cette dernière étant, en général, très courte, les oscillations devraient être très rapides, et elles ne deviendraient dangereuses que si elles se répétaient en très grand nombre. Si la chambre était seule, leur limite serait $Z_1^2 = 2$ (Voir chapitre I.D). Pour reconnaître si la présence de la conduite I abaisse cette limite, il est indispensable d'avoir recours au calcul direct.

Nous ne pensons pas que cette question soit souvent d'importance pratique, l'obturateur ne se prêtant pas à des manœuvres aussi rapides. Dans la plupart des cas, une surcharge $Z_1^2 = 2$ peut être exceptionnellement tolérée.

e) *Exemple numérique: (cas « A »)¹.*

Nous allons examiner le cas d'une galerie en charge très longue :

$$L_I = 10250 \text{ m.}; L_{II} = 42,70 \text{ m.}; Q_0 = 27,5 \text{ m}^3/\text{sec.};$$

$$a_I = a_{II} = 1335 \text{ m/sec.}$$

$$D_I = D_{II} = 2,80 \text{ m.}; V_{I_0} = V_{II_0} = 4,47 \text{ m/sec.};$$

$$\rho_I = \rho_{II} = \frac{aV_0}{2gY_0} = \frac{1335 \times 4,47}{19,62 \times 42,70} = 7,13$$

$$\mu_I = 15",36; \mu_{II} = 0",064; n_{II} = 1; n_I = 240.$$

Dans le cas de la fermeture instantanée, nous trouvons :
surcharge relative

$$B_1 = \zeta_1^2 - 1 = \frac{2\rho_{II}}{1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I}} = \rho_{II} = 7,13$$

surcharge absolue

$$Y_0 B_1 = 42,70 \times 7,13 = 304,50 \text{ m.}$$

Cette surcharge serait inadmissible; mais, en fait, aucune fermeture n'est instantanée. Calculons donc la courbe caracté-

ristique des pressions limites, en faisant varier $\Theta_{II} = \frac{\tau}{\nu_{II}}$ dans l'équation (143) et reportons les résultats au tableau que voici:

Surcharges limites pour la fermeture linéaire (fig. 44, courbe 1).

τ	sec.	0.5"	1"	2"	4"	5"	10"
B_m	%	1.42	0.573	0.256	0.120	0.073	0.047
$Y_0 B_m$	m.	60.6	24.2	10.92	5.13	3.12	2.00

2. *Les organes de fermeture se trouvent au bas de la conduite forcée.*

Nous calculons toute chambre d'équilibre prismatique en appliquant la théorie générale, telle que nous l'avons exposée aux chapitre I.B et II.A, c'est-à-dire en considérant la chambre comme un élément de conduite.

Les équations (41) et (18), souvent citées, nous donnent ζ_{*k} et B_i , au moyen d'un calcul point par point. Ainsi que nous l'avons exposé au chapitre II.A, nous admettrons, pour le calcul de α_i , que la fonction Φ_{*k} est linéaire entre les points k et $k + 1$, hypothèse toujours suffisante, exception faite de certaines manœuvres alternatives rythmiques non synchrones. Nous ne calculons donc que les périodes $k - 1, k, k + 1, \dots$ et non les périodes $i - 1, i, i + 1, \dots$. Dans ces conditions, le calcul d'une conduite forcée et de sa chambre d'équilibre ne sera guère plus long que le calcul de la même conduite, débouchant d'un bassin infiniment grand. La valeur α_i est donnée par la série (33), tant que nous nous trouvons dans la première phase de la conduite I, et par les séries (56) ou (60) pour les phases suivantes.

Le calcul de B_{*k} pour les phases successives de la conduite I n'est en rien modifié, les formules (41) et (18) gardant leur valeur dans ce cas également.

La recherche des lois des surcharges aux points O et A est donc possible dans tous les cas et en toute rigueur. Nous estimons que le calcul exact s'impose pour toute chambre d'équilibre, ne serait-ce qu'à titre de contrôle d'un des points de la courbe

caractéristique des surcharges limites. Il est également indispensable d'employer la méthode générale pour le calcul des manœuvres alternatives rythmiques de l'obturateur.

N'ayant plus rien à ajouter à l'exposé de la méthode exacte, nous nous attacherons à compléter la « méthode de calcul

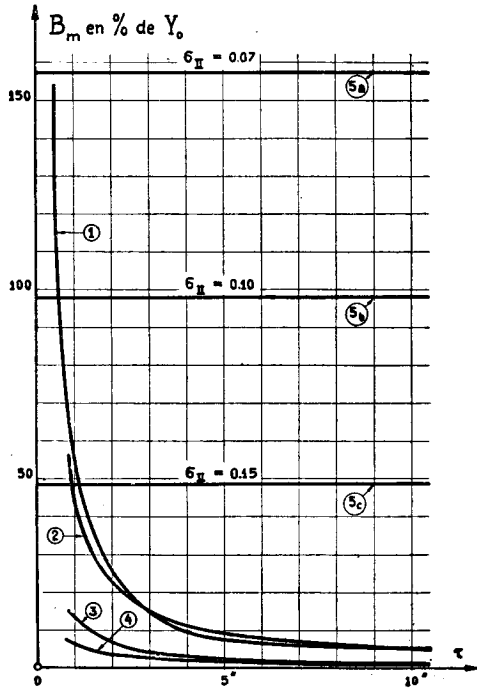


FIG. 44. — Courbes caractéristiques des charges limites dans le cas d'une fermeture linéaire.

Organes de fermeture au droit de la chambre d'équilibre:

$$\nu_{II} = 0,064 \text{ sec}; \nu_I = 15,36 \text{ sec}; Y_0 = 42,70 \text{ m.}$$

1. Chambre prismatique (chapitre II, B 1) $\rho_I = \rho_{II} = 7,13$.
2. Chambre avec partie inférieure tubulaire (fig. 37), (chapitre II, C 1), $\rho_I = \rho_{II} = 7,13$; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$; $n_2 = n_3 = 7$.
3. Chambre non prismatique (fig. 36a) (chapitre II, C 1) $\rho_I = 7,13$; $\rho_I = \frac{\rho_1}{8}$.
4. Chambre avec col d'entrée (fig. 36) (chap. II, C 1) $\rho_I = \rho_{II} = 7,13$; $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 8$.
5. Chambre à étranglement (fig. 38) chapitre II, D 1): a) $\sigma_{II} = \frac{V_{I_0}}{V_{II_0}} = 0,07$;
b) $\sigma_{II} = 0,10$; c) $\sigma_{II} = 0,15$.

approché » développée, en partie déjà, aux chapitres I.D. et II.A.1.b. Nous y avons établi deux formules capitales permettant, dans le cas de la fermeture linéaire lente, l'une, le calcul de α_{m-1} , limite de α_i , (formules (121) et (127)), l'autre, le calcul de ζ_{*m} et de B_{*m} , limites de ζ_{*h} et B_{*h} (formule (122a)). Reste encore à étudier la surcharge au point d'intersection A.

Supposons — et des vérifications effectuées point par point montrent qu'il en est bien ainsi — qu'il existe une limite B_m de B_i , lorsque i tend vers Θ_{II} . Reprenons les équations initiales du chapitre I.B.3.b :

$$\zeta_i^2 + \zeta_{i+1}^2 - 2 = 2\rho_{II} \left(\frac{\nu_{IIi}}{\bar{V}_{II_0}} - \frac{\nu_{IIi+1}}{\bar{V}_{II_0}} \right) \quad (21)$$

$$\frac{\nu_{IIi}}{\bar{V}_{II_0}} = \frac{\nu_{II_0}}{\bar{V}_{II_0}} - \frac{1}{2\rho_I} (\zeta_i^2 - 1) , \quad (23b)$$

cette dernière, valable uniquement pour la première période de la conduite I, et :

$$\frac{\nu_{IIIi}}{\bar{V}_{III_0}} = \frac{\nu_{III_0}}{\bar{V}_{III_0}} - \frac{1}{2\rho_{III}} \Phi_i (1 + \alpha_i). \quad (20)$$

Introduisons les deux dernières équations dans (21), en tenant compte, d'une part, de l'équation de continuité (19), d'autre part, de ce que $\nu_{II_0} = 0$ au début du mouvement de fermeture Il vient alors :

$$\begin{aligned} \zeta_i^2 + \zeta_{i+1}^2 - 2 &= \frac{\rho_{II}}{\rho_{III}} \left[\Phi_{i+1} (1 + \alpha_{i+1}) - \Phi_i (1 + \alpha_i) \right] \\ &\quad - \frac{\rho_{II}}{\rho_I} \left[\zeta_{i+1}^2 - 1 - (\zeta_i^2 - 1) \right] \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} (\zeta_i^2 - 1) \left(1 - \frac{\rho_{II}}{\rho_I} \right) + (\zeta_{i+1}^2 - 1) \left(1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I} \right) \\ = \frac{\rho_{II}}{\rho_{III}} \left[\Phi_{i+1} (1 + \alpha_{i+1}) - \Phi_i (1 + \alpha_i) \right] \end{aligned}$$

Par analogie, nous écrivons cette équation pour l'instant ($i - 1$),

$$\begin{aligned} & (\zeta_{i-1}^2 - 1) \left(1 - \frac{\rho_{II}}{\rho_I}\right) + (\zeta_i^2 - 1) \left(1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I}\right) \\ &= \frac{\rho_{II}}{\rho_{III}} [\Phi_i(1 + \alpha_i) - \Phi_{i-1}(1 + \alpha_{i-1})] \end{aligned} \quad (146)$$

équation rigoureuse, valable pendant la première période de la conduite I.

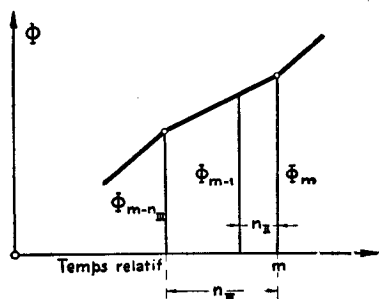


FIG. 45.

Faisons tendre i vers m et écrivons selon notre coutume:

$$\zeta_m = \zeta_i \cong \zeta_{i-1}$$

il vient:

$$\zeta_m^2 - 1 = \frac{\rho_{II}}{2\rho_{III}} [\Phi_m(1 + \alpha_m) - \Phi_{m-1}(1 + \alpha_{m-1})]. \quad (147)$$

Il faut trouver, pour la quantité entre crochets, une valeur aussi exacte que possible, en fonction de grandeurs que nous connaissons. Plaçons-nous dans le cas ordinaire auquel nous réservons le calcul approximatif: fermeture linéaire lente, et soit $n_{III} > n_{II}$.

Nous savons que, si ces conditions sont remplies, m sera grand et $\alpha_{m-1} \cong \alpha_m$. De plus, nous avons, en vertu de l'hypothèse 1 (fig. 45):

$$\frac{\Phi_m - \Phi_{m-n_{III}}}{n_{III}} = \frac{\Phi_{m-1} - \Phi_{m-n_{III}}}{n_{III} - n_{II}}$$

qu'il est facile de transformer pour obtenir:

$$\Phi_m - \Phi_{m-1} = \frac{n_{II}}{n_{III}} (\Phi_m - \Phi_{m-n_{III}}) = \frac{H_0}{Y_0} \frac{n_{II}}{n_{III}} (\Phi_{*m} - \Phi_{*m-n_{III}})$$

D'où, la surcharge relative:

$$\zeta_m^2 - 1 \cong \frac{\rho_{II}}{\rho_{III}} \cdot \frac{H_0}{Y_0} \cdot \frac{n_{II}}{n_{III}} \cdot \frac{1 + \alpha_m}{2} [\Phi_{*m} - \Phi_{*m-n_{III}}]$$

exprimée en pourcents de Y_0 . Il est souvent plus commode d'écrire, en pourcents de H_0 :

$$B_m \cong \frac{\rho_{II}}{\rho_{III}} \cdot \frac{n_{II}}{n_{III}} \cdot \frac{1 + \alpha_m}{2} [\Phi_{*m} - \Phi_{*m-n_{III}}] \quad (148)$$

formule approchée.

D'autre part, nous avons, en toute rigueur:

$$B_{*m} = \Phi_{*m} - \alpha_{m-n_{III}} \Phi_{*m-n_{III}} \quad (40a)$$

et:

$$B_m = \Phi_{*m} (1 - \alpha_m) \quad (18a)$$

Eliminons Φ_{*m} et $\Phi_{*m-n_{III}}$; on trouve:

$$\Phi_{*m} = \frac{B_m}{1 - \alpha_m}; \quad \Phi_{*m-n_{III}} = \frac{1}{\alpha_{m-n_{III}}} \left[\frac{B_m}{1 - \alpha_m} - B_{*m} \right]$$

et:

$$B_m \cong \frac{\rho_{II}}{\rho_{III}} \cdot \frac{n_{II}}{n_{III}} \cdot \frac{1 + \alpha_m}{2} \left[\frac{B_m}{1 - \alpha_m} - \frac{B_m}{(1 - \alpha_m) \alpha_{m-n_{III}}} + \frac{B_{*m}}{\alpha_{m-n_{III}}} \right],$$

d'où:

$$B_m \approx \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_{II}}{\rho_{III}} \cdot \frac{n_{II}}{n_{III}} \cdot \frac{1 + \alpha_m}{\alpha_{m-n_{III}}}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_{II}}{\rho_{III}} \cdot \frac{n_{II}}{n_{III}} \cdot \frac{1 + \alpha_m}{1 - \alpha_m} \cdot \frac{1 - \alpha_{m-n_{III}}}{\alpha_{m-n_{III}}}} \cdot B_{*m} \quad (149)$$

Dans cette formule (valable pour la première phase de la conduite I) nous savons calculer a priori α_m , $\alpha_{m-n_{III}}$, en faisant appel à l'hypothèse 2; B_{*m} est également connu. B_m est donc donné au moyen d'une formule approximative. Cette formule donnerait pour B_m des valeurs très exactes, si l'on y introduisait des valeurs α_m , $\alpha_{m-n_{III}}$, et B_{*m} , extraites d'un tableau de calcul point par point.

Lorsqu'on fait, au contraire, usage de valeurs calculées a priori — ce qui sera toujours le cas en pratique, le calcul point par point s'effectuant au moyen de la formule (18) et non de (149) — l'exactitude de la formule (149) s'avère moindre que celle de la formule (122a) donnant ζ_{*m} et B_{*m} . Cependant, nous avons montré incidemment, au cours du chapitre I.D, que, pour des valeurs de m comprises entre 10 et 20, la formule (149), appliquée au cas d'une conduite présentant une discontinuité, donnait déjà des valeurs d'une exactitude suffisante pour la pratique. En fait, m sera toujours bien plus grand. N'oublions pas qu'il n'est point nécessaire de connaître la pression en A avec la même rigueur que la pression en O.

Adaptons la formule (149) au cas d'une conduite sans chambre d'équilibre et à caractéristique unique.

On a :

$$\rho_{II} = \rho_{III} \quad \text{et} \quad \alpha_m = \alpha_{m-n_{III}} = 1 ;$$

et:

$$B_m \approx \frac{\frac{n_{II}}{n_{III}}}{1 + \frac{n_{II}}{n_{III}}} B_{*m} = \frac{n_{II}}{n_{II} + n_{III}} B_{*m} , \quad (150)$$

formule que nous avons déjà appliquée, dans la première partie, quoique sans la démontrer.

On vérifiera d'ailleurs sans peine que toutes nos formules approchées reprennent la forme des formules d'Allievi, si l'on y introduit les conditions $\rho_{II} = \rho_{III}$ et $\alpha \equiv 1$, qui expriment que la conduite est à caractéristique unique.

Exemples numériques.

Nous examinerons trois chambres d'équilibre prismatiques. Le premier exemple (cas « C ») est celui d'une chambre très longue, réagissant à la fermeture rapide des organes de secours

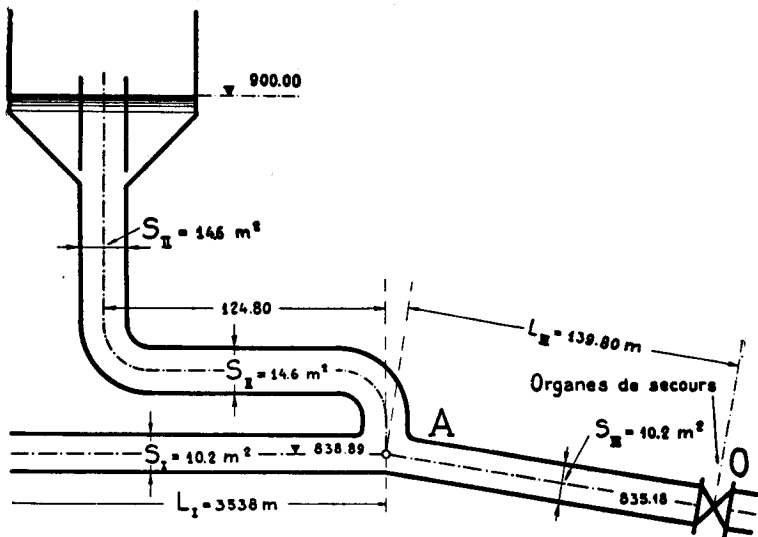


FIG. 46. — Coupe schématique d'une chambre d'équilibre de grande longueur (conduite C). — Données : $L_{II} = 185,90$ m.; $L_{III} = 139,80$ m.; $L_I = 3538,40$ m. ∞ . $H_0 = 64,80$ m.; $Y_0 = 61,10$ m.; $Q = 32$ m³/sec.

situés à proximité. Il illustre assez bien les dangers que des solutions analogues pourraient présenter, le cas échéant. Les deux autres cas se rapportent à la fermeture de chambres courtes. Nous y verrons la justification de notre méthode approchée :

La figure 46 représente la chambre d'équilibre que nous allons étudier. Les organes de secours se trouvent à la cote 835,20, dans le bâtiment de commande.

Les données principales sont:

$$H_0 = 64,80 \text{ m.}; Y_0 = 61,10 \text{ m.}$$

$$L_I = 3538,40 \text{ m. (nous admettons } L_I = \infty); L_{II} = 185,90 \text{ m.}; \\ L_{III} = 139,80 \text{ m.}$$

$$a_I = a_{II} = a_{III} = 1300 \text{ m/sec.}; \mu_{III} = 0",214; \mu_{II} = 0",286$$

$$S_I = S_{III} = 10,2 \text{ m}^2; S_{II} = 14,6 \text{ m}^2$$

$$V_{0_I} = V_{0_{III}} = 3,14 \text{ m/sec.}; V_{0_{II}} = 2,190 \text{ m/sec.}$$

$$\rho_* = 3,22; \rho_I = \rho_{III} = 3,41; \rho_{II} = 2,38$$

$$\bar{\alpha}_i = 0,417 + 0,4865 + 0,0804 + 0,0133 + 0,0022 + 0,0004$$

Supposons un accident des deux conduites forcées. Le débit $Q_{0_{\max}} = 32 \text{ m}^3/\text{sec.}$ doit être interrompu dans le plus court délai. Si l'interruption était instantanée, c'est-à-dire plus courte que 0.286 sec. nous aurions:

$$\text{En O: } B_{*1} = 2\rho_* = 6,44H_0; H_0B_{*1} = 64,8 \times 6,44 = \mathbf{417 \text{ m.}}$$

$$\text{En A: } B_1 = (1 - r_{III}). B_{*1} = 0,583 \times 6,44 = 3,755 (375,5 \%).$$

$$H_0B_1 = 64,8 \times 3,755 = \mathbf{243.2 \text{ m.}}$$

Oscillation de masse: 0,00 au temps $i = 0$.

Il est peu probable que le système puisse supporter une fermeture instantanée. Reprenons les calculs pour une fermeture en 1". Nous utilisons les formules (41) et (18), en choisissant $n_{III} = 1$, ce qui nous donne $n_{II} = 1,33$. Par le fait, la formule (33) s'écrit exceptionnellement:

$$\alpha_i = 0,417 + 0,4865 \frac{\Phi_{i-n_{II}}}{\Phi_i} + 0,0804 \frac{\Phi_{i-2n_{II}}}{\Phi_i} + 0,0133 \frac{\Phi_{i-3n_{II}}}{\Phi_i} + \dots$$

Nous avons reporté, sur la figure 47, les valeurs B_{*k} et B_i , calculées point par point en % de H_0 . La courbe des valeurs

$B_i = \frac{Y_0}{H_0} (\zeta_1^2 - 1)$ nous donne, sans difficulté, les vitesses v_{II_i} , pour ($v_{II_0} = 0$):

$$v_{II_i} = -\frac{V_{II_0}}{2\rho_{II}} \left[(\zeta_i^2 - 1) + 2(\zeta_{i-n_{II}}^2 - 1) + 2(\zeta_{i-2n_{II}}^2 - 1) + \dots \right]. \quad (53a)$$

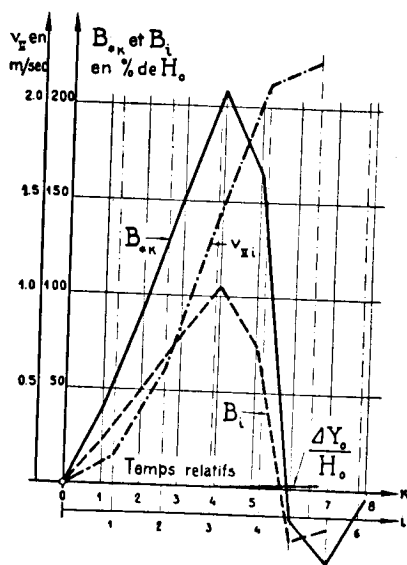


FIG. 47. — Représentation graphique, en fonction du temps, de la loi des surcharges B_{*h} devant l'obturateur O, et B_i au point d'intersection A, de la variation de la vitesse v_{II_i} dans la chambre d'équilibre et des oscillations de masse $\frac{\Delta Y_{0i}}{H_0}$.

Chambre du type de la fig. 46; fermeture de l'obturateur en 1".

Nous avons estimé l'intégrale de cette courbe en la décomposant en trapèzes et obtenons l'oscillation du niveau d'eau grâce à la relation:

$$\Delta Y_{0i} = \sum_0^i \frac{v_{i-n_{II}} + v_i}{2} \cdot \mu_{II}.$$

En reportant la courbe $\frac{\Delta Y_{0i}}{H_0}$ sur la même figure 47, on vérifie que les surcharges provenant des oscillations de masse sont négligeables par rapport à celles dues au coup de bélier. Voici, d'ailleurs, les résultats essentiels de ces calculs:
Surcharges maxima:

$$\begin{aligned} \text{En O: } B_{*max.} &= 2,086 ; H_0 B_{*max.} = 135,20 \text{ m. ;} \\ &\text{charge totale} = 200 \text{ m.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{En A: } B_{max.} &= 1,053 ; H_0 B_{max.} = 68,15 \text{ m. ;} \\ &\text{charge totale} = 132,95 \text{ m.} \end{aligned}$$

Au moment où les valeurs $B_{*max.}$ et $B_{max.}$ sont atteintes, la valeur de ΔY_0 n'est que de 0,30 m. environ.

A titre de comparaison, une chambre d'équilibre très grande nous aurait donné, dans les mêmes conditions (d'après Allievi):

Surcharge en O:

$$\begin{aligned} \zeta_{*m}^2 &= \frac{3,22}{2.4,67} + \sqrt{1 + \left(\frac{3,22}{2.4,67}\right)^2} = 1,402 ; \\ B_{*m} &= \zeta_{*m}^2 - 1 = 0,964 . \end{aligned}$$

Surcharge en A:

$$\zeta_m^2 = 1 ; B_m = 0 .$$

En juxtaposant ces chiffres aux précédents, on se rend compte de la différence qu'il peut y avoir entre les réactions d'une chambre étroite et celles d'une chambre infiniment grande.

Cet exemple de fermeture rapide d'un système où $n_{II} > n_{III}$, doit être calculé directement, aucune des conditions requises à l'application de la méthode de calcul approchée n'étant satisfaite. Afin de nous rendre compte de l'ordre de grandeur de l'erreur commise, nous n'en voulons pas moins utiliser, en ce cas extrême, les formules approximatives, en mettant en regard de

chaque résultat, le chiffre correspondant extrait de nos tableaux de calculs exacts. Nous trouvons, par la méthode approchée:

$$\alpha_{m-1} = \alpha_3 = 0,704 \text{ (au lieu de } 0,6287)$$

$$\alpha_m = \alpha_4 = 0,7735 \text{ (au lieu de } 0,6936)$$

$$\zeta_{*m} = \frac{0,485 + \sqrt{0,236 + 1,704 \cdot (1,704 + 6,44 \times 0,296)}}{1,704} = \mathbf{1,766}$$

(au lieu de 1,758)

$$B_{*m} = \zeta_{*m}^2 - 1 = 2,116 \text{ (au lieu de } 2,086)$$

$$B_m = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2,38}{3,41} \cdot \frac{1,3}{1} \cdot \frac{1,7735}{0,704}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2,38}{3,41} \cdot \frac{1,3}{1} \cdot 0,2265 \cdot \frac{0,296}{0,704}} \times 2,116 = \mathbf{0,97}$$

(au lieu de 1,053)

L'erreur commise est donc de 1,5% pour B_{*m} et de 8% pour B_m , résultat qui nous paraît encore suffisant et, pour le moins rassurant, le cas se prêtant mal à l'application de la méthode approchée.

Cet exemple numérique confirme bien les points suivants: Les valeurs $B_{*max.}$ et $B_{max.}$ calculées d'après la théorie généralisée peuvent, le cas échéant, différer beaucoup des valeurs correspondantes que l'on obtiendrait en supposant la chambre infinie. Les oscillations de masse n'entrent pas en ligne de compte pour des manœuvres de fermeture rapide. Relevons, enfin, et nous le montrerons mieux encore, que la méthode approximative donne des résultats très satisfaisants, l'erreur commise restant dans les limites de l'exactitude requise.

Passons à l'étude du deuxième exemple. Il s'agit d'une chambre prismatique, caractérisée par la relation $\rho_I = \rho_{II} = \rho_{III}$, et placée au haut de la conduite B (fig. 40)¹.

Voici les données principales:

$$H_0 = 109,47 \text{ m. ; } Y_0 = 35,48 \text{ m. ; } L_{III} = 408 \text{ m. ; } \mu_{II} = 0",049$$

$$\mu_{III} = 0",623 ; n_{III} = 12,72 ; V_{I_0} = V_{II_0} = V_{III_0} = 6,03 \text{ m/sec.}$$

$$\rho_I = \rho_{II} = \rho_{III} = 11,36 ; \rho_* = 3,68 ;$$

$$r_I = r_{II} = r_{III} = 0,333 ; s_I = s_{II} = s_{III} = 0,666$$

¹ Voir pages 179 et 180.

$$\bar{\alpha}_i = 0,3333 + 0,4445 + 0,1482 + 0,0494 + 0,0165 + 0,0055 \\ + 0,0018 + 0,0006 + 0,0002 .$$

La longueur L_1 est supposée infinie ; nous restons donc toujours dans la première phase de la galerie.

Voici le résumé de nos calculs relatifs à une fermeture linéaire de l'obturateur :

Tableau récapitulatif : fermeture linéaire (voir fig. 48).

Surcharges B_{*k} et B_i

Données $\rho_* = 3,68$; $\mu_{III} = 0,623$; $n_{III} = 12,72$

Temps de fermeture	2"	5"	10"	20"	30"	40"
α_i formule approchée.	0,9644	0,9888	0,9948	0,9975	0,9983	0,9988
α_i (calcul de vérification) . .	0,9466		0,9921			
B_{*m} formule approchée . . .	2,15	0,595	0,280	0,122	0,085	0,064
$H_0 B_{*m}$ (en m.)	235,50 m.	65,10 m.	30,60 m.	13,40 m.	9,30 m.	7,00 m.
$B_{*max.}$ (vérification) . . .	2,24		0,284			
Différence . . .	0,09		0,004			
En %	4%		1,4%			
B_m formule approchée . . .	0,148	0,0432	0,0204	0,00886	0,00618	0,00465
$H_0 B_m$ (en m.)	16,20 m.	4,75 m.	2,25 m.	0,97 m.	0,68 m.	0,51 m.
$B_{max.}$ (vérification)	0,1668		0,0218			
Différence . . .	0,0188		0,0014			
En %	11,3%		7%			

Ce tableau est instructif à plus d'un point de vue. Il permet de tracer les « courbes caractéristiques des pressions limites en O et en A » (fig. 48), et de se rendre très exactement compte de la façon dont l'ensemble « conduite forcée — chambre d'équilibre » réagit au cours d'une fermeture quelconque.

Nous relevons la très belle concordance entre les surcharges limites B_{*m} et les valeurs B_{*max} calculées exactement pour $\tau = 2''$ et $10''$. La concordance entre les valeurs B_m et B_{max} semble moins bonne. En fait, B_m coïncide très bien avec la valeur limite moyenne, vers laquelle tend B_i . La valeur B_{max} provient d'un écart de la courbe des surcharges B_i , ainsi qu'on le voit

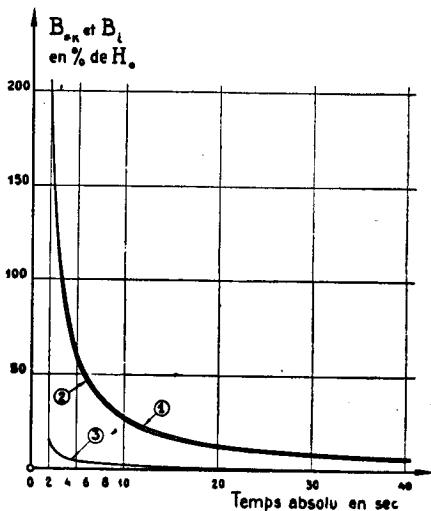


FIG. 48. — Courbes caractéristiques des surcharges limites :

1. Devant l'obturateur O, pour une chambre prismatique $n_{III} = 12,72$; $\rho_I = \rho_{II} = \rho_{III} = 11,36$, ou pour une chambre analogue avec chambre inférieure;
 2. Devant l'obturateur pour une chambre infiniment grande;
 3. Au point d'intersection A de la chambre $\rho_I = \rho_{II} = \rho_{III} = 11,36$.
- Données générales: $\rho_* = 3,68$; $\nu_{III} = 0'',623$.

sur la fig. 49, sur laquelle nous avons reporté, en fonction du temps relatif k , les lois des surcharges B_{*k} devant l'obturateur, et B_i au point A, pour la chambre définie par $\rho_I = \rho_{II} = \rho_{III}$, ainsi que la loi des surcharges B_{*k} pour une chambre infiniment grande. ($\alpha_i \equiv 1$; $B_i \equiv 0$).

Passons au dernier exemple, soit une conduite « A »¹ définie par: $H_0 = 667,10$ m.; $Y_0 = 83,0$ m.; $L_{III} = 1896,40$ m. $L_I \cong \infty$;

¹ Voir pages 180 et 205.

$\mu_{III} = 2",895$; $\mu_{II} = 0",064$; $n_{III} = 45,2$; $Q_0 = 27,5 \text{ m}^3/\text{sec.}$; $\rho_* = 0,725$, que nous munissons d'une chambre d'équilibre définie par $\rho_I = \rho_{II} = \rho_{III}$ et $n_{III} = 45,2$.

Le calcul approché de la fermeture linéaire nous permet de dresser le tableau récapitulatif suivant:

Fermeture linéaire: Surcharges à l'obturateur.

Données: $\rho_* = 0,725$; $\mu_{III} = 2",895$

Temps de fermeture. . .	5"	10"	20"	30"	40"
α_i (approchée)	0,9956	0,9978	0,999	1	1
B_{*m} (approchée)	0,533	0,235	0,112	0,0725	0,054
B_{*m} pour une chambre infinie $\alpha_i \equiv 1$	0,533	0,235	0,112	0,0725	0,054

Ce que nous voulions faire ressortir dans ce dernier tableau, c'est la bonne concordance entre la courbe caractéristique calculée pour une chambre étroite ($\rho_I = \rho_{II} = \rho_{III}$) et une chambre infinie $\alpha_i \equiv 1$. Nous avons déjà relevé, au chapitre II. A.l.b., que la conduite A¹ (conduite longue, et haute chute) était très peu « sensible », fait que nous retrouvons ici, de façon très nette. Il est dû, à la fois, à ce que $\rho_* < 1$ et à la valeur élevée de n_{III} . Cet exemple s'oppose très nettement au premier exemple traité (Conduite « C »)², où $\rho_* = 3,22$ et $n_{III} < 1$.

Allievi avait réussi à décrire les propriétés d'une conduite quelconque, au moyen d'abaques classificateurs. Cela nous est impossible, dans le cas général, en raison du trop grand nombre de variables (ρ_* , ρ_I , ρ_{II} , ρ_{III} , n_{III} , Θ ...) auxquelles nous avons affaire. Cependant, les trois exemples traités ci-dessus nous donnent une idée de la diversité des cas que nous pouvons rencontrer, depuis la conduite peu sensible (Conduite « A »), jusqu'à la solution très sensible (fermeture rapide de l'organe de secours de

¹ Voir page 180.

² Voir page 212, fig. 46.

la conduite « C »). Si, dans le premier cas, l'application de la théorie générale nous ramène à des valeurs très proches de celles obtenues en faisant $\alpha_i \equiv 1$, il n'en est plus de même dans le cas « C », où les surcharges B_{*m} et B_m ne peuvent être connues que grâce à la théorie que nous venons d'élaborer. Dans un cas

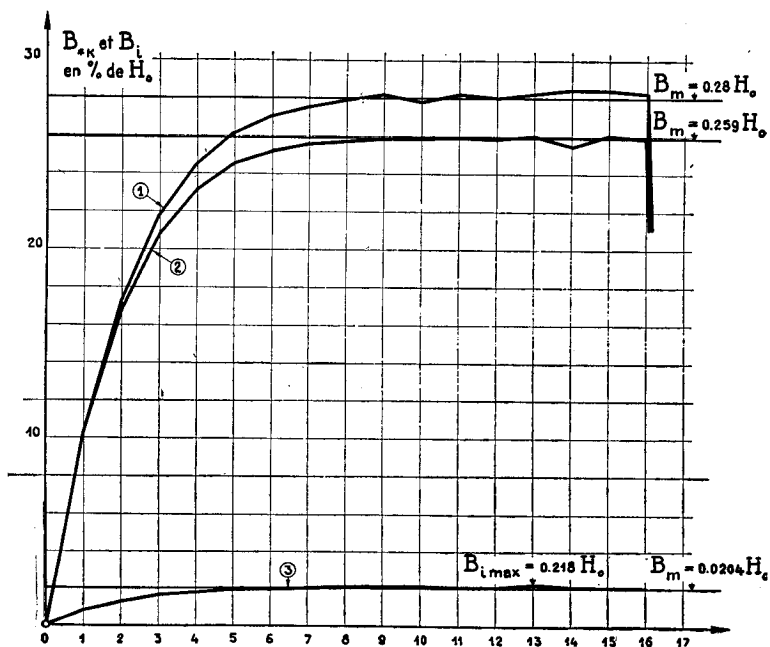


FIG. 49. — Loi des surcharges B_{*k} devant l'obturateur O et B_i en A, en fonction du temps. Fermeture en $\tau = 10$ sec, $\Theta_{III} = 16,05$:

1. Surcharges B_{*k} en O, pour une chambre prismatique $\rho_I = \rho_{II} = \rho_{III}$; $n_{III} = 12,72$;
2. Surcharges B_{*k} en O, pour $\alpha_i \equiv 1$ (bassin infiniment grand);
3. Surcharges B_i en A, pour la chambre prismatique.

pareil, où l'on est bien près des limites extrêmes admissibles pour la surcharge, il ne serait pas prudent d'éluder le calcul exact.

Les trois exemples traités prouvent, enfin, l'utilité et la souplesse de la méthode de calcul approché, pour l'étude de la fermeture linéaire, la fermeture brusque exceptée. L'exactitude

obtenue reste largement dans les limites qu'on peut exiger en pratique. Nous pourrions, en outre, et sans effort exagéré, soumettre une chambre d'équilibre à une étude systématique et vérifier, entre autres, comment varient les pressions, si l'on modifie l'un quelconque des éléments de l'ensemble: ρ_* ; ρ_I ; ρ_{II} ; ρ_{III} ; Y_0 ; τ etc.

Il est évident que le calcul des lois de surcharges pour le cas de fermeture linéaire n'épuisera point le champ d'investigations du technicien, qui portera également son attention sur les cas d'ouvertures brusques et de manœuvres alternatives rythmiques. Cet examen se fait par application directe de la méthode générale. Pour toute manœuvre linéaire ou synchrone, on calculera les points $k-1$, k , $k+1$ de la phase de la conduite, Φ_{*k} étant pratiquement une droite entre ces points. Pour toute manœuvre rythmique non synchrone, on prendra comme durée de la phase le plus grand commun diviseur entre la cadence de la manœuvre et la période de la conduite, la fonction Φ_{*k} étant de nouveau presque linéaire entre ces points, ainsi qu'on le vérifie sans difficulté (voir fig. 31). Il est donc toujours possible de calculer α_k très exactement, sans passer par le calcul de tous les points $i-1$, i , $i+1$.

CHAPITRE C.

CHAMBRES NON PRISMATIQUES, AVEC COL D'ENTRÉE
OU AVEC PARTIE INFÉRIEURE TUBULAIRE

Peu de chambres d'équilibre modernes sont prismatiques. On a des raisons très bonnes de s'écarter de cette forme et d'adopter l'un des trois types suivants: chambre avec col; chambre avec partie inférieure tubulaire et chambre avec étranglement. Chacun de ces systèmes a ses avantages, qui le feront préférer suivant les cas. Or, si nous avons quelques raisons *a priori* de croire au bon fonctionnement des chambres prismatiques — et nous avons vu qu'il est des cas où pareille affirmation est cependant téméraire, voire controuvée, — nous n'en avons, pratiquement, aucune d'avoir sans autre confiance en l'une ou l'autre des trois formes citées plus haut. On se représente, au contraire, aisément qu'une chambre inférieure en forme de cul de sac réfléchit les ondes sans changer leur signe, à l'inverse de la surface libre du puits vertical: qu'advient-il après interférence de deux trains d'ondes qui s'annulent en partie? Et les chambres à col d'entrée, et plus encore celles à étranglement: quelle garantie avons-nous, qu'elles réfléchissent convenablement les ondes? Les raisonnements qu'on a faits pour le prouver sont par trop primitifs pour que nous nous y arrêtions. Une étude sérieuse ne saurait plus être évitée. Nous allons la tenter.

Nous aborderons ce chapitre délicat, par le calcul des chambres à col d'entrée et à chambre inférieure tubulaire. Nous nous attacherons particulièrement au calcul des surcharges aux points O et A, pour le cas d'une fermeture linéaire. Nous saurons calculer point par point la surcharge B_{*h} en O, dès que nous saurons développer la valeur α_h relative aux deux formes de chambres d'équilibre. Nous connaissons, de même, B_{*m} par la formule (122a) et pourrons, par le fait, construire la courbe caractéristique des surcharges limites, dès que nous pourrons estimer

α_{m-1} . Tout le problème du calcul des surcharges en O est, par le fait, ramené au calcul des valeurs α_k et α_{m-1} .

Supposons, provisoirement, que nous sachions calculer ces valeurs (Voir la fin de ce chapitre). Il nous faut, en effet, mettre auparavant au point le calcul des surcharges en A, ce qui demande quelques explications complémentaires. Nous ne pouvons plus appliquer l'équation (8) à la chambre d'équilibre, puisque celle-ci n'est plus prismatique. Ne pouvant plus écrire $f_{II_i} = -F_{II_{i-1}}$, nous définirons d'une façon tout à fait générale une fonction δ_{i-1} , telle que :

$$\delta_{i-1} = -\frac{f_{II_i}}{F_{II_{i-1}}}$$

en prenant comme unité de temps le battement dans le col, très court, de la chambre: $n_1 = 1$ (Voir fig. 36 et 37). Par le fait, l'équation fondamentale de la conduite II sera, de façon analogue à l'équation (37a) de la conduite III:

$$\delta_i y_i + y_{i+1} - Y_0(1 + \delta_i) = \frac{a}{g} [\delta_i v_{II_i} - v_{II_{i+1}} + v_{II_0}(1 - \delta_i)] \quad (152)$$

ou, en valeurs relatives:

$$\delta_i (\zeta_i^2 - 1) + \zeta_{i+1}^2 - 1 = 2\rho_{II} \left[\delta_i \frac{v_{II_i}}{V_{II_0}} - \frac{v_{II_{i+1}}}{V_{II_0}} + \frac{v_{II_0}}{V_{II_0}} (1 - \delta_i) \right]. \quad (153)$$

Passons à l'étude des surcharges en A dans le cas de la chambre sans conduite forcée et dans le cas général de l'ensemble: galerie sous pression — chambre non prismatique — conduite forcée.

1. Chambre sans conduite forcée.

(Les organes de fermeture se trouvent au droit de la chambre.)

Nous supposons nous trouver dans la première phase de la conduite I. Dans ce cas nous avons:

$$\frac{v_{I_i}}{V_{I_0}} = \frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} - \frac{1}{2\rho_I} (\zeta_i^2 - 1) \quad (23a)$$

et:

$$\frac{v_{III_i}}{V_{III_0}} = \eta_i \zeta_i ; \quad (137)$$

d'où, comme au chapitre II.B.1:

$$\frac{v_{II_i}}{V_{II_0}} = \eta_i \zeta_i - \frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} + \frac{1}{2\rho_I} (\zeta_i^2 - 1) . \quad (154)$$

Introduisons cette valeur dans (153), il vient:

$$\begin{aligned} & \delta_i (\zeta_i^2 - 1) + \zeta_{i+1}^2 - 1 \\ = & 2\rho_{II} \left[\delta_i \eta_i \zeta_i - \eta_{i+1} \zeta_{i+1} - \delta_i \left(\frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} + \frac{v_{II_0}}{V_{II_0}} \right) + \frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} + \frac{v_{II_0}}{V_{II_0}} \right] \\ & + \frac{\rho_{II}}{\rho_I} \left[\delta_i (\zeta_i^2 - 1) - (\zeta_{i+1}^2 - 1) \right] . \end{aligned}$$

Or: $\frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} + \frac{v_{II_0}}{V_{II_0}} = \frac{v_{III_0}}{V_{III_0}}$; il s'en suit que:

$$\begin{cases} \delta_i (\zeta_i^2 - 1) \left(1 - \frac{\rho_{II}}{\rho_I} \right) + (\zeta_{i+1}^2 - 1) \left(1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I} \right) = \\ 2\rho_{II} \left[\delta_i \eta_i \zeta_i - \eta_{i+1} \zeta_{i+1} + (1 - \delta_i) \frac{v_{III_0}}{V_{III_0}} \right] \end{cases} \quad (155)$$

équation qui nous livre ζ_{i+1} , en fonction de ζ_i , pour le calcul point par point:

$$\zeta_{i+1} = \frac{-\rho_{II} \eta_{i+1} + \sqrt{\rho_{II}^2 \eta_{i+1}^2 - \left(1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I} \right) \left[\delta_i (\zeta_i^2 - 1) \left(1 - \frac{\rho_{II}}{\rho_I} \right) - \left(1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I} \right) - 2\rho_{II} \left(\delta_i \eta_i \zeta_i + \frac{v_{III_0}}{V_{III_0}} (1 - \delta_i) \right) \right]}}{1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I}} \quad (156)$$

On ne fera que rarement usage de cette équation, bien incommode.

Calculons le cas de la fermeture instantanée: faisons $\zeta_0 = 1$; $\eta_0 = 1$ et $\eta_1 = 0$. Comme, en général, $\rho_{III_0} = V_{III_0}$, il vient de (155):

$$\frac{H_0}{Y_0} B_1 = B_1 = \zeta_1^2 - 1 = \frac{2\rho_{II}}{1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I}},$$

valeur identique à celle trouvée pour la chambre prismatique, ce à quoi il fallait s'attendre. (Voir équation 141.)

Sans nous occuper du calcul point par point, recherchons la valeur limite $\zeta_m = \zeta_{i+1} \cong \zeta_i$, pour $\delta_i = \delta_{m-1}$. L'équation (155) devient:

$$\begin{aligned} & (\zeta_m^2 - 1) \left[\delta_{m-1} + 1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I} (1 - \delta_{m-1}) \right] \\ & - 2\rho_{II} (\delta_{m-1} \eta_i - \eta_{i+1}) \zeta_m - 2\rho_{II} \frac{\rho_{III_0}}{V_{III_0}} (1 - \delta_{m-1}) = 0. \end{aligned} \quad (157)$$

Nous en tirons:

$$\zeta_m = \frac{\rho_{II} (\delta_{m-1} \eta_i - \eta_{i+1}) + \sqrt{\rho_{II}^2 (\delta_{m-1} \eta_i - \eta_{i+1})^2 + \left[\delta_{m-1} + 1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I} (1 - \delta_{m-1}) \right] \times \left[\delta_{m-1} + 1 + (1 - \delta_{m-1}) \left(\frac{\rho_{II}}{\rho_I} + 2\rho_{II} \frac{\rho_{III_0}}{V_{III_0}} \right) \right]}}{\delta_{m-1} + 1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I} (1 - \delta_{m-1})} \quad (158)$$

Nous obtiendrons la limite en faisant $\eta_{i+1} = 0$. Nous utiliserons également cette équation pour trouver approximativement la valeur de ζ_i à la fin de la première phase de la conduite I, pour $i = n_1$. Nous savons en effet, par expérience, que la valeur ζ_m est atteinte assez tôt. (Voir, p. ex. fig. 25), et que le retour des ondes négatives réfléchies en C aura pour effet ordinaire de diminuer B_i , sitôt $i > n_1$.

On simplifie beaucoup les calculs en posant approximativement, puisque $Y_0 = H_0$,

$$\zeta_m^2 = 1 + B_m \cong \left(1 + \frac{1}{2} B_m \right)^2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \underline{\zeta_m = 1 + \frac{1}{2} B_m},$$

relation valable pour autant que ζ_m est petit.

L'équation (157) devient:

$$B_m \left[\delta_{m-1} + 1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I} (1 - \delta_{m-1}) \right] - \rho_{II} (\delta_{m-1} \eta_i - \eta_{i+1}) B_m - 2 \rho_{II} \left[\delta_{m-1} \eta_i - \eta_{i+1} + \frac{\nu_{III_0}}{V_{III_0}} (1 - \delta_{m-1}) \right] = 0 .$$

En faisant $\eta_{i+1} = 0$; $\eta_i = 1/\Theta$ et $\nu_{III_0} = V_{III_0}$, on en tire:

$$B_m = \frac{2 \rho_{II} \left[\delta_{m-1} \eta_i - \eta_{i+1} + \frac{\nu_{III_0}}{V_{III_0}} (1 - \delta_{m-1}) \right]}{\delta_{m-1} + 1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I} (1 - \delta_{m-1}) - \rho_{II} (\delta_{m-1} \eta_i - \eta_{i+1})} = \frac{2 \rho_{II} \left[\frac{\delta_{m-1}}{\Theta} + 1 - \delta_{m-1} \right]}{\delta_{m-1} + 1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I} (1 - \delta_{m-1}) - \rho_{II} \frac{\delta_{m-1}}{\Theta}} \quad (159)$$

Θ est la fermeture relative par rapport au battement dans le col de la chambre. Le problème est donc résolu, dès qu'on sait calculer δ_i ou δ_m .

Exemples numériques.

Nous allons calculer les courbes caractéristiques des surcharges pour les trois chambres d'équilibre reproduites aux figures 36, 36a et 37. Elles sont définies par les grandeurs suivantes:

Fig. 36¹: $\rho_I = \rho_{II} = 7,13$; $\frac{\rho_I}{\rho_2} = 8$

$\mu_{II} = 0'',064$; $\mu_1 = 1/8 \cdot \mu_{II}$; $\mu_2 = 7/8 \cdot \mu_{II}$; $n_2 = 7$

Fig. 36a²: $\rho_I = 7,13$; $\rho_{II} = \frac{7,13}{8}$; $\frac{\rho_I}{\rho_2} = 1/8$

$\mu_{II} = 0'',064$; $\mu_1 = 1/4 \cdot \mu_{II}$; $\mu_2 = 3/4 \cdot \mu_{II}$; $n_2 = 3$

Fig. 37³: $\rho_I = \rho_{II} = 7,13$; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$

$l_2 = l_3 = 7/8 \cdot L_{II}$; $\mu_{II} = 0'',064$; $\mu_1 = 1/8 \cdot \mu_{II}$;

$\mu_2 = \mu_3 = 7/8 \mu_{II}$; $n_2 = 7$.

¹ Voir page 172.

² Voir page 173.

³ Voir page 174.

Le détail du calcul de δ_{m-1} est exposé à la fin de ce chapitre, au § 3. Nous calculons δ_{m-1} au moyen de la série (33), (formule 163), pour les figures 36 et 36a. Pour la figure 37, nous développerons la série (79). (Voir la fin de ce chapitre, formule (165)). Voici les valeurs numériques δ_{m-1} relatives aux 3 figures: (Θ_1 = temps de fermeture relatif en prenant pour unité le battement μ_1 dans l_1).

Fig. 36: $s_1 = 0,2222$; $s_2 = 1,7778$

$$\delta_{m-1} = 1 - \frac{1}{\Theta_1 - 1} \cdot \frac{s_1}{s_2} = 1 - \frac{1}{\Theta_1 - 1} \cdot \frac{0,2222}{1,7778} = 1 - \frac{1}{\Theta_1 - 1} \cdot \frac{1}{8}$$

Fig. 36a: $s_1 = 1,7778$; $s_2 = 0,2222$

$$\delta_{m-1} = 1 - \frac{1}{\Theta_1 - 1} \cdot \frac{1,7778}{0,2222} = 1 - \frac{1}{\Theta_1 - 1} \cdot 8$$

Fig. 37: $s_1 = s_2 = s_3 = 0,667$; $n_2 = 7$; $\delta_{m-1} = 1 - \frac{n_2}{\Theta_1 - 1}$

Le tableau suivant résume nos calculs (voir fig. 44):

	Fig. 36				Fig. 36a			
	$\rho_{II} = 7,13$; $\mu_I = 0'',008$				$\rho_{II} = 0,8915$; $\mu_I = 0'',016$			
τ	1"	2"	5"	10"	1"	2"	5"	10"
Θ_I	125	250	625	1250	62,5	125	313	625
δ_{m-1}	0,9989	0,9995	0,9998	0,9999	0,8689	0,9355	0,9744	0,98718
B_m	0,063	0,0316	0,0128	0,0064	0,1363	0,0658	0,0258	0,0129

	Fig. 37			
	$\rho_{II} = 7,13$; $\mu_I = 0'',008$; $n_2 = 7$			
τ	1"	2"	5"	10"
Θ_I	125	250	625	1250
δ_{m-1}	0,9435	0,97185	0,9888	0,9944
B_m	0,4685	0,2312	0,0918	0,0457

Nous avons relevé graphiquement les valeurs B_m dans la figure 44. On observera que les chambres des figures 36 et 36a réagissent très bien, alors que la chambre avec partie inférieure tubulaire ne fonctionne guère mieux qu'une chambre prismatique de même section. Il y a donc, d'un cas à l'autre, des différences notables entre les surcharges B_m : dans notre tableau, elles vont de 0,0064 à 0,4685. Nous compléterons encore ces données, en calculant le cas d'une chambre avec étranglement. (Chapitre II.D).

2. *Calcul de l'ensemble « chambre d'équilibre non prismatique — conduite forcée ».*

Supposons une conduite forcée ayant à sa base un obturateur O et, à son sommet, une chambre d'équilibre non prismatique, soit avec col d'entrée, soit avec chambre inférieure tubulaire. Dans les deux cas, le calcul de $\zeta_{*_{k+1}}$ et de ζ_{*m} se fait comme à l'ordinaire au moyen des formules (41) et (122a). Il suffit de savoir développer la fonction α_i , sur le calcul de laquelle nous reviendrons à la fin de ce chapitre.

Calcul de la surcharge B_i , au point d'intersection A.

Si nous calculons $\zeta_{*_{k+1}}$ point par point, nous aurons, quelque soit i , la relation:

$$\Phi_i(1 - \alpha_i) = \zeta_i^2 - 1 \quad (18)$$

Si nous employons la méthode approchée, nous procéderons comme suit:

Supposons que nous nous trouvions dans la première période de la conduite I.

Voici les équations fondamentales que nous utilisons:

Pour la conduite II:

$$\delta_i(\zeta_i^2 - 1) + \zeta_{i+1}^2 - 1 = 2\rho_{II} \left[\delta_i \frac{v_{IIi}}{V_{II0}} - \frac{v_{IIi+1}}{V_{II0}} + \frac{v_{II0}}{V_{II0}}(1 - \delta_i) \right] \quad (153)$$

Pour la conduite I :

$$\frac{v_{Ii}}{V_{I0}} = \frac{v_{I0}}{V_{I0}} - \frac{1}{2\rho_I}(\zeta_i^2 - 1) \quad (23a)$$

puisque nous nous trouvons dans la première phase.

Pour la conduite III :

$$\frac{v_{IIIi}}{V_{III0}} = \frac{v_{III0}}{V_{III0}} - \frac{1}{2\rho_{III}}\Phi_i(1 + \alpha_i) \quad (20)$$

Le temps relatif i est mesuré en fonction du battement dans le col de la chambre ($n_2 = 1$). Combinons ces équations, nous trouvons :

$$\frac{v_{IIi}}{V_{II0}} = \frac{v_{IIIi}}{V_{III0}} - \frac{v_{Ii}}{V_{I0}} = \frac{v_{III0}}{V_{III0}} - \frac{v_{I0}}{V_{I0}} + \frac{1}{2\rho_I}(\zeta_i^2 - 1) - \frac{1}{2\rho_{III}}\Phi_i(1 + \alpha_i)$$

et :

$$\begin{aligned} \delta_i(\zeta_i^2 - 1) + \zeta_{i+1}^2 - 1 &= \frac{\rho_{II}}{\rho_I} \left[\delta_i(\zeta_i^2 - 1) - (\zeta_{i+1}^2 - 1) \right] \\ + \frac{\rho_{II}}{\rho_{III}} \left[\Phi_{i+1}(1 + \alpha_{i+1}) - \delta_i\Phi_i(1 + \alpha_i) \right] &+ 2\rho_{II}(1 - \delta_i) \left(\frac{v_{I0}}{V_{I0}} + \frac{v_{II0}}{V_{II0}} - \frac{v_{III0}}{V_{III0}} \right) \end{aligned}$$

En tenant compte de ce que $\frac{v_{I0}}{V_{I0}} + \frac{v_{II0}}{V_{II0}} = \frac{v_{III0}}{V_{III0}}$ et, en ordonnant, il vient :

$$\begin{aligned} \delta_i(\zeta_i^2 - 1) \left(1 - \frac{\rho_{II}}{\rho_I} \right) + (\zeta_{i+1}^2 - 1) \left(1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I} \right) \\ = \frac{\rho_{II}}{\rho_{III}} \left[\Phi_{i+1}(1 + \alpha_{i+1}) - \delta_i\Phi_i(1 + \alpha_i) \right] \end{aligned} \quad (160)$$

Cette équation est très peu maniable. Nous recherchons donc la valeur limite $\zeta_m = \zeta_{i+1} \cong \zeta_i$. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\zeta_m^2 - 1) \left[\delta_{m-1} + 1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I}(1 - \delta_{m-1}) \right] = \\ \frac{\rho_{II}}{\rho_{III}} \left[\Phi_{i+1}(1 + \alpha_{i+1}) - \delta_{m-1}\Phi_i(1 + \alpha_i) \right] \end{aligned} \quad (161)$$

Cherchons comment exprimer le membre de droite de cette formule (161), en fonction de grandeurs connues. Nous procédons comme au chapitre II.B.2 et poserons $\alpha_i \cong \alpha_{i+1} = \alpha_m$. L'équation (161) devient, exprimée en pourcents de H_0 :

$$\begin{aligned} B_m &= \frac{\frac{\rho_{II}}{\rho_{III}}(1 + \alpha_m)}{\delta_{m-1} + 1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I}(1 - \delta_{m-1})} [\Phi_{*i+1} - \delta_{m-1} \Phi_{*i}] \\ &= K [\Phi_{*i+1} - \delta_{m-1} \Phi_{*i}]. \end{aligned}$$

Or, nous avons en A: $\Phi_{*i+1} = \Phi_{*m} = \frac{B_m}{1 - \alpha_m}$, (18a)

et en O: $\Phi_{*m} = \alpha_{m-n_{III}} \Phi_{*m-n_{III}} + B_{*m}$, d'où: (40a)

$$\Phi_{*m-n_{III}} = \frac{1}{\alpha_{m-n_{III}}} \left[\frac{B_m}{1 - \alpha_m} - B_{*m} \right].$$

Et en vertu de l'hypothèse N° 1, on a:

$$\Phi_{*i+1} - \Phi_{*i} = \Phi_{*m} - \Phi_{*m-1} = \frac{1}{n_{III}} [\Phi_{*m} - \Phi_{*m-n_{III}}]; \text{ d'où:}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{*i} &= \Phi_{*m-1} = \frac{1}{n_{III}} \Phi_{*m-n_{III}} + \Phi_{*m} \left(1 - \frac{1}{n_{III}} \right) \\ &= \frac{1}{n_{III} \alpha_{m-n_{III}}} \left[\frac{B_m}{1 - \alpha_m} - B_{*m} \right] + \frac{B_m (n_{III} - 1)}{(1 - \alpha_m) n_{III}}. \end{aligned}$$

On en tire:

$$\begin{aligned} B_m &= K \left\{ \frac{B_m}{1 - \alpha_m} - \delta_{m-1} \left[\frac{1}{n_{III} \alpha_{m-n_{III}}} \left(\frac{B_m}{1 - \alpha_m} - B_{*m} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{B_m (n_{III} - 1)}{(1 - \alpha_m) n_{III}} \right] \right\}; \end{aligned}$$

et:

$$B_m = \frac{K \frac{\delta_{m-1}}{n_{III} \alpha_{m-n_{III}}}}{1 - K \left[\frac{1}{1 - \alpha_m} - \frac{\delta_{m-1}}{n_{III} \alpha_{m-n_{III}} (1 - \alpha_m)} - \frac{\delta_{m-1} (n_{III} - 1)}{(1 - \alpha_m) n_{III}} \right]} \cdot B_{*m}$$

$$B_m = \frac{\frac{\rho_{II}}{\rho_{III}}(1 + \alpha_m)}{[\delta_{m-1} + 1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I}(1 - \delta_{m-1})]} \cdot \frac{\delta_{m-1}}{n_{III} \alpha_{m-n_{III}}} \cdot B_{*m} \cdot$$

$$1 - \frac{\frac{\rho_{II}}{\rho_{III}}(1 + \alpha_m)}{\delta_{m-1} + 1 + \frac{\rho_{II}}{\rho_I}(1 - \delta_{m-1})} \cdot \frac{1}{(1 - \alpha_m)} \left[1 - \frac{\delta_{m-1}}{n_{III}} \left(\frac{1}{\alpha_{m-n_{III}}} + n_{III} - 1 \right) \right] \quad (162)$$

On vérifie que, pour $\delta_{m-1} = 1$, on retrouve la formule (149).

3. Calcul des valeurs α_k , δ_i , α_m et δ_m lorsque la fonction Φ_i est linéaire. (Hypothèse N° 2.)

Dans le cas de la chambre avec col d'entrée, nous calculerons α_k en toute rigueur au moyen de la formule (90) et δ_i au moyen de la formule (33). Ce calcul pourra paraître long. Aussi, chercherons-nous une formule simple exprimant la valeur limite α_m ; δ_m est, par ailleurs, donné par la formule:

$$\delta_m = 1 - \frac{n_2}{m} \cdot \frac{s_1}{s_2}, \quad (163)$$

que nous déduisons de (121), n_2 représentant la période relative de la chambre de longueur l_2 .

Dans le cas de la chambre avec partie inférieure tubulaire, la formule (79) nous donne δ_i , le temps relatif i se rapportant à la plus courte des longueurs l_2 ou l_3 . Nous chercherons vers quelle limite tend δ_m lorsque m est grand et Φ_i linéaire.

Nous n'avons pas recherché de formule exacte pour α_k dans le cas où la deuxième discontinuité est une bifurcation. La formule serait d'une complication extrême. Nous tournerons cette difficulté en supposant que les conduites I, III, 2 et 3 se coupent toutes quatre au même point A. Cette hypothèse est d'autant plus légitime qu'en pratique le col (conduite II) est très court.

Nous trouverons, également, comment exprimer la valeur limite de α_m , lorsque m est grand et Φ_{*k} linéaire.

Avant d'aborder ces calculs, nous développerons au préalable un théorème mathématique indispensable. Nous ren-

construisons, dans le développement de α_m et δ_m (formules (79) et (90)), des séries de la forme :

0	1	2	3	4	
$X_1 = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots = \frac{1}{1-a}$					
$X_2 = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + 5a^4 + \dots = \frac{1}{(1-a)^2}$					
$X_3 = 1 + 3a + 6a^2 + 10a^3 + 15a^4 + \dots = \frac{1}{(1-a)^3}$					
$X_4 = 1 + 4a + 10a^2 + 20a^3 + 35a^4 + \dots = \frac{1}{(1-a)^4}$					
etc., etc.					

Considérons la progression arithmétique de raison $+ 1$:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

Multiplicons chaque terme des séries X_1, X_2, X_3, \dots par le terme correspondant de la progression arithmétique et calculons la somme de la nouvelle série.

La première série X_1 devient :

$$X'_1 = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + 5a^4 + \dots = \frac{1}{(1-a)^2}.$$

La deuxième X_2 :

$$\begin{aligned} X'_2 &= 1 + 4a + 9a^2 + 16a^3 + 25a^4 + \dots \\ &= 1 + 3a + 6a^2 + 10a^3 + 15a^4 + \dots \\ &\quad a + 3a^2 + 6a^3 + 10a^4 + \dots \\ &= 1 + 3a + 6a^2 + 10a^3 + 15a^4 + \dots \\ &\quad + a(1 + 3a + 6a^2 + 10a^3 + \dots) \\ &= \frac{1}{(1-a)^3} + a \frac{1}{(1-a)^3} = \frac{1+a}{(1-a)^3}. \end{aligned}$$

La troisième série X_3 donne :

$$\begin{aligned} X'_3 &= 1 + 6a + 18a^2 + 40a^3 + 75a^4 + \dots \\ &= 1 + 4a + 10a^2 + 20a^3 + 35a^4 + \dots \\ &\quad + 2a + 8a^2 + 20a^3 + 40a^4 + \dots \\ &= 1 + 4a + 10a^2 + 20a^3 + 35a^4 + \dots \\ &\quad + 2a(1 + 4a + 10a^2 + 20a^3 + \dots) \\ &= \frac{1}{(1-a)^4} + \frac{2a}{(1-a)^4} = \frac{1+2a}{(1-a)^4}. \end{aligned}$$

La quatrième série X_4 devient :

$$\begin{aligned} X'_4 &= 1 + 8a + 30a^2 + 80a^3 + 175a^4 + \dots \\ &= 1 + 5a + 15a^2 + 35a^3 + 70a^4 + \dots \\ &\quad + 3a + 15a^2 + 45a^3 + 105a^4 + \dots \\ &= 1 + 5a + 15a^2 + 35a^3 + 70a^4 + \dots \\ &\quad + 3a(1 + 5a + 15a^2 + 35a^3 + \dots) \\ &= \frac{1}{(1-a)^5} + \frac{3a}{(1-a)^5} = \frac{1+3a}{(1-a)^5}. \end{aligned}$$

La loi est tout à fait générale: considérons, en effet, le $(m+1)^{\text{ème}}$ terme de la série X_{n+1} dont la valeur est $\frac{(m+n)!}{m!n!}$ et multiplions le par $(m+1)$. On a bien pour ce terme la relation :

$$\begin{aligned} \frac{(m+n+1)!}{(n+1)!m!} + n \cdot \frac{(n+m)!}{(n+1)!(m-1)!} &= \frac{(n+m)!}{n!m!} \left[\frac{n+m+1}{n+1} + \frac{n}{n+1} \cdot m \right] \\ &= \frac{(n+m)!}{n!m!} \cdot \frac{(m+1)(n+1)}{(n+1)} = (m+1) \frac{(m+n)!}{n!m!} \end{aligned}$$

qui indique comment on forme les coefficients $(m+1) \frac{(m+n)}{n!m!}$ de la nouvelle série. Ceci étant vrai pour chaque terme, on peut faire leur somme, et l'on voit que la série X_{n+1} deviendra, après

$$\begin{aligned}
 & - s_{II} s_{III} \overline{s_1^2 s_2^2} r_{II} \left[\frac{\Phi_m - \Phi_{m-2n_2-2}}{\Phi_m} + 3r_{II} r_1 \cdot \frac{\Phi_m - \Phi_{m-2n_2-3}}{\Phi_m} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + 6\overline{r_{II} r_1^2} \dots \right] \\
 & - 2s_{II} s_{III} \overline{s_1^2 s_2^2} r_{II} r_2 \left[\frac{\Phi_m - \Phi_{m-3n_2-2}}{\Phi_m} + 3r_{II} r_1 \frac{\Phi_m - \Phi_{m-3n_2-3}}{\Phi_m} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + 6\overline{r_{II} r_1^2} \dots \right] \\
 & - 3s_{II} s_{III} \overline{s_1^2 s_2^2} r_{II} r_2^2 \left[\frac{\Phi_m - \Phi_{m-4n_2-2}}{\Phi_m} + 3r_{II} r_1 \frac{\Phi_m - \Phi_{m-4n_2-3}}{\Phi_m} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + 6\overline{r_{II} r_1^2} \dots \right]
 \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned}
 & - s_{II} s_{III} \overline{s_1^3 s_2^2} r_{II}^2 \left[\frac{\Phi_m - \Phi_{m-3n_2-3}}{\Phi_m} + 4r_{II} r_1 \frac{\Phi_m - \Phi_{m-3n_2-4}}{\Phi_m} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + 10\overline{r_{II} r_1^2} \dots \right] \\
 & - 3s_{II} s_{III} \overline{s_1^3 s_2^2} r_{II} r_2 \left[\frac{\Phi_m - \Phi_{m-4n_2-3}}{\Phi_m} + 4r_{II} r_1 \cdot \frac{\Phi_m - \Phi_{m-4n_2-4}}{\Phi_m} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + 10\overline{r_{II} r_1^2} \dots \right]
 \end{aligned}$$

.....

Remplaçons les valeurs $\frac{\Phi_m - \Phi_{m-p}}{\Phi_m}$ par $\frac{p}{m}$, ce qui revient à supposer Φ_i linéaire. Nous obtenons alors:

$$\begin{aligned}
 m\alpha_m & = m - s_{II} s_{III} r_1 - 2s_{II} s_{III} r_{II} r_1^2 - 3s_{II} s_{III} r_{II}^2 r_1^3 - \dots \\
 & - s_{II} s_{III} s_1 s_2 \left[(n_2 + 1) + (n_2 + 2) \cdot 2r_{II} r_1 \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + (n_2 + 3) \cdot 3\overline{r_{II} r_1^2} + \dots \right] \\
 & - s_{II} s_{III} s_1 s_2 r_2 \left[(2n_2 + 1) + (2n_2 + 2) \cdot 2r_{II} r_1 \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + (2n_2 + 3) \cdot 3\overline{r_{II} r_1^2} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

.....

$$-s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2} r_{II} \left[(2n_2 + 2) + (2n_2 + 3) \cdot 3r_{II} r_1 \right. \\ \left. + (2n_2 + 4) \cdot 6\overline{r_{II} r_1}^2 + (2n_2 + 5) \cdot 10\overline{r_{II} r_1}^3 + \dots \right]$$

etc., etc.

Nous pouvons dédoubler chacune des lignes et écrire, par exemple pour la dernière:

$$-s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2} r_{II} \left[(2n_2 + 1) + (2n_2 + 1) 3 \cdot r_{II} r_1 + (2n_2 + 1) 6\overline{r_{II} r_1}^2 \right. \\ \left. + (2n_2 + 1) 10\overline{r_{II} r_1}^3 + \dots \right] \\ -s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2} r_{II} \left[+ 1 + 2 \cdot 3r_{II} r_1 + 3 \cdot 6\overline{r_{II} r_1}^2 + 4 \cdot 10\overline{r_{II} r_1}^3 + \dots \right]$$

ou encore:

$$-(2n_2 + 1) s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2} r_{II} \left[1 + 3r_{II} r_1 + 6\overline{r_{II} r_1}^2 + 10\overline{r_{II} r_1}^3 + \dots \right] \\ -s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2} r_{II} \left[1 + 2 \cdot 3r_{II} r_1 + 3 \cdot 6\overline{r_{II} r_1}^2 + 4 \cdot 10\overline{r_{II} r_1}^3 + \dots \right] \\ = -(2n_2 + 1) s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2} r_{II} \cdot \frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^3} - s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2} r_{II} \left[\frac{1 + 2r_{II} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^4} \right]$$

Nous pouvons procéder de même pour chaque ligne et écrire:

$$m\alpha_m = m - s_{II} s_{III} r_1 \left[\frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^2} \right] \\ - n_2 s_{II} s_{III} s_1 s_2 \frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^2} - s_{II} s_{III} s_1 s_2 \frac{1 + r_{II} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^3} \\ - 2n_2 s_{II} s_{III} s_1 s_2 r_2 \frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^2} - s_{II} s_{III} s_1 s_2 r_2 \frac{1 + r_{II} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^3} \\ - 3n_2 s_{II} s_{III} s_1 s_2 r_2^2 \frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^2} - s_{II} s_{III} s_1 s_2 r_2^2 \frac{1 + r_{II} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^3} \\ \dots \\ - (2n_2 + 1) s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2} r_{II} \frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^3} \\ - s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2} r_{II} \frac{1 + 2r_{II} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^4}$$

$$\begin{aligned}
 & - (3n_2 + 1) 2 \cdot s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2^2} r_{II} r_2 \frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^3} \\
 & \qquad - 2 s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2^2} r_{II} r_2 \frac{1 + 2r_{II} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^4} \\
 & - (4n_2 + 1) 3 \cdot s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2^2} r_{II} r_2^2 \frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^3} \\
 & \qquad - 3 s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2^2} r_{II} r_2^2 \frac{1 + 2r_{II} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^4}
 \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned}
 & - (3n_2 + 2) s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2^2} r_{II}^2 \frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^4} \\
 & \qquad - s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2^2} r_{II}^2 \frac{1 + 3r_{II} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (4n_2 + 2) 3 s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2^2} r_{II}^2 r_2 \cdot \frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^4} \\
 & \qquad - 3 s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2^2} r_{II}^2 r_2 \cdot \frac{1 + 3r_{II} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - (5n_2 + 2) \cdot 6 s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2^2} r_{II}^2 r_2^2 \cdot \frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^4} \\
 & \qquad - 6 s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2^2} r_{II}^2 r_2^2 \cdot \frac{1 + 3r_{II} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^5}
 \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned}
 & - (4n_2 + 3) \cdot s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2^4} r_{II}^3 \cdot \frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^5} \\
 & \qquad - s_{II} s_{III} \overline{s_1 s_2^4} r_{II}^3 \cdot \frac{1 + 4r_{II} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^6}
 \end{aligned}$$

.....

etc., etc.

Nous pouvons grouper ces termes comme suit :

$$\begin{aligned}
 m\alpha_m = m & - s_{II} s_{III} r_1 \frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^2} \\
 & - s_{II} s_{III} s_1 s_2 \frac{n_2}{(1 - r_{II} r_1)^2} [1 + 2r_2 + 3r_2^2 + \dots]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - s_{II} s_{III} \overline{s_1^2 s_2^2} r_{II} \cdot \frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^3} \left[(2n_2 + 1) + (3n_2 + 1) 2r_2 \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + (4n_2 + 1) 3r_2^2 + \dots \right] \\
 & - s_{II} s_{III} \overline{s_1^2 s_2^3} r_{II}^2 \cdot \frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^4} \left[(3n_2 + 2) + (4n_2 + 2) 3r_2 \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + (5n_2 + 2) 6r_2^2 + \dots \right]
 \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned}
 & - s_{II} s_{III} s_1 s_2 \cdot \frac{1 + r_{II} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^3} \left[1 + r_2 + r_2^2 + \dots \right] \\
 & - s_{II} s_{III} \overline{s_1^2 s_2^2} r_{II} \cdot \frac{1 + 2r_{II} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^4} \left[1 + 2r_2 + 3r_2^2 + \dots \right] \\
 & - s_{II} s_{III} \overline{s_1^3 s_2^2} r_{II}^2 \cdot \frac{1 + 3r_{II} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^5} \left[1 + 3r_2 + 6r_2^2 + \dots \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m\alpha_m = m & - s_{II} s_{III} r_1 \cdot \frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^2} \\
 & - s_{II} s_{III} s_1 s_2 \cdot \frac{n_2}{(1 - r_{II} r_1)^2} \cdot \frac{1}{(1 - r_2)^2} \\
 & - s_{II} s_{III} \overline{s_1^2 s_2^2} r_{II} \cdot \frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^3} \left[\frac{2n_2}{(1 - r_2)^3} + \frac{1}{(1 - r_2)^2} \right] \\
 & - s_{II} s_{III} \overline{s_1^3 s_2^2} r_{II}^2 \cdot \frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^4} \left[\frac{3n_2}{(1 - r_2)^4} + \frac{2}{(1 - r_2)^3} \right] - \dots
 \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned}
 & - s_{II} s_{III} s_1 s_2 \cdot \frac{1 + r_{II} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^3} \cdot \frac{1}{(1 - r_2)} \\
 & - s_{II} s_{III} \overline{s_1^2 s_2^2} r_{II} \cdot \frac{1 + 2r_{II} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^4} \cdot \frac{1}{(1 - r_2)^2} \\
 & - s_{II} s_{III} \overline{s_1^3 s_2^2} r_{II}^2 \cdot \frac{1 + 3r_{II} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^5} \cdot \frac{1}{(1 - r_2)^3} - \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m\alpha_m = m & - s_{II} s_{III} r_1 \frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^2} \\
 & - \frac{n_2 s_{II} s_{III} s_1}{(1 - r_{II} r_1)^2 (1 - r_2)} - \frac{2n_2 s_{II} s_{III} s_1^2 r_{II}}{(1 - r_{II} r_1)^3 (1 - r_2)} \\
 & \qquad \qquad \qquad - \frac{3n_2 s_{II} s_{III} s_1^3 r_{II}^2}{(1 - r_{II} r_1)^4 (1 - r_2)} - \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{s_{II} s_{III} s_1^2 r_{II}}{(1 - r_{II} r_1)^3} - \frac{2s_{II} s_{III} s_1^3 r_{II}^2}{(1 - r_{II} r_1)^4} - \frac{3s_{II} s_{III} s_1^4 r_{II}^3}{(1 - r_{II} r_1)^5} - \dots \\
 & - \frac{s_{II} s_{III} s_1}{(1 - r_{II} r_1)^3} \left[1 + \frac{s_1 r_{II}}{1 - r_{II} r_1} + \frac{s_1^2 r_{II}^2}{(1 - r_{II} r_1)^2} + \dots \right. \\
 & \quad \left. + r_{II} r_1 \left(1 + \frac{2s_1 r_{II}}{1 - r_{II} r_1} + \frac{3s_1^2 r_{II}^2}{(1 - r_{II} r_1)^2} + \dots \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m\alpha_m &= m - s_{II} s_{III} r_1 \frac{1}{(1 - r_{II} r_1)^2} \\
 & - \frac{n_2 s_{II} s_{III} s_1}{(1 - r_{II} r_1)^2 (1 - r_2)} \left[1 + \frac{2s_1 r_{II}}{1 - r_{II} r_1} + \frac{3s_1^2 r_{II}^2}{(1 - r_{II} r_1)^2} + \dots \right] \\
 & - \frac{s_{II} s_{III} s_1^2 r_{II}}{(1 - r_{II} r_1)^3} \left[1 + \frac{2s_1 r_{II}}{1 - r_{II} r_1} + \frac{3s_1^2 r_{II}^2}{(1 - r_{II} r_1)^2} + \dots \right] \\
 & - \frac{s_{II} s_{III} s_1}{(1 - r_{II} r_1)^3} \left[\frac{1}{1 - \frac{s_1 r_{II}}{1 - r_{II} r_1}} \right] - \frac{s_{II} s_{III} s_1 r_{II} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^3} \left[\frac{1}{1 - \frac{s_1 r_{II}}{1 - r_{II} r_1}} \right]^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m\alpha_m &= m - \frac{s_{II} s_{III} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^2} - \left[\frac{1 - r_{II} r_1}{1 - r_{II} (s_1 + r_1)} \right]^2 \cdot \frac{s_{II} s_{III} s_1}{(1 - r_{II} r_1)^2} \times \\
 & \left[\frac{n_2}{1 - r_2} + \frac{s_1 r_{II}}{1 - r_{II} r_1} + \frac{r_{II} r_1}{1 - r_{II} r_1} \right] - \frac{(1 - r_{II} r_1)}{[1 - r_{II} (r_1 + s_1)]} \cdot \frac{s_{II} s_{III} s_1}{(1 - r_{II} r_1)^3}
 \end{aligned}$$

$$m\alpha_m = m - n_2 \frac{s_{III} s_1}{s_{II} s_2} - \frac{s_{II} s_{III} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^2} - \frac{s_{III} s_1}{s_{II}} \cdot \frac{r_{II}}{(1 - r_{II} r_1)} - \frac{s_{III} s_1}{(1 - r_{II} r_1)^2}$$

Nous en tirons :

$$\alpha_m = 1 - \frac{n_2}{m} \cdot \frac{s_{III} s_1}{s_{II} s_2} - \frac{1}{m} \left[\frac{s_{II} s_{III} r_1}{(1 - r_{II} r_1)^2} + \frac{s_{III} s_1 r_{II}}{s_{II} (1 - r_{II} r_1)} + \frac{s_{III} s_1}{(1 - r_{II} r_1)^2} \right]$$

Simplifions la quantité entre crochets [...], qui se laisse écrire :

$$\begin{aligned}
 & \frac{s_{II}^2 s_{III} r_1 + s_{III} s_1 r_{II} - s_{III} s_1^2 r_{II}^2 r_1 + s_{II} s_{III} s_1}{s_{II} (1 - r_{II} r_1)^2} \\
 &= \frac{s_{III}}{s_{II}} \cdot \frac{[(1 - r_1) + (1 - r_{II})^2 r_1 - (1 - r_1) r_1 r_{II}^2]}{(1 - 2r_{II} r_1 + r_{II}^2 r_1^2)} \\
 &= \frac{s_{III}}{s_{II}} \cdot \frac{[(1 - r_1 + r_1 - 2r_{II} r_1 + r_{II}^2 r_1 - r_{II}^2 r_1 + r_{II}^2 r_1^2)]}{(1 - 2r_{II} r_1 + r_{II}^2 r_1^2)} = \frac{s_{III}}{s_{II}}
 \end{aligned}$$

d'où, enfin :

$$\alpha_m = 1 - \frac{1}{m} \cdot \frac{s_{III}}{s_{II}} - \frac{n_2}{m} \cdot \frac{s_{III}}{s_{II}} \cdot \frac{s_1}{s_2} \quad (164)$$

formule remarquable par sa simplicité et qui laisse entrevoir qu'elle est susceptible de généralisation, pour tous les cas où Φ est linéaire.

Nous pouvons vérifier cette formule dans divers cas. Si le second élément de conduite est de section infinie, on a :

$$s_1 = 0 \quad \text{et} \quad r_1 = 1 ;$$

d'où :

$$\alpha_m = 1 - \frac{1}{m} \cdot \frac{s_{III}}{s_{II}}, \quad (121)$$

valeur déjà connue.

Si, au contraire, $s_1 = s_2 = 1$ et $r_1 = r_2 = 0$, la seconde discontinuité disparaît, et il vient :

$$\alpha_m = 1 - \frac{n_2 + 1}{m} \cdot \frac{s_{III}}{s_{II}},$$

également connue.

Supposons, au contraire: $s_{II} = s_{III} = 1$ et $r_{II} = r_{III} = 0$, la première discontinuité s'efface. On trouve :

$$\alpha_m = 1 - \frac{n_2}{m} \cdot \frac{s_1}{s_2} - \frac{1}{m}$$

Si nous supposons que, dans ce cas, les deux discontinuités se rapprochent, $\frac{n_2}{m}$ garde une valeur finie, mais $\frac{1}{m}$ tend vers 0 et $\alpha_m = 1 - \frac{n_2}{m} \cdot \frac{s_1}{s_2}$, valeur connue.

La présence du terme $\frac{1}{m}$ est très compréhensible. Faisons: $s_1 = s_2 = s_I = s_{III} = 1$, il vient $\alpha_m = 1 - \frac{n_2 + 1}{m}$. On retrouve

cette valeur en faisant $s_{III} = s_I$ dans la formule fondamentale (121).

b) *Cas d'une chambre inférieure tubulaire.*

Passons au cas d'une chambre d'équilibre avec partie inférieure tubulaire et calculons la valeur de δ_i au point d'intersection du puits vertical et de la chambre inférieure. Cette valeur est donnée en toute rigueur par la formule (79), que nous transcrivons d'après les notations de la fig. 37, où l'indice 1 représente l'onde venant de la galerie, 2 celle de la partie verticale de la chambre d'équilibre, et 3 celle venant de la partie horizontale. Prenons, en outre, pour simplifier, $n_3 = 1$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \delta_m = & r_1 - s_1 s_3 \frac{\Phi_{m-n_3}}{\Phi_m} + s_1 s_3 r_3 \frac{\Phi_{m-2n_3}}{\Phi_m} - s_1 s_3 r_3^2 \frac{\Phi_{m-3n_3}}{\Phi_m} + s_1 s_3 r_3^3 \frac{\Phi_{m-4n_3}}{\Phi_m} - \dots \\ & + s_1 s_2 \frac{\Phi_{m-n_2}}{\Phi_m} + 2s_1 s_2 s_3 \frac{\Phi_{m-n_2-n_3}}{\Phi_m} + s_1 s_2 s_3 (s_3 - 2r_3) \frac{\Phi_{m-n_2-2n_3}}{\Phi_m} \\ & + s_1 s_2 s_3 r_3 (2s_3 - 2r_3) \frac{\Phi_{m-n_2-3n_3}}{\Phi_m} + s_1 s_2 s_3 r_3^2 (3s_3 - 2r_3) \frac{\Phi_{m-n_2-4n_3}}{\Phi_m} + \dots \\ & + s_1 s_2 r_2 \frac{\Phi_{m-2n_2}}{\Phi_m} - s_1 s_2 s_3 (s_2 - 2r_2) \frac{\Phi_{m-2n_2-n_3}}{\Phi_m} + \dots \end{aligned}$$

On démontre, de façon générale, que $\lim \bar{\delta}_i \equiv 1$. Nous ne reproduisons pas ce calcul un peu long.

Recherchons la valeur limite de δ_m lorsque la fonction Φ_{*i} est supposée linéaire. Ecrivons δ_m sous forme d'une différence en tenant compte de ce que Φ_* est linéaire et en procédant comme nous l'avons déjà fait :

$$\begin{aligned} m\delta_m = & m + s_1 s_3 - 2s_1 s_3 r_3 + 3s_1 s_3 r_3^2 - 4s_1 s_3 r_3^3 + \dots \\ & - n_2 s_1 s_2 - 2(n_2 + 1)s_1 s_2 s_3 - (n_2 + 2)s_1 s_2 s_3 (s_3 - 2r_3) \\ & + (n_2 + 3)s_1 s_2 s_3 r_3 (2s_3 - 2r_3) - (n_2 + 4)s_1 s_2 s_3 r_3^2 (3s_3 - 2r_3) + \dots \\ & - 2n_2 s_1 s_2 r_2 + (2n_2 + 1)s_1 s_2 s_3 (s_2 - 2r_2) \\ & - (2n_2 + 2)s_1 s_2 s_3 [r_3 (s_2 - 2r_2) + s_3 (r_2 - 2s_2)] \\ & + (2n_2 + 3)s_1 s_2 s_3 [r_3^2 (s_2 - 2r_2) + 2s_3 r_3 (r_2 - 2s_2) + s_2 s_3^2] - \dots \\ & - 3n_2 s_1 s_2 r_2^2 + (3n_2 + 1)s_1 s_2 s_3 r_2 (2s_2 - 2r_2) \\ & - (3n_2 + 2)s_1 s_2 s_3 [r_2 r_3 (2s_2 - 2r_2) + s_3 (r_2^2 - 4s_2 r_2 + s_2^2)] + \dots \end{aligned}$$

Transformons cette expression ligne par ligne. La première ligne devient:

$$m + s_1 s_3 (1 - 2r_3 + 3r_3^2 - 4r_3^3 + \dots) = m + \frac{s_1 s_3}{(1 + r_3)^2}.$$

La deuxième ligne:

$$\begin{aligned} & - n_2 s_1 s_2 - 2(n_2 + 1) s_1 s_2 s_3 \\ & - s_1 s_2 s_3 \left\{ \begin{array}{l} (n_2 + 1) s_3 (1 - 2r_3 + 3r_3^2 - 4r_3^3 + \dots) \\ + s_3 (1 - 4r_3 + 9r_3^2 - 16r_3^3 + \dots) \\ - 2(n_2 + 1) r_3 (1 - r_3 + r_3^2 - r_3^3 + \dots) \\ - 2r_3 (1 - 2r_3 + 3r_3^2 - 4r_3^3 + \dots) \end{array} \right\} \\ & = - n_2 s_1 s_2 - 2(n_2 + 1) s_1 s_2 s_3 + s_1 s_2 s_3 \left\{ 2r_3 \left[\frac{(n_2 + 1)}{(1 + r_3)} + \frac{1}{(1 + r_3)^2} \right] \right. \\ & \quad \left. - s_3 \left[\frac{n_2 + 1}{(1 + r_3)^2} + \frac{1 - r_3}{(1 + r_3)^3} \right] \right\} \end{aligned}$$

La troisième ligne nous donne:

$$\begin{aligned} & - 2n_2 s_1 s_2 r_2 + s_1 s_2 s_3 \left\{ \begin{array}{l} (s_2 - 2r_2) [2n_2 (1 - r_3 + r_3^2 - \dots) \\ + 1 - 2r_3 + 3r_3^2 - \dots] \\ - s_3 (r_2 - 2s_2) [(2n_2 + 1) (1 - 2r_3 + 3r_3^2 \dots) \\ + 1 - 4r_3 + 9r_3^2 - \dots] \\ + s_2 s_3^2 [(2n_2 + 2) (1 - 3r_3 + 6r_3^2 - \dots) \\ + 1 - 6r_3 + 18r_3^2 - \dots] \end{array} \right\} \\ & = - 2n_2 s_1 s_2 r_2 + s_1 s_2 s_3 \left\{ (s_2 - 2r_2) \left[\frac{2n_2}{(1 + r_3)} + \frac{1}{(1 + r_3)^2} \right] \right. \\ & \quad \left. - s_3 (r_2 - 2s_2) \left[\frac{2n_2 + 1}{(1 + r_3)^2} + \frac{1 - r_3}{(1 + r_3)^3} \right] + s_2 s_3^2 \left[\frac{2n_2 + 2}{(1 + r_3)^3} + \frac{1 - 2r_3}{(1 + r_3)^4} \right] \right\} \end{aligned}$$

La quatrième ligne devient :

$$\begin{aligned}
 & -3n_2s_1s_2r_2^2 + s_1s_2s_3 \left\{ \begin{aligned} & r_2(2s_2 - 2r_2) [3n_2(1 - r_3 + r_3^2 - \dots) \\ & \qquad \qquad \qquad + 1 - 2r_3 + 3r_3^2 - \dots] \\ & -s_3(r_2^2 - 4s_2r_2 + s_2^2) [(3n_2 + 1)(1 - 2r_3 + 3r_3^2 - \dots) \\ & \qquad \qquad \qquad + 1 - 4r_3 + 9r_3^2 - \dots] \\ & +s_3^2(2s_2r_2 - 2s_2^2) [(3n_2 + 2)(1 - 3r_3 + 6r_3^2 - \dots) \\ & \qquad \qquad \qquad + 1 - 6r_3 + 18r_3^2 - \dots] \\ & -s_3^3s_2^2 [(3n_2 + 3)(1 - 4r_3 + 10r_3^2 - \dots) \\ & \qquad \qquad \qquad + 1 - 8r_3 + 30r_3^2 - \dots] \end{aligned} \right\} \\
 & = -3n_2s_1s_2r_2^2 + s_1s_2s_3 \left\{ \begin{aligned} & r_2(2s_2 - 2r_2) \left[\frac{3n_2}{1+r_3} + \frac{1}{(1+r_3)^2} \right] \\ & -s_3(r_2^2 - 4s_2r_2 + s_2^2) \left[\frac{3n_2+1}{(1+r_3)^2} + \frac{1-r_3}{(1+r_3)^3} \right] \\ & +s_3^2(2s_2r_2 - 2s_2^2) \left[\frac{3n_2+2}{(1+r_3)^3} + \frac{1-2r_3}{(1+r_3)^4} \right] \\ & -s_3^3s_2^2 \left[\frac{3n_2+3}{(1+r_3)^4} + \frac{1-3r_3}{(1+r_3)^5} \right] \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

etc., etc.

Additionnons et ordonnons. En remarquant que :

$$-2(n_2 + 1)s_1s_2s_3 + s_1s_2s_3 \frac{2r_3(n_2 + 1)}{1 + r_3} = -\frac{2(n_2 + 1)s_1s_2s_3}{1 + r_3}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 m\delta_m = m + \frac{s_1s_3}{(1+r_3)^2} - n_2s_1s_2 [1 + 2r_2 + 3r_2^2 + 4r_2^3 + \dots] \\
 \qquad \qquad \qquad - \frac{2(n_2 + 1)s_1s_2s_3}{1 + r_3} + \frac{2s_1s_2s_3r_3}{(1+r_3)^2} \\
 + s_1s_2s_3 \left\{ \begin{aligned} & + \frac{1}{1+r_3} [2n_2(s_2 - 2r_2) + 3n_2r_2(2s_2 - 2r_2) \\ & \qquad \qquad \qquad + 4n_2r_2^2(3s_2 - 2r_2) + \dots] \\ & + \frac{1}{(1+r_3)^2} [(s_2 - 2r_2) + r_2(2s_2 - 2r_2) \\ & \qquad \qquad \qquad + r_2^2(3s_2 - 2r_2) + \dots] \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{s_3}{(1+r_3)^3} [(n_2+1) + (2n_2+1)(r_2-2s_2) \\
 & \quad + (3n_2+1)(r_2^2-4s_2r_2+s_2^2) \\
 & \quad + (4n_2+1)(r_2^3-6s_2r_2^2+3s_2^2r_2) + \dots] \\
 & - \frac{s_3(1-r_3)}{(1+r_3)^3} [1 + (r_2-2s_2) + (r_2^2-4s_2r_2+s_2^2) \\
 & \quad + (r_2^3-6s_2r_2^2+3s_2^2r_2) + \dots] \\
 & + \frac{s_3^2}{(1+r_3)^3} [(2n_2+2)s_2 + (3n_2+2)(2s_2r_2-2s_2^2) \\
 & \quad + (4n_2+2)(3s_2r_2^2-6s_2^2r_2+s_2^3) + \dots] \\
 & + s_1s_2s_3 \left\{ + \frac{s_3^2(1-2r_3)}{(1+r_3)^4} [s_2 + (2s_2r_2-2s_2^2) \right. \\
 & \quad \left. + (3s_2r_2^2-6s_2^2r_2+s_2^3) + \dots] \right. \\
 & - \frac{s_3^3}{(1+r_3)^4} [(3n_2+3)s_2^2 \\
 & \quad + (4n_2+3)(3s_2^2r_2-2s_2^3) + \dots] \\
 & - \frac{s_3^3(1-3r_3)}{(1+r_3)^5} [s_2^2 + (3s_2^2r_2-2s_2^3) + \dots] \\
 & + \frac{s_3^4}{(1+r_3)^5} [(4n_2+4)s_2^3 + \dots] \\
 & \left. + \frac{s_3^4(1-4r_3)}{(1+r_3)^6} [s_2^3 + \dots] \right. \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

etc., etc.

Remarquons que:

$$\begin{aligned}
 & 1 + (r_2-2s_2) + (r_2^2-4s_2r_2+s_2^2) + (r_2^3-6s_2r_2^2+3s_2^2r_2) + \dots = \\
 & 1 + r_2 + r_2^2 + \dots - 2s_2(1 + 2r_2 + 3r_2^2 + \dots) + s_2^2(1 + 3r_2 + \dots) \\
 & = \frac{1}{1-r_2} - \frac{2s_2}{(1-r_2)^2} + \frac{s_2^2}{(1-r_2)^3} = 0
 \end{aligned}$$

et que, de même :

$$\left[s_2 + (2s_2r_2 - 2s_2^2) + (3s_2r_2^2 - 6s_2^2r_2 + s_2^3) + \dots \right] = 0$$

$$\left[s_2^2 + (3s_2^2r_2 - 2s_2^3) + \dots \right] = 0 \quad \text{etc., etc.}$$

On a, de même :

$$n_2 \left[1 + 2(r_2 - 2s_2) + 3(r_2^2 - 4s_2r_2 + s_2^2) + 4(r_2^3 - 6s_2r_2^2 + 3s_2^2r_2) + \dots \right]$$

$$= n_2 \left[1 + 2r_2 + 3r_2^2 + 4r_2^3 + \dots - 4s_2(1 + 3r_2 + 6r_2^2 + 10r_2^3 + \dots) \right.$$

$$\left. + 3s_2^2(1 + 4r_2 + 10r_2^2 + \dots) \right] = n_2 \left[\frac{1}{(1-r_2)^2} - \frac{4s_2}{(1-r_2)^3} + \frac{3s_2^2}{(1-r_2)^4} \right] = 0$$

ainsi que :

$$n_2 \left[2s_2 + 3(2s_2r_2 - 2s_2^2) + 4(3s_2r_2^2 - 6s_2^2r_2 + s_2^3) \right.$$

$$\left. + 5(4s_2r_2^3 - 12s_2^2r_2^2 + 4s_2^3r_2) + \dots \right] = 0$$

etc., etc.

d'où :

$$(n_2 + 1) + (2n_2 + 1)(r_2 - 2s_2) + (3n_2 + 1)(r_2^2 - 4s_2r_2 + s_2^2) + \dots = 0$$

$$(2n_2 + 2)s_2 + (3n_2 + 2)(2s_2r_2 - 2s_2^2)$$

$$+ (4n_2 + 2)(3s_2r_2^2 - 6s_2^2r_2 + s_2^3) + \dots = 0$$

$$(3n_2 + 3)s_2^2 + (4n_2 + 3)(3s_2^2r_2 - 2s_2^3) + \dots = 0$$

etc., etc.

Il reste donc, toutes simplifications effectuées :

$$m\hat{\Delta}_m = m - \frac{n_2s_1s_2}{(1-r_2)^2} + \frac{s_1s_3}{(1+r_3)^2} - \frac{2(n_2+1)s_1s_2s_3}{1+r_3} + \frac{2s_1s_2s_3r_3}{(1+r_3)^2} + s_1s_2s_3 \left[\frac{2n_2}{1+r_3} + \frac{1-2r_2}{(1+r_3)^2s_3} \right]$$

$$= m - \frac{n_2s_1}{1-r_2} - \frac{2(n_2+1)s_1s_2s_3}{1+r_3} + \frac{2n_2s_1s_2s_3}{1+r_3} + \frac{s_1s_3}{(1+r_3)^2} \left[1 + 1 - 2r_2 \right] + \frac{2s_1s_2s_3r_3}{(1+r_3)^2}$$

$$= m - \frac{n_2s_1}{1-r_2} + \frac{s_1s_2s_3}{1+r_3} \left[2 + 2n_2 - 2n_2 - 2 \right]$$

d'où, enfin :

$$\delta_m = 1 - \frac{n_2 s_1}{m s_2} \quad (165)$$

(Voir formule 163.)

Cette valeur est très remarquable. Elle est, en effet, de même forme que la formule (121) et indique que le système de deux conduites (1) et (2), dont la seconde est en cul de sac, équivaut, à la limite, à une conduite unique dont la discontinuité est caractérisée par les deux coefficients s_2 et s_1 . Il est, par ailleurs, bien entendu que les formules (164) et (165) ne sont valables que pour m et n_1 grands, ce qui sera le cas pour toutes les chambres d'équilibre lors de la fermeture lente. Si la fermeture est brusque, on pourra effectuer le calcul de α ou δ au moyen du calcul direct des formules (79) et (90).

Par le fait que δ_m , calculé à l'intersection des deux conduites 1 et 2, est identique à la valeur δ_m d'une conduite fictive à section variable, caractérisée par s_2 et s_1 , il suffira, pour le calcul de α_m au point A d'une chambre avec partie inférieure tubulaire, de ne considérer également que cette seule conduite fictive et d'appliquer la formule (164), ceci à condition que $\frac{n_1}{m}$ soit suffisamment grand. Pour les cas de fermeture brusque, il faudrait développer une formule spéciale pour α_i (cas de deux discontinuités successives, les deux étant des bifurcations). Cette formule serait très compliquée. On admettra dans ce cas, pour autant qu'une précision absolue n'est pas indispensable, et puisque, en général, l'intersection des conduites 1 et 2 est très proche de A, que les quatre conduites I, III, 1 et 2 se coupent en un même point, pour lequel la formule (79) est valable (L_1 étant supposé très grand). Dans ce cas de quatre conduites concourantes, on définira :

$$s_i = \frac{2/\rho_i}{\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{III}} + \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}} \quad \text{etc., etc.}$$

4. Exemple numérique.

Considérons une chambre d'équilibre à col d'entrée, analogue à la fig. 36, située au haut de la conduite B¹ et définie par les constantes suivantes :

$$Y_0 = 35,48 \text{ m}; \quad l_1/L_{II} = 1/8; \quad \mu_{II} = 0'',048; \quad \mu_{III} = 0'',623;$$

$$\mu_I = \infty; \quad \rho_{II} = \rho_{III} = 11,56; \quad \rho_I = 8,08; \quad \rho_* = 3,68;$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1/8; \quad \mu_1 = 0'',006; \quad n_2 = 7; \quad n_{III} = 8 \times 12,72 = 101,7$$

$$s_{II} = s_{III} = 0,5825; \quad s_1 = 0,835; \quad r_{II} = r_{III} = 0,4175; \quad r_I = 0,165$$

$$s_1 = 0,2222; \quad s_2 = 1,7778; \quad r_1 = 0,7778; \quad r_2 = -0,7778.$$

$$\delta_m = 1 - \frac{1}{\Theta_1 - 1} \cdot \frac{s_1}{s_2} = 1 - \frac{1}{\Theta_1 - 1} \cdot \frac{0,2222}{1,7778} = 1 - \frac{1}{\Theta_1 - 1} \cdot \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} \alpha_m &= 1 - \frac{1}{m} \cdot \frac{s_{III}}{s_{II}} - \frac{n_2}{m} \cdot \frac{s_{III}}{s_{II}} \cdot \frac{s_1}{s_2} = 1 - \frac{1}{\Theta_1 - 1} \left(1 + 7/8 \right) \\ &= 1 - \frac{15/8}{\Theta_1 - 1} \end{aligned}$$

$$\alpha_{m-n_{III}} = 1 - \frac{1}{\Theta_1 - n_{III}} \cdot 15/8.$$

Nous calculons B_{*m} au moyen de la formule (122a), dans laquelle nous faisons $\alpha_{m-1} = \alpha_{m-n_{III}}$, puisque cette formule est donnée en fonction des battements *k* dans la conduite III. Quant à B_m, nous le calculons au moyen de la formule (162).

Nous avons reporté la courbe α_m sur la fig. 41. On y lit :

$$\text{Pour } \tau = 0'',1; \quad 0'',2; \quad 0'',5; \quad 1''; \quad 2''$$

$$\alpha_m = 0,880; \quad 0,943; \quad 0,9772; \quad 0,9887; \quad 0,9944$$

Cette courbe de réaction est excellente, et la chambre fonctionnera comme une chambre de grandes dimensions. On le voit

¹ Voir pages 180 et 216.

d'ailleurs en examinant les valeurs du tableau suivant qui résume nos calculs :

τ	2"	5"	10"	20"	30"
Θ_I	333,3	833	1666	3333	5000
Θ_{III}	3,22	8,03	16,06	32,15	48,2
δ_m	0,99963	0,99985	0,99992	0,99996	0,99998
α_m	0,9944	0,99775	0,9989	0,9994	0,9996
$\alpha_{m-n_{III}}$	0,9919	0,9974	0,9988	0,9994	0,9996
B_{*m}	2,00	0,584	0,264	0,122	0,085
B_m	0,0107	—	—	—	—
B_{*m} $\alpha_i \equiv 1$	1,99	0,575	0,26	0,120	0,085

En comparant les valeurs B_{*m} de ce tableau à celles du chapitre II.A pour $\alpha_i \equiv 1$, on voit que les courbes sont presque identiques, c'est-à-dire que la chambre est pratiquement assimilable à une chambre infinie. On trouve la confirmation de ce fait dans la valeur $B_m = 0,0107$, pour $\tau = 2''$, alors que nous avons trouvé $B_m = 0,148$ ($\tau = 2''$) au chapitre II.B pour une chambre prismatique étroite, définie par $\rho_I = \rho_{II} = \rho_{III}$.

Le système étudié ici est représenté par la même courbe «b» de la figure 48, qui représente une chambre infinie.

CHAPITRE D.

CHAMBRE D'ÉQUILIBRE AVEC ÉTRANGLEMENT

Nous parlerons de chambre d'équilibre avec étranglement, lorsque le col de la chambre d'équilibre est très resserré. Il n'y a pas de distinction théorique bien nette, entre les deux types de chambres caractérisées par les figures 36 et 38. En pratique, la chambre avec col n'est qu'une chambre cylindrique, assez large, précédée d'un col, ayant en général une section de l'ordre de grandeur de celle de la galerie, ou des conduites forcées. Le but de ce col est de diminuer l'amplitude des oscillations de masse, en permettant l'introduction de la grandeur $\frac{\rho_1^2}{2g}$ dans le calcul des oscillations¹. Par contre, une chambre à étranglement a pour but de freiner la vitesse à l'entrée de l'eau dans la chambre; son étranglement sera de l'ordre du dixième de la section de la galerie. Par ce fait, les deux types de chambre sont, en pratique, bien distincts.

Dans le cas d'une chambre à étranglement, les variations de section sont très fortes; on peut se demander si les ondes se propagent encore selon les lois admises jusqu'ici. S'il en était ainsi, le problème serait résolu par ce que nous avons dit au chapitre II.C. Mais, ce n'est pas probable.

Nous pouvons émettre l'hypothèse très simple que la vitesse v_{II_i} de l'eau pénétrant dans la chambre est celle d'un écoulement sous l'eau. Soit S_{II} la section effective; c'est-à-dire que, si S'_{II} est la section réelle et φ' un coefficient de contraction, à déterminer au moyen d'essais sur modèles réduits, on ait:

$$S_{II} = \varphi' S'_{II}.$$

¹ Voir CALAME et GADEN: « De la stabilité des installations hydrauliques munies de chambres d'équilibre ». *Die schweizerische Bauzeitung*, 30 juillet 1927.

Nous écrivons que :

$$\begin{aligned} v_{II_i} &= -\sqrt{2g(\zeta_i^2 Y_0 - h_1 - h_2)} = -\sqrt{2g(\zeta_i^2 Y_0 - Y_0)} \\ &= -\sqrt{2g Y_0} \cdot \sqrt{\zeta_i^2 - 1} \end{aligned} \quad (166)$$

équation fondamentale de l'écoulement sous l'eau, qui donne v_{II_i} en fonction de Y_0 et de la surcharge relative $\zeta_i^2 - 1$ au temps i . Le sens positif des vitesses est choisi dirigé vers le bas; h_1 et h_2 sont inscrits dans la figure 38.

1. *Les organes de fermeture se trouvent au droit de la chambre d'équilibre.*

Considérons un ensemble « chambre d'équilibre avec étranglement — galerie sous pression », sans conduites forcées, tel qu'il est représenté par la figure 38. Supposons que la chambre soit assez large pour qu'on puisse négliger les battements qui s'y produisent et admettre, pour la vitesse v_{II_i} , la relation (166). Ecrivons l'équation (8) pour la conduite I; i représentant en ce cas le battement dans cette dernière :

$$\zeta_i^2 + \zeta_{i+1}^2 - 2 = 2\rho_I \left(\frac{v_{I_i}}{V_{I_0}} - \frac{v_{I_{i+1}}}{V_{I_0}} \right). \quad (8)$$

En nous rappelant que :

$$\frac{v_{III_i}}{V_{III_0}} = \eta_i \zeta_i$$

nous écrivons :

$$\frac{v_{I_i}}{V_{I_0}} = \frac{v_{III_i}}{V_{III_0}} - \frac{v_{II_i}}{V_{II_0}} = \eta_i \zeta_i + \frac{\sqrt{2g Y_0}}{V_{II_0}} \cdot \sqrt{\zeta_i^2 - 1}$$

et :

$$\begin{aligned} \zeta_i^2 + \zeta_{i+1}^2 - 2 & \quad (167) \\ &= 2\rho_I \left[\eta_i \zeta_i - \eta_{i+1} \zeta_{i+1} + \frac{\sqrt{2g Y_0}}{V_{II_0}} (\sqrt{\zeta_i^2 - 1} - \sqrt{\zeta_{i+1}^2 - 1}) \right] \end{aligned}$$

équation fondamentale de la loi des surcharges en A, en fonction des battements de la conduite I.

a) *La fermeture est achevée au cours de la première phase de la conduite I.*

Supposons $\tau < \mu_1$. On ne peut plus parler de fermeture rapide, car, dans certains cas, τ sera tout de même grand, L_1 pouvant être de l'ordre de grandeur du kilomètre.

Posons, de nouveau $B_1 = \zeta_1^2 - 1$;
Partons de l'ouverture totale, où: $\eta_0 = 1$; $\zeta_0^2 = 1$; et calculons d'abord la valeur finale de la surcharge, pour $\eta_1 = 0$. Il vient:

$$B_1 = 2\rho_1 \left[1 - \frac{\sqrt{2gY_0}}{V_{II_0}} \cdot \sqrt{B_1} \right]$$

Ordonnons et élevons au carré:

$$2\rho_1 - B_1 = 2\rho_1 \frac{\sqrt{2gY_0}}{V_{II_0}} \cdot \sqrt{B_1};$$

$$B_1^2 - 4\rho_1 \left[1 + \rho_1 \frac{2gY_0}{V_{II_0}^2} \right] B_1 + 4\rho_1^2 = 0.$$

Nous en tirons:

$$B_1 = 2\rho_1 \left[1 + \rho_1 \frac{2gY_0}{V_{II_0}^2} \right] - \sqrt{4\rho_1^2 \left[1 + \rho_1 \frac{2gY_0}{V_{II_0}^2} \right]^2 - 4\rho_1^2}$$

$$= 2\rho_1 + \frac{4gY_0}{V_{II_0}^2} \rho_1^2 \left[1 - \sqrt{1 + \frac{V_{II_0}^2}{gY_0 \rho_1}} \right]$$

$$= 2\rho_1 + \frac{4gY_0}{V_{II_0}^2} \rho_1 \frac{a_1 V_{I_0}}{2gY_0} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{V_{II_0}^2}{gY_0} \cdot \frac{2gY_0}{a_1 V_{I_0}}} \right].$$

Si nous définissons l'étranglement:

$$\sigma_{II} = \frac{V_{I_0}}{V_{II_0}},$$

nous pouvons simplifier et écrire:

$$B_1 = 2\rho_1 \left\{ 1 + \frac{a_1}{V_{I_0}} \sigma_{II}^2 \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2V_{I_0}}{a_1 \sigma_{II}^2}} \right] \right\} \quad (168)$$

On voit par là que, tant que $\tau < \mu_1$, la surcharge maximum B_1 est indépendante du temps de fermeture. C'est une conséquence du fait que nous négligeons les battements éventuels dans la chambre, supposée très large. Nous avons reporté dans la figure 50 la surcharge B_1 en fonction de l'étranglement σ_{II} . On vérifie que pour $\sigma_{II} = 0$, $B_{1max} = 2 \rho_1$. Nous avons, en outre, complété la figure 44 en y reportant les mêmes valeurs

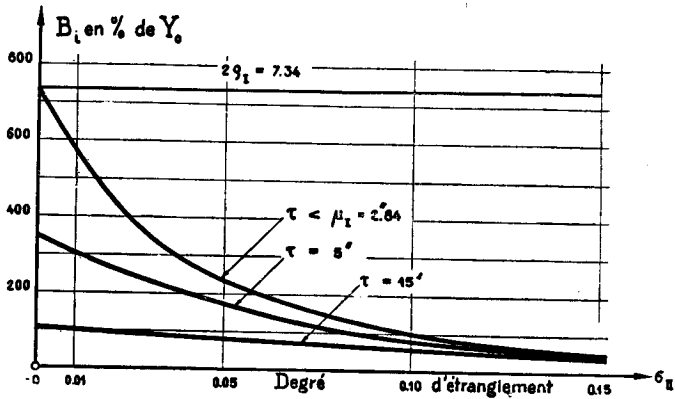


FIG. 50. — Chambre à étranglement, sans conduite forcée. $\rho_1 = 3,67$; $\mu_1 = 2'',84$. Surcharges au droit de la chambre pour des fermetures en $\tau < \mu_1$; $\tau = 5''$ et $\tau = 15''$, en fonction de l'étranglement σ_{II} .

B_1 (constantes pour $\tau < \mu_1$) pour $\sigma_{II} = 0,07, 0,10$ et $0,15$, afin d'établir une comparaison avec d'autres chambres d'équilibre. Il est de toute évidence que, comparée aux autres solutions de chambres d'équilibre, la chambre à étranglement placée immédiatement en amont des organes de fermeture fonctionne très mal. Dans bien des cas, cette solution sera à rejeter comme insuffisante, voire dangereuse.

Si nous voulons connaître la loi des surcharges en A, il suffit de faire varier η_r entre 1 et 0 dans l'équation (167). L'équation que l'on obtient serait pénible à résoudre. Comme cette recherche n'a d'autre valeur que de mieux figurer la croissance de la surcharge, dont on connaît par ailleurs la valeur maximum (grâce à l'équation (168)), nous poserons $\zeta_1 \cong 1 + \frac{1}{2} B_1$,

simplification qui n'est admissible que si B_1 reste petit. On aurait alors successivement:

$$B_1 = 2\rho_I \left[1 - \eta_I (1 + \frac{1}{2} B_1) - \frac{\sqrt{2gY_0}}{V_{II_0}} \cdot \sqrt{B_1} \right]$$

$$B_1 (1 + \eta_I \rho_I) - 2\rho_I (1 - \eta_I) = - \frac{2\rho_I \sqrt{2gY_0}}{V_{II_0}} \cdot \sqrt{B_1} ,$$

$$B_1^2 (1 + \eta_I \rho_I)^2 - 4\rho_I \left[(1 - \eta_I)(1 + \eta_I \rho_I) + \rho_I \frac{2gY_0}{V_{II_0}^2} \right] B_1 + 4\rho_I^2 (1 - \eta_I)^2 = 0$$

et:

$$B_1 = \frac{2\rho_I \left[(1 - \eta_I)(1 + \eta_I \rho_I) + \rho_I \frac{2gY_0}{V_{II_0}^2} \right] - \sqrt{4\rho_I^2 [\dots]^2 - 4\rho_I^2 (1 - \eta_I)^2 (1 + \eta_I \rho_I)^2}}{(1 + \eta_I \rho_I)^2} \quad (169)$$

Réolvons cette équation pour le cas suivant:

$$Y_0 = 83,0 \text{ m. ; } \rho_I = 3,67 ; \quad V_{II_0} = 44,7 \text{ m/sec. ; } \sigma_{II} = 0,10$$

On trouve pour:

$\eta_I = 0,75$	0,50	0,25	0
$B_1 = 0,0596$	0,2115	0,48	0,93

valeurs reportées sur la figure 51.

Nous extrayons de la figure 50 la valeur $B_1 = 0,975$ pour $\sigma_{II} = 0,10$ et $\eta_I = 0$, calculée d'après la formule (168), ce qui est une bonne vérification.

b) Phases successives de la conduite I.

L'étude des phases successives de la conduite I présente un intérêt réel dans le cas de chambres à étranglement, car, à notre avis, ce n'est guère que dans le cas de manœuvres lentes, où $\tau > \mu_I$, que l'on pourra adopter des chambres réagissant aussi mal.

Posons: $\lambda = \frac{\sqrt{2gY_0}}{V_{II_0}}$ et $B_i = b_i^2$, l'équation (167) devient:

$$b_i^2 + b_{i+1}^2 = 2\rho_I(\eta_i + \frac{1}{2}\eta_i b_i^2 - \eta_{i+1} - \frac{1}{2}\eta_{i+1} b_{i+1}^2 + \lambda b_i - \lambda b_{i+1})$$

d'où:

$$b_{i+1}^2(1 + \rho_I \eta_{i+1}) + 2\rho_I \lambda b_{i+1} + b_i^2(1 - \rho_I \eta_i) - 2\rho_I \lambda b_i - 2\rho_I(\eta_i - \eta_{i+1}) = 0$$

et:

$$b_{i+1} = \frac{-\rho_I \lambda + \sqrt{\rho_I^2 \lambda^2 + (1 + \rho_I \eta_{i+1}) [b_i^2(\rho_I \eta_i - 1) + 2\rho_I \lambda b_i + 2\rho_I(\eta_i - \eta_{i+1})]}}{1 + \rho_I \eta_{i+1}} \quad (170)$$

Nous avons reproduit, sur la figure 52, la loi des charges devant l'obturateur pour le système suivant:

$$Y_0 = 83,00 \text{ m. ; } \rho_I = 3,67 ; \mu_I = 2",84 ; \tau = 15"$$

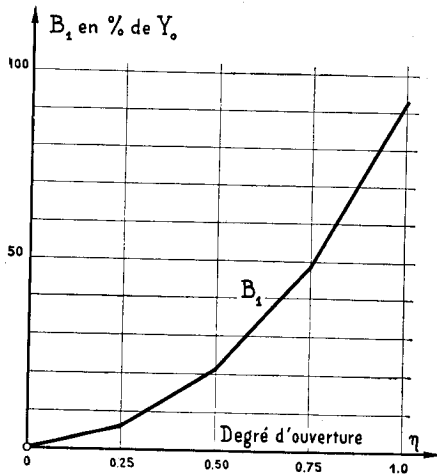


FIG. 51. — Chambre à étranglement, sans conduite forcée $\sigma_{II} = 0,10$.
Loi des surcharges au droit de la chambre pour une fermeture en $\tau = 2 \text{ sec.}$

et $\sigma = 0,15; 0,10$ et $0,05$, ainsi que le cas $\sigma_{II} = 0$ (pas de chambre d'équilibre). Il convient de remarquer ici, que les contre-coups de fermeture d'une chambre avec étranglement peuvent être alternativement positifs et négatifs, à un moment où le niveau d'eau dans la chambre d'équilibre est encore bas. On fera donc bien de vérifier avec soin la valeur de la somme des surcharges de coups de bélier et des oscillations de masse, afin de s'assurer qu'il ne se produira pas de pressions négatives dans la galerie en charge et que les surcharges positives ne dépassent pas la limite admissible.

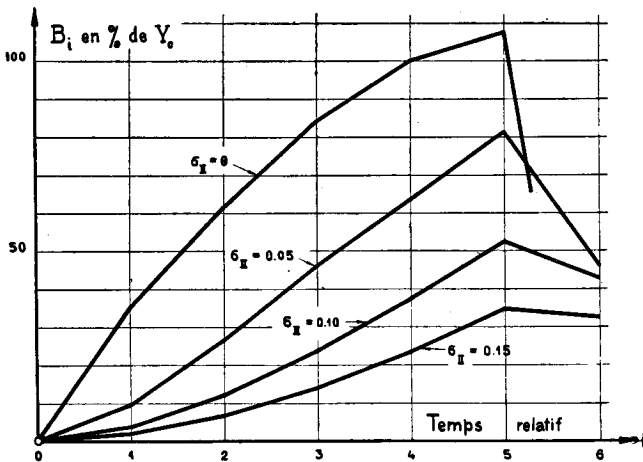


FIG. 52. — Chambre à étranglement, sans conduite forcée. $\rho_1 = 3,67$; $\mu_1 = 2",84$. Fermeture en $\tau = 15"$. Loi des surcharges en A pour un degré d'étranglement σ_{II} successivement égal à $0,15; 0,10; 0,05$ et 0 .

Nous avons pu, par ailleurs, compléter la figure 50 en traçant, en plus de la courbe des surcharges B_1 pour $\tau < \mu_1$, celles pour $\tau = 5"$ et $15"$ ($\mu_1 = 2",84$; $\Theta_1 = 1,76$ et $5,28$). Ces deux figures donnent une bonne idée de l'influence qu'une chambre à étranglement exerce sur la loi des surcharges devant l'obturateur.

2. *Les organes de fermeture se trouvent au bas de la conduite forcée.*

Soient k les battements de la conduite III, supposée plus courte que I.

Nous avons :

$$\frac{v_{IIIk}}{V_{III_0}} = \frac{v_{III_0}}{V_{III_0}} - \frac{1}{2\rho_{III}} \Phi_k (1 + \alpha_k) \quad (20a)$$

et du fait que $v_{II_0} = 0$;

$$\frac{v_{IIk}}{V_{II_0}} = - \frac{\sqrt{2gY_0}}{V_{II_0}} \sqrt{\zeta_k^2 - 1} \quad (166)$$

Tant que nous nous trouvons dans la première phase de I, nous aurons :

$$\frac{v_{I_k}}{V_{I_0}} = \frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} - \frac{1}{2\rho_I} (\zeta_k^2 - 1) = 1 - \frac{1}{2\rho_I} \Phi_k (1 - \alpha_k) \quad (23a)$$

En tenant compte de l'équation de continuité (19) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \frac{v_{IIIk}}{V_{III_0}} &= \frac{v_{IIIk}}{V_{III_0}} - \frac{v_{I_k}}{V_{I_0}} & (19) \\ - \frac{\sqrt{2gY_0}}{V_{II_0}} \sqrt{\zeta_k^2 - 1} &= \frac{1}{2\rho_I} \Phi_k (1 - \alpha_k) - \frac{1}{2\rho_{III}} \Phi_k (1 + \alpha_k) \end{aligned}$$

d'où nous tirons :

$$\frac{2gY_0}{V_{II_0}^2} \Phi_k (1 - \alpha_k) = \frac{\Phi_k^2}{4} \left[\frac{1 - \alpha_k}{\rho_I} - \frac{1 + \alpha_k}{\rho_{III}} \right]^2$$

équation qui nous livre α_k en fonction de Φ_k pendant la première phase de la conduite I.

Ordonnons; il vient :

$$\begin{aligned} \alpha_k^2 \frac{\Phi_k}{4} \left(\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{III}} \right)^2 - 2\alpha_k \left[\frac{\Phi_k}{4} \left(\frac{1}{\rho_I^2} - \frac{1}{\rho_{III}^2} \right) - \frac{gY_0}{V_{II_0}^2} \right] \\ + \frac{\Phi_k}{4} \left(\frac{1}{\rho_I} - \frac{1}{\rho_{III}} \right)^2 - \frac{2gY_0}{V_{II_0}^2} = 0 \end{aligned}$$

Nous en tirons :

$$\alpha_h = \frac{\left[\frac{\Phi_h}{4} \left(\frac{1}{\rho_I^2} - \frac{1}{\rho_{III}^2} \right) - \frac{gY_0}{V_{II_0}^2} \right] + \sqrt{[\dots]^2 - \frac{\Phi_h^2}{16} \left(\frac{1}{\rho_I^2} - \frac{1}{\rho_{III}^2} \right)^2 + \frac{gY_0 \Phi_h}{2V_{II_0}^2} \left(\frac{1}{\rho_I} + \frac{1}{\rho_{III}} \right)^2}}{\frac{\Phi_h}{4} (1/\rho_I + 1/\rho_{III})^2} \quad (171)$$

Dans le cas où $\rho_I = \rho_{III} = \frac{aV_{I_0}}{2gY_0}$, cette relation se simplifie et devient :

$$\alpha_h = \frac{-\frac{gY_0}{V_{II_0}^2} + \sqrt{\frac{g^2 Y_0^2}{V_{II_0}^4} + \frac{gY_0 \Phi_h}{2V_{II_0}^2} \cdot \frac{4}{\rho_I^2}}}{\frac{\Phi_h}{4} \cdot \frac{4}{\rho_I^2}}$$

Si $\sigma_{II} = \frac{S_{II}}{S_I} = \frac{V_{I_0}}{V_{II_0}}$ et $H_0 \Phi_{*h} = Y_0 \Phi_h$; on trouve :

$$\alpha_h = -\frac{a^2 \sigma_{II}^2}{4g H_0 \Phi_{*h}} + \sqrt{\left(\frac{a^2 \sigma_{II}^2}{4g H_0 \Phi_{*h}} \right)^2 + \frac{a^2 \sigma_{II}^2}{2g H_0 \Phi_{*h}}}$$

$$\alpha_h = \frac{a^2 \sigma_{II}^2}{4g H_0 \Phi_{*h}} \left[\sqrt{1 + \frac{8g H_0 \Phi_{*h}}{a^2 \sigma_{II}^2}} - 1 \right] \quad (172)$$

Nous ne pouvons, malheureusement, pas dresser de « courbe de réaction » pour une chambre d'équilibre avec étranglement. En effet, il faudrait, en pareil cas, connaître la valeur absolue de la fonction Φ_{*h} . Pour nous faire une idée des valeurs que peut prendre α_h nous avons tracé, sur la figure 53, les courbes α_h en fonction de σ_{II} pour $\rho_I = \rho_{III}$ (formule (172)) et pour $\Phi_{*h} = 0,1; 1$ et 10 . Comme Φ_{*h} augmente au cours d'une fermeture linéaire, α_h diminuera. Cependant, ce sera la valeur finale α_m qui déterminera B_{*m} .

Les surcharges B_{*k} se calculent, comme toujours, au moyen de la formule (122a), à laquelle nous ajoutons la relation

$$\Phi_{*k} = B_{*k} + \alpha_{k-1} \Phi_{*k-1} \quad (40a)$$

indispensable pour le calcul de Φ_{*k} et de α_k .

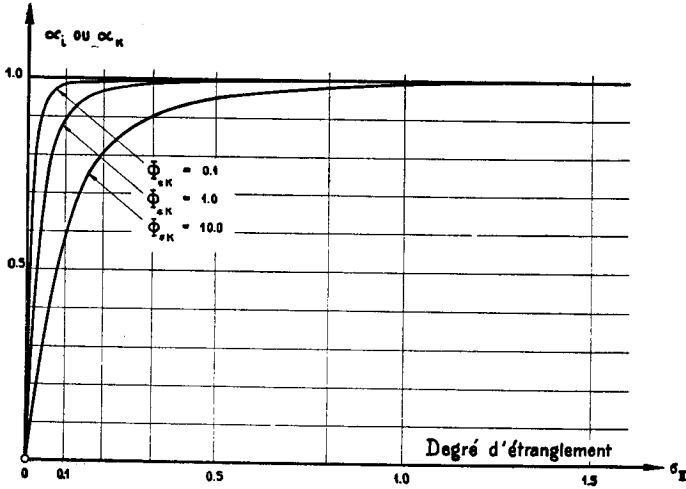


FIG. 53. — Chambre à étranglement avec conduite forcée. Courbes des valeurs α_k en fonction de σ_{II} , calculées pour: $\Phi_{*k} = 0,1; 1,0$ et 10 .

Surcharges au point d'intersection A.

Pendant la première phase de la conduite I, nous avons:

$$\frac{v_{I_k}}{V_{I_0}} = \frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} - \frac{1}{2\rho_I} (\zeta_k^2 - 1); \quad (23a)$$

d'où, si $v_{II_0} = 0$:

$$\begin{aligned} \zeta_k^2 - 1 &= 2\rho_I \left(\frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} - \frac{v_{I_k}}{V_{I_0}} \right) = 2\rho_I \left(\frac{v_{I_0}}{V_{I_0}} - \frac{v_{III_k}}{V_{III_0}} + \frac{v_{II_k}}{V_{II_0}} \right) \\ &= 2\rho_I \left[\frac{1}{2\rho_{III}} \Phi_k (1 + \alpha_k) - \frac{\sqrt{2gY_0}}{V_{II_0}} \sqrt{\zeta_k^2 - 1} \right] \end{aligned}$$

Posons: $\zeta_k^2 - 1 = b_k^2$ exprimé en % de Y_0 et $\lambda = \frac{\sqrt{2gY_0}}{V_{II_0}}$.
 Nous en tirons:

$$b_k^2 = \frac{\rho_I}{\rho_{III}} \Phi_k (1 + \alpha_k) - 2\rho_I \lambda b_k$$

et

$$b_k = -\rho_I \lambda + \sqrt{\rho_I^2 \lambda^2 + \frac{\rho_I}{\rho_{III}} \Phi_k (1 + \alpha_k)}. \quad (173)$$

Il sera, en général, plus simple d'employer la formule

$$B_k = \Phi_{*k} (1 - \alpha_k). \quad (18a)$$

Nous pouvons développer des formules analogues pour les phases successives de la conduite I. Par contre, le calcul de α_k n'irait pas sans certaines difficultés.

Exemple numérique.

Reprenons le cas de la conduite « B »¹ caractérisée par:
 $H_0 = 109,47$ m; $Y_0 = 35,48$ m; $\rho_* = 3,68$ et $\mu_{III} = 0,623$.

Considérons une chambre d'équilibre à étranglement, caractérisée par une valeur σ_{II} et par $\rho_I = \rho_{III} = 11,56$ et fermons l'obturateur en $\tau = 2''$.

Si nous prenons $\sigma_{II} = 1$, c'est, à peu de chose près, l'exemple traité au chapitre II.C.4 (Chambre avec col d'entrée). Nous trouvons, par cette nouvelle méthode:

$B_{*m} = 2,00$ comme précédemment, et:

$B_m = 0,03$ au lieu de 0,0107 en % de H_0 .

La concordance semble donc rassurante.

Prenons $\sigma_{II} = 0,10$, valeur admissible pour une chambre avec étranglement proprement dit.

On trouve, toujours pour $\tau = 2''$:

$B_{*m} = 2,755$ et $B_m = 1,062$ en % de H_0 .

La chambre à étranglement protège mal la conduite forcée; son action n'est que de loin comparable à celle d'une chambre prismatique, ou d'une chambre avec col d'entrée.

¹ Voir pages 180 et 216.

Relevons, en passant, que l'idée communément répandue, que la surcharge $Y_0 B_k$ ne peut dépasser la pression statique ΔY nécessaire pour chasser le débit total à travers l'étranglement, n'est en rien fondée. Examinons, par exemple, le cas d'une fermeture instantanée de l'obturateur de la conduite définie plus haut. On a, d'une part:

$$V_{i10} = \frac{1}{\sigma_{11}} V_{10} = \sqrt{2g\Delta Y} ; \text{ d'où:}$$

$$\Delta Y = \frac{1}{\sigma_{11}^2} \cdot \frac{V_{10}^2}{2g} = \left(\frac{1}{0.10}\right)^2 \cdot \frac{6.03^2}{19.62} = \mathbf{186 \text{ m}}$$

(valeur très élevée en raison de $V_{10} = 6,03$ m/sec.).

D'autre part, en tenant compte de l'élasticité de l'eau, on trouve:

$$\Phi_{*k} = B_{*1} = 2\rho_* = \mathbf{7,36 .}$$

$$\alpha_k = \frac{1310^2 \cdot 0,10^2}{8 \cdot 9,81 \cdot 109,47 \cdot 3,68} \left[\sqrt{1 + \frac{16 \cdot 9,81 \cdot 109,47 \cdot 3,68}{1310^2 \cdot 0,10^2}} - 1 \right]$$

$$= 0,6305 ;$$

$$B_1 = \Phi_{*1} (1 - \alpha_k) = 2,70 \text{ et } H_0 B_1 = 2,70 \cdot 109,47 = \mathbf{296 \text{ m}}$$

On obtient d'ailleurs la même valeur en calculant b_1^2 (en% de Y_0) au moyen de la formule (173).

Il n'y a donc nullement concordance entre la pression élastique $H_0 B_k = Y_0 b_k^2$ et la charge statique ΔY qui sert de point de départ ordinaire au calcul des oscillations de masse dans les chambres d'équilibre. Nous retrouvons donc ici une propriété déjà démontrée, de façon plus générale, au chapitre II.A.2.

CHAPITRE E.

EXTENSION DE LA THÉORIE

Nous avons donné, au cours de notre exposé, assez d'exemples de la souplesse de la méthode, pour qu'il soit démontré qu'elle est générale et susceptible de résoudre, en toute rigueur, les cas les plus compliqués. Nous ne nions point que pareille entreprise puisse présenter de très grosses et réelles difficultés. L'essentiel sera d'ordonner les calculs de telle manière que la symétrie des formules devienne apparente et le développement en séries possible.

Il est un cas dont l'importance est capitale en raison de sa portée pratique. C'est le cas de fermeture lente d'une conduite à caractéristiques multiples débouchant d'une chambre d'équilibre quelconque. Il est susceptible d'une solution simple.

Considérons, par exemple, la figure 54. La conduite III est composée de $p + 1$ éléments caractérisés par les coefficients $(s_1\bar{s}_2)$, $(s_2\bar{s}_3)$..., et dont les périodes sont 1, n_1 , n_2 A est le point de bifurcation: nous admettrons qu'en ce point concourent q galeries forcées I, I' ... que nous supposons très longues, et une chambre d'équilibre quelconque. Nous considérons comme unité des temps le battement de l'élément inférieur OO_1 de section constante. C'est à cet élément OO_1 que nous appliquerons la formule (122a). Nous savons que la pression limite B_{*m} en O sera connue dès que α_m le sera en O_1 . D'autre part, puisqu'il s'agit d'une fermeture lente, la fonction Φ_{*k} s'écartera peu d'une droite; tout au moins, assez peu pour que nous puissions admettre que l'hypothèse 2 est valable pour le calcul de α_m . Dans ces conditions, nous prétendons que α_m est donné, en O_1 , par la formule:

$$\alpha_m = 1 - \frac{n_1}{m} \frac{s_1}{s_2} - \frac{n_2}{m} \frac{s_1 s_2}{s_2 s_3} - \frac{n_3}{m} \frac{s_1 s_2 s_3}{s_2 s_3 s_4} \dots - \frac{n_{p-1}}{m} \frac{s_1 s_2 s_3 \dots s_{p-1}}{s_2 s_3 s_4 \dots s_p} - \frac{n'_1}{m} \frac{s_1 s_2 \dots s_{p-1} s_{III}}{s_2 s_3 \dots s_p s_{II}} - \frac{n'_2}{m} \frac{s_1 s_2 \dots s_{p-1} s_{III} s'_1}{s_2 s_3 \dots s_p s_{II} s'_2} \quad (174)$$

Nous justifions cette formule en rappelant, d'abord, qu'il est indifférent pour l'écriture de α_m que le point de discontinuité soit une simple variation de section, ou une bifurcation, pour autant que la nouvelle conduite soit, ou très longue (conduites I, I'. ...) ou, au contraire, courte et en cul de sac (conduite II').

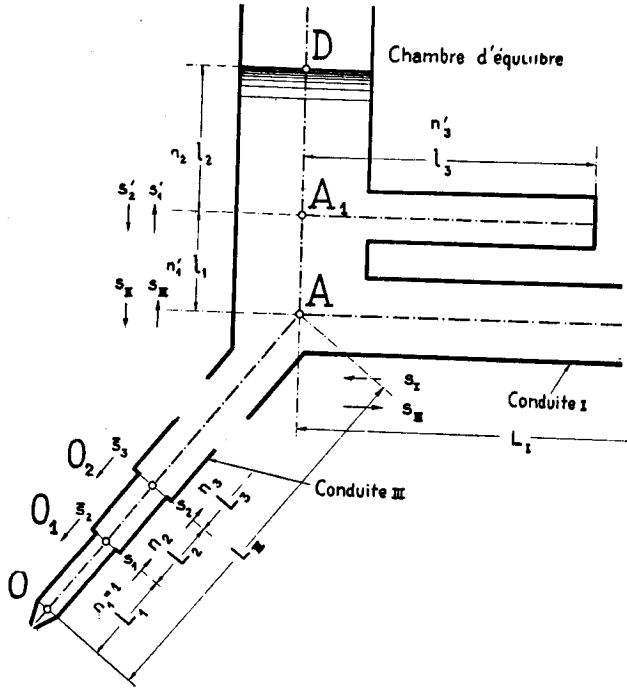


FIG. 54. — Schéma du cas général d'une conduite à caractéristiques multiples avec chambre d'équilibre non prismatique.

D'autre part, la formule (174) est la seule forme généralisée de la formule (164), que l'on puisse toujours ramener à la forme (164), en y faisant dans tous les groupes de coefficients, sauf deux, $s_{p-1} = \bar{s}_p$; ceci, quels que soient les deux groupes restants choisis.

Il suffit donc de calculer les formules (122a) et (174) pour connaître la surcharge relative B_{*m} en O pour un cas de fermeture linéaire lente quelconque, c'est-à-dire pour donner immédiate-

ment réponse à la plus importante des questions que le technicien doit se poser.

Un point qui mérite de retenir l'attention des spécialistes est la recherche des méthodes de calcul graphique appropriées; on pourra partir, soit des méthodes d'Allievi, soit encore des méthodes développées par Kreitner, Loewy, Bergeron, et Schnyder. La méthode Bergeron est susceptible de généralisation, mais elle ne dispense malheureusement pas du calcul des valeurs α . La difficulté essentielle du problème n'est donc pas levée. Quant aux développements de M. Schnyder, nous signalons qu'ils ne sont point conformes aux résultats de notre théorie.

Il est possible que des méthodes graphiques se révèlent plus simples à manier, dans les cas complexes, et permettent, par exemple, de vérifier notre formule (174).

Une autre méthode de calcul, que l'on abordera éventuellement avec fruit, est celle qui consisterait à substituer une chambre d'équilibre prismatique à une chambre de forme complexe, les deux étant caractérisées par la même courbe de réaction, ou, tout au moins, par des courbes analogues.

Ce sont probablement là les deux moyens les plus efficaces qui s'offrent à nous pour développer la théorie et résoudre certains problèmes pratiques complexes, sans avoir à passer par le calcul rigoureux.

CONCLUSIONS

Il n'était pas sans intérêt de résoudre le problème général du coup de bélier, posé de si remarquable façon par Lorenzo Allievi. — Nous pouvons prétendre que notre théorie est tout à fait générale, et qu'un calculateur habile et patient est susceptible de résoudre grâce à elle, en toute rigueur, les problèmes les plus complexes.

Nous ne nous sommes pas attachés de façon excessive au côté mathématique du problème. On nous reprochera, peut-être, de n'avoir point suivi de plus près les belles recherches théoriques d'Allievi; de n'avoir pas étudié les propriétés mathématiques des diverses courbes ζ_{*h} ou Φ_{*h} , et d'avoir abandonné le classement par abaques, qui fait l'originalité du travail d'Allievi. Peut-être qu'une pareille étude se heurterait à de grosses difficultés. Mais

notre but était autre et, *vu l'urgence d'une méthode de calcul pratique*, applicable à des cas concrets, c'est à une recherche moins générale que nous nous sommes attachés. Nous n'en reconnaissons pas moins qu'il serait très intéressant de poursuivre l'analyse du problème, de prouver, par exemple, l'existence mathématique des limites ζ_{*m} pour le cas de fermeture linéaire, existence que nous avons vérifiée dans tous les cas, mais non démontrée. Il en est de même de l'allure presque linéaire de la fonction Φ_{*k} , propriété dont il serait intéressant de démontrer la généralité pour le cas de fermeture linéaire.

Cependant, le nombre de problèmes pratiques qu'il reste encore à résoudre est tel, que nous estimons tout aussi utile de porter sur ceux-ci l'effort de recherches ultérieures. Nous citons, parmi les principaux: l'étude systématique des manœuvres d'ouverture brusque et des manœuvres rythmiques alternatives, et la recherche d'une courbe enveloppe éventuelle des surcharges mesurées le long de l'axe de la conduite; l'étude des manœuvres synchrones ou asynchrones d'obturateurs indépendants dans le cas de plusieurs conduites forcées III, III', III'', ... concourantes. Comme cas spécial, on étudiera la répartition des surcharges dans une conduite fermée à son extrémité. L'importance de ce problème provient de l'impossibilité où nous étions, à ce jour, de calculer exactement les pressions dans les chambres inférieures tubulaires en cul de sac, très souvent exécutées lorsque la chambre d'équilibre doit amortir les oscillations d'un système dont le bassin de retenue est à niveau variable. Une question pleine d'intérêt est le cas d'un obturateur situé, non à l'extrémité inférieure, mais au milieu, ou au sommet d'une conduite forcée. Ce problème pourrait, à son tour, être le point de départ d'une étude du coup de bélier, dans le cas des basses chutes avec turbines Francis ou Kaplan.

Cette simple énumération montre l'ampleur du domaine ouvert aux recherches ultérieures. Nous avons bien conscience de n'avoir fait qu'amorcer le problème. Cependant, il nous semble que nous pouvons, dès maintenant, énoncer quelques résultats pratiques acquis. Nous avons dit notre regret de ne pouvoir fournir d'abaques classificateurs des conduites forcées, analogues aux abaques d'Allievi. Remarquons, cependant, que les abaques d'Allievi sont surtout intéressants du point de vue théorique

général, puisqu'ils classent toutes les conduites à caractéristique unique. En pratique, cependant, le tracé et le diamètre de la conduite sont des données ne pouvant guère varier. Les variables sont: le temps de manœuvre de l'obturateur et la forme de la chambre d'équilibre. C'est pour cette raison que notre courbe de « sensibilité d'une conduite » pour le cas de fermeture linéaire (fig. 40) nous semble destinée à prendre, en pratique, une importance analogue à celle de l'abaque correspondant de l'ouvrage d'Allievi. Cette courbe a comme contre-partie les « courbes de réaction » (fig. 41) caractérisant toute chambre d'équilibre, à l'exception des chambres à étranglement. Ces courbes générales permettent un classement a priori des solutions bonnes, moyennes et mauvaises, classement que nous pouvons reviser en traçant des graphiques plus précis, analogues aux figures 44 et 48, où nous avons donné les surcharges limites réelles en O et en A pour diverses chambres d'équilibre. Il se dégage de ces graphiques 40 à 48 l'impression très nette qu'il y a des classes de conduites, allant de la conduite très sensible, à celle qui ne l'est point, et des classes de chambres d'équilibre. Celles qui réagissent le mieux semblent être celles à col d'entrée et large chambre d'oscillation, et celles qui réagissent le moins bien seraient les chambres à étranglement, en passant par toute la gamme des chambres prismatiques ou non. On vérifie également que certaines chambres très longues sont paresseuses, et que les conduites courtes, de même que la solution prévoyant un obturateur au droit de la chambre, requièrent une chambre réagissant bien alors qu'une conduite à haute chute semble moins exigeante. En l'absence d'abaques généraux, ces quelques indications, qu'illustrent nos calculs numériques, seront utiles au spécialiste. Il sera indiqué de faire, dans les calculs, une distinction entre la fermeture des vannes ordinaires, dont on compense la fermeture trop brusque au moyen de déviateurs ou d'orifices de compensation, et la fermeture des vannes de secours, dont les mouvements sont d'ordinaire beaucoup plus rapides.

Nous avons laissé de côté l'étude des chambres d'équilibre branchées sur une conduite de pompe centrifuge. Ce problème un peu spécial est cependant plein d'intérêt. En effet tout technicien connaît les difficultés nombreuses que présente le service des pompes et les dangers d'un arrêt brusque du courant.

Le constructeur n'est en effet pas toujours maître de régler l'arrêt brusque d'une pompe comme il ralentit à volonté l'arrêt d'une turbine. Les accidents dûs à ce fait sont proportionnellement assez fréquents.

Quant à la concordance entre résultats numériques et pressions réelles, elle ne sera certaine qu'après vérification expérimentale. Rappelons cependant que la théorie générale, ainsi que celle d'Allievi d'ailleurs, se déduit directement, et sans hypothèse intermédiaire aucune, de la théorie de l'élasticité des corps. On peut donc lui faire tout aussi confiance qu'aux calculs de résistance des matériaux. En ce qui concerne notre « méthode de calcul approchée », qui donne immédiatement les surcharges limites en cas de manœuvre de fermeture lente, nous ne pensons pas que l'hypothèse faite soit plus loin de la réalité, par exemple, que celle, usuelle en statique, par laquelle on admet des nœuds mobiles dans les systèmes à treillis, négligeant, en première approximation, les tensions secondaires dues au moment d'encastrement. D'ailleurs, nous le répétons ici, les résultats de la méthode approchée peuvent, et doivent, être contrôlés par des calculs exacts.

Quant à l'utilité pratique de notre méthode, nous rappellerons que la tendance moderne de rationalisation et d'économie décide souvent le constructeur à augmenter le débit maximum et la vitesse de l'écoulement de l'eau d'une part, d'autre part le pousse à concevoir des chambres d'équilibre de formes compliquées. Ces diverses décisions concourent toutes à augmenter l'amplitude des coups de bélier. Les galeries en charge, autrefois protégées par des chambres larges, sont de plus en plus sollicitées par des pressions croissantes, que les chambres d'équilibre non prismatiques n'interceptent qu'en partie.

Quelque prudence s'impose donc et, en tous les cas, la vérification rigoureuse des surcharges en divers points du système, sans oublier que des manœuvres alternatives, des variations de section de la conduite, des angles saillants dans le tracé, sont autant de facteurs susceptibles de compliquer la tâche d'une chambre d'équilibre.

Le domaine d'application de notre théorie se révèle, par le fait, très vaste.

BIBLIOGRAPHIE

I. SUR LE COUP DE BÉLIER.

- J. MICHAUD. « Coup de béliet dans les conduites; étude des moyens employés pour en atténuer les effets. » *Bulletin de la Soc. vaudoise des Ing. et Architectes*, Lausanne 1878.
- J. MICHAUD. « Intensité des coups de béliet dans les conduites d'eau. » *Bulletin technique de la Suisse romande*, Lausanne 1903.
- RATEAU. « Théorie des coups de béliet et régularisation des turbines précédées d'une longue conduite. » *Revue de mécanique*, Paris 1900.
- L. ALLIEVI. « Teoria generale del moto perturbato dell' acqua nei tubi in pressione. » *Annali della Società degli Ingegneri ed architetti italiani*, Milan 1903.
- ALLIEVI. Traduction dans la *Revue de mécanique*, Paris 1904.
- DUBS-BATAILLARD. *Allgemeine Theorie über die veränderliche Bewegung des Wassers in Leitungen*. Berlin, Springer, 1909. 1^{re} partie: traduction de la « Teoria generale... » d'Allievi, Milan 1903.
- ALLIEVI. « Teoria del colpo d'ariete. » *Atti del Collegio degli Ingegneri ed Architetti*, Milan 1913.
- ALLIEVI-NEESER. *Revue de Mécanique*, mai et juillet 1914. Notes I et II.
- ALLIEVI-GADEN. Traduction française: *Théorie du coup de béliet*, 2 vol., Paris (Dunod) 1921.
- ALLIEVI « Le coup de béliet et le réglage automatique des turbines hydrauliques. » *Electrotecnica* 25 février 1932. Traduction française par P. Oguey, dans la *Revue générale de l'Electricité* du 1^{er} juin 1933.
- DE SPARRE. Etude théorique sur les coups de béliet dans les conduites forcées. *La Houille blanche* 1903, 1904, 1905, 1907. Nombreuses notes dans les *C. R. de l'Académie des Sciences*, la *Revue générale de l'Electricité*, Paris. *Bulletins spéciaux*, Nos. 1 et 2 de la Société hydrotechnique de France, 1915-1918.
- CAMICHEL, EYDOUX et CARIEL. *Etude théorique et expérimentale des coups de béliet*. Paris, Dunod 1919.
- CAREY. « Calcul du coup de béliet dans les conduites à une seule caractéristique et dans les conduites formées de deux ou trois tronçons de diamètres différents. » *Bulletin tech. de la Suisse romande*, 1919 et 1920.
- STRICKLER. « Druckschwankungen in Turbinenrohrleitungen bei teilweisen Belastungsänderungen. » *Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen*, 1915, N° 20.
- MAGYAR. « Beitrag zur Theorie der Druckschwankungen in Rohrleitungen. » *Die Wasserwirtschaft* 1924, N° 8.
- KREITNER. « Druckschwankungen in Turbinenleitungen. » *Die Wasserwirtschaft* 1926, N° 10.

- BERGERON. Mémoire de la Société des Ing. civils de France, 1926 et Congrès international de mécanique générale, Liège 1930. *Revue générale de l'Electricité*, 14 mai 1932.
- LÖWY. *Druckschwankungen in Druckrohrleitungen*. Wien, Springer 1928.
- CALAME et GADEN. *Théorie des chambres d'équilibre*. Gauthier-Villars, 1926.
- DU BOIS. « Répartition du coup de bélier le long d'une conduite hydraulique en pression. » *Bulletin tech. de la Suisse romande* 1931, N° 23 et 26. Réponse de P. OGUEY, *Bulletin* 1932, N° 5.
- SCHNYDER. « Druckstöße in Pumpensteigleitungen. » *Schweizerische Bauzeitung* 1929.
- SCHNYDER. « Druckstöße in Rohrleitungen. » *Wasserkraft und Wasserwirtschaft* 1932, N° 5 et 6.
- CANAAN. « Wassermessungen bei Grosskraftanlagen. » *Wasserkraftjahrbuch* 1930-1931.
- SALGAT. « La méthode Gibson pour la mesure du débit d'une conduite forcée. » *Bull. tech. de la Suisse romande* 1932, N° 13.
- HAHN. « Etude sur les coups de bélier dans les conduites de refoulement des pompes centrifuges. » *Stodola-Festschrift*, Zurich 1929.
- KÜHNE. « Betriebsfragen der Pumpenspeicherung. » *Escher-Wyss-Mitteilungen* 1928.
- FOCH. *Contribution à l'étude des coups de bélier dans les conduites munies d'un réservoir d'air*. (Publications de l'institut électro-technique et de mécanique appliquée de l'Université de Toulouse. Imprimerie et Librairie Ed. Privat, 1920.)

II. SUR LES OSCILLATIONS DE MASSE.

- PRASIL. « Wasserschlossprobleme. » *Schweizerische Bauzeitung*, 1908-II.
- RATEAU. *Traité des Turbo-machines*. Dunod 1900.
- PRESSEL. « Beitrag zur Bemessung des Inhaltes von Wasserschlössern. » *Schw. Bauzeitung* 1909-I.
- DUBS-BATAILLARD. Voir cit.
- CALAME et GADEN. Voir cit.
- CALAME et GADEN. « De la stabilité des installations hydrauliques munies de chambres d'équilibre. » *Schw. Bauzeitung*, 30 juillet 1927.
- THOMA. *Zur Theorie des Wasserschlusses bei selbstätig geregelten Turbinen-Anlagen*. Verlag Oldenbourg 1910.

III. SUR LE CALCUL DES CONDUITES ET GALERIES.

- MÜHLHOFER. « Theoretische Betrachtungen zum Problem des Druckstollenbaues. » *Schw. Bauzeitung*, 19 novembre 1921.
- BÜCHI. « Zur Berechnung von Druckschächten. » *Schw. Bauzeitung*, février 1921.
- J. SCHMID. *Statische Grenzprobleme in durchörtetem Gebirge*. Promotionsarbeit E.T.H. Zürich, N° 414.