

Berechnung der Biegungsspannungen und Stabkräfte in Schwedlerkuppeln nach Theorie und Modellversuch

VON DER

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG

DER WÜRDE EINES DOKTORS DER
TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

GENEHMIGTE

PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON

EL-SAYED EL-SCHASLY

Dipl. Bauingenieur Kairo u. E.T.H.
aus Kairo (Aegypten)

Referent: Herr Prof. Dr. F. Stüssi

Korreferent: Herr Prof. Dr. M. Ritter



ZÜRICH 1942

Diss.-Druckerei A.-G. Gebr. Leemann & Co.
Stockerstr. 64.

Diese Arbeit erscheint mit einer Anwendung aus dem Flugzeugbau
als No. 12 der „Mitteilungen des Institutes für Baustatik an der
Eidg. Techn. Hochschule“

Verlag A. G. Gebr. Leemann & Co., Zürich

**MEINEN LIEBEN ELTERN
MEINER LIEBEN FRAU
UND DEM ANDENKEN
MEINES VERSTORBENEN TÖCHTERCHENS**

Die vorliegende Arbeit ist auf Anregung und unter Leitung von Herrn Prof. Dr. *F. Stüssi* entstanden. Ich möchte ihm für die mannigfache Unterstützung, die er diesen Untersuchungen angedeihen ließ, an dieser Stelle herzlich danken. Meinen Dank möchte ich auch Herrn Prof. Dr. *M. Ritter* für das der Arbeit entgegengebrachte Interesse aussprechen.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Allgemeines Literaturverzeichnis	8
Einleitung	11
I. Berechnung der Schwedlerkuppel mit gelenkigen Knoten	13
1. Allgemeines	13
2. Berechnung nach Schwedler	14
3. Berechnung der Kuppel für unsymmetrische Belastung	16
4. Berechnung der Stabkräfte nach dem Momentenverfahren von Landsberg	21
5. Berechnung der Stabkräfte nach dem Konjugationsverfahren	25
a) Allgemeines	25
b) Anwendung auf die Schwedlerkuppel	29
6. Methode der Stabvertauschung	32
7. Zahlenbeispiel	33
a) Wahl der Kuppel	33
b) Anwendung des Konjugationsverfahrens	33
c) Analytische Kontrolle der Stabkräfte für eine lotrechte Einzellast $P_1 = 1 t$	33
d) Belastungsannahmen	34
e) Dimensionierung und Spannungsnachweis	38
f) Spannungen infolge Eigengewicht der Konstruktion und der Dachhaut	38
g) Spannungen infolge unsymmetrischer Schneebelastung	38
h) Spannungen aus Windkräften	40
8. Zusammenfassung	40
II. Berechnung der Schwedlerkuppel mit biegungssteifen Sparren und gelenkig angeschlossenen Ringen und Streben	43
1. Allgemeines	43
2. Frühere Verfahren	43
a) Die Berechnung einer regelmäßigen Schwedlerkuppel für gleichmäßig verteilte volle Belastung nach Hacker	43
b) Untersuchung der Rippenkuppel von H. Marcus	45
c) Berechnung der Kuppelrippen als Zweigelenk- oder teilweise eingespannter Bogen nach Pichl	46
d) Behandlung der zyklisch symmetrischen räumlichen Fachwerke mit biegungssteifen Ringen und Meridianen nach W. Kaufmann	47

	Seite
3. Berechnung der Schwedlerkuppel mit biegungssteifen Sparren für eine Einzellast	48
a) Allgemeine Elastizitätsgleichungen	48
b) Belastungsumordnung	52
c) Behandlung einer zwölfseitigen und dreistöckigen Kuppel	52
d) Stabkräfte der Kuppel mit biegungssteifen Sparren	66
e) Spannungen	67
4. Zusammenfassung	67
III. Einfluß der biegungssteifen Ringe	69
1. Allgemeines	69
2. Bisherige Untersuchungen der Rahmenkuppeln	69
a) Die Grundverformungen nach L. Mann	69
b) Die Lastgröße und Belastungsstufe nach F. Wansleben	70
3. Einfluß des biegungssteifen Schlußrings	73
4. Einfluß der biegungssteifen Zwischenringe	76
5. Einfluß der Neigung der Querschnitt-Hauptachsen der Ringstäbe	80
a) geneigter Schlußringquerschnitt	80
b) geneigter Zwischenringquerschnitt	82
6. Zahlenbeispiel	83
IV. Berechnung der Schwedlerkuppel mit biegungssteifen Sparren und Ringen und gelenkig angeschlossenen Diagonalen	85
1. Grundsysteme	85
a) Statisch bestimmtes Grundsystem	85
b) Statisch unbestimmte Grundsysteme	88
2. Berechnung der Schwedlerkuppel mit biegungssteifen Sparren und biegungssteifem Schlußring	91
3. Berechnung der Schwedlerkuppel mit biegungssteifen Sparren, Schlußring und Zwischenringen	99
4. Geringfügigkeit des Einflusses der Art der Anschlüsse der Zwischenringstäbe auf die Stabkräfte der Kuppel	101
5. Stabkräfte der Kuppel mit biegungssteifen Sparren und Ringen	105
6. Spannungen	106
7. Knotenverschiebungen	106
8. Zusammenfassung	107
V. Modellversuche	110
1. Allgemeines	110
2. Die Wahl des Modellbaustoffs	110
3. Dimensionierung des Modells und Berechnung der Modellkonstanten	112
a) Allgemeines	112
b) Die Maßstäbe	113
c) Die Verschiebungskoeffizienten	113

	Seite
d) Die Spannungskoeffizienten	115
e) Herstellung des Modells	116
f) Ermittlung des Elastizitätsmoduls des Modellbaustoffs	117
g) Wahl der Modellbelastung	117
h) Übertragung der Verschiebungsgrößen	118
4. Durchführung der Modellversuche	118
a) Allgemeines	118
b) Spannungsmessungen	118
c) Verschiebungsmessungen	120
5. Vergleich der Resultate aus Versuch und Rechnung	121
a) Knotenverschiebungen	121
b) Stabkräfte und Biegemomente	121
Schlußfolgerung	123

Anhang-Verzeichnis

Tafeln:

I. a) Stabkräfte der Schwedler-Kuppel mit gelenkigen Knoten infolge: $P_1 = 1t, P_{1'} = 1t, P_{1''} = 1t$ $W_1 = 1t, W_{1'} = 1t, W_{1''} = 1t$ und $H_1 = 1t,$ ferner $M_{1a} = 1tcm, M_{1'a} = 1tcm$ $M_{1''a} = 1tcm$ und $M_{1b} = 1tcm.$	128
b) Waagrechte und lotrechte Verschiebungen der Knotenpunkte 1, 1', 1'' und A der gelenkigen Kuppel für lotrechte Einzellast $P_1 = +1t$ und waagrechte Einzellast $W_1 = +1t$	132
c) Analytische Kontrolle der Stabkräfte des Raumbauwerkes für lotr. Einzellast $P_1 = +1t.$	135
II. Stabkräfte und Auflagerdrücke der gelenkigen Kuppel durch Eigen- gewicht, Dachhaut, Schnee, Wind und Saugkräfte	136
III. Dimensionierung und Spannungsnachweis der Kuppel und Modell- profile	139
IV. Berechnung der Vor- und Belastungszahlen a_{ik} für die drei Bela- stungsfälle	141
V. Zusammenstellung der Stabkräfte der Kuppel mit Kugelgelenken in den Knoten, mit biegungssteifen Sparren, mit biegungssteifen Sparren und Schlußring und nach den Modellversuchen	159

Pläne:

I. Graphische Berechnung der Stabkräfte der Kuppel nach dem Kon- jugationsverfahren	167
II. Konstruktion des Modells aus Celluloid	169

Allgemeines Literaturverzeichnis

(in chronologischer Reihenfolge)

- Schwedler, W.*: Über die Konstruktion der Kuppeldächer. Zeitschrift für Bauwesen 1866, S. 7.
- Culmann*: Graphische Statik. Zürich 1866.
- Mohr, O.*: Über die Zusammensetzung der Kräfte im Raume. Civilingenieur 1876, S. 121.
- Schwedler, W.*: Konstruktion der Kuppeldächer, Berlin 1877.
- Föppl, A.*: Über das räumliche Fachwerk. Die Eisenbahn, Zürich 1881 und 1882.
- Henneberg, L.*: Statik der Sparrensysteme. Darmstadt 1886.
- Hacker*: Statische Bestimmung der Spannungen des Fachwerkes im Raume bei schiefer Belastung. Zeitschrift für Bauwesen, 1888, S. 43.
- Über Biegungsspannungen in Schwedlerschen Kuppeln, bei gleichmäßig um den Mittelpunkt verteilter Belastung. Zeitschrift des Arch. und Ing. Vereins zu Hannover, 1888, S. 223.
- Ritter, W.*: Anwendungen der graphischen Statik, Bd. II. Das Fachwerk. Zürich 1890.
- Müller-Breslau, H.*: Beiträge zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Zentralblatt der Bauverwaltung. 1891/92.
- Föppl, A.*: Das Fachwerk im Raume. Leipzig 1892.
- Mohr, O.*: Die Berechnung des Fachwerks mit starren Knotenverbindungen. Civilingenieur, 1892.
- Hübner*: Der einheitliche Verschiebungsplan für räumliches Fachwerk. Civilingenieur 1893.
- Föppl, A.*: Die Flechtwerksträger. Schweizer Bauzeitung 1894, S. 146.
- Kohfahl, R.*: Beitrag zur Theorie der Kuppel- (und Turm-) dächer. Zeits. des Vereins deutscher Ing. 1896 und 1898.
- Müller-Breslau, H.*: Beitrag zur Theorie der Kuppel- und Turmdächer und verwandter Konstruktionen. Zeits. des Vereins deutscher Ing. 1898, S. 1205/1233 und 1899, S. 385.
- Föppl, A.*: Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. II, die graphische Statik, 1. Aufl. Leipzig 1900 und 5. Aufl. Leipzig/Berlin 1920.
- Zimmermann, W.*: Über Raumbachwerke, neue Formen und Berechnungsweisen für Kuppeln und sonstige Dachbauten. Berlin 1901.
- Foerster, M.*: Die Eisenkonstruktionen der Ingenieur-Hochbauten. 2. Aufl. Leipzig 1902, 5. Aufl. Leipzig 1924.
- Mohr, O.*: Beitrag zur Theorie des Raumbachwerks. Zentralblatt der Bauverwaltung 1902, S. 205 und 635.
- Müller-Breslau, H.*: Über räumliche Fachwerke. Zentralblatt der Bauverwaltung 1902, S. 49/61 und 429.
- Zur Berechnung des Raumbachwerkes, Zentralblatt der Bauverwaltung 1903, S. 65/298/509/523 und 642.

- Mohr, O.:* Zur Berechnung der Raumfachwerke, Zentralblatt der Bauverwaltung 1903, S. 237/402 und 641.
- Henneberg und Schlink:* Die Theorie der Fachwerksträger. Zschr. f. Arch. u. Ingenieure 1903, S. 157/176.
- Landsberg, Th.:* Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Zentralblatt der Bauverwaltung 1903, S. 221 und 361.
- Hasch, A.:* Zur Theorie des räumlichen Fachwerks. Zeitschrift für Mathematik und Physik 1903.
- Mehrtens, G.:* Statik der Baukonstruktion, Bd. I, Leipzig 1903 (Raumfachwerke, S. 190); Bd. III, Leipzig 1905 (Die Nebenspannungen der Fachwerke, S. 380).
- Müller-Breslau, H.:* Die neuen Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktion. 3. Aufl. Leipzig 1904 und 5. Aufl. 1924.
- Schlink, W.:* Über räumliche Dachfachwerke. Zschr. für Arch. und Ing. 1904, S. 183.
- Sachs, L.:* Zur Berechnung räumlicher Fachwerke: allgemeine Formen für statisch bestimmte und insbesondere statisch unbestimmte Kuppel- und Zeltdächer. Berlin 1905.
- Mohr, O.:* Abhandlung aus dem Gebiete der technischen Mechanik. 1. Aufl. Berlin 1906. 2. Aufl. Berlin 1914.
- Schlink, W.:* Statik der Raumfachwerke. Leipzig und Berlin 1907.
- Mayor, B.:* Statique graphique des Systèmes de l'espace. Lausanne et Paris 1910.
- Gehler, W.:* Die Ermittlung der Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken. Berlin 1910.
- Mann, L.:* Über zyklische Symmetrie in der Statik mit Anwendungen auf das räumliche Fachwerk. Der Eisenbau 1911, S. 18.
- Marcus, H.:* Beitrag zur Theorie der Rippenkuppel. Der Eisenbau 1912, S. 387.
- Kannenberg, B. G.:* Zur Theorie torsionsfester Ringe. Der Eisenbau 1913, S. 329.
- v. Mises, R.:* Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme. Zeitschrift für Math. und Physik 1916, S. 209.
- Andrée, W. L.:* Zur Berechnung gekrümmter Träger. Der Eisenbau 1918, S. 184.
- Zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme. München 1919.
- Picht, E.:* Der durchgehende gelenklose Bogen auf elastischen Stützen. Stuttgart 1919.
- Zur Theorie unversteifter Rippenkuppeln. Der Bauingenieur 1920.
- Schwyzler, H.:* Statische Untersuchungen der aus ebenen Tragflächen zusammengesetzten räumlichen Tragwerke, Zürich 1920.
- Grüning:* Räumliches Fachwerk von zyklischer Symmetrie mit biegungsfesten Ringen und Meridianen. Der Eisenbau 1921, S. 310.
- Kaufmann, W.:* Beitrag zur Berechnung räumlicher Fachwerke von zyklischer Symmetrie. Zschr. f. angewandte Math. und Mech. 1921, S. 345.

- Unold, G.*: Der Kreisträger. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. V. D. I., Heft 355, Berlin 1922.
- Bleich, F.*: Theorie und Berechnung der eisernen Brücken. Berlin 1924 (Die Fachwerk-Nebenspannungen, S. 470).
- Worch, G.*: Beispiele zur Anwendung des Reduktionssatzes. Beton und Eisen, Jahrgang 1924, S. 39.
- Über Rechenproben bei der Berechnung vielfach statisch unbestimmter Systeme. Der Bauingenieur 1925, S. 654.
- Müller-Breslau, H.*: Die graphische Statik der Baukonstruktion. Bd. II, 2. Abtlg., 2. Aufl. Leipzig 1925 (Nebenspannungen im ebenen Fachwerk, S. 605).
- Hofacker, K.*: Mechano-statische Untersuchungen hochgradig statisch unbestimmter Tragsysteme. Schweiz. Bauzeitung 1926, S. 153.
- Weber, C.*: Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt. Zschr. f. angewandte Math. und Mech. 1926, S. 85.
- Prager, W.*: Beitrag zur Kinematik des Raumbachwerks. Zschr. f. angewandte Math. und Mech. 1926, S. 341.
- Die Formänderungen von Raumbachwerken. Zschr. f. angewandte Math. und Mech. 1927.
- Pasternak, P.*: Berechnung vielfach statisch unbestimmter biegefechter Stab- und Flächentragwerke. I. Teil: Dreigliedrige Systeme. Zürich 1927, S. 43.
- Höber, E.*: Rippenkuppeln aus Stahl. Der Stahlbau 1928, S. 102.
- Hertwig, A.*: Johann Wilhelm Schwedler. Sein Leben und sein Werk. Berlin 1930.
- Wahed, El Sayed*: Gelenkmethode. Diss. E.T.H. Zürich. Berlin 1931 (Modellmaterialien, S. 12).
- Bleich, F.*: Stahlhochbauten. Bd. II. Berlin 1933 (Schwedlerkuppeln, S. 830).
- Constant, F.*: Stresses in space structures, Proceedings of the American Society of Civil Engineers. 1934/35.
- Grinter, L. E.*: Stresses in space structures, Proceedings of the American Society of Civil Engineers. 1934, S. 1086.
- Spofford, C. M.*: Stresses in space structures, Proceedings of the American Society of Civil Engineers. 1934, S. 1091.
- Hofacker, K.*: Das Talsperrengewölbe. Diss. E.T.H. Zürich 1936 (Modellversuche, S. 80).
- Stüssi, F.*: Der Kreisträger mit I-Querschnitt. Schweiz. Bauztg. 1938, S. 166.
- Mann, L.*: Grundlagen zu einer Theorie räumlicher Rahmentragwerke. Der Stahlbau, Heft 19/20, Sept. 1939, und Heft 21/22, Okt. 1939.
- Ritter, M.*: Repetitorium der Vorlesungen über Baustatik II. Eidg. Techn. Hochschule Zürich 1939, Bd. III, S. 19.
- Wansleben, F.*: Die Berechnung der regelmäßig vieleckigen Rahmenkuppeln. Der Stahlbau: Beilage zur Zeitschrift „Die Bautechnik“. Berlin 1940.

Einleitung

Die Überdachung von freien Flächen kann durch Raumfachwerke geschehen. Die Berechnung solcher Tragwerke ist sehr umständlich. Bei der knappen Zeit, die für den Entwurf meistens zur Verfügung steht, kommen für die Rechnung gewöhnlich nur zwei Systeme in Frage: Die Schwedlerkuppel und das Zeltdach. Es ist üblich, mit reibungslosen Gelenken in den Knoten zu rechnen. In Wirklichkeit werden aber stets steife Knoten ausgebildet (Niet-, Schweiß- oder Schraubenverbindungen). Bei der Berücksichtigung dieses Umstandes ist man bis jetzt immer auf erhebliche Schwierigkeiten gestoßen.

In der vorliegenden Arbeit wird nun versucht, die Schwedlerkuppel mit Laternenring als räumliches Fachwerk unter Berücksichtigung der steifen Knoten möglichst genau zu berechnen. Dabei wird ein für die Praxis besonders geeigneter Rechnungsgang angestrebt. Die gewonnenen Resultate und Verfahren sollen in weitgehendem Maße auch auf andere Kuppelsysteme anwendbar sein.

In den ersten vier Abschnitten wird das Berechnungsverfahren entwickelt, indem, ausgehend von der Schwedlerkuppel mit gelenkigen Knoten, die tatsächlichen Knotenbedingungen schrittweise eingeführt werden. Der erste Abschnitt behandelt die eigentliche Schwedlerkuppel mit durchwegs gelenkigen Stabanschlüssen. Im zweiten Abschnitt werden nur noch die Ring- und Diagonalstäbe als gelenkig angeschlossen betrachtet; die Sparren bilden hier durchlaufende biegungssteife Träger auf elastisch senkbaren Stützen. Im dritten Abschnitt werden die steifen Anschlüsse der Ringstäbe miteinbezogen. Es wird hier gezeigt, wie viel größer der Einfluß des steifen Schlußringes auf die Biegungsbeanspruchung und die Deformationen der Kuppel ist, als derjenige der Zwischenringe. Im vierten Abschnitt folgt die genaue

Berechnung der Kuppel mit durchlaufenden steifen Sparren und Ringen. Als Sonderfall wird die Kuppel mit steifen Sparren und steifem Schlußring am Beispiel näher untersucht. Als Beispiel dient eine zwölfseitige regelmäßige Schwedlerkuppel. Sie wird im ersten Abschnitt dimensioniert unter der Annahme reibungsloser Gelenke in sämtlichen Knoten. Die Konstruktion erfolgt aber auf Grund steifer Knotenverbindungen, wie sie in der Praxis üblich sind.

Zur Nachprüfung der Rechnungen wird ein Modell aus Zelluloid verwendet. Im fünften Abschnitt wird die zweckmäßige Umdimensionierung des Ausführungsentwurfes auf das Modell behandelt. Anschließend werden die für einfache Lastfälle durchgeführten Messungen beschrieben, und es werden schließlich die Resultate aus Theorie und Messung miteinander verglichen.

I. Berechnung der Schwedlerkuppel mit gelenkigen Knoten

1. Allgemeines

Nachdem die Bedachung des Gasbehälterumbaus der Imperial-Kontinental-Gas-Association in Berlin [Kuppel von 33,35 m Durchmesser] im Jahre 1860 während der Ausführung eingestürzt war¹⁾, wurde sie nach *Schwedlers* Angaben erneuert²⁾. Die Dachhaut, bestehend aus Schalung und Dachpappe, ruht auf Pfetten, die sich auf sechzehn radial angeordnete halbparabelförmige Binder abstützen. Diese Letztern durchdringen sich im Kuppelscheitel nicht, sondern es stoßen die obere Bindergurtungen gegen einen Druckring und die unteren Gurtungen gegen einen Zugring.

Diese Dachkonstruktion brachte *Schwedler* nach ihrer gelungenen Ausführung auf den Gedanken, einen Raum mit polygonalem Grundriß auf ähnliche Weise zu überdachen. Im Jahre 1863 hat er dafür in der Form der nach ihm benannten *Schwedlerkuppel* eine verbesserte Lösung gefunden. Diese besteht in der Anordnung von Stäben in der Richtung der Hauptkräfte bei gleichförmig verteilter Belastung. Diese Stäbe liegen in der Richtung der Meridiane (Sparren) und in der Richtung der Parallelkreise (Ringe) der die Knoten verbindenden Rotationsfläche. Zur Sicherung der Stabilität des gelenkig gedachten Stabsystems und zur Aufnahme unsymmetrischer Belastungen hat *Schwedler* in den durch je zwei Sparren- und Ringstäbe gebildeten Trapezflächen Diagonalen eingezogen.

¹⁾ *Hertwig, A.*: Johann Wilhelm Schwedler, Sein Leben und sein Werk, Berlin 1930.

²⁾ *Schwedler, W.*: Über die Konstruktion der Kuppeldächer, Zschr. f. Bauwesen 1866, S. 7.

2. Berechnung nach Schwedler

Schwedler hat die Berechnung für gleichmäßige lotrechte Lasten durchgeführt. Die Stabketten der Sparren stützen sich gegen den Fußring als Widerlager; an die übrigen Ringe geben sie horizontale Kräfte ab. Die Reaktion am obersten Ring (Laterenring) wird etwa als Sparrendruck bezeichnet. Auf jeden Knotenpunkt wird die Hälfte der auf die beiden anliegenden Sparrenfelder entfallenden Last übertragen. Abbildung 1 stellt eine Kuppel mit 5

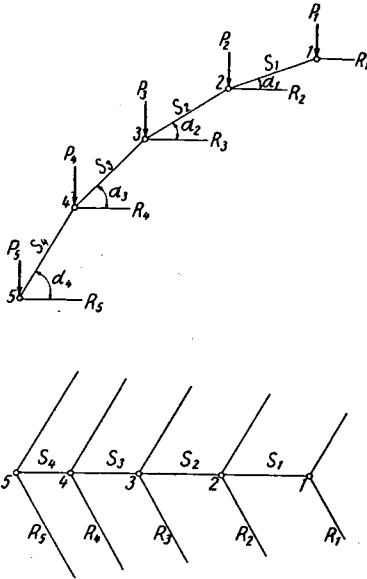


Abb. 1

Ringen und n Sparren dar. Die Knotenlasten sind mit P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5 bezeichnet. P_5 wird direkt auf die Auflager übertragen und fällt bei der Berechnung der Stabkräfte weg. P_1 enthält auch das Gewicht der Laterne. Die Sparrenkräfte werden mit S_1, S_2, S_3 und S_4 , die Ringkräfte mit R_1, R_2, R_3, R_4 und R_5 , die Diagonalkräfte mit D und die Neigungswinkel der Sparren in deren Ebene mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und α_4 bezeichnet. Die Diagonalen sind infolge der gleichmäßigen Belastung spannungslos. Die vertikale Komponente einer Sparrenkraft wird gleich dem Lastanteil des Spar-

renabschnittes oberhalb des betreffenden Knotens. Es gilt somit Gleichung (1)

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= S_1 \sin \alpha_1 \\ P_1 + P_2 &= S_2 \sin \alpha_2 \\ P_1 + P_2 + P_3 &= S_3 \sin \alpha_3 \\ P_1 + P_2 + P_3 + P_4 &= S_4 \sin \alpha_4 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die Stabkräfte der Ringe folgen aus der Gleichgewichtsbedingung der Horizontalkomponenten in den Knoten. Beim n -sparrigen System schließen zwei zusammenstoßende Ringstäbe Winkel ein vom Betrage $\frac{2\pi}{n}$. Es ergibt sich Gleichung (2).

$$\left. \begin{aligned} 2R_1 \cdot \sin \frac{\pi}{n} &= S_1 \cdot \cos \alpha_1 \\ 2R_2 \cdot \sin \frac{\pi}{n} &= S_1 \cdot \cos \alpha_1 - S_2 \cdot \cos \alpha_2 \\ 2R_3 \cdot \sin \frac{\pi}{n} &= S_2 \cdot \cos \alpha_2 - S_3 \cdot \cos \alpha_3 \\ 2R_4 \cdot \sin \frac{\pi}{n} &= S_3 \cdot \cos \alpha_3 - S_4 \cdot \cos \alpha_4 \\ 2R_5 \cdot \sin \frac{\pi}{n} &= S_4 \cdot \cos \alpha_4 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Schwedler hat nun diese Formeln für die geeignete Formgebung der Sparren verwendet. So findet er zum Beispiel aus der Bedingung gleicher Längskraft in allen Sparrenstäben die Neigung der einzelnen Stäbe zu $\sin \alpha_i = \frac{P_i}{S}$, wobei für alle Stäbe S einen konstanten Wert annimmt.

Für die größten Stabspannungen hat *Schwedler* folgende Belastungsregeln aufgestellt³⁾:

1. Die Sparren erhalten ihre maximalen Kräfte, wenn die ganze Kuppel vollständig belastet ist.

2. Der Ring erhält maximale Zug- oder minimale Druckkraft, wenn der innerhalb desselben befindliche Kuppelteil voll be-

³⁾ *Schwedler, W.*: Konstruktion der Kuppeldächer. Berlin 1877.

lastet, der Ring selbst und der äußere Kuppelteil nur durch Eigengewicht der Konstruktion und Dachhaut belastet werden.

3. Die Diagonalen zwischen zwei Sparren erhalten maximalen Zug, wenn die Halbkuppel auf der einen Seite des durch die Diagonalenmitte gehenden Meridianschnittes voll belastet ist, die andere Hälfte nur durch Eigengewicht von Konstruktion und Dachhaut.

Die Schwedlersche Berechnungsweise gibt keinen Aufschluß über die sehr ins Gewicht fallende Wirkung der Windkräfte. Die Diagonalenkräfte werden nach einem rohen Näherungsverfahren abgeschätzt, das unter allen Umständen zu große Werte liefert.

Schwedler hat seine Kuppeln nicht mit festen, sondern mit radial verschieblichen Auflagerpunkten versehen. Ein solches System mit einem polygonalen Grundriß ist stabil oder unstabil, je nachdem die Seitenzahl ungerade oder gerade ist. Bei der Ausbildung steifer Knoten verliert dieser Umstand aber seine praktische Bedeutung.

3. Berechnung der Kuppel für unsymmetrische Belastung

A. Föppl hat als erster für jede beliebige Knotenlast die Stabkräfte ermittelt⁴⁾. Er ist dabei ausgegangen von der Culmannschen Aufgabe im Raume⁵⁾: Zerlegung einer Kraft in drei nicht in einer Ebene liegende Richtungen, die sich mit der Kraft in einem Punkte treffen.

Wir ermitteln nach diesem Verfahren in Abb. 2 die Stabkräfte der im Knoten 1 zusammenstoßenden Stäbe S_{1-1} , D_{1-2} und R_{1-12} (den zweiten Ringstab denken wir uns durchschnitten) bei einer lotrechten Last P in diesem Knoten. Die Last P verläuft mit der Ringstabkraft in einer vertikalen Ebene; die Sparren- und die Diagonalenkräfte verlaufen in einer geneigten Ebene. Die Resultierenden dieser beiden in verschiedenen Ebenen verlaufenden Kraftgruppen müssen gemeinsame Wirkungslinie haben und dem Betrag nach entgegengesetzt gleich sein. Die gemeinsame Wir-

⁴⁾ *Föppl, A.*: Über das räumliche Fachwerk. Die Eisenbahn. Zürich 1881 und 1882.

⁵⁾ *Culmann*: Graphische Statik. Zürich 1866.

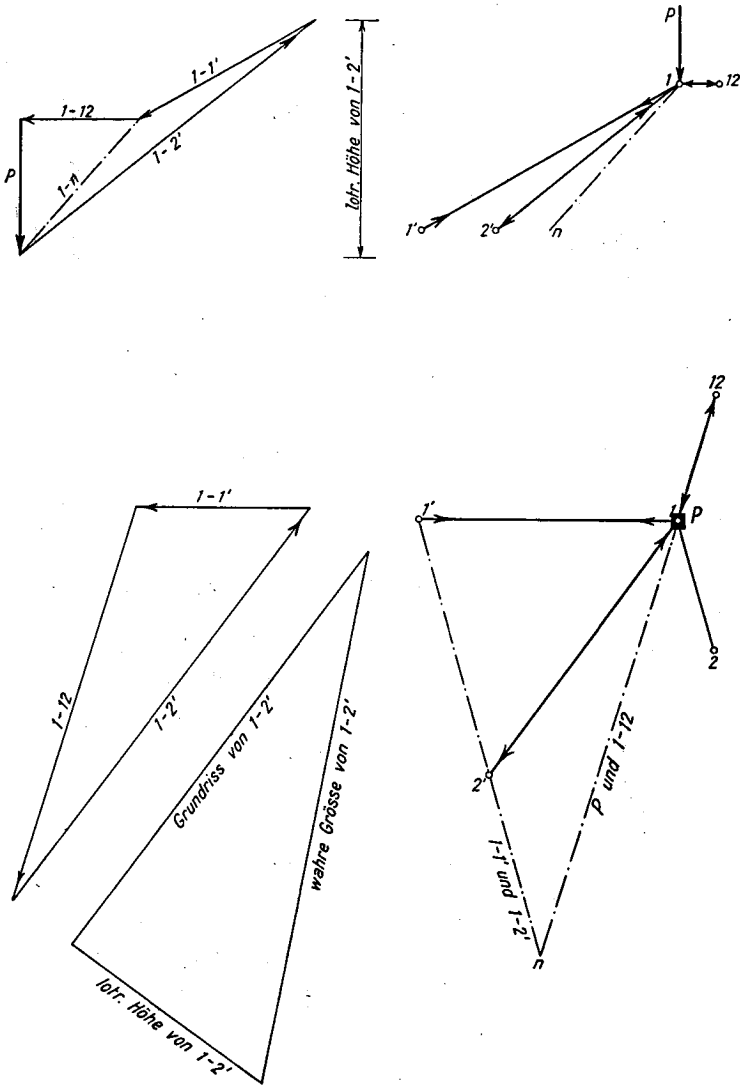


Abb. 2

kungslinie kann nur die Schnittgerade der beiden Ebenen sein. Sie ist gegeben durch den Punkt 1 und den Schnittpunkt der beiden Spuren n . Die Last P wird durch Konstruktion in Grund- und Aufriß in die Richtungen 1— n und 1—12 zerlegt. Die Teilresultierende in 1— n wird weiter zerlegt in die Stabkräfte $S_{1-1'}$ und $D_{1-2'}$. Die Bestimmung der wahren Kraftgrößen erfolgt durch Umlappung ihrer projizierenden Ebenen um ihren Grundriß (Abb. 2).

Die Ausschaltung der spannungslosen Stäbe der Kuppel und die Abgrenzung des Einflußgebietes einer einzelnen Knotenlast ist für die Vereinfachung der Berechnung von großer Bedeutung⁶⁾. Der Knotenpunkt 1 des Laternenringes sei unbelastet (Abb. 3). Von den vier hier zusammenstoßenden Stäben liegen drei (1—8, 1—8' und 1'1') in derselben Ebene. Der vierte Stab (1—2) muß spannungslos sein. Eine in ihm wirkende Stabkraft drei (1—8, 1—8' und 1—1') in derselben Ebene. Der vierte Stab kann durch die Resultierende der in einer andern Ebene verlaufenden drei übrigen Stabkräfte nicht ins Gleichgewicht gebracht werden. *Grinter*⁷⁾ formuliert diese Beziehung folgendermaßen: *Die zur Ebene der übrigen Stäbe normale Komponente der einzigen außerhalb der Ebene fallenden Stabkraft ist gleich der entsprechenden Komponente der im Knoten angreifenden äußeren Kräfte. Bei unbelasteten Knoten muß die außerhalb der Ebene verlaufende Stabkraft zu null werden.*

Es seien auch die übrigen Knotenpunkte des Laternenringes unbelastet. Dann sind sämtliche Ringstäbe spannungslos. Es verbleiben nun nur noch die beiden Stäbe 1—1' und 1—8'. Diese müssen nach den bekannten Regeln für das ebene Fachwerk ebenfalls gleich null sein. *Spofford*⁸⁾ bemerkt hiezu: *Wenn bei unbelasteten Knotenpunkten alle Stabkräfte außer zwei gleich null sind, so müssen es auch diese zwei sein, sofern sie nicht in derselben Geraden liegen.* Auf Grund dieser Betrachtungen kann

⁶⁾ *Föppl, A.*: Das Fachwerk im Raume. Leipzig 1892.

⁷⁾ *Grinter, L. E.*: Stresses in Space Structures: Proceedings of the American Society of Civil Engineers. 1934, S. 1086.

⁸⁾ *Spofford, C. M.*: Stresses in Space Structures: Proceedings of the American Society of Civil Engineers. 1934, S. 1091.

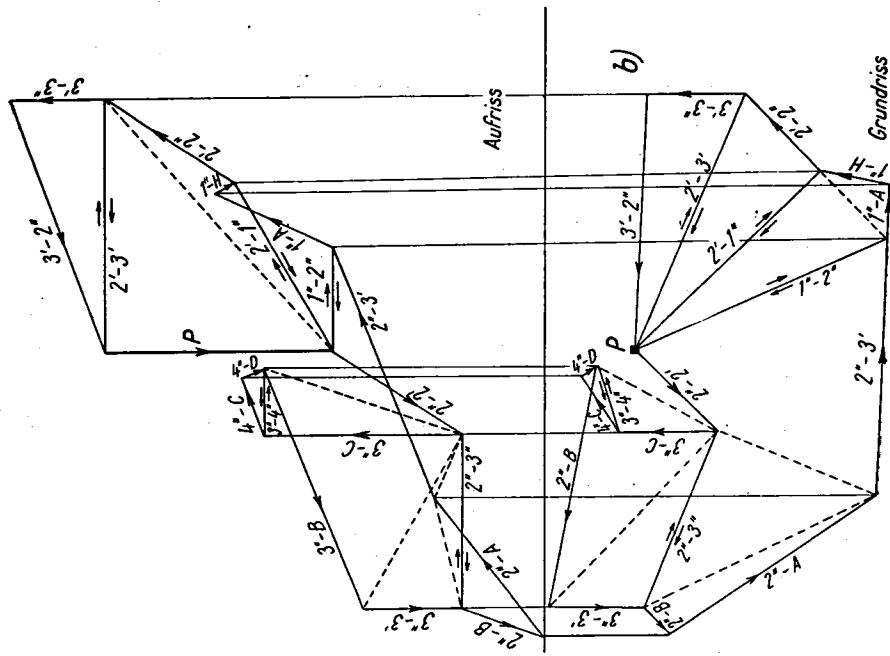
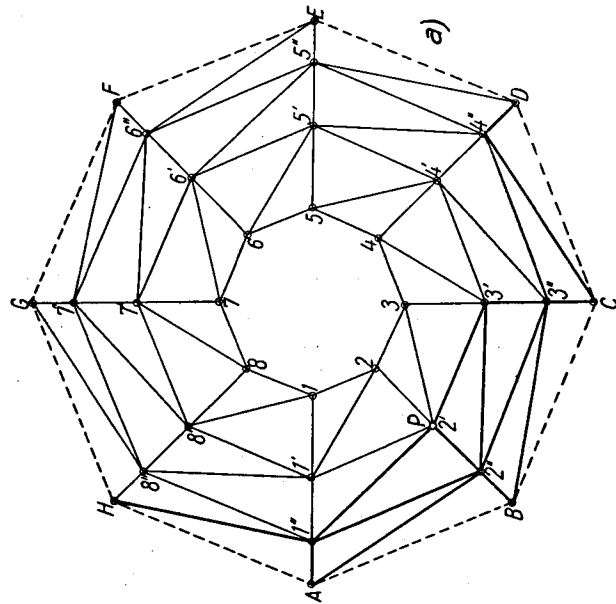
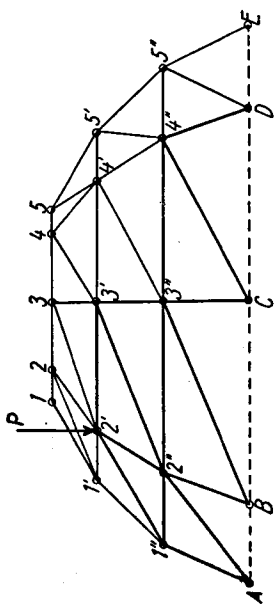


Abb. 3

man nun leicht einsehen, daß für den angenommenen Belastungsfall in Abbildung 3a nur die stark ausgezogenen Stäbe beansprucht werden. In Abb. 3b ist die zeichnerische Ermittlung dieser Kräfte in Grund- und Aufriß durchgeführt. Die im Knotenpunkt 2' angreifende lotrechte Last P wird zunächst mit den drei Stabkräften in 2'—3', 2'—2'' und 2'—1'' ins Gleichgewicht gesetzt. Diese Kräfte werden nun als auf die benachbarten Knoten wirkende äußere Lasten aufgefaßt. Man setzt die Rechnung fort an einem Knotenpunkt mit drei oder zwei unbekanntnen Stabkräften (Knoten 1'' oder 3') und erhält so schließlich den Kräfteplan der Abbildung 3b. Bei nicht lotrechten Lasten kann der Einfluß einer horizontalen Knotenkraft nach demselben Verfahren verfolgt werden.

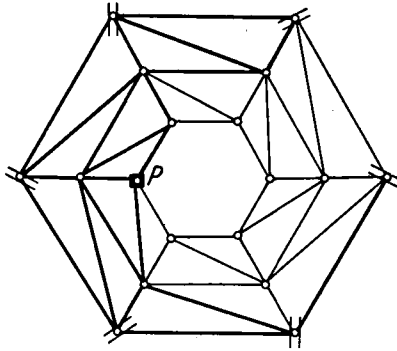


Abb. 4

Wir zeigen noch den Verlauf der Grenze zwischen beanspruchten und spannungslosen Stäben für den Fall einer Einzellast in einem Knoten des Laternenrings (Abb. 4). Nach der einen Seite verläuft sie den Diagonalen entlang, die von diesem Punkt ausgehen bis zum Fußring. Der Fußringstab in der Fortsetzung dieses Diagonalenzuges wird noch beansprucht. Nach der andern Seite erfaßt die Grenze zunächst den anstoßenden Ringstab, dann verläuft sie dem Sparren entlang bis zum nächst untern Ringknoten, führt dort wieder mit dem anstoßenden Ringstab vom Lastgebiet weg und erreicht so schließlich in einem treppenarti-

Schnittverfahren bei der Berechnung der ebenen Fachwerke erreicht wird. Schneidet man aus dem Raumbachwerk ein beliebiges Stück heraus, so muß dieses unter der Wirkung der äußeren Kräfte und der in den Schnitten als äußere Kräfte anzubringenden Stabkräfte im Gleichgewicht sein. Insbesondere muß die Momentensumme dieser Kräfte für eine beliebige Achse verschwinden. Wählt man nun die Momentenachse so, daß alle unbekanntes Stabkräfte mit Ausnahme der gerade gesuchten Stabkraft aus der Gleichung fortfallen, so erhält man eine lineare Bestimmungsgleichung für diese Stabkraft. Die Momentenachse hat *Landsberg* als die Gelenkachse bezeichnet. Bei n Auflager-Unbekanntes muß man neben den sechs Gleichgewichtsbedingungen für das ganze System durch Anordnung von Schnitten und Ermittlung der entsprechenden Gelenkachsen noch $(n-6)$ weitere Gleichungen aufsuchen.

Zur Bestimmung der zwölf Auflagerdrücke einer sechsseitigen Schwedlerkuppel (Abb. 5) müssen wir zu den sechs Gleichgewichtsbedingungen durch Aufsuchen von Gelenkachsen sechs weitere Gleichungen für die äußeren Kräfte finden. Die untersuchte Kuppel sei durch eine lotrechte Last P im Knotenpunkt 1 belastet. Bezeichnungen:

a = Länge des Fußringstabes

b = Länge des Laternenringstabes

h = Höhe der Pyramidenspitze O über der Auflagerebene.

$A^v, B^v, C^v \dots$ lotrechte Auflagerdrücke

$A^h, B^h, C^h \dots$ wagrechte Auflagerdrücke

ω = Zentriwinkel = Winkel zwischen zwei benachbarten Ringstäben

α = Neigungswinkel der Gelenkachse gegen die Auflagerebene.

Bei einem 6-stäbigen Ring ist $\omega = \frac{360}{6} = 60^\circ$.

Für die Bestimmung der 12 Auflagerdrücke stellen wir folgende Gleichungen auf:

1. Sechs Gleichgewichtsgleichungen:

a) Summe der lotrechten Kräfte gleich Null

$$A^v + B^v + C^v + \dots + F^v - P = 0 \quad (3)$$

- b) Summe der waagrechten Seitenkräfte nach zwei Richtungen je gleich Null

$$A^h + B^h - D^h - E^h = 0 \quad (4)$$

$$A^h \cdot \cos \omega + F^h + E^h \cdot \cos \omega - D^h \cos \omega - C^h - B^h \cdot \cos \omega = 0 \quad (5)$$

- c) Moment der Kräfte in bezug auf die waagrechte Achse MN in der Auflagerebene gleich Null

$$(A^v - D^v) \cdot a \left(\cos \omega + \frac{1}{2} \right) + (B^v - C^v) \cdot \frac{a}{2} + (F^v - E^v) \frac{a}{2} - P \cdot b \left(\cos \omega + \frac{1}{2} \right) = 0 \quad (6)$$

- d) Moment der Kräfte in bezug auf die waagrechte Achse AD in der Auflagerebene gleich Null

$$(B^v - F^v) a \cdot \sin \omega + (C^v - E^v) a \cdot \sin \omega = 0 \quad (7)$$

- e) Moment der Kräfte in bezug auf die lotrechte Achse durch die Spitze O gleich Null

$$A^h + B^h + C^h + D^h + E^h + F^h = 0 \quad (8)$$

2. Sechs Gelenkachsengleichungen:

Die lotrechte Ebene $K-L$ schneidet zwei Seitenebenen der Pyramide; die Schnittlinie beider ist die durch die Spitze der Pyramide gelegte waagrechte Linie $f-c$. Für diese Achse haben alle durchschnittenen Stäbe das Moment Null, also muß auch die Summe der Momente aller an der einen Seite der lotrechten Ebene $K-L$ am Fachwerk wirkenden äußeren Kräfte für diese Achse gleich Null sein. Ebenso gilt dies für die Gelenkachse $a-d$ und $e-b$. Für den Schnitt nach den beiden lotrechten Ebenen $K-O$ und $O-R$ ist die Linie $O-N$ die Gelenkachse. Ebenso sind $O-L$ und $O-P$ Gelenkachsen.

Für Gelenkachse $f-c$ wird:

$$(B^v - D^v) \cdot a \cos \frac{\omega}{2} - (C^h + B^h) \cdot h \cdot \cos \frac{\omega}{2} = 0 \quad (9)$$

Für Gelenkachse $a-d$

$$(C^v - E^v) \cdot a \cos \frac{\omega}{2} - (C^h + D^h) h \cdot \cos \frac{\omega}{2} = 0 \quad (10)$$

Für Gelenkachse $e-b$

$$(F^v - D^v) a \cos \frac{\omega}{2} + (E^h + D^h) h \cdot \cos \frac{\omega}{2} = 0 \quad (11)$$

Für Gelenkachse $O-N$

$$(B^v - C^v) \frac{a}{2} \cos \alpha - B^h \cdot a \cdot \cos \frac{\omega}{2} \cdot \sin \alpha = 0 \quad (12)$$

Für Gelenkachse $O-L$

$$(D^v - E^v) \frac{a}{2} \cos \alpha - D^h \cdot a \cdot \cos \frac{\omega}{2} \cdot \sin \alpha = 0 \quad (13)$$

Für Gelenkachse $O-P$

$$(F^v - A^v) \frac{a}{2} \cos \alpha + P \cdot \frac{b}{2} \cdot \cos \alpha - F^h \cdot a \cos \frac{\omega}{2} \cdot \sin \alpha = 0 \quad (14)$$

Aus den Gleichungen (3) bis (14) können die 12 unbekanntes Auflagerkräfte ermittelt werden.

Dieses Gelenkachsenverfahren kann auch für die Berechnung der Stabkräfte der Raumbachwerke mit Vorteil und in derselben Weise angewendet werden. Als Zahlenbeispiel hat *Landsberg* die Stabkräfte einer Schwedlerkuppel berechnet. Die Berechnung ist einfach und übersichtlich. Man lege einen Schnitt durch den gesuchten Stab, wähle die Drehachse und schreibe die Momentengleichung.

Satz nach *Landsberg* ⁹⁾: *Das Moment einer in beliebiger Richtung AB wirkenden Kraft K für eine Drehachse CD ist ebenso groß, wie das Moment einer in der Achse CD wirkenden gleich großen Kraft K für die Drehachse AB.*

Eine rein analytische, sowie eine rein graphische Berechnung der Stabkräfte des Raumbachwerkes ist zeitraubend und fehlerempfindlich. Mit der analytischen Berechnung muß man viele Gleichgewichtsgleichungen aufstellen und auflösen, und mit der graphischen wird man immer den Grundriß und Aufriß zeichnen und nachher die wahre Größe graphisch bestimmen müssen. Diese Schwierigkeiten hat z. B. *Mayor* ¹⁰⁾ durch sein im Jahre 1910

¹⁰⁾ *Mayor, B.*: Statique graphique des Systèmes de l'Espace. Lausanne et Paris 1910.

herausgebrachtes Konjugationsverfahren behoben. Dieses Verfahren wurde später von *R. v. Mises*¹¹⁾, *F. Constant*¹²⁾ und *F. Stüssi*¹³⁾ wieder aufgenommen und weiterentwickelt.

5. Berechnung der Stabkräfte nach dem Konjugationsverfahren

a) Allgemeines.

Mayor stellte sich als erster die Aufgabe, ein Abbildungsverfahren zu ersinnen, das den graphischen Methoden in der räumlichen Statik die Bedeutung gibt, die sie in der ebenen Statik besitzen.

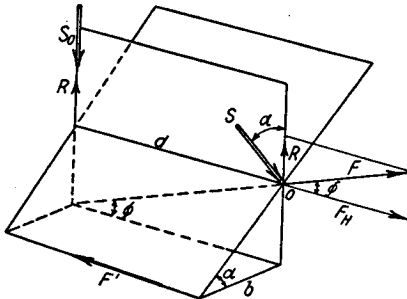


Abb. 6

Jedes räumliche Kräftesystem kann in irgend einem Punkt im Raum zu einer resultierenden Kraft R und einem Kräftepaar S reduziert werden. Kraft- und Kräftepaar-Vektor schließen einen Winkel miteinander ein. Der Vektor S steht senkrecht zur Kräftepaarebene.

Variiert man die Lage des Angriffspunktes o , so wird R konstant bleiben, während sich S nach Größe und Richtung ändert. Es gibt eine Lage des Angriffspunktes, wo beide Vektoren zu-

¹¹⁾ *v. Mises, R.*: Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme. Zeitschrift für Mathematik und Physik 1916, S. 209.

¹²⁾ *Constant, F.*: Stresses in Space Structures: Proceedings of the American Society of Civil Engineers. 1934 and 1935.

¹³⁾ *Stüssi, F.*: Vorlesungen über Baustatik an der Eidg. Technischen Hochschule in Zürich, 1938.

sammenfallen. Die gemeinsame Wirkungslinie wird als die Zentralachse des Kräftesystems bezeichnet.

Im Abstand d von der Zentralachse bleibt R parallel, während S in einer Ebene senkrecht zu d liegt und einen Winkel α mit R einschließt, der sich aus der Formel $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R \cdot d}{S_0}$ ergibt.

Für $d = 0$ (Zentralachse) wird $\alpha = 0$

Für $d = \infty$ wird $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Die Komponente des Kräftepaars S in der Richtung von R ist immer konstant und gleich S_0

$$S_0 = S \cos \alpha \quad (15)$$

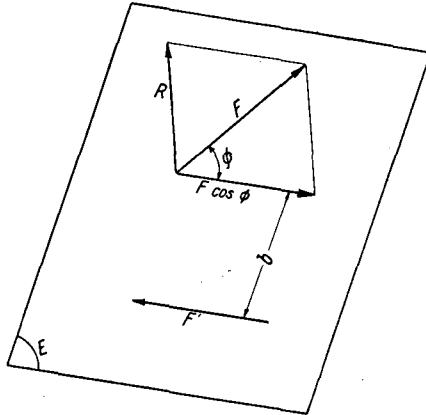


Abb. 7

Wir wählen nun eine Bezugsebene (z. B. die horizontale Grundrißebene). Für jede Kraft F des räumlichen Systems wird zunächst eine konjugierte Kraft F' in dieser Bezugsebene ermittelt, welche zusammen mit F eine lotrechte Kraft R und ein Kräftepaar S_0 bildet. R ist die zur Bezugsebene senkrechte Komponente der Kraft F .

$$R = F \cdot \sin \varphi \quad (16)$$

S_0 ist ein in der Bezugsebene liegendes Kräftepaar

$$S_0 = F' \cdot b \quad (17)$$

Die konjugierte Kraft F' wird entgegengesetzt gleich der horizontalen Komponente der Kraft F

$$F' = - F \cdot \cos \Phi \quad (18)$$

Das horizontale Kräftepaar S_0 wird durch Veränderung des Abstandes b so variiert, daß das Verhältnis $\frac{S_0}{R}$ eine Konstante bildet:

$$\frac{S_0}{R} = a \quad (19)$$

Aus (17), (18) und (19) folgt der Abstand b

$$\begin{aligned} a \cdot F \cdot \sin \Phi &= b \cdot F \cdot \cos \Phi \\ b &= a \cdot \operatorname{tg} \Phi \end{aligned} \quad (20)$$

Der Abstand b ist von der willkürlich angenommenen Konstanten a und von der Neigung Φ der Kraft F abhängig. Die größte Neigung ist dann für die Wahl von a maßgebend, um die Zeichnung in bequemem Maßstab durchführen zu können.

Die Größen S_0 und R sind für jedes System von Kräften verschieden. Für jede Kraft muß aber die Bedingung $\frac{S_0}{R} = a =$ konstant, erfüllt sein. Für Kräfte $F_1, F_2, F_3 \dots F_n$, die in einem Punkte 0 angreifen, kann man die Lage der Konjugationen $F'_1, F'_2, F'_3 \dots F'_n$ in der horizontalen Bezugsebene mittels Gleichung (20) bestimmen.

Sind die Kräfte $F_1, F_2, F_3 \dots F_n$ im Gleichgewicht, so wird die Summe der lotrechten Komponenten $R_1, R_2 \dots R_n$ gleich Null, d. h.

$$\Sigma R = \Sigma F \cdot \sin \Phi = 0 \quad (21)$$

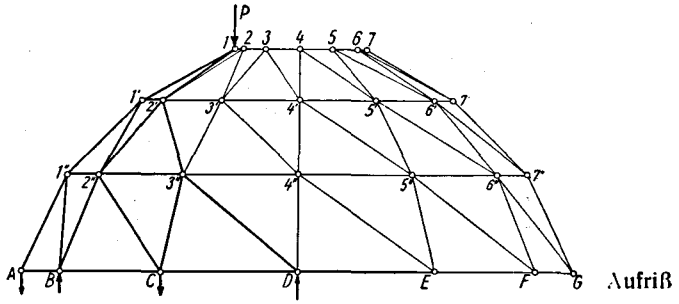
Auch wird die Summe der Kräftepaare in der Bezugsebene verschwinden, da keine Drehung mehr stattfindet.

$$\Sigma S_0 = \Sigma F' \cdot b = \Sigma F' \cdot a \operatorname{tg} \Phi = \Sigma R \cdot a = a \Sigma R = 0 \quad (22)$$

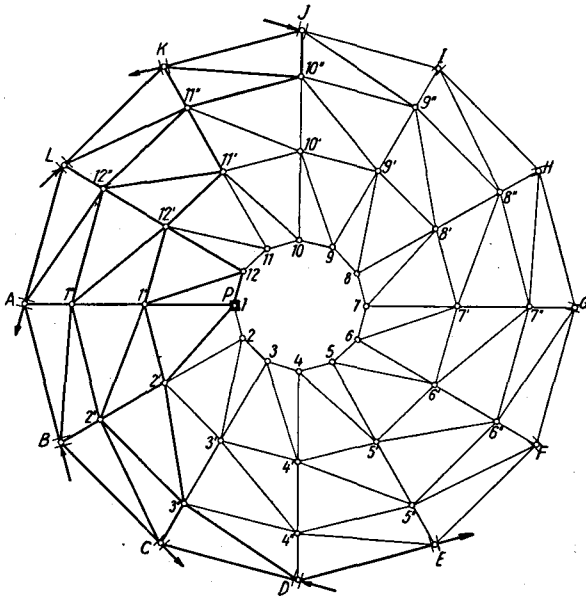
Die Konjugationen sind in diesem Fall wie ebene Kräfte im Gleichgewicht.

$$\Sigma F' = \Sigma F \cdot \cos \Phi \equiv 0 \quad (23)$$

Statt mit räumlichen Kräften F im Punkt 0 arbeiten wir mit ebenen Kräften F' , deren Größe durch $F \cdot \cos \Phi$, deren Richtun-



Aufriß



Grundriß

Abb. 8

gen durch die Projektion von F und deren Lage durch den Abstand $b = a \cdot \operatorname{tg} \Phi$ gegeben sind.

Sonderfälle:

$$1. \text{ Kraft } F \text{ horizontal, d. h. } \Phi = 0, \\ F' = -F \text{ und } b = a \cdot \operatorname{tg} \Phi = 0$$

$$2. \text{ Kraft } F \text{ lotrecht, d. h. } \Phi = \frac{\pi}{2},$$

$$F' = 0, \quad b = \infty, \quad R = F,$$

und

$$S_0 = R \cdot a = F \cdot a$$

b) Anwendung auf die Schwedlerkuppel.

Für eine lotrechte Einzellast P im Punkt 1 (Abb. 8) bestimmt man zuerst die Beanspruchungsgrenzen; dann wählt man die Größe a unter Berücksichtigung der maximalen Neigung und des Maßstabes. Aus Gleichung (20) findet man $b = a \cdot \operatorname{tg} \Phi$. Die Stabkraftermittlung wird im Knoten 1 begonnen. Hier liegen nur drei unbekannte Stabkräfte vor. Ihre Konjugationen werden im Grundriß in den aus Gleichung (20) folgenden Abständen gezeichnet (Abb. 9). Bei der horizontalen Stabkraft 1—12 fällt die Konjugation mit dem Grundriß zusammen ($\Phi = 0$).

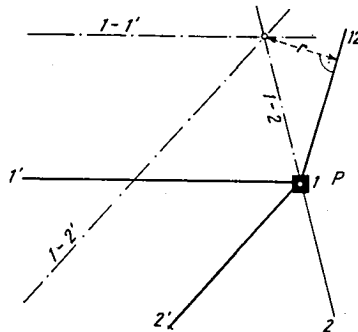


Abb. 9

Über die Seite des Stabgrundrisses, nach der man den Abstand b auftragen soll, gilt folgende Regel: Wenn man vom Knoten aus in Richtung der Kraft blickt, so liegt ihre Konjugation

rechts oder links vom Stabgrundriß je nachdem die Kraft nach unten oder nach oben geneigt ist. Die Konjugationen dreier sich in einem Punkte schneidender Kräfte derselben Ebene treffen sich ebenfalls in einem Punkt. Die lotrechte Last P reduziert sich auf ein Kräftepaar $S_o = P \cdot a$ in der Bezugsebene (Grundriß).

Wir formulieren das Gleichgewicht der Momente um den Schnittpunkt der Konjugationen der drei komplanaren Kräfte $S_{1-1'}$, $D_{1-2'}$ und R_{1-12} : $P \cdot a - R_{1-12} \cdot r = 0$. Darin bedeutet r den Abstand des Momentenbezugspunktes vom Grundriß und gleichzeitig der Konjugation der Stabkraft R_{1-12} . Wir erhalten die Stabkraft $R_{1-12} = P \cdot \frac{a}{r}$. Die Resultierende der Konjugationen $S_{1-1'}$ und $D_{1-2'}$, muß mit R_{1-12} ein Kräftepaar bilden vom Betrage $P \cdot a$. Wir zerlegen sie in die Richtungen 1—1' und 1—2' der Grundriß-

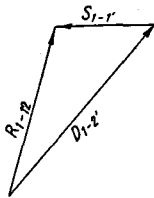


Abb. 10

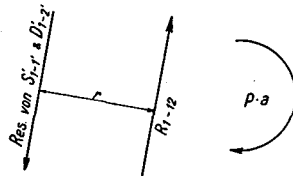


Abb. 11

ebene und erhalten die Grundrißkomponenten der Sparrenkraft $S'_{1-1'}$ und der Diagonalkraft $D'_{1-2'}$ (Abb. 10). Ihre wahren Beträge erhalten wir durch Division mit dem Kosinus des Stabneigungswinkels:

$$S_{1-1'} = S'_{1-1'} / \cos \Phi_S, \quad D_{1-2'} = D'_{1-2'} / \cos \Phi_D$$

Wir setzen die Vorzeichen der Stabkräfte folgendermaßen fest: Zug +, Druck —.

Bei nach unten wirkender Kraft P dreht ihr Konjugationsmoment $P \cdot a$ im Uhrzeigersinn. Das Kräftepaar aus R_{1-12} und der Resultierenden von $S'_{1-1'}$ und $D'_{1-2'}$, dreht dann entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn (Abb. 11).

Die Projektion der Kraft auf die Bezugsebene hat entgegengesetztes Vorzeichen wie ihre Konjugation.

Mit den im Knoten 1 bestimmten Stabkräften findet sich nun ein weiterer Knoten mit nur drei unbekanntnen Kräften (z. B. Knoten 2'). Wir fassen hier $D_{1-2'}$ als äußere Knotenlast auf und verfahren wie bei Knoten 1. Die Konjugation der Last verläuft hier im Endlichen; sie läßt sich aus der Rechnung am Knoten 1 übernehmen. Die Konjugationen der Stabkräfte $S_{2'-3''}$ und $D_{2'-3''}$ treffen sich im Punkt m und diejenige von $1-2'$ und $1'-2'$ im Punkt n (Abb. 12).

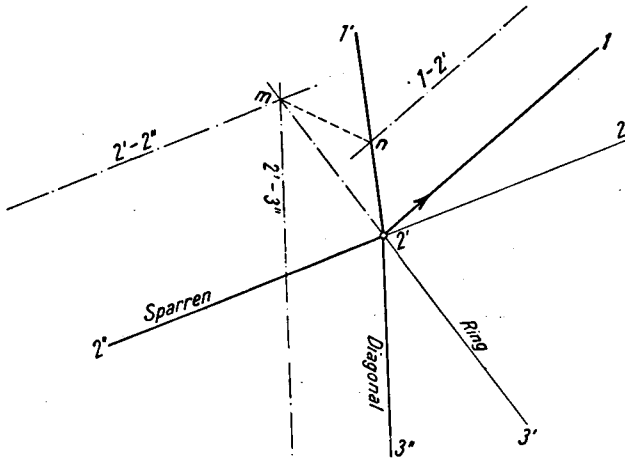


Abb. 12

Die Konjugation $D'_{1-2'}$ muß mit der Resultierenden von $D'_{2'-3''}$ und $S'_{2'-2''}$ und der Konjugation $R'_{1'-2'}$ im Gleichgewicht sein.

Damit sind die Konjugationen sämtlicher im Knoten 2' zusammentreffender Stabkräfte bekannt und es ergeben sich auch diese Kräfte aus Gleichung (23).

Man rechnet so weiter bis hinab zu den Auflagerpunkten. Hier ermittelt man die Auflagerreaktionen (lotrechte Komponente und horizontale Komponente in Ringrichtung).

Stoßen wir im Laufe der Rechnung auf einen Knoten mit mehr als vier unbekanntnen Stabkräften, so kommen wir mit den bisherigen Methoden der Stabkraftermittlung nicht mehr aus. Das System braucht deswegen noch nicht statisch unbestimmt zu sein.

$$\Delta = \begin{vmatrix} S'_1 & S'_2 & S'_3 & \dots & S'_n \\ S''_1 & S''_2 & S''_3 & \dots & S''_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S'''_1 & S'''_2 & S'''_3 & \dots & S'''_n \end{vmatrix} \leq 0 \quad (26)$$

Diese Determinante gibt zugleich Aufschluß über die Stabilität des Gelenkfachwerks. Ist nämlich $\Delta = 0$, so ist das Fachwerk verschieblich und als Gelenksystem unbrauchbar.

7. Zahlenbeispiel

a) Wahl der Kuppel.

Wir geben hier die ausführliche Berechnung einer zwölfseitigen symmetrischen Schwedlerkuppel (Abb. 8). Der Fußringdurchmesser beträgt 20 m, der Laternendurchmesser 6 m und die Höhe bei drei Stockwerken 7 m. Die Knotenpunkte liegen auf einer Kugelkalotte. Die Auflager sind als Linienlager mit Bewegungsmöglichkeit senkrecht zu den Ringstäben ausgebildet.

b) Anwendung des Konjugationsverfahrens.

Wir belasten den Knoten 1 mit je einer Einzellast $P = 1$ t in der Lotrechten, $W = 1$ t in der Horizontalen und in der Meridianebene und $H = 1$ t in der Horizontalen und senkrecht zur Meridianebene. Wir wählen die Konjugationskonstante $a = 4$ m.

Tafel der Richtungswerte und Konjugationsabstände b .

Stab	1-1'	1-2'	1'-1''	1'-2''	1''-A	1''-B
$\sin \phi$	0,445	0,375	0,707	0,478	0,895	0,522
$\cos \phi$	0,897	0,929	0,707	0,879	0,442	0,853
$\text{tg } \phi$	0,495	0,403	1,000	0,544	<u>2,026</u>	0,612
$b = a \cdot \text{tg } \phi$	1,980	1,612	4,000	2,176	<u>8,104</u>	2,448

Die nach Plan 1 ermittelten Stabkräfte sind auf Tafel I zusammengestellt.

c) Analytische Kontrolle der Stabkräfte für eine lotrechte Einzellast $P_1 = 1$ t.

Es gelangt das analytische Verfahren von *Föppl* zur Anwendung. Die Kontrolle wird auf Tafel I durchgeführt für die drei Knotenpunkte 1, 12 und 2', indem hier die Gleichgewichtsbedin-

gungen nach den drei zueinander senkrechten Richtungen x , y und z erfüllt werden.

d) Belastungsannahmen.

An Lasten sind zu berücksichtigen

1. das Eigengewicht der Stahlkonstruktion
2. das Gewicht der Dachhaut
3. die Schneelast
4. die Windkräfte.

Das Eigengewicht wird näherungsweise nach der Formel von *Bleich*¹⁶⁾ berechnet: $g = (0,35 \cdot D + 20) \text{ kg/m}^2$, gleichmäßig verteilt über die Dachoberfläche. Für den Kuppeldurchmesser von $D = 20 \text{ m}$ erhalten wir $g = 27,0 \text{ kg/m}^2$. Zur Berechnung der Knotenlasten wird die Dachfläche nach Abbildung 13 aufgeteilt. Wir

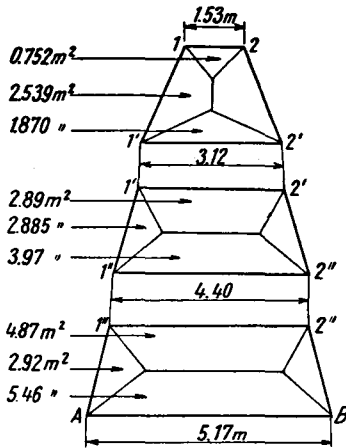


Abb. 13

erhalten damit für die Knotenpunkte 1 bis 12 folgende Lasten aus dem Eigengewicht: $P_g = 0,027 (0,752 + 2,539) = 0,089 \text{ t}$. Entsprechend wirkt in den Knoten 1' bis 12'

$P_g = 0,027 (1,87 + 2,89 + 2,885 + 2,539) = 0,275 \text{ t}$
in den Knoten 1'' bis 12''

$P_g = 0,027 (2,885 + 3,94 + 4,87 + 2,92) = 0,395 \text{ t}$

¹⁶⁾ *Bleich, F.*: Stahlhochbauten. Bd. II. Berlin 1933.

und schließlich in den Knoten A bis L

$$P_g = 0,027 (2,92 + 5,46) = 0,226 \text{ t}$$

Die Dachhaut aus Bimsbeton mit Kupferblechabdeckung wiegt 160 kg/m^2 . Nach demselben Vorgehen wie zuvor erhalten wir daraus folgende Knotenlasten:

In den Knotenpunkten 1 bis 12	$P_d = 0,53 \text{ t}$
" " " 1' " 12'	$P_d = 1,63 \text{ t}$
" " " 1'' " 12''	$P_d = 2,34 \text{ t}$
" " " A " L	$P_d = 1,34 \text{ t}$

Für die Knotenpunkte 1 bis 12 kommen noch zusätzliche Lasten aus der Laterne von je $P_L = 0,073 \text{ t}$ hinzu. Dabei sind inbegriffen die Wirkung des Eigengewichts, der Dachhaut und auch des Schnees.

Die Schneelasten werden nach den schweizerischen Normen¹⁷⁾ in Rechnung gesetzt. Diese Last wird über den überdachten Grundriß gleichmäßig verteilt angenommen: $p_s = 0,25 \cdot h$. Für h ist die Höhe der Baustelle in Metern über Meer einzusetzen. Für $h = 400 \text{ m}$ erhalten wir $p = 100 \text{ kg/m}^2$. Für Dächer mit einer Neigung bis zu 45° darf dieser Wert mit dem Kosinus der Dachneigung reduziert werden. Für Neigungen über 45° ist überhaupt keine Schneelast mehr zu berücksichtigen. Bei zweiseitiger Dachneigung ist die eine Hälfte voll, die andere zur Hälfte belastet anzunehmen. Da die Neigung des mittleren und des unteren Stockwerkes größer als 45° ist, haben wir für die Knoten A bis L und 1'' bis 12'' keine Schneelastanteile. Im oberen Stockwerk mit einer Dachneigung von $27^\circ 15'$ ergibt sich für Vollast $p_s' = 100 \cdot 0,889 = 88,9 \text{ kg/m}^2$ und für Halblast $\frac{1}{2} p_s' = 44,45 \text{ kg/m}^2$. Vollast liegt vor im Bereich der Knoten 3 bis 11 und Halblast in den Knoten 5 bis 9. Für die Knoten 4 und 10 ist zur Hälfte Vollast, zur Hälfte Halblast einzusetzen (Abb. 8).

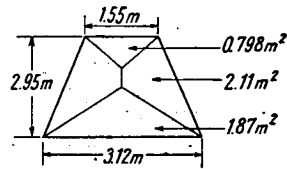


Abb. 14

¹⁷⁾ Schweiz. Ing.- und Architektenverein, Normen für die Berechnung, die Ausführung und den Unterhalt der Bauten aus Stahl etc. 1935.

Als Anteil des oberen Stockwerkes erhalten wir mit der Aufteilung der Grundrißfläche nach Abb. 14 folgende Knotenlasten:

In den Knotenpunkten 3 bis 11:	$P_S = 0,0889 (0,798 + 2,11) = 0,26 \text{ t}$
" " " 3' " 11'	$P_S = 0,0889 (2,11 + 1,87) = 0,354 \text{ t}$
" " " 5 " 9	$P_S = \frac{1}{2} \cdot 0,26 = 0,13 \text{ t}$
" " " 5' " 9'	$P_S = \frac{1}{2} \cdot 0,354 = 0,177 \text{ t}$
" " " 4 und 10	$P_S = 0,13 + 0,065 = 0,195 \text{ t}$
" " " 4' " 10'	$P_S = 0,177 + 0,088 = 0,265 \text{ t}$

Damit wurden die Stabkräfte der Kuppel das einemal für volle Schneebelastung, das andere Mal für unsymmetrische Belastung nach obiger Verteilung bestimmt.

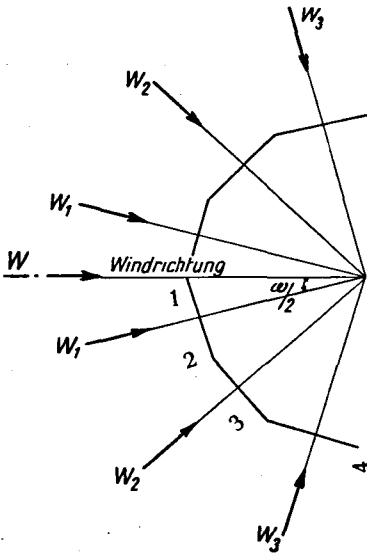


Abb. 15

Die Windkräfte werden bestimmt für horizontal anströmenden Wind. Windrichtung in einer meridianen Sparrenebene ergibt hier nach *Bleich*¹⁶ den ungünstigsten Fall.

Nach den schweizerischen Normen ist auf den Quadratmeter der angeströmten Wand ein Druck von $p_w = c \cdot q$ senkrecht wirkend anzunehmen. q ist der Staudruck des senkrecht auftreffenden Windes. Für unser Beispiel rechnen wir mit $q = 250 \text{ kg/cm}^2$, um den Einfluß des Winddruckes auf

das Kräftespiel der Kuppel deutlicher hervorzuheben als dies mit den kleinen Kräften infolge eines den Normen entsprechenden Winddruckes der Fall gewesen wäre. Der Beiwert c berücksichtigt den Einfluß der Dachneigung. In Anpassung an Windkanalversuche wird dafür angesetzt: $c = 1,2 \sin \alpha_0 - 0,4$ für die dem Wind zugekehrten Flächen. Für die dem Wind abgekehrten

Flächen wird ein konstanter Sog von $p = -0,4 \cdot q = -100 \text{ kg/m}^2$ angenommen. Mit den Dachneigungen des oberen, mittleren und unteren Stockwerkes von $\alpha_o = 27^\circ 15'$, $\alpha_m = 45^\circ 50'$ und $\alpha_u = 64^\circ 40'$ ergeben sich für in ihrer Normalebene anströmenden Wind die Beiwerte $c_o = 0,15$, $c_m = 0,46$ und $c_u = 0,683$ und die Winddrücke $W_o = 37,5 \text{ kg/m}^2$, $W_m = 115 \text{ kg/m}^2$ und $W_u = 170,7 \text{ kg/m}^2$. Für in der Meridianebene von Knoten 1 einströmenden Wind sind von diesen für die Flächennormalen gültigen Werte die Komponenten nach jenem Meridian zu nehmen. Mit den Bezeichnungen der Abb. 15 erhält man beispielsweise für die Flächen zwischen den Meridianen 2 und 3 folgende endgültige Winddrücke

$$p_{W_{2o}} = W_o \cdot \cos \frac{3\omega}{2} = 0,70711 \cdot 37,5 = 26,5 \text{ kg/m}^2$$

$$p_{W_{2m}} = W_m \cdot \cos \frac{3\omega}{2} = 0,70711 \cdot 115 = 81,3 \text{ „}$$

$$p_{W_{2u}} = W_u \cdot \cos \frac{3\omega}{2} = 0,70711 \cdot 170,7 = 120,7 \text{ „}$$

Auf der dem Wind abgekehrten Seite erhalten sämtliche Flächen zwischen den Meridianen 4 und 10 gleichen Sog von $p = -100 \text{ kg/m}^2$.

Damit erhalten wir nun die Knotenkräfte aus Windwirkung in vertikaler und horizontaler Richtung. Aus der oberen Dachfläche zwischen den Meridianen 1 und 2 erhalten wir gemäß der Aufteilung auf Abb. 13 beispielsweise folgende Anteile der Kräfte in den Knoten 1 und 2:

$$W^v = 36,2 \frac{(0,752 + 2,539)}{2} \cdot 0,889 = 52,8 \text{ kg} \downarrow$$

$$W^h = 36,2 \frac{(0,752 + 2,539)}{2} \cdot 0,458 = 27,3 \text{ kg} \downarrow$$

und aus der anschließenden Fläche zwischen den Meridianen 2 und 3 erhalten wir für die Knoten 2 und 3 folgende Anteile:

$$W^v = 26,5 \frac{3,291}{2} \cdot 0,889 = 38,75 \text{ kg} \downarrow$$

$$W^h = 26,5 \frac{3,291}{2} \cdot 0,458 = 19,95 \text{ kg} \downarrow$$

Durch Superposition der Anteile zweier anschließenden Flächen erhält man die endgültigen Knotenkräfte, z. B.

$$\begin{aligned} P_1 &= 2 \cdot W_1^v = 105,6 \text{ kg}, & P_2 &= W_1^v + W_2^v = 91,55 \text{ kg} \\ H_1 &= 2 \cdot W_1^h = 54,6 \text{ kg}, & H_2 &= W_1^h + W_2^h = 47,25 \text{ kg} \end{aligned}$$

e) Dimensionierung und Spannungsnachweis.

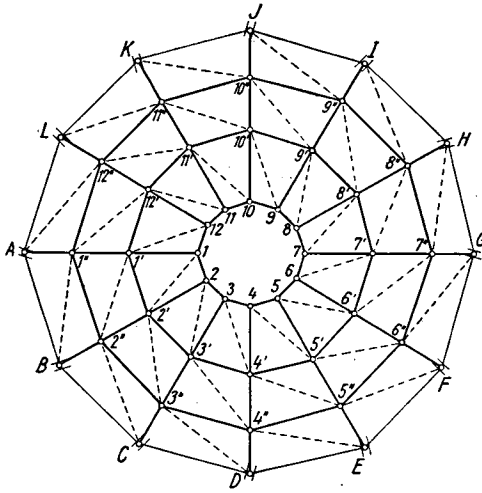
Die Dimensionierung der Kuppel geschieht auf Grund der am gelenkigen System ermittelten Stabkräfte. Die Stabverbindungen werden aber mittels Knotenblechen und Niete biegeungssteif durchgeführt. Dadurch wird, wie aus den folgenden Abschnitten hervorgeht, die Tragfähigkeit der Kuppel um ein Vielfaches erhöht. Durch Berücksichtigung der steifen Knoten in der Berechnung können wesentliche Materialersparnisse erzielt werden. Die Dimensionierung wird auf Tafel III am Beispiel eines Sparren und eines Ringstabes ausführlich gezeigt. Sämtliche Stabquerschnitte werden schließlich noch im Vergleich mit den Modellprofilen auf Tafel III zusammengestellt.

f) Spannungen infolge Eigengewicht der Konstruktion und der Dachhaut.

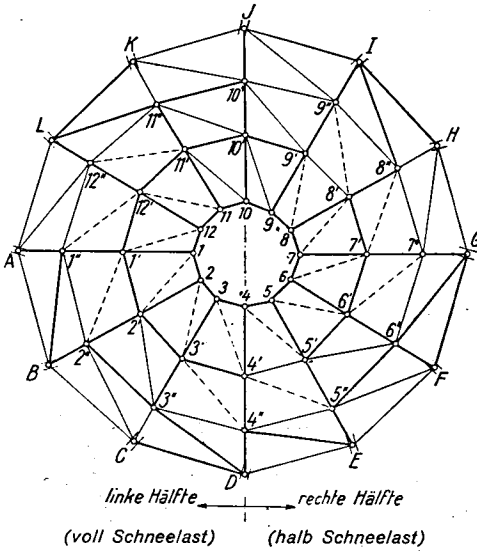
Die Sparren und die drei oberen Ringe werden auf Druck beansprucht, die Fußringstäbe erfahren gleiche Zugkräfte, während die Diagonalen spannungslos bleiben. In den Sparren nehmen die Stabkräfte nach unten stark zu (Abb. 16).

g) Spannungen infolge unsymmetrischer Schneebelastung (nach Seite 35).

Es zeigt sich ein unregelmäßiger Wechsel in der Größe und im Vorzeichen der Stabkräfte. Der Vergleich mit der Rechnung für Vollast ergibt, daß zufolge der Unsymmetrie trotz geringerer Gesamtlast einige Stäbe größere Spannungen erfahren als bei der vollen, im gesamten größeren Auflast. Es werden vor allem die Diagonalen wesentlich beansprucht (Abb. 17).



— Druckstäbe — Zugstäbe - - - - - Spannungslose Stäbe
Abb. 16



— Druckstäbe — Zugstäbe - - - - - Spannungslose Stäbe
 linke Hälfte rechte Hälfte
 (voll Schneelast) (halb Schneelast)
Abb. 17

h) Spannungen aus Windkräften.

Die dem in Richtung $A-G$ wirkenden Wind zugekehrten Flächen erfahren mehrheitlich einen Druck, der vom Auffallwinkel des Windes abhängig ist. Die dem Wind abgekehrten Flächen erfahren im Totluftgebiet einen im Mittel gleichmäßigen Sog.

Es zeigen sich größere Stabkräfte als aus der Wirkung des Eigengewichtes unter f). Die drei Sparren der Luvseite L, A und B werden durchwegs auf Druck, die gegenüberliegenden Sparren F, G und H der Leeseite auf Zug beansprucht. Die Sparren- und Diagonalkräfte sind stark abhängig von der Windrichtung (Abb. 18).

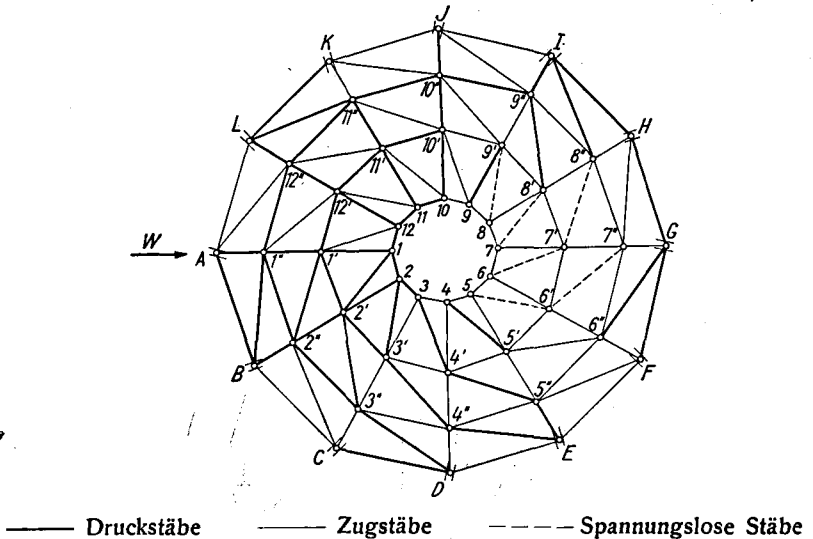


Abb. 18

8. Zusammenfassung

Über die Zweckmäßigkeit der besprochenen Verfahren zur Stabkraftermittlung bei gelenkigen Fachwerkkuppeln kommen wir zu folgenden Schlüssen.

Die graphische Ermittlung der Stabkräfte nach *A. Föppl* ist zufolge der Konstruktion in Grund- und Aufriß ziemlich um-

ständig. Sie wird bei großer Stabzahl leicht unübersichtlich. Die Genauigkeit kann aber dank der vielen, während des Zeichnens sich bietenden Kontrollmöglichkeiten ebenso hoch werden wie bei Kraftplänen ebener Fachwerke.

Die Momentenmethode nach *Landsberg* erlaubt einzelne Stabkräfte sehr rasch zu bestimmen, indem in den betreffenden Gleichungen neben der gesuchten Stabkraft nur die äußeren Kräfte auftreten. Diese Methode eignet sich vor allem zur analytischen Kontrolle der graphischen Verfahren.

Das Konjugationsverfahren nach *B. Mayor* hat sich in meinen Untersuchungen als das übersichtlichste und am wenigsten fehlerempfindliche herausgestellt.

Als Zahlenbeispiel wurde eine zwölfseitige, dreistöckige Schwedlerkuppel für eine lotrechte Einzellast im Laternenknoten 1 durchgerechnet. Es zeigt sich starkes Anwachsen der Sparrenkräfte nach dem Auflager hin. Dasselbe gilt auch für die Ring- und Diagonalstäbe in der unmittelbaren Zone unter dem Lastpunkt. In jedem Stockwerk wird eine gerade Anzahl von Diagonalstäben beansprucht. Die zur Last-Meridianebene symmetrischen Diagonalen erfahren entgegengesetzt gleiche Stabkräfte. Daraus geht hervor, daß die Diagonalen bei gleichmäßig verteilter Last spannungslos werden müssen.

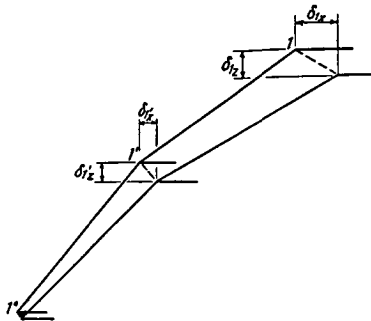


Abb. 19

Die Gelenkkuppel zeigt große, unregelmäßige Verschiebungen der Knotenpunkte. Für $P_1 = +1$ t ergaben sich folgende lotrechten und radialen Verschiebungen (siehe Tafel I):

im Knoten 1: $\delta_{1_z} = + 94,39$ cm, $\delta_{1_x} = + 56,82$ cm

„ „ 2: $\delta_{2_z} = - 76,52$ „ , $\delta_{2_x} = - 44,94$ „

„ „ 1': $\delta_{1'_z} = + 9,63$ „ , $\delta_{1'_x} = + 12,06$ „

Das + Vorzeichen gilt für abwärts und nach innen berechnete Verschiebungen.

II. Berechnung der Schwedlerkuppel mit biegungssteifen Sparren und gelenkig angeschlossenen Ringen und Streben

1. Allgemeines

Das Raumbachwerk erfährt unter der Wirkung einer Last Verschiebungen der Knotenpunkte. Unter der Voraussetzung reibungsloser Gelenke in diesen Knoten bleiben die Stäbe gerade. Sie ändern nur ihre Lage (Verschiebung und Verdrehung als starrer Körper) und ihre Länge. Die Winkel zwischen den einzelnen Stäben werden variieren. Bei der Ausbildung gelenkloser steifer Knoten bleiben die Winkel zwischen den Stabendtangente an jedem Knoten unverändert. Die Stäbe werden verbogen. Sie erfahren neben den Normalkräften auch noch Biegemomente. Die Normalkräfte sind nicht mehr dieselben wie beim gelenkigen System.

Wir betrachten vorerst nur die Verbindungen zwischen den Sparrenstäben als biegungssteif. An den Ringstab- und Diagonalanschlüssen denken wir uns auch weiterhin reibungslose Gelenkverbindungen mit je drei Freiheitsgraden der Drehbarkeit (Kugelgelenke).

2. Frühere Verfahren

a) Die Berechnung einer regelmäßigen Schwedlerkuppel für gleichmäßig verteilte volle Belastung nach *Hacker*.

*Hacker*¹⁸⁾ rechnet mit steifen Anschlüssen sämtlicher Stäbe, untersucht aber nur den einfachen Fall der gleichmäßigen lotrechten Belastung. In Abb. 20 seien die Sparrenstäbe $q-n$ und $n-p$ mit dem Ringstab $o-n$ steif verbunden. Die Hauptachsen

¹⁸⁾ *Hacker*: Über Biegungsspannungen in Schwedlerschen Kuppeln. Zeitschrift des Ingenieur-Vereins Hannover 1888.

der Sparrenquerschnitte verlaufen in der lotrechten Meridianebene und senkrecht zu ihr (Achsen $y-y$, resp. $x-x$). Für gleichmäßige lotrechte Belastung entstehen in den Sparrenstäben nur Biegemomente um die Achse $x-x$: M_x . Von den Biegemomenten M_{1x} an den Ringstabanschlüssen bilden wir die Komponenten um eine zur Meridianebene senkrechte Achse: $M_{1x} \cdot \cos \frac{\omega}{2}$.

M_{1x} ist das Ringstabmoment um eine horizontale Ring-Querschnittachse, ω ist der Winkel zwischen zwei benachbarten Ringstäben.

Das Momentengleichgewicht im Knoten n um die Achse senkrecht der Meridianebene ergibt folgende Beziehung zwischen den drei unbekanntem Stabanschlußmomenten:

$$M_x = M_{2x} + 2M_{1x} \cos \frac{\omega}{2} \quad (27)$$

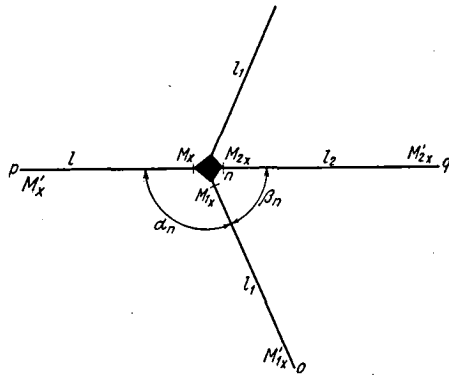


Abb. 20

Die am Gelenksystem angebrachten Stabanschlußmomente bewirken durch Stabbiegung folgende Winkeländerungen:

$$\begin{aligned} \Delta \alpha_n &= -\frac{1}{6E} \left[(2M_x + M'_x) \frac{l \cdot \cos \Phi}{J_x} + 3M_{1x} \cdot \frac{l_1 \cos \Phi_1}{J_{1x}} \right] \\ \Delta \beta_n &= -\frac{1}{6E} \left[(2M_{2x} + M'_{2x}) \frac{l_2 \cos \Phi'}{J_{2x}} - 3M_{1x} \cdot \frac{l_1 \cos \Phi'_1}{J_{1x}} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

Darin bedeuten: α_n , β_n die Winkel zwischen den Stäben $n-p$, $o-n$, resp. $n-q$, $o-n$,

Φ und Φ' die Neigungswinkel der Momentenquerschnittachse der Sparrenstäbe von der Ebene der Winkel α und β und

Φ_1 und Φ_1' die Neigungswinkel der Momentenquerschnittachse der Ringstäbe von der Ebene der Winkel α und β .

Diese Winkeländerungen werden nun denen aus äußerer Belastung entgegengesetzt. Nach Abb. 21 erhalten wir dafür folgende Werte:

$$\Delta\alpha = \Delta\delta = \frac{l(\Delta l_3 - \Delta l_1) - (l_3 - l_1)\Delta l}{2 \cos \delta \cdot l^3} \quad (29)$$

darin ist $\delta = \alpha - 90^\circ$, $\Delta\delta = \Delta\alpha$

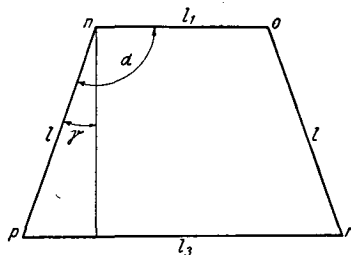


Abb. 21

$$\sin \delta = \frac{l_3 - l_1}{2l}, \quad \Delta \sin \delta = \cos \delta \cdot \Delta \delta, \quad \Delta \delta = \frac{\Delta \sin \delta}{\cos \delta},$$

$$\Delta l = \frac{S \cdot l}{E \cdot F}$$

Eine analoge Gleichung kann für $\Delta\beta$ angeschrieben werden. Damit stehen zur Ermittlung der Anschlußmomente in jedem Knoten eine hinreichende Zahl von Bestimmungsgleichungen zur Verfügung [Gl. (27), (28) und (29)].

Hacker fand bei der Anwendung dieses Verfahrens Mehrbeanspruchungen der Sparrenstäbe gegenüber der Rechnung nach Schwedler von stellenweise 30 %.

b) Untersuchung der Rippenkuppel von H. Marcus¹⁹⁾.

Marcus geht von folgenden Voraussetzungen aus:

¹⁹⁾ Marcus, H.: Beitrag zur Theorie der Rippenkuppel. Der Eisenbau 1912, S. 387.

α) Die Kuppel besitzt zwei orthogonale Symmetrieebenen (Hauptebenen).

β) Die Belastung sei in bezug auf eine der beiden Hauptebenen symmetrisch.

Die Rippen in der Belastungs-Symmetrieebene werden als Hauptrippen, die übrigen als Nebenrippen bezeichnet.

γ) Die Kuppel hat einen starren Schlußring. Unter diesen Voraussetzungen ist das Hauptsystem mit einem Zweigelenkbogen vergleichbar.

c) Berechnung der Kuppelrippen als Zweigelenk- oder teilweise eingespannter Bogen nach *Pichl*.

Pichl untersucht geschlossene Rippenkuppeln²⁰⁾. Er betrachtet jede belastete Rippe für sich und bezeichnet sie als Hauptrippe, die übrigen als Nebenrippen. Er nimmt für alle Rippen gelenkige Lagerung am Fußring an. Die Halbrippen werden als an einem Kämpfer gelenkig gelagerte, am andern elastisch eingespannte Bogen betrachtet (Abb. 22). Zur Ermittlung des Einspannmomentes im Kuppelscheitel wird dort ein Gelenk eingeschaltet. Das Kämpfermoment wird dann als unbekannte äußere Last in Rechnung gesetzt. Das Grundsystem ist ein Zweigelenkbogen, der für diesen Sonderfall von *Pichl* ebenfalls näher untersucht wurde²¹⁾.

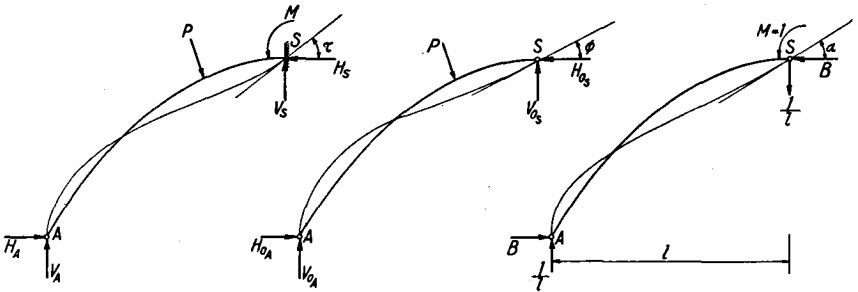


Abb. 22

²⁰⁾ *Pichl, E.:* Zur Theorie unversteifter Rippenkuppeln. Der Bauingenieur 1920.

²¹⁾ *Pichl, E.:* Der durchgehende gelenklose Bogen auf elastischen Stützen. Stuttgart 1919.

Die Pichlsche Rechnung führt auf gute Resultate, wenn der obere Ring große Steifigkeit aufweist. Er zieht aber die Steifigkeit der benachbarten Rippen, der sog. Nebenrippen, sowie die steifen Zwischenringanschlüsse bei der Berechnung der Hauptrippen nicht in Betracht.

*E. Höber*²²⁾ untersucht auf derselben Grundlage wie *Pichl* flache Rippenkuppeln. Er berücksichtigt nur lotrechte Lasten in der Rippenebene.

d) Behandlung der zyklisch symmetrischen räumlichen Fachwerke mit biegungssteifen Ringen und Meridianen nach *W. Kaufmann*.

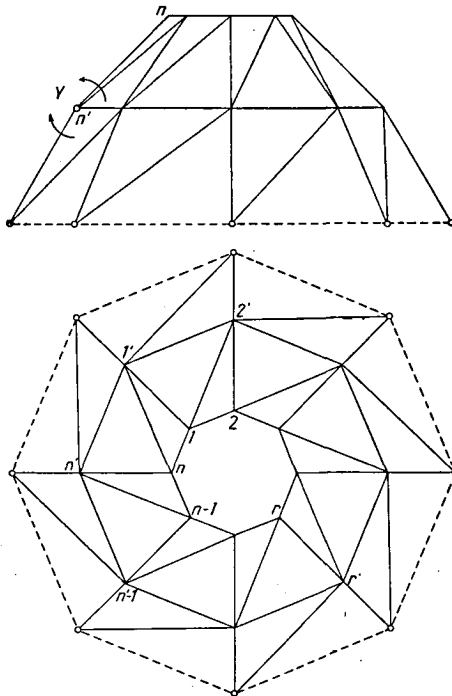


Abb. 23

²²⁾ Höber, E.: Rippenkuppeln aus Stahl. Der Stahlbau 1928, S. 102.

Kaufmann zerlegt das Problem in zwei unabhängige Teilaufgaben²³⁾:

α) Berechnung der Kuppel mit in seiner Ebene biegungssteifem Schlußring.

β) Berechnung der Kuppel mit in den Meridianebenen biegungssteifen durchlaufenden Sparren.

Er behandelt eine zweistöckige Schwedlerkuppel (Abb. 23). Als statisch Unbestimmte werden die Sparrenauflagermomente Y am mittleren Ring eingeführt. Unter Verwendung der Eigenschaften zyklisch symmetrischer Systeme²⁴⁾ erfolgt die Berechnung der Unbekannten Y mittels einer zyklischen Determinante n^{ter} Ordnung, wobei n die Ringseitenzahl bedeutet.

3. Berechnung der Schwedlerkuppel mit biegungssteifen Sparren für eine Einzellast

a) Allgemeine Elastizitätsgleichungen.

Die Sparren werden als durchlaufende Balken auf elastisch senkbaren Stützen betrachtet. Die Ringe und Diagonalen werden als gelenkig angeschlossen vorausgesetzt.

Die Sparren werden (von oben gesehen) entgegen dem Uhrzeigersinn mit $1, 2, \dots, i \dots, n$, die Ringe von oben nach unten mit $1, 1', 1'', \dots, 1', \dots, 1^{(m+1)}$ und $2, 2', 2'' \dots, 2', \dots, 2^{(m+1)}$ bis $n, n', n'' \dots, n' \dots, n^{(m+1)}$ bezeichnet (Abb. 24).

Die Einzelknotenlast wird nach der lotrechten Achse $z (P_z)$ der wagrechten Radialachse $x (P_x)$ und der wagrechten Tangentialachse $y (P_y)$ zerlegt. Die Berechnung wird für jede Komponente einzeln durchgeführt.

Als Hauptsystem betrachtet man die Kuppel mit gelenkigen Knoten. Für die Sparren-Biegungsmomente X_i lauten die Elastizitätsgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} X_{1'} a_{1'1'} + X_{1''} a_{1'1''} + \dots + X_1^m \cdot a_{1'1}^m \\ + X_{2'} \cdot a_{1'2'} + X_{2''} a_{1'2''} + \dots + X_2^m a_{1'2}^m + \dots \\ + X_{n'} \cdot a_{1'n'} + X_{n''} \cdot a_{1'n''} + X_n^m \cdot a_{1'n}^m + a_{1'0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

²³⁾ *Kaufmann, W.*: Beitrag zur Berechnung räumlicher Fachwerke von zyklischer Symmetrie. Zschr. f. angew. Math. u. Mech. 1921, S. 345.

²⁴⁾ *Mann, L.*: Über zyklische Symmetrie in der Statik mit Anwendungen auf das räumliche Fachwerk. Der Eisenbau 1911, S. 18.

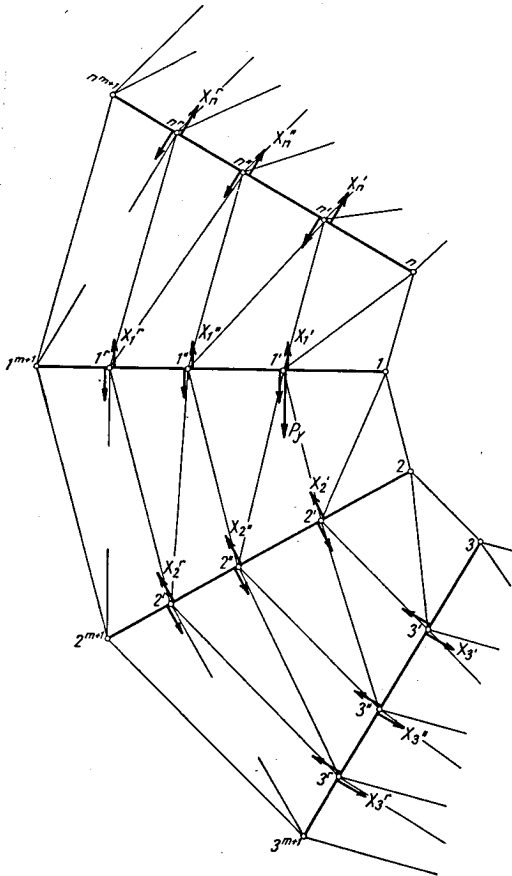
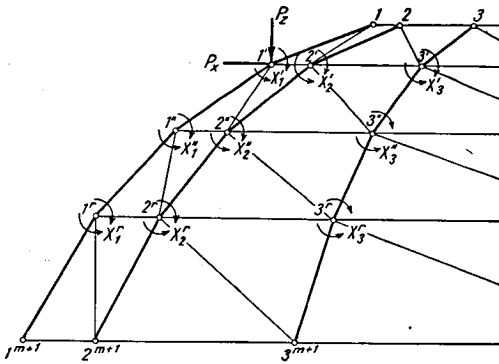


Abb. 24

$$\left. \begin{aligned} & X_{1'} a_{1'' 1'} + X_{1''} a_{1'' 1''} + X_1^m \cdot a_{1'' 1}^m \\ & + X_{2'} a_{1'' 2'} + X_{2''} a_{1'' 2''} + \dots + X_2^m a_{1'' 2}^m + \dots \\ & + X_{n'} a_{1'' n'} + X_{n''} a_{1'' n''} + \dots + X_n^m a_{1'' n}^m + a_{1'' 0} = 0 \end{aligned} \right\} (31)$$

u. s. w.

Darin bedeutet:

$a_{1' 1'}$, die gegenseitige Drehung zweier benachbarter Querschnitte in Knotenpunkt 1' infolge

$$X_{1'} = 1, \quad X_{1''} = X_{2'} = X_{2''} = \dots = 0, \quad \text{und} \quad P = 0.$$

$a_{1'' 1''}$, die gegenseitige Drehung zweier benachbarter Querschnitte in Knotenpunkt 1'' infolge

$$X_{1''} = 1, \quad X_{1'} = X_{2'} = X_{2''} = \dots = 0, \quad \text{und} \quad P = 0.$$

u. s. w.

Die Koeffizienten a_{ik} werden mit Hilfe der Arbeitsgleichung ermittelt. Man berechnet die Stabkräfte S_i und S_k des Grundsystems für beide Belastungen i und k und erhält:

$$a_{ik} = \sum S_i S_k \frac{L}{EF} + \int M_i M_k \frac{ds}{EJ} + \int Q_i Q_k \frac{ds}{GF'} + \sum C_i \cdot \Delta c_k \quad (32)$$

Es bedeuten:

L = Stablänge,

E = Elastizitätsmodul,

G = Schubmodul,

F = Querschnittsfläche des Stabes,

F' = äquivalenter Stabquerschnitt bei konstanter Schubspannung,

M_i , Q_i und C_i = Biegemomente, Querkräfte und Auflagerreaktionen infolge der Belastung i ,

M_k , Q_k und c_k infolge der Belastung k .

Für jede einzelne Momentenbelastung

$$X_{1'} = 1, \quad X_{1''} = 1, \quad \dots \quad X_{n'} = 1$$

u. s. w. der Sparren werden die Auflagerreaktionen senkrecht den Sparrenstäben berechnet und als Knotenlasten die zugehörigen Stabkräfte der statisch bestimmten Kuppel festgesetzt (Abb. 25).

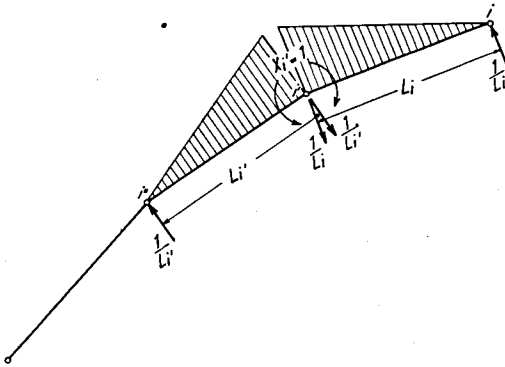


Abb. 25

Ist L_i die Länge des Sparrenstabes $i-i'$

L_i' die Länge des Sparrenstabes $i'-i''$,

so sind die Auflagerreaktionen infolge $X_{i'}=1$ wie in Abb. 25 dargestellt.

Infolge der zyklischen Symmetrie des Systems ist:

$$a_{1' 1'} = a_{2' 2'} = a_{3' 3'} = \dots = a_{i' i'} = a_{n' n'}$$

$$a_{1' 1''} = a_{2' 2''} = a_{3' 3''} = \dots = a_{i' i''} = a_{n' n''}$$

$$a_{1' 2'} = a_{2' 3'} = \dots = a_{i' i'+1} = a_{n' 1'} \text{ u. S. W.}$$

Für jeden Sparren sind $(m-1)$ unbekannte Biegemomente zu ermitteln. Für die ganze Kuppel mit n Seiten und $(m+1)$ Ringen können $n \cdot (m-1)$ Elastizitätsgleichungen aufgestellt werden, deren Auflösung nach einer der üblichen Methoden²⁵⁾, die gesuchten Sparrenmomente, liefert.

Bei einer dreistöckigen und zwölfseitigen Kuppel sind 24 Elastizitätsgleichungen erforderlich. Diese große Anzahl von Gleichungen verlangt größeren Arbeitsaufwand und bringt fehlerempfindliche Resultate. Durch Belastungsumordnung²⁶⁾ wird die

²⁵⁾ Ritter, M.: Repetitorium der Vorlesungen über Baustatik II. Eidg. Techn. Hochschule Zürich 1939, Bd. II, S. 19.

Gleichungszahl stark vermindert und damit die Auflösung erleichtert.

b) Belastungsumordnung.

Man kann mit Vorteil die Belastung umgruppieren und die Berechnung nur auf einen Teil der Kuppel beschränken. Eine einseitige Belastung wird dann in zwei, drei, vier oder mehr Teilbelastungen umgeordnet, die in bezug auf eine, zwei oder mehrere Meridianebenen symmetrisch oder antisymmetrisch sind. Die Zahl der Belastungsfälle wird gerade sowohl bei gerader als auch bei ungerader Seitenzahl der Ringe.

c) Behandlung einer 12seitigen und 3stöckigen Kuppel.

Nachfolgend werden die Formeln zur Berechnung der Sparrenbiegemomente einer 12seitigen und 3stöckigen Kuppel für eine lotrechte Einzellast $4P$ entwickelt. Das Verfahren gilt ganz allgemein für beliebige Ringseitenzahl und beliebige Belastung.

Die Einzellast wird in vier Teilbelastungen (Abb. 26) umgeordnet. Jeder Belastungsfall wird einzeln behandelt und die Resultate aller vier Fälle werden am Schluß superponiert.

Teilbelastung I.

In den vier Knotenpunkten 1, 4, 7 und 10 wirken vier gleiche Lasten $+P$ abwärts (Abb. 27). Es bestehen vier Symmetrie-Meridianebenen 1—7, 4—10, $a-c$ und $b-d$, mit den Symmetriegleichungen:

$$X_i = X_{i+3} = X_{i+6} = X_{i+9} \quad (33)$$

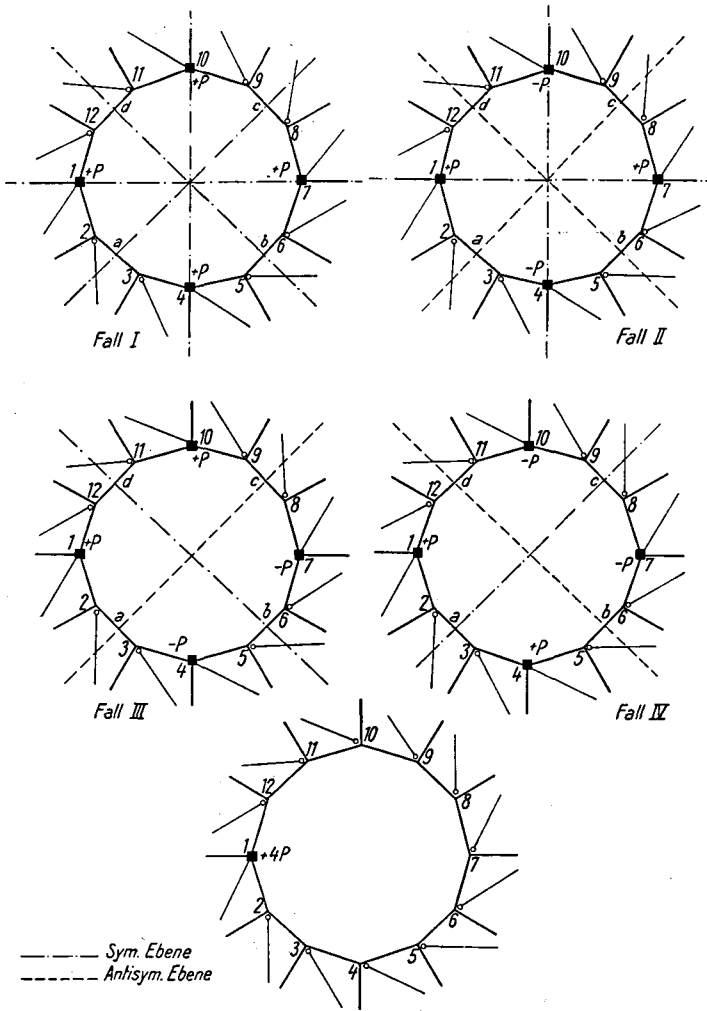
also z. B.

$$X_{3'} = X_{6'} = X_{9'} = X_{12'}$$

$$X_{1''} = X_{4''} = X_{7''} = X_{10''}$$

u. s. w.

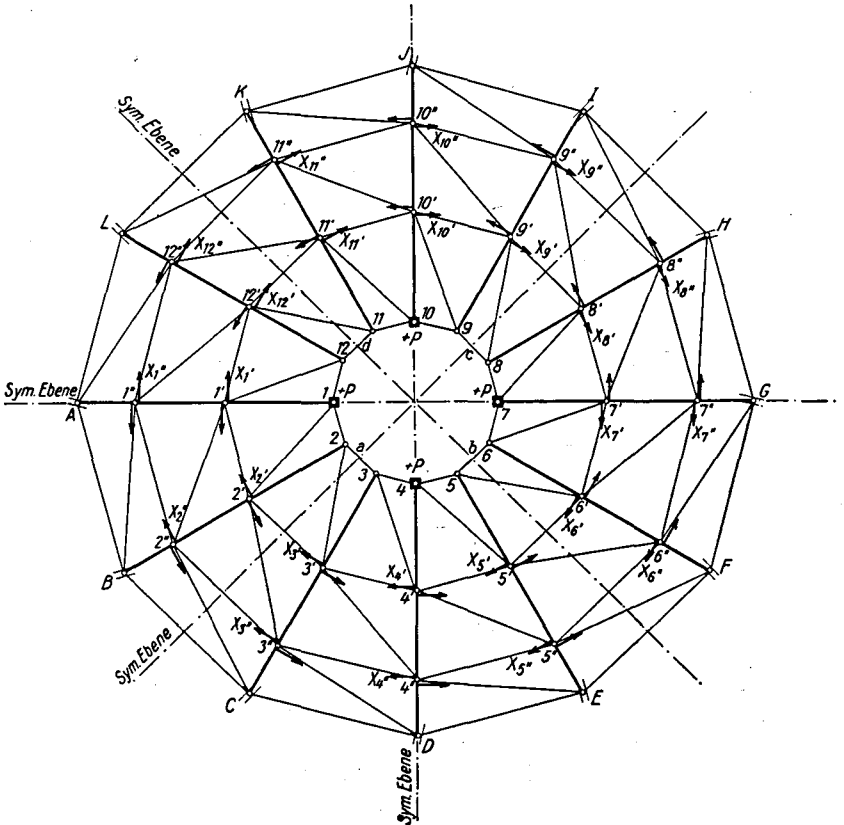
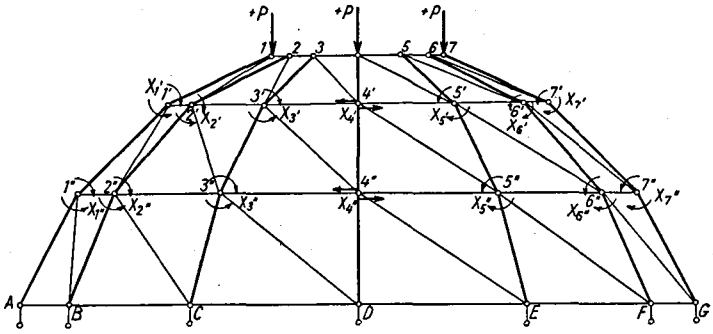
²⁶⁾ *Andrée, W. L.*: Zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme. München 1919.



$\Sigma I \cdot II \cdot III \cdot IV$

Belastungsumordnung

Abb. 26



Teilbelastung I

Abb. 27

Es sind nur sechs Sparrenmomente durch Elastizitätsgleichungen zu bestimmen, z. B. die in den Zwischenringknoten der Sparren 1—A, 2—B und 3—C.

Allgemeine Form der Elastizitätsgleichungen

$$X_1' a_{1' 1'} + X_1'' a_{1' 1''} + X_2' a_{1' 2'} + X_2'' a_{1' 2''} + X_3' a_{1' 3'} + X_3'' a_{1' 3''} + a_{1' 0} = 0 \quad (34)$$

Die in bezug auf die Belastung symmetrisch liegenden Sparren werden identisch deformiert. Die unsymmetrische Anordnung der Diagonalen in bezug auf die Symmetrieebene durch i (Abb. 28a) hat keinen Einfluß auf die Identität der Deformationen. Für eine Einzellast $P_i = 1$ im Knotenpunkt i verschieben sich die symmetrischen Knotenpunkte $i-1$ und $i+1$ um gleiche Vektoren. Nach *Maxwell* ist

$$\delta_{(i-1)i} = \delta_{i(i-1)} \quad (35)$$

und

$$\delta_{(i+1)i} = \delta_{i(i+1)} \quad (36)$$

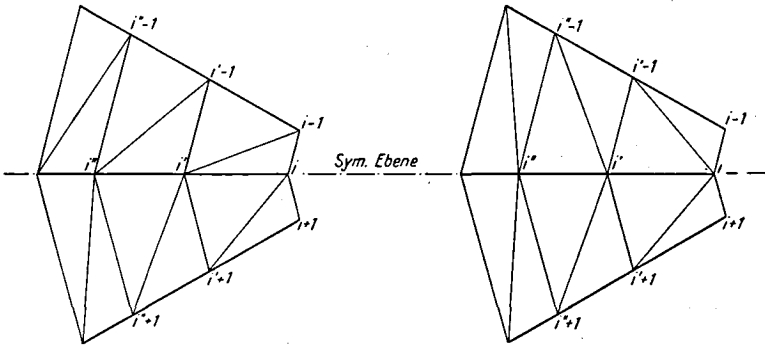


Abb. 28a

Abb. 28b

Infolge der zyklischen Symmetrie der Kuppel gilt aber

$$\delta_{(i+1)i} = \delta_{i(i-1)} \quad (37)$$

Durch Einführung dieser Gleichung in (35) und (36) erhält man:

$$\underline{\delta_{(i-1)i} = \delta_{(i+1)i}} \quad (38)$$

Sind die Deformationen beider symmetrischer Sparren gleich, so entsprechen sich auch ihre Biegemomente und man kann

folgende Aussage machen: Die Zahl der Elastizitätsgleichungen des ersten und zweiten Belastungsfalles reduziert sich von sechs auf vier, die des dritten und vierten Belastungsfalles von zwölf auf sechs.

Bei der ersten Teilbelastung (Abb. 27) sind die Sparren 3—*c* und 12—*L* gleich beansprucht. Die Sparren 2—*B* und 12—*L* sind aber symmetrisch gelegen in bezug auf die Symmetrieebene durch 1—*A*, sie werden also gleich deformiert. Ihre Beanspruchungen sind identisch. Die Berechnung erstreckt sich also nur auf die Sparren 1—*A* und 2—*B*. Wir benötigen nur vier Elastizitätsgleichungen von der Form:

$$X_{1'} a_{1' 1'} + X_{1''} a_{1' 1''} + X_{2'} a_{1' 2'} + X_{2''} a_{1' 2''} + a_{1' 0} = 0 \quad (34a)$$

Es kann auch Belastungssymmetrie vorhanden sein bezüglich einer durch die Seitenmitten geführten Meridianebene, z. B. durch die Mitte des Ringstabes $i - (i + 1)$ bei gleicher Belastung der Knoten i und $i + 1$. Die Verschiebungen dieser Knoten werden

$$\delta_i = \delta_{ii} + \delta_{i(i+1)} \quad (39)$$

und

$$\delta_{i+1} = \delta_{(i+1)(i+1)} + \delta_{(i+1)i} \quad (40)$$

Infolge der zyklischen Symmetrie ist aber

$$\delta_{ii} = \delta_{(i+1)(i+1)}$$

und nach *Maxwell*

$$\delta_{i(i+1)} = \delta_{(i+1)i}$$

Dies in (39) und (40) eingesetzt ergibt

$$\underline{\delta_i = \delta_{i+1}} \quad (41)$$

Analog wird

$$\delta_{i'} = \delta_{i'+1}$$

$$\delta_{(i-1)} = \delta_{(i+2)}$$

u. s. w.

Da die Berechnung der Koeffizienten a_{ik} bedeutende Zeit beansprucht, müssen alle Vereinfachungsmöglichkeiten berücksichtigt werden. Wir untersuchen noch den Einfluß unsymmetrischer Diagonalenanordnung auf die Verformungssymmetrie

$$a_{(\nu+1)i} = a_{(i+1)\nu}$$

bezw.

$$a_{(\nu'+1)\nu} = a_{(\nu'+1)\nu'}$$

u. s. w.

Wirken vier gleiche Lasten in Knotenpunkt $i, i', i+1$ und $i'+1$, so wird sich der Knotenpunkt infolge seiner Belastung, sowie infolge der Belastung der anderen Knoten verschieben:

$$\delta_{\nu} = \delta_{\nu\nu} + \delta_{\nu i} + \delta_{\nu(i+1)} + \delta_{\nu(\nu+1)} \quad (42)$$

und

$$\delta_{(\nu+1)} = \delta_{(\nu+1)(\nu+1)} + \delta_{(\nu+1)(i+1)} + \delta_{(\nu+1)i} + \delta_{(\nu+1)\nu} \quad (43)$$

Infolge der zur Meridianebene durch die Mitte des Ringstabes $i-(i+1)$ symmetrischen Belastung gilt

$$\delta_{\nu} = \delta_{(\nu+1)} \quad (44)$$

Durch die zyklische Symmetrie des Systems ist aber

$$\delta_{\nu\nu} = \delta_{(\nu+1)(\nu+1)} \quad (45)$$

und

$$\delta_{\nu i} = \delta_{(\nu+1)(i+1)}$$

Nach *Maxwell* gilt weiter

$$\delta_{\nu(\nu+1)} = \delta_{(\nu+1)\nu} \quad (46)$$

Diese Ergebnisse in Gleichungen (42) und (43) eingeführt, zeigen, daß die Anordnung der Diagonalen ohne Einfluß ist auf die Symmetrieeigenschaften der Kuppel.

$$\underline{\delta_{\nu(i+1)}} = \underline{\delta_{(\nu+1)i}} \quad \text{bezw.} \quad \underline{a_{(\nu+1)i}} = \underline{a_{(i+1)\nu}} \quad (47)$$

Die Gleichungen (38), (41) und (47) beziehen sich nicht nur auf zwei Sparren, sondern auf sämtliche Kuppelsparren. So werden die in bezug auf die Symmetrieebene durch i symmetrisch

liegenden Sparrenpaare $(i-1), (i+1)$, bzw. $(i-2), (i+2)$, bzw. $(i-3), (i+3)$ identisch deformiert,

also $a_{(i-n)i} = a_{(i+n)i}$ usw.

Auch die Beziehung $a_{(i+1)i} = a_{(i+1)i'}$ erstreckt sich auf viele andere Sparrenknotenpunkte. So ist allgemein:

$$\underline{a_{(i'+n)i} = a_{(i+n)i'}}$$

wobei i und n sich auf die Sparren beziehen und r auf die Ringe.

Bei dem ersten Belastungsfall wäre ohne diese Erkenntnis die Berechnung von 27 Vorzahlen a_{ik} für die sechs Elastizitätsgleichungen nötig, während jetzt nur 13 Vorzahlen für die vier Gleichungen erforderlich sind. Diese Vorzahlen lauten:

$$\begin{array}{cccccc} a_{1' 1'} & a_{1' 2'} & a_{1' 1''} & a_{1' 2''} & a_{1' 0} & \\ & a_{2' 2'} & & a_{2' 2''} & a_{2' 0} & \\ & & a_{1'' 1''} & a_{1'' 2''} & a_{1'' 0} & \\ & & & a_{2'' 2''} & a_{2'' 0} & \end{array}$$

Die Berechnung der Koeffizienten a_{ik} erfolgt durch Ermittlung der waagrechten und lotrechten Komponenten der Auflagerdrücke des Sparrenstabes infolge der Belastung i bzw. k .

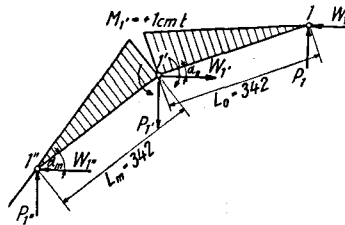


Abb. 29

Für die Sparren (Abb. 29) ist

$$\begin{array}{ll} \sin \alpha_0 = 0,445, & \cos \alpha_0 = 0,897 \\ \sin \alpha_m = 0,707, & \cos \alpha_m = 0,707 \\ \sin \alpha_u = 0,897, & \cos \alpha_u = 0,441 \end{array}$$

und

$$L_0 = L_m = L_u = 342 \text{ cm}$$

Für $M_{1'} = + 1$ cmt wird

$$W_1 = \frac{1000}{342} \cdot 0,445 = - 1,30 \text{ kg}$$

$$P_1 = \frac{1000}{342} \cdot 0,897 = - 2,62 \text{ kg}$$

$$W_{1''} = P_{1''} = \frac{1000}{342} \cdot 0,707 = - 2,07 \text{ kg}$$

$$W_{1'} = 1,30 + 2,07 \dots = + 3,37 \text{ kg}$$

$$P_{1'} = 2,62 + 2,07 \dots = + 4,69 \text{ kg}$$

Die Stabkräfte des Grundsystems mit gelenkigen Knoten werden für diese Knotenbelastungen nach der Tafel I bestimmt. (Lastfälle: $P_1 = 1$, $P_{1'} = 1$, $P_{1''} = 1$, $W_1 = 1$, $W_{1'} = 1$ und $W_{1''} = 1$) Analog können auch die Stabkräfte für $M_{1''} = 1$ berechnet werden. Sind einmal die Stabkräfte für $M_{1'}$ und $M_{1''}$ berechnet, so können infolge der zyklischen Symmetrie des Systems die Stabkräfte für alle andern Sparrenmomente $M_{2'}$ + $M_{2''}$ ermittelt und in einer Tafel zusammengefaßt werden.

In Tafel IV wird die Berechnung des ersten Gliedes von a_{ik} nach der Methode der virtuellen Arbeitsgleichung durchgeführt.

$$a_{ik} = \sum S_i S_k \frac{L}{EF} + \int M_i M_k \frac{ds}{EJ}$$

Die Querkräfte werden wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt. Die Größe von E ist konstant und wird mit $\frac{E}{E_c} = 1$ in der Berechnung eingesetzt.

Die vier Elastizitätsgleichungen lauten:

$$+ 4262,40 X_{1'} + 596,87 X_{1''} - 3603,02 X_{2'} - 455,11 X_{2''} - 1448664 = 0 \quad \text{(I)}$$

$$+ 596,78 X_{1'} + 537,18 X_{1''} - 455,11 X_{2'} - 56,08 X_{2''} - 181869 = 0 \quad \text{(II)}$$

$$- 3603,02 X_{1'} - 455,11 X_{1''} + 4921,88 X_{2'} + 738,33 X_{2''} + 1446983 = 0 \quad \text{(III)}$$

$$- 455,11 X_{1'} - 56,08 X_{1''} + 738,33 X_{2'} + 1018,28 X_{2''} + 181738 = 0 \quad \text{(IV)}$$

Die Lösung dieser Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} X_{1'} &= + 244,210 \text{ tcm}, & X_{1''} &= - 33,346 \text{ tcm}, \\ X_{2'} &= - 120,760 \text{ tcm}, & X_{2''} &= + 16,395 \text{ tcm} \end{aligned}$$

Teilbelastung II.

Die 12-seitige Kuppel ist durch zwei nach unten ($+P$) in Knotenpunkt 1 und 7, und zwei nach oben ($-P$) in Knotenpunkt 4 und 10 wirkende Kräfte gleichen Betrages belastet (Abb. 32).

Es liegt in bezug auf die lotrechte Meridianebene 1—7 und 4—10 Belastungssymmetrie und in bezug auf $a-c$ und $b-d$ Antisymmetrie vor. a, b, c und d sind die Mitten der Ringstäbe 2—3, 5—6, 8—9 und 11—12.

Die Berechnung erstreckt sich auch hier über die zwei Sparren 1—A und 2—B mit vier unbekanntem Knotenmomenten.

Die vier Elastizitätsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
 + 7871,476 X_{1'} + 896,685 X_{1''} - 14342,800 X_{2'} - 1492,480 X_{2''} - 2746293 &= 0 \quad (I) \\
 + 896,685 X_{1'} + 560,370 X_{1''} - 1492,480 X_{2'} - 150,828 X_{2''} - 287640 &= 0 \quad (II) \\
 - 14342,800 X_{1'} - 1492,480 X_{1''} + 29991,040 X_{2'} + 3285,818 X_{2''} + 5445823 &= 0 \quad (III) \\
 - 1492,480 X_{1'} - 150,828 X_{1''} + 3285,818 X_{2'} + 1271,560 X_{2''} + 564285 &= 0 \quad (IV)
 \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichungen liefert

$$\begin{aligned}
 X_{1'} &= + 141,94 \text{ tcm} & X_{1''} &= - 19,81 \text{ tcm} \\
 X_{2'} &= - 117,26 \text{ tcm} & X_{2''} &= + 23,48 \text{ tcm}
 \end{aligned}$$

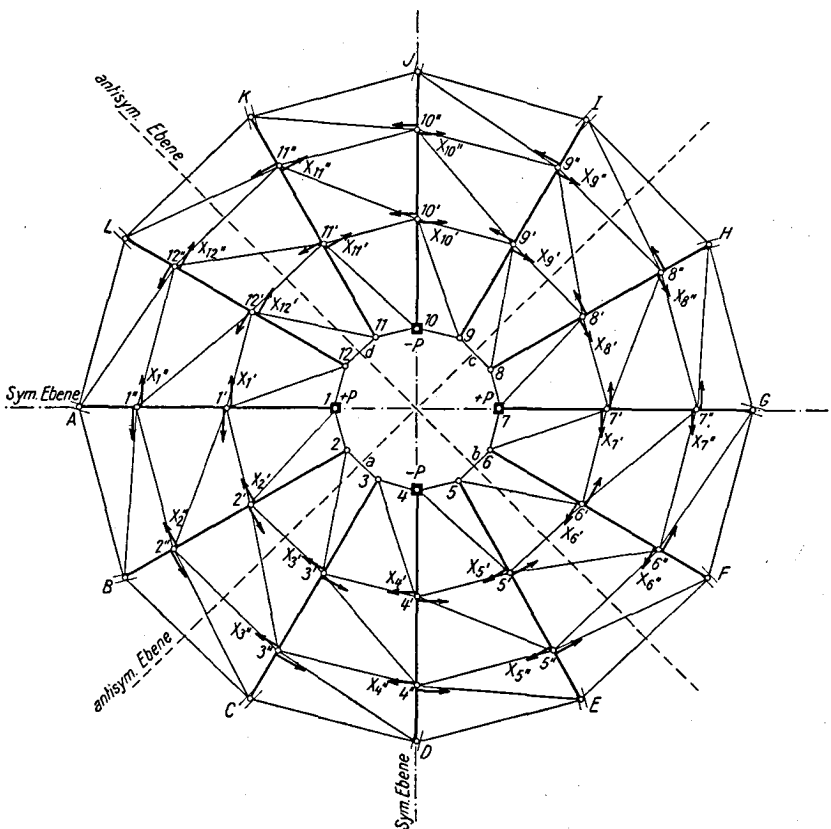
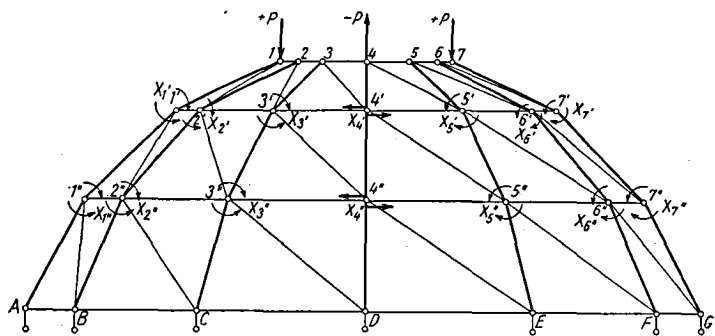
Teilbelastung III.

Die Lasten ($+P$) wirken in Knotenpunkt 1 und 10 nach unten, ($-P$) in Knotenpunkt 4 und 7 nach oben. Es liegt nur Symmetrie vor in bezug auf die lotrechte Durchmessersebene $b-d$ (Abb. 33).

Für diesen Belastungsfall muß man für drei Sparren, nämlich 12—L, 1—A und 2—B die Biegemomente berechnen. Die sechs Elastizitätsgleichungen lauten:

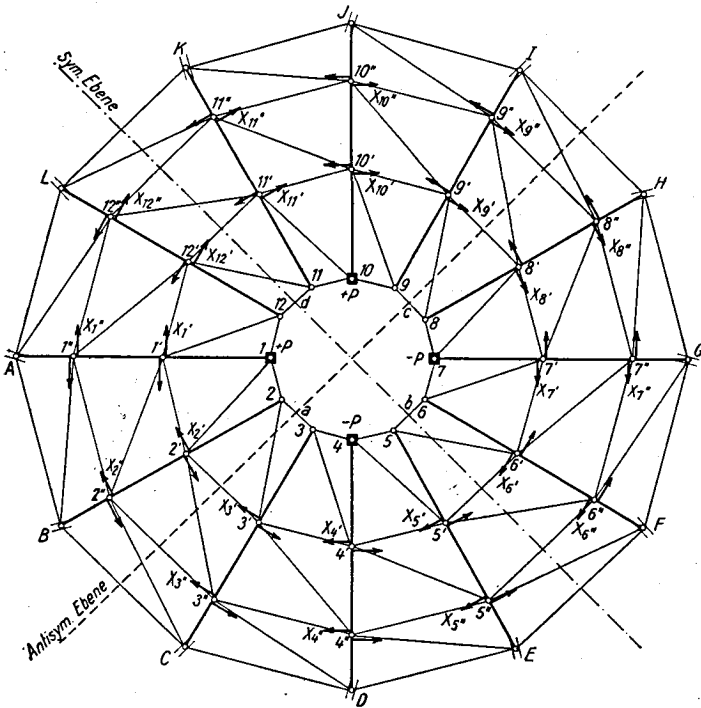
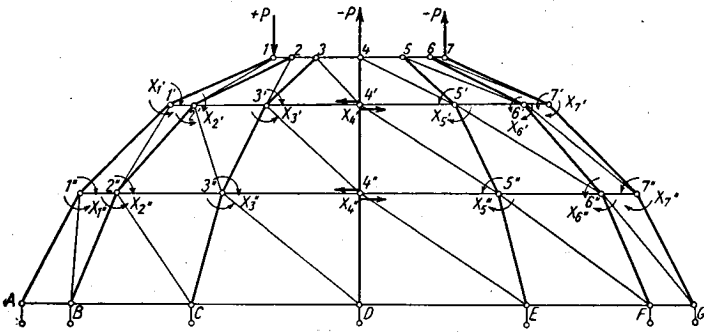
$$\begin{aligned}
 a_{12'12'} X_{12'} + a_{12'12''} X_{12''} + a_{12'1'} X_{1'} + a_{12'1''} X_{1''} \\
 + a_{12'2'} X_{2'} + a_{12'2''} X_{2''} + a_{12'0} = 0 \quad (48)
 \end{aligned}$$

u. s. w.



Teilbelastung II

Abb. 32



Teilbelastung III

Abb. 33

Die Elastizitätsgleichungen sind:

$$+ 1532,04 X_{12'} + 266,99 X_{12''} - 2148,36 X_{1'} - 250,19 X_{1''} \\ + 2287,23 X_{2'} + 235,46 X_{2''} + 842274 = 0 \quad (I)$$

$$+ 266,99 X_{12'} + 497,11 X_{12''} - 250,19 X_{1'} - 34,49 X_{1''} \\ + 235,46 X_{2'} + 22,79 X_{2''} + 98256 = 0 \quad (II)$$

$$- 2148,36 X_{12'} - 250,19 X_{12''} + 6062,82 X_{1'} + 746,68 X_{1''} \\ - 6720,06 X_{2'} - 720,94 X_{2''} - 2103392 = 0 \quad (III)$$

$$- 250,19 X_{12'} - 34,49 X_{12''} + 746,48 X_{1'} + 548,78 X_{1''} \\ - 720,94 X_{2'} - 74,51 X_{2''} - 234750 = 0 \quad (IV)$$

$$+ 2287,23 X_{12'} + 235,46 X_{12''} - 6720,06 X_{1'} - 720,94 X_{1''} \\ + 10503,52 X_{2'} + 1232,20 X_{2''} + 2574340 = 0 \quad (V)$$

$$+ 235,46 X_{12'} + 22,79 X_{12''} - 720,94 X_{1'} - 74,51 X_{1''} \\ + 1232,20 X_{2'} + 600,51 X_{2''} + 273946 = 0 \quad (VI)$$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

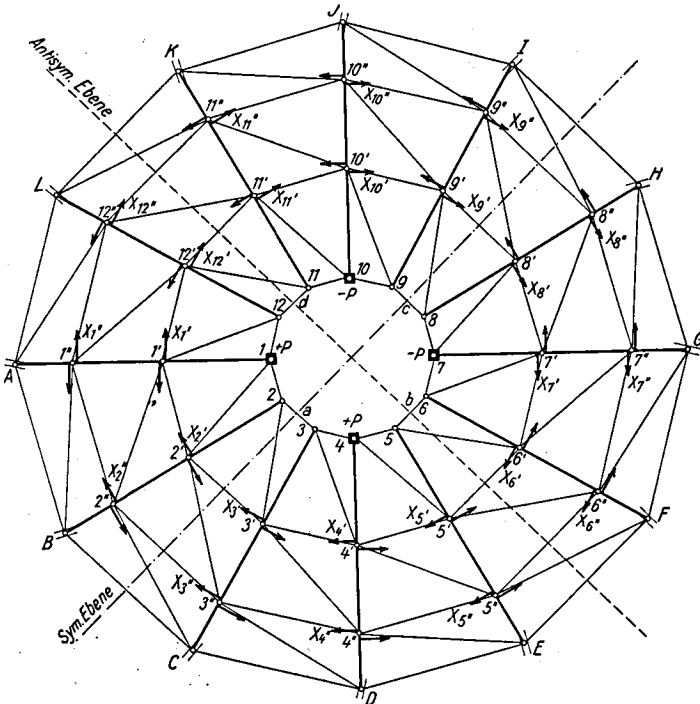
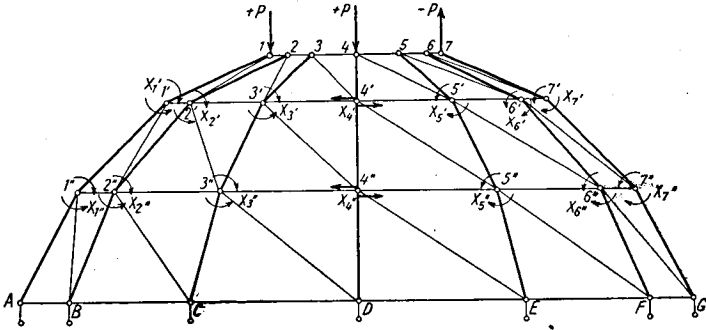
$$X_{12'} = - 139,83 \text{ tcm} \quad X_{12''} = + 20,42 \text{ tcm} \\ X_{1'} = + 209,56 \text{ „} \quad X_{1''} = - 29,31 \text{ „} \\ X_{2'} = - 85,54 \text{ „} \quad X_{2''} = + 21,33 \text{ „}$$

Teilbelastung IV.

Die Abbildung 34 zeigt diesen Belastungsfall. Er ist genau wie Belastungsfall III, nur um 90° waagrecht gedreht. Also in Knotenpunkt 1 und 4 wirken zwei Lasten ($+P$) abwärts, während sie in 7 und 10 ($-P$) aufwärts wirken. Man kann ohne Rechnung die Größe der Momente dem dritten Belastungsfall entnehmen, nur muß man die Indizes entsprechend einer Drehung um 90° gegen den Uhrzeiger einsetzen. Es ist zum Beispiel:

$$X_{1'} \text{ bei IV} = X_{10'} \text{ bei III} \\ X_{4''} \text{ bei IV} = X_{1''} \text{ bei III}$$

u. s. w.



Teilbelastung IV

Abb. 34

Zusammenstellung aller Biegemomente infolge einer lotrechten Einzellast $P_1 = 1 \text{ t}$, wirkend im Knotenpunkt 1 des Laternenringes.

Belastungsfall	$M_{1'}$	$M_{2'}$	$M_{3'}$	$M_{4'}$	$M_{5'}$	$M_{6'}$	$M_{7'}$
I	+244,21	-120,76	-120,76	+244,21	-120,76	-120,76	+244,21
II	+141,94	-117,26	+117,26	-141,94	+117,26	-117,26	+141,94
III	+209,56	- 85,54	+ 85,54	-209,56	+139,83	+139,83	-209,56
IV	+209,56	-139,83	-139,83	+209,56	- 85,54	+ 85,54	-209,56
Σ für $P_1 = 4^t$	+805,27	-463,39	- 57,79	+102,27	+ 50,79	- 12,65	- 32,97
Σ für $P_1 = 1^t$	+201,32	-115,85	- 14,45	+ 25,57	+ 12,70	- 3,16	- 8,27

Belastungsfall	$M_{1''}$	$M_{2''}$	$M_{3''}$	$M_{4''}$	$M_{5''}$	$M_{6''}$	$M_{7''}$
I	- 33,35	+16,40	+16,40	-33,35	+16,40	+16,40	-33,35
II	- 19,81	+23,48	-23,48	+19,81	-23,48	+23,48	-19,81
III	- 29,31	+21,33	-21,33	+29,31	-20,42	-20,42	+29,31
IV	- 29,31	+20,42	+20,42	-29,31	+21,33	-21,33	+29,31
Σ für $P_1 = 4^t$	-111,78	+81,63	- 7,99	-13,54	- 6,17	- 1,87	+ 5,46
Σ für $P_1 = 1^t$	- 27,94	+20,41	- 2,00	- 3,38	- 1,54	- 0,47	+ 1,36

d) Stabkräfte der Kuppel mit biegeungssteifen Sparren.

Nach der Formel $S = S_o + S_i \cdot M_i$ können die Stabkräfte mit Hilfe der Tafel I (Stabkräfte der gelenkigen Kuppel für $M_{1''} = 1 \dots$ u. s. w. ermittelt werden. So ist z. B. für die Stäbe $1' - 1''$ und $2' - 3'$ infolge $P_1 = P_4 = P_7 = P_{10} = + 1 \text{ t}$:

$$\begin{aligned}
 S_{1' - 1''} &= + 12,470 - 0,03750 \cdot 244,21 - 0,03448 \cdot 120,76 \\
 &\quad + 0,00338 \cdot 33,35 + 0,00631 \cdot 16,40 \\
 &= + 12,470 - 13,105 \quad = - 0,635 \text{ t}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 R_{2' - 3'} &= + 3,700 - 0,01242 \cdot 244,21 + 0,00870 \cdot 120,76 \\
 &\quad + 0,00813 \cdot 16,40 \\
 &= + 3,700 - 1,849 \quad = + 1,851 \text{ t}
 \end{aligned}$$

Für den ersten Belastungsfall findet sich auf Tafel V ein Vergleich der Stabkräfte beim System mit

- a) gelenkigen Knoten,
- b) steifen Sparren und gelenkig angeschlossenen Ringen,
- c) steifen Sparren und steifen Ringen (siehe Abschnitt III).

e) Spannungen.

Die Ring- und Diagonalstäbe sind nur durch axiale Kräfte S beansprucht, während auf die Sparrenstäbe axiale Kräfte und Biegemomente wirken. Nachdem die Momente und Stabkräfte bekannt sind, lassen sich die Spannungen wie folgt ermitteln:

$$\text{Für Ring- und Diagonalstäbe } \sigma = \frac{S}{F}$$

$$\text{Für Sparrenstäbe } \sigma = \frac{S}{F} \pm \frac{M}{W_x}$$

wobei W_x das Widerstandsmoment des Sparrenquerschnittes in bezug auf die Momentenachse $x-x$ bedeutet.

Für Sparrenstab 1'—1'' ist z. B. für Fall I

$$F = 27,9 \text{ cm}^2, \quad W_x = 161 \text{ cm}^3, \quad S_{1',-1''} = -0,635 \text{ t}$$

$$\sigma = \frac{0,635}{27,9} \pm \frac{244,21}{161}$$

$$\sigma_{max} = 0,023 + 1,518 = 1,541 \text{ t/cm}^2$$

(überbeansprucht!)

4. Zusammenfassung

Die Biegesteifigkeit der Sparren ist von wesentlichem Einfluß auf die Art und Weise der Lastübertragung. Im Gegensatz zum Schwedlerschen Gelenksystem zeigen sich keine Gebiete spannungsloser Stäbe mehr. Es findet eine gleichmäßige Kraftausbreitung statt, wodurch die nach *Schwedler* hochbeanspruchten Stäbe nur noch Bruchteile jener Kräfte aufweisen. Für einige Stäbe zeigt sich sogar nach der Berücksichtigung der biegesteifen Sparren eine Umkehrung des Vorzeichens ihrer Kräfte. So erfährt im Zahlenbeispiel der belastete Sparren in Feld 1—1' Druck, während er beim gelenkigen System gezogen wird.

Die Wirkung der steifen Sparren zeigt sich am deutlichsten bei den Stabkräften der unteren Stockwerke. So ist z. B. für

$P_1 = +1$ t die Kraft des Sparrenstabes $1''-A$ von $+38,00$ t auf $+4,29$ t, diejenige des Fußringstabes $A-B$ von $-50,75$ t auf $-4,81$ t herabgesetzt worden.

Um ein Bild über die Verminderung der Kuppel-Deformationen durch steife Sparren zu erhalten, wurden die Verschiebungen δz und δx der Knotenpunkte 1 und 1' in der lotrechten Meridianebene für eine lotrechte Last $P_1 = +1$ t berechnet. Sie sind um rund 75 % kleiner als die Verschiebungen dieser Knotenpunkte bei dem gelenkigen System. Die berechneten Werte lauten:

System	δ_{1z} cm	δ_{1x} cm	$\delta_{1'z}$ cm	$\delta_{1'x}$ cm
Gelenkiges System	+94,4	+56,8	+9,6	+12,1
System mit steifen Sparren	+24,5	+14,5	+2,6	+ 3,2

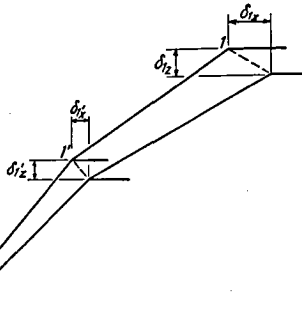


Abb. 35

Durch die Vernachlässigung des steifen Anschlusses des Laternenringes mit den Sparren weisen die Sparren sehr große Biegemomente an den Zwischenstützen auf. Die Sparren werden damit viel mehr durch die Biegemomente beansprucht als durch die axialen Kräfte. Beim durchgerechneten Zahlenbeispiel zeigt sich hier Überbeanspruchung, wenn auf Grund des Gelenksystems dimensioniert wird!

III. Einfluß der biegeungssteifen Ringe

1. Allgemeines

Im Abschnitt II haben wir den Einfluß der biegeungssteifen Verbindung der Sparrenstäbe untersucht. Wir werden nun auch noch die Ringstäbe den tatsächlichen Verhältnissen entsprechend als biegeungssteif angeschlossen betrachten. Es wird hier zunächst die Größe der Zwischenringbiegemomente verglichen mit derjenigen der Sparren- und Schlußringbiegemomente.

2. Bisherige Untersuchungen der Rahmenkuppeln

a) Die Grundverformungen nach *L. Mann*:

*Mann*²⁷⁾ behandelt die räumlichen Rahmentragwerke ganz allgemein nach der Methode der Grundverformungen. Jeder Knoten des Raumfachwerkes wird als Raumelement mit sechs Verschiebungskomponenten betrachtet. Am ganzen System erhält man folgende Zahl solcher Verschiebungsgrößen

$$\varrho = 6n_1 + 3n_2 - f + g \quad (49)$$

Darin bedeutet

n_1 = Zahl der freien Knoten

n_2 = Zahl der Lagerknoten (gegen Drehung gesperrt)

f = Zahl der Auflagerstäbe

g = Zahl aller relativen Drehachsen.

Durch Einführung von Kugelgelenken an Stelle sämtlicher steifer Stabanschlüsse an den freien und Lagerknoten entsteht die kinematische Kette mit p -facher Bewegungsfreiheit. Wir fügen p passend gewählte Stäbe ein mit willkürlichen Verschiebungen $u_1 \dots u_p$. Dann wird

$$\varrho = p + 3n_1 + g + s \quad (50)$$

²⁷⁾ *Mann, L.*: Grundlagen zu einer Theorie räumlicher Rahmentragwerke. Der Stahlbau, Berlin 1939.

s ist die Stabzahl nach Ausscheidung etwa überzähliger Stäbe. Für statisch bestimmte Systeme wird

$$3 \cdot (n_1 + n_2) = s + p + f \quad (51)$$

Die Komponenten der Knotendrehwinkel und Knotenverschiebungen bilden ein unabhängiges System von Grundverformungen.

b) Die Lastgröße und Belastungsstufe nach *F. Wansleben*.

Die Rahmenkuppel wird nach *Wansleben*²⁸⁾ berechnet durch Aufteilung der äußeren Lasten nach der Besselschen Formel in sogenannte Sinus- und Cosinusgruppen verschiedener Stufen:

$$P_i = B_{(0)} + (A_{(1)} \sin \alpha_i + B_{(1)} \cos \alpha_i) + \dots + (A_{(a)} \sin a \alpha_i + B_{(a)} \cos a \alpha_i) + \dots + (B_{(n)} \cdot \cos n \alpha_i) \quad (52)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{mit } \alpha = \frac{\pi}{n}, \quad B_{(0)} &= \frac{1}{2n} \sum P_i, & A_{(a)} &= \frac{1}{n} \sum P_i \sin a \alpha_i \\ B_{(n)} &= \frac{1}{2n} \sum (-1)^i P_i, & B_{(a)} &= \frac{1}{n} \sum P_i \cos a \alpha_i \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Dies sind nach *Wansleben* die Lastgrößen. Der eingeklammerte Index gibt die Belastungsstufe an, von der jede eine Cosinus- und Sinusgruppe besitzt.

Die statischen Wirkungen der einzelnen Lastgruppen sind voneinander unabhängig. Denkt man einen Knotenpunkt J_i aus dem Kuppeltragwerk herausgeschnitten und die zur Herstellung des Gleichgewichtes erforderlichen Schnittkräfte an den Schnittstellen angebracht (Abb. 36), so lassen sich zwei Gruppen von je drei Bedingungsgleichungen aufstellen, welche sich auf die Koordinatenachsen beziehen.

Die Gleichungen der ersten Gruppe (Kräftegruppe) enthalten die Kräfte P , S und Q , diejenigen der zweiten Gruppe (Momentengruppe) die Momente M .

²⁸⁾ *Wansleben, F.*: Die Berechnung der regelmäßig vieleckigen Rahmenkuppeln. Der Stahlbau. Berlin 16. Aug. 1940.

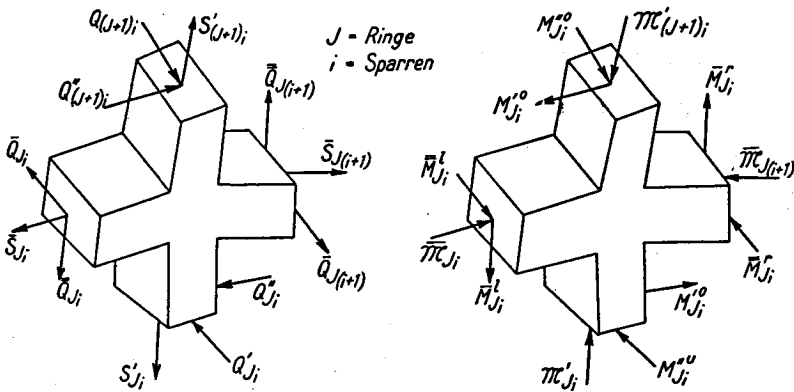


Abb. 36

Bei n Rippen und m Ringen erhält man $n \cdot m$ Bedingungsgleichungen. Die Auflagerbedingungen kommen noch für die Ermittlung der statisch unbestimmten Größen in Betracht.

Wansleben geht von der Berechnung der Stabdrehwinkel bei der Kuppel mit gelenkigen Knoten aus.

Ein solches Gelenksystem bildet für ebene Fachwerke ein zulässige: Näherungssystem, während es beim Raumfachwerk zu erheblichen Abweichungen führt. Die Verschiebungen δ_o des Gelenksystems sind hier um ein Vielfaches größer und vollziehen sich manchmal in entgegengesetzter Richtung als im System mit steifen Knoten.

Der Stabdrehwinkel ψ , der durch die Verschiebungen der Stabenden entsteht, wird in zwei Ebenen projiziert, ψ_x die Projektion auf die Meridianebene ergibt sich aus den Knotenverschiebungen δ_x (horizontal) und δ_z (lotrecht).

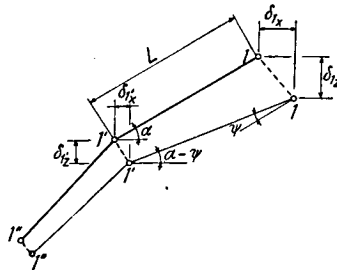


Abb. 37

Aus Abb. 37 ergibt sich

$$\operatorname{tg}(\alpha - \psi_{x_{1-1}'}) = \frac{L \sin \alpha + \delta_{1'z} - \delta_{1z}}{L \cos \alpha + \delta_{1x} - \delta_{1'x}}$$

Darin ist α der ursprüngliche Neigungswinkel des Stabes 1—1' zur Horizontalebene und L die ursprüngliche Stablänge von 1—1'. Nach dem Additionstheorem wird:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \psi_{x_{1-1}'}}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \psi_{x_{1-1}'}} = \frac{L \sin \alpha + \delta_{1'z} - \delta_{1z}}{L \cos \alpha + \delta_{1x} - \delta_{1'x}}$$

Wegen der Kleinheit der Winkel $\psi_{x_{1-1}'}$, kann an Stelle der trigonometrischen Tangente der Winkel selbst gesetzt werden:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \psi_{x_{1-1}'}}{1 + \psi_{x_{1-1}'} \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{L \sin \alpha + \delta_{1'z} - \delta_{1z}}{L \cos \alpha + \delta_{1x} - \delta_{1'x}}$$

nach $\psi_{x_{1-1}'}$, aufgelöst:

$$\psi_{x_{1-1}'} = \frac{\operatorname{tg} \alpha (\delta_{1x} - \delta_{1'x}) + (\delta_{1z} - \delta_{1'z})}{L \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha + L \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot (\delta_{1'z} - \delta_{1z}) + (\delta_{1x} - \delta_{1'x})}$$

mit

$$\begin{aligned} L (\sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha) &= L \cos \alpha \cdot (\operatorname{tg}^2 \alpha + 1) \\ &= L \cdot \sec \alpha. \end{aligned}$$

wird schließlich

$$\psi_{x_{1-1}'} = \frac{\operatorname{tg} \alpha (\delta_{1x} - \delta_{1'x}) + (\delta_{1z} - \delta_{1'z})}{L \sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot (\delta_{1'z} - \delta_{1z}) + (\delta_{1x} - \delta_{1'x})} \quad (54)$$

Für die Berechnung von ψ_x benötigen wir die waagrechten Verschiebungen (δ_x und δ_y) der Knotenpunkte.

Nach Abb. 38 wird

$$\operatorname{tg} \psi_{y_{1-1}'} = \frac{\delta_{1'y} - \delta_{1'y}}{L \cos \alpha + \delta_{1x} - \delta_{1'x}}$$

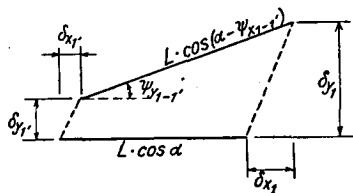


Abb. 38

Durch Vereinfachung wie oben erhalten wir

$$\psi_{y_{1-1'}} = \frac{\delta_{1_y} - \delta_{1'_y}}{L \cos \alpha + \delta_{1_x} - \delta_{1'_x}} \quad (55)$$

Das zweite Glied des Nenners der Gleichung (54) ist im Verhältnis zu dem ersten Glied ($L \sec \alpha$) verschwindend klein und darf vernachlässigt werden:

$$\begin{aligned} \psi_{x_{1-1'}} &= \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot (\delta_{1_x} - \delta_{1'_x}) + (\delta_{1_z} - \delta_{1'_z})}{L \sec \alpha} \\ &= \frac{1}{L} [(\delta_{1_x} - \delta_{1'_x}) \sin \alpha + (\delta_{1_z} - \delta_{1'_z}) \cos \alpha] \end{aligned} \quad (56)$$

wobei δ_{1_x} , δ_{1_z} , $\delta_{1'_x}$ und $\delta_{1'_z}$ die Verschiebungen der Knotenpunkte 1 und 1' am Ende des Stabes 1—1' im wirklichen System mit steifen Stabanschlüssen bedeuten.

Also

$$\delta_{i_x} = \delta_{0_x} + M_1 \delta_{1_x} + M_1' \delta_{1'_x} + M_2 \delta_{2_x} + \dots + M_n \delta_{n_x} \quad (57)$$

δ_{0_x} = Verschiebung der Knotenpunkte i des gelenkigen Systems infolge äußerer Belastung P ,

δ_{1_x} = Verschiebung der Knotenpunkte i des gelenkigen Systems infolge $M_1 = 1$.

Das Verhältnis der von den Biegemomenten der steifen Stabenden verursachten Verschiebungen zu den Verschiebungen des gelenkigen Systems wird an Hand eines Beispiels gezeigt.

Nach Seite 42 ist für die Kuppel mit gelenkigen Knoten:

$$\psi_{1-1'_0} = \frac{1}{342} [(56,8 - 12,1) \cdot 0,441 + (94,4 - 9,6) \cdot 0,8975] = 0,2802$$

Für die Kuppel mit steifen Sparren ist nach Seite 68:

$$\psi_{1-1'} = \frac{1}{342} [(14,5 - 3,2) \cdot 0,441 + (24,5 - 2,6) \cdot 0,8975] = 0,0721$$

$$\psi_{1-1'} = 0,25 \psi_{1-1'_0}$$

$$\text{auch } \delta_{1_x} = 0,25 \delta_{0_x}$$

3. Einfluß des biegeungssteifen Schlußringes

Der kontinuierliche Schlußring ist mit dem Sparren fest angeschlossen. In jedem Knotenpunkte des Laternenringes ist in-

folge des Gleichgewichtes die Summe aller Momentenkomponenten in drei verschiedenen Ebenen gleich Null. Im Knotenpunkt i wird für die Meridianebene:

$$M_i^s - (M_i^l + M_i^r) \sin \frac{\omega}{2} = 0 \quad (58)$$

- M_i^s = Sparrenbiegungsmomente in bezug auf die senkrecht zur Meridianebene stehende Hauptachse des Querschnitts.
 M_i^l, M_i^r = Komponente der Ringbiegungsmomente unmittelbar links bzw. rechts von Knotenpunkt i .
 ω = Zentriwinkel, oder der Winkel zwischen zwei benachbarten Ringstäben.

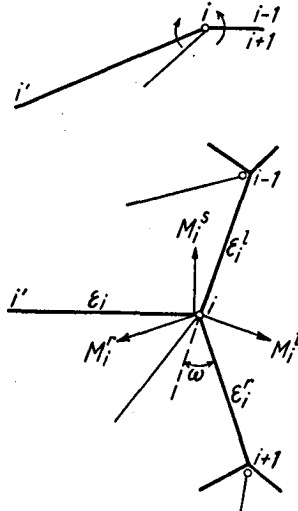


Abb. 39

Die Momente sind in Abb. 39 durch ihre Vektoren dargestellt. Ist das Ringstabprofil um den Winkel Θ geneigt (Abb. 40), so ist der Momentenvektor in der waagrechten Ebene:

$$M = M_x \cos \Theta + M_y \sin \Theta \quad (59)$$

Für die Stäbe, die am Knotenpunkt i steif angeschlossen sind, lautet die Elastizitätsbedingung

$$\varepsilon_i \cdot M_i^s = \frac{\varepsilon_i^r \cdot M_i^r}{\sin \frac{\omega}{2}} = \frac{\varepsilon_i^l \cdot M_i^l}{\sin \frac{\omega}{2}} \quad (60)$$

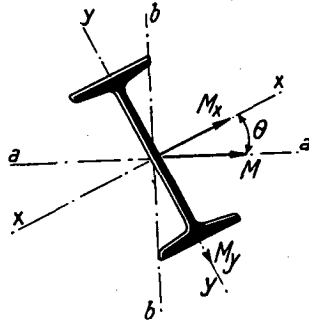


Abb. 40

ε_i , ε_i^r und ε_i^l sind die Drehwinkel der Stabenden für $M_i^s = 1$, $M_i^r = 1$, bzw. $M_i^l = 1$.

Die Einführung der Gleichung (60) in (58) ergibt

$$\frac{1}{\varepsilon_i} = \left(\frac{1}{\varepsilon_i^l} + \frac{1}{\varepsilon_i^r} \right) \sin^2 \frac{\omega}{2} \quad (61)$$

Infolge der zyklischen Symmetrie ist aber $\varepsilon_i^l = \varepsilon_i^r$

also
$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_i^r}{2 \sin^2 \frac{\omega}{2}}$$

und
$$M_i^r = M_i^l = \frac{M_i^s}{2 \sin \frac{\omega}{2}} \quad (62)$$

oder
$$\frac{M^r}{M^s} = \frac{1}{2 \sin \frac{\omega}{2}} \quad (62a)$$

Das Verhältnis des Biegemomentes des Schlußringes zum Sparrenmoment $\left(\frac{M^r}{M^s} \right)$ ist also von der Größe der Zentriwinkel ω , bzw. von der Anzahl der Ringstäbe abhängig.

Für den Fall $\frac{\omega}{2} = 0$ (Kreisring) entstehen keine Ringbiegungsmomente, sondern nur Drehmomente, deren Einfluß in einem späteren Abschnitt untersucht wird. Für den Fall $\frac{\omega}{2} = 45^\circ$ entstehen im Gegenteil keine Drehmomente, sondern nur Biegemomente in den Ringanschlüssen von der Größe

$$M^l = \frac{M^s}{2}$$

Für eine 12seitige Kuppel ist $\omega = 30^\circ$,
und $M^l = M^r = 1,932 M^s$

4. Einfluß der biegesteifen Zwischenringe

Infolge der steifen Anschlüsse des kontinuierlichen Zwischenringes $i'-1, i', i'+1 \dots$, verbiegen sich die Ringstabenden an den Knotenpunkten. Die Ringbiegemomente $M_{i'}^l$ und $M_{i'}^r$, links und rechts des Knotens i' sind mit den Sparrenbiegemomenten $M_{i'}^0$ und $M_{i'}^u$ unmittelbar oberhalb und unterhalb des Knotens i' im Gleichgewicht. Es folgt:

$$M_{i'}^0 - M_{i'}^u - (M_{i'}^l + M_{i'}^r) \sin \frac{\omega}{2} = 0 \quad (63)$$

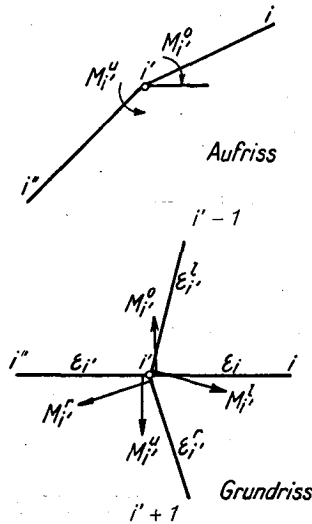


Abb. 41

Für die Stäbe, die an den Knotenpunkt i' steif angeschlossen sind, lautet die Elastizitätsbedingung

$$\varepsilon_i M_{i'}^0 = \varepsilon_{i'} M_{i'}^u = \frac{\varepsilon_{i'}^l \cdot M_{i'}^l}{\sin \frac{\omega}{2}} = \frac{\varepsilon_{i'}^r \cdot M_{i'}^r}{\sin \frac{\omega}{2}} \quad (64)$$

daraus ergibt sich:

$$\frac{1}{\varepsilon_i} = \frac{1}{\varepsilon_{i'}} + \left(\frac{1}{\varepsilon_{i'}^l} + \frac{1}{\varepsilon_{i'}^r} \right) \sin^2 \frac{\omega}{2} \quad (65)$$

wobei ε_i , $\varepsilon_{i'}$, $\varepsilon_{i'}^l$ und $\varepsilon_{i'}^r$ die Drehwinkel der Stabenden für $M_{i'}^0 = 1$, $M_{i'}^u = 1$, $M_{i'}^l = 1$ und $M_{i'}^r = 1$ bedeuten.

Infolge der zyklischen Symmetrie ist aber:

$$\varepsilon_{i'}^l = \varepsilon_{i'}^r$$

Die Gleichung (61) lautet dann:

$$\frac{1}{\varepsilon_i} = \frac{1}{\varepsilon_{i'}} + \frac{2 \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\varepsilon_{i'}^r} \quad (66)$$

Die Größe von ε ist vom Anschluß der Stabenden in den benachbarten Knoten abhängig. Dieser Anschluß ist weder gelenkig noch starr ausgebildet. Die Größe von ε ist

$$\varepsilon = \frac{L}{3EJ} \text{ für gelenkigen Anschluß,}$$

$$\varepsilon = \frac{L}{4EJ} \text{ für starr eingespannten Anschluß,}$$

wobei L die Stablänge, E den Elastizitätsmodul des Stabmaterials und J das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes bedeuten.

Die Größe der Biegemomente der Zwischenringe werden für die beiden nachfolgenden Grenzfälle berechnet. So erhält man ein Bild von dem Wert dieser Momente und kann beurteilen, ob diese in der Praxis bei der Berechnung der steifen Rahmenkuppeln berücksichtigt werden müssen.

a) Die Ringstabenden in $i'-1$ und $i'+1$ sind mit den benachbarten Sparren gelenkig angeschlossen, während der Sparrenstab unten eingespannt ist. Dadurch erhalten die Drehwinkel folgende Werte:

$$\varepsilon_{i'}^l = \varepsilon_{i'}^r = \frac{L_r'}{3EJ_r'} \text{ für Ringstäbe,}$$

$$\varepsilon_{i'} = \frac{L_s'}{4EJ_s'} \text{ für den Sparrenstab } i' - i'',$$

hierin bedeutet L_r' die Ringstablänge und J_r' sein Querschnittsträgheitsmoment in bezug auf die waagrechte Achse $a-a$, die einen Winkel Θ' mit der Achse $x-x$ einschließt (Abb. 42).

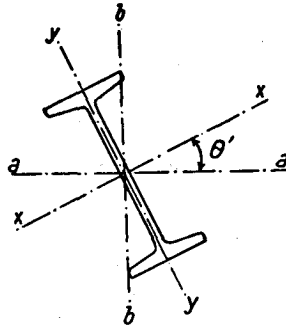


Abb. 42

$$J_r' = \frac{1}{2} (J_x + J_y) + \frac{1}{2} (J_x - J_y) \cos 2\Theta'$$

L_s' = Sparrenstablänge $i' - i''$

J_s' = Sparrenstab-Querschnitt-Trägheitsmoment, in bezug auf die waagrechte Achse $x-x$.

Nach Einführung der Größe von ε in der Gleichung (66) erhält man

$$\frac{1}{\varepsilon_l} = \frac{4EJ_s'}{L_s'} + \frac{6EJ_r'}{L_r'} \cdot \sin^2 \frac{\omega}{2}$$

oder

$$\varepsilon_l = \frac{L_s' \cdot L_r'}{4E \left(L_r' J_s' + \frac{3}{2} L_s' J_r' \sin^2 \frac{\omega}{2} \right)} \quad (67)$$

Abkürzung:

$$\frac{L_s' \cdot J_r'}{L_r' \cdot J_s'} = \nu'$$

Nach den Gleichungen (64) und (67) wird

$$M_{i'}^u = \frac{M_{i'}^0}{1 + 1,5 \nu' \cdot \sin^2 \frac{\omega}{2}} = \mu'_s \cdot M_{i'}^0 \quad (68)$$

und

$$M_{i'}^r = \frac{M_{i'}^0 \cdot \sin \frac{\omega}{2}}{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\nu'} + 2 \sin^2 \frac{\omega}{2}} = \mu'_{r1} \cdot M_{i'}^0 \quad (69)$$

b) Die Ringstabenden $i' - 1$ und $i' + 1$ sind an den benachbarten Sparren starr eingespannt, während das Sparrenstabe i'' unten fest verbunden ist.

Die Elastizitätsmasse betragen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i'}^r = \varepsilon_{i'}^l &= \frac{L'_r}{4EJ'_r} \text{ für die Ringstäbe,} \\ \varepsilon_{i'} &= \frac{L'_s}{4EJ'_s} \text{ für den Sparrenstab } i' - i'' \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in Gleichung (66) erhält man

$$\varepsilon_i = \frac{L'_s \cdot L'_r}{4E \left(L'_r \cdot J'_s + 2L'_s \cdot J'_r \sin^2 \frac{\omega}{2} \right)} \quad (70)$$

Es folgt

$$M_{i'}^u = \frac{M_{i'}^0}{1 + 2 \nu' \cdot \sin^2 \frac{\omega}{2}} = \mu'_s \cdot M_{i'}^0 \quad (71)$$

$$M_{i'}^r = \frac{M_{i'}^0 \cdot \sin \frac{\omega}{2}}{\frac{1}{\nu'} + 2 \sin^2 \frac{\omega}{2}} = \mu'_{r1} \cdot M_{i'}^0 \quad (72)$$

μ'_s und μ'_{r1} sind die sogenannten „Übergangszahlen“,

$$\mu'_s \text{ liegt zwischen } \frac{1}{1 + 1,5 \nu' \sin^2 \frac{\omega}{2}} \text{ und } \frac{1}{1 + 2 \nu' \sin^2 \frac{\omega}{2}},$$

und

$$\mu'_s \text{ liegt zwischen } \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{4}{3} \frac{1}{\nu'} + 2 \sin^2 \frac{\omega}{2}} \text{ und } \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{1 + 2 \nu' \sin^2 \frac{\omega}{2}},$$

wobei
$$\nu' = \frac{L'_s \cdot J'_r}{L'_r \cdot J'_s} \text{ bedeutet.}$$

Die Übergangszahlen μ'_s und μ'_r ändern sich mit der Größe ν' und ω ; mit andern Worten: das Verhältnis von Ring- und Sparrenmomenten in einem Knoten ist abhängig von deren Steifigkeit und dem Zentriwinkel. Sind die Sparren $i'-i''$ steifer als der Zwischenring $i'-1, i', i'+1$, so wird μ'_s groß und μ'_r klein. Ist der Winkel zwischen den Ringstäben klein, so wird μ'_s groß und μ'_r klein.

Bei vielseitigen Kuppeln ist ω klein und ebenso das Verhältnis

$$\frac{M'_{i'}}{M_i^0}$$

Die Sparren werden gewöhnlich steifer als die Zwischenringe ausgebildet. Dann wird dieses Momentenverhältnis noch kleiner und der Fehler, der durch die Vernachlässigung der Biegemomente der Zwischenringe entsteht, weiter reduziert.

5. Einfluß der Neigung der Querschnitt-Hauptachsen der Ringstäbe

a) Geneigter Schlußringquerschnitt.

Das Gleichgewicht der Biegemomente in der Meridianebene im Knotenpunkt i liefert:

$$M_i^s - \left[(M'_{i_x} + M''_{i_x}) \cos \Theta + (M'_{i_y} + M''_{i_y}) \sin \Theta \right] \cdot \sin \frac{\omega}{2} = 0$$

wobei Θ den Neigungswinkel der Profil- x -Achse zur Waagrechten (Abb. 43) bedeutet.

Für $\Theta = 0$ folgt:

$$M_i^s - (M'_{i_x} + M''_{i_x}) \sin \frac{\omega}{2} = 0$$

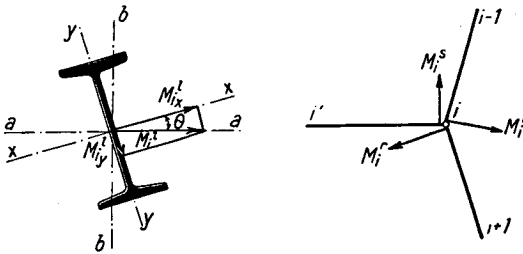


Abb. 43

Wird der Schlußring so angeordnet, daß die x -Achse waagrecht liegt, so fallen die Ringbiegemomente M_{iy}^l und M_{iy}^r in bezug auf die y -Achse aus der Momentengleichgewichtsgleichung.

Für $\Theta = \frac{\pi}{2}$ folgt:

$$M_i^s - (M_{iy}^l + M_{iy}^r) \sin \frac{\omega}{2} = 0$$

Wird der Schlußring so angeordnet, daß die x -Achse lotrecht steht, so fallen die Ringbiegemomente M_{ix}^l und M_{ix}^r in bezug auf die x -Achse aus der Momentengleichgewichtsgleichung.

Bei der ersten Anordnung des Schlußringes ist das Sparrenbiegemoment M^s im Gleichgewicht mit den Ringbiegemomenten M_{ix}^l und M_{ix}^r in bezug auf die maximale Trägheitsachse $x-x$ des Ringprofils.

Die zweite Anordnung des Schlußringes mit der x -Achse lotrecht, ist ungünstig, da das Sparrenbiegemoment M^s im Gleichgewicht mit den Ringbiegemomenten M_{iy}^l und M_{iy}^r in bezug auf die minimale Trägheitsachse $y-y$ des Ringstabprofils steht. Diese Anordnung ist unwirtschaftlich. Die steifen Ringe sollen so angeordnet sein, daß sie das Spannungsmoment in der maximalen Widerstandsrichtung aufnehmen können.

Bei einer mehrstöckigen Kuppel wird der obere Sparrenstab, der mit dem Schlußring und der Laterne im Scheitel der Kuppel angeschlossen ist, gewöhnlich so flach, daß zwecks Vereinfachung der Konstruktion die Ringstäbe nach Abb. 44 angeordnet werden,

mit der Profilachse $x-x$ um einen Winkel Θ zur Waagrechten geneigt. Die Berechnung wird weiter vereinfacht, indem man statt mit M_{ix} und M_{iy} mit einem, in bezug auf eine neue waagrechte Achse $a-a$ resultierenden Moment M_i rechnet, das in folgender Beziehung mit M_{ix} und M_{iy} steht:

$$M_i = M_{ix} \cos \Theta + M_{iy} \sin \Theta$$

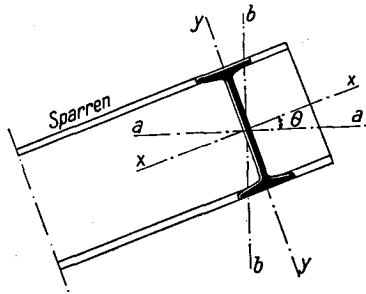


Abb. 44

Damit verschwindet der Winkel Θ aus der Gleichgewichtsgleichung

$$M_i^s - (M_i^l + M_i^r) \sin \frac{\omega}{2} = 0$$

b) Geneigter Zwischenringquerschnitt.

Die Momentengleichgewichtsgleichung in der Meridianebene lautet:

$$M_{iv}^0 - M_{iv}^u - \left[(M_{iv_x}^l + M_{iv_x}^r) \cos \Theta' + (M_{iv_y}^l + M_{iv_y}^r) \sin \Theta' \right] \sin \frac{\omega}{2} = 0 \quad (73)$$

wobei Θ' den Neigungswinkel der x -Achse des Ringsprofils zur Waagrechten bedeutet. Wird dieser Neigungswinkel gleich Null, so lautet die Gleichgewichtsgleichung

$$M_{iv}^0 - M_{iv}^u - (M_{iv_x}^l + M_{iv_x}^r) \cdot \sin \frac{\omega}{2} = 0 \quad (74)$$

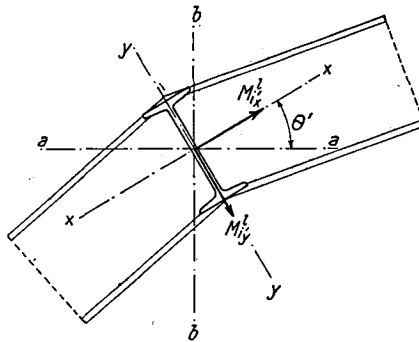


Abb. 45

Der Bieungsanteil der Ringstäbe wird durch die maximale Bieungssteifigkeit (EJ_x) des I-Profiles aufgenommen. Dies ist die wirtschaftlichste Anordnung. Muß aber aus konstruktiven Gründen darauf verzichtet werden, so kann das Momentengleichgewicht in einer zur Gleichung (74) ähnlichen Form angeschrieben werden.

$$M_{iv}^0 - M_{iv}^u - (M_{iv}^l + M_{iv}^r) \sin \frac{\omega}{2} = 0 \quad (75)$$

wobei M_{iv}^l und M_{iv}^r die Bieungsmomente in bezug auf die waagrechte Achse $a-a$ bedeuten. Sie stehen zu

$M_{iv,x}^l$, $M_{iv,y}^l$, $M_{iv,x}^r$ und $M_{iv,y}^r$ in folgenden Beziehungen

$$M_{iv}^l = M_{iv,x}^l \cos \Theta' + M_{iv,y}^l \sin \Theta'$$

und

$$M_{iv}^r = M_{iv,x}^r \cos \Theta' + M_{iv,y}^r \sin \Theta'$$

Wir stellen fest, daß die wirtschaftlichste Anordnung der Schluß- und Zwischenringstäbe diejenige mit der maximalen Trägheitsachse des Profiles in waagrechter Richtung ist, also $\Theta' = 0$.

6. Zahlenbeispiel

Als Beispiel werden für den Fall einer 12seitigen Kuppel

($\omega = 30^\circ$) mit $\nu' = \frac{L'_s \cdot J'_r}{L'_r \cdot J'_s} = 1$ folgende Verhältnisse berechnet:

Fall a)

$$\mu'_s = \frac{1}{1 + 1,5 \nu' \sin^2 \frac{\omega}{2}} = \frac{1}{1 + 1,5 \cdot 1 \cdot (0,2588)^2} = 0,990$$

$$\mu'_r = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\nu'} + 2 \sin^2 \frac{\omega}{2}} = \frac{0,2588}{\frac{4}{3} \cdot 1,0 + 2(0,2588)^2} = 0,176$$

Fall b)

$$\mu'_s = \frac{1}{1 + 2 \nu' \sin^2 \frac{\omega}{2}} = 0,882$$

$$\mu'_r = \frac{\sin \frac{\omega}{2}}{\frac{1}{\nu'} + 2 \sin^2 \frac{\omega}{2}} = 0,228$$

Aus beiden Fällen ergibt sich für $\nu' = 1$:

M''_i liegt zwischen 0,990 und 0,882 M_i^0 ,

M'_r „ „ 0,176 „ 0,228 M_i^0

Je kleiner ν' ist, umso kleiner wird der Einfluß der Ringbiegungsmomente verglichen mit demjenigen der Sparrenbiegungsmomente. In den praktischen Fällen liegt ν' meistens unterhalb 1. Es zeigt sich also an Hand des Zahlenbeispiels, daß verglichen mit dem Sparrenbiegungsmoment das Schlußringbiegungsmoment rund doppelt so groß wird, während dasjenige der Zwischenringe nur 20 % beträgt. Die Biegungsmomente der Zwischenringe erreichen also nur rund 10 % der Schlußringbiegungsmomente.

IV. Berechnung der Schwedlerkuppel mit biegungssteifen Sparren und Ringen bei gelenkig angeschlossenen Diagonalen

1. Grundsysteme

An den steifen Ringstabanschlüssen entstehen Biegemomente X_i in der Meridianebene und Y_i in der Horizontalebene.

Wir gehen nun daran, diese Einspannmomente aufzusuchen und die dadurch bedingten Stabkräfte und Spannungen zu berechnen. Wir führen zunächst ein Grundsystem ein und lassen die Biegemomente X_i und Y_i an den Ringstabanschlüssen als unbekannte Kräfte angreifen.

a) Statisch bestimmtes Grundsystem.

Als statisch bestimmtes Grundsystem wird die Kuppel mit gelenkigen Stabverbindungen in den Knoten betrachtet. Bei n Sparren und $(m + 1)$ Ringen bzw. m Stockwerken wirken infolge einer unsymmetrischen Belastung $2n \cdot m$ überzählige Momente X_i und Y_i auf die Kuppel, die aus ebensovielen Elastizitätsgleichungen ermittelt werden müssen.

Für eine 12seitige und 3stöckige Kuppel ($n=12$ und $m=3$) wird die Anzahl der zu bestimmenden Anschlußmomente 72. Durch die Umgruppierung einer einzelnen Knotenlast erhält man nach dem Vorgang im früheren Abschnitt vier Belastungsfälle.

Beim ersten und zweiten Belastungsfall werden je 12 Elastizitätsgleichungen für die Knotenmomente des belasteten und benachbarten Sparrens 1— A und 2— B (Abb. 46) in folgender Form aufgestellt:

$$\begin{aligned}
 & a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot X_2 + a_{1y_1} \cdot Y_1 + a_{1y_2} \cdot Y_2 + a_{11'} \cdot X_{1'} + a_{12'} \cdot X_{2'} \\
 & + a_{1y_1'} \cdot Y_{1'} + a_{1y_2'} \cdot Y_{2'} + a_{11''} \cdot X_{1''} + a_{12''} \cdot X_{2''} + a_{1y_1''} \cdot Y_{1''} \\
 & + a_{1y_2''} \cdot Y_{2''} + a_{10} = 0
 \end{aligned} \tag{76}$$

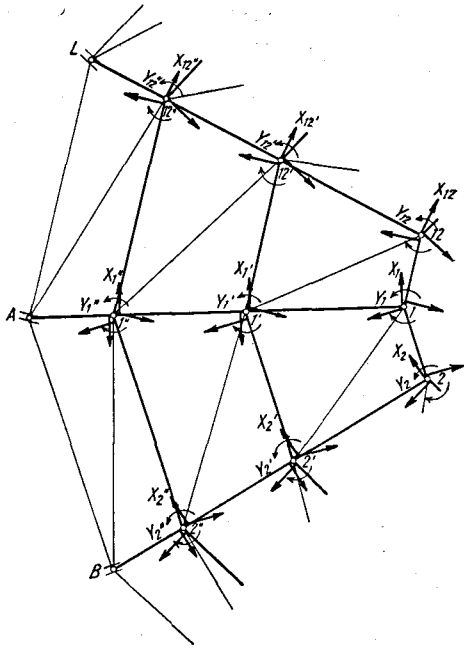
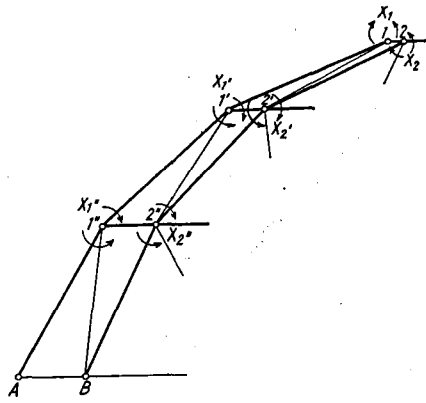


Abb. 46

Hierin bedeutet:

- a_{11} Die Winkeländerung des Knotenpunktes 1 infolge Belastung des statisch bestimmten Hauptsystems mit Moment $X_1 = -1$.
- a_{1y_1} Die Winkeländerung des Knotens 1 in der senkrechten Durchmesserenebene infolge Belastung des statisch bestimmten Grundsystems mit waagrechttem Moment $Y_1 = -1$.
- a_{10} Die Verschiebung des Angriffspunktes der äußeren Last P in Richtung und im Sinne dieser Last infolge einer Belastung des statisch bestimmten Grundsystems mit $X_1 = -1$.

Die Berechnung der Vor- und Belastungszahlen erfolgt nach der virtuellen Arbeitsgleichung unter Vernachlässigung des Querkraftgliedes.

$$1 \cdot a_{ik} = \int M_i M_k \frac{ds}{EJ} + \sum S_i S_k \frac{L}{EF}$$

Beim dritten und vierten Belastungsfall müssen je 18 Elastizitätsgleichungen für die Knotenmomente des belasteten Sparrens 1—A und die der benachbarten Sparren 12—L und 2—B aufgestellt werden (Abb. 47).

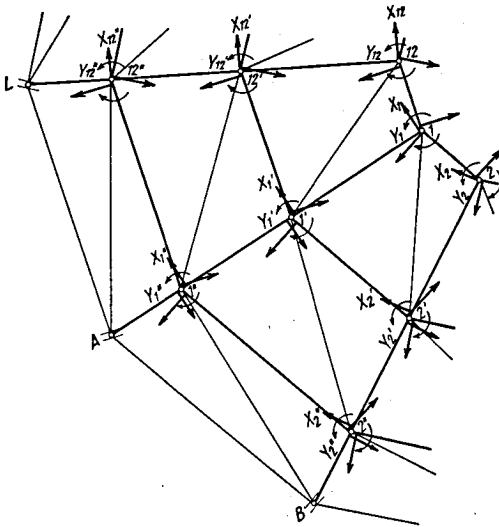


Abb. 47

Trotz der Umgruppierung der Belastung führt die Wahl des statisch bestimmten Systems zu einer großen Anzahl von Elastizitätsgleichungen. Die Lösung solcher Gleichungen ist sehr unständig und fehlerempfindlich.

b) Statisch unbestimmte Grundsysteme.

Man benützt die im zweiten Abschnitt behandelte Kuppel mit steifen Sparren als statisch unbestimmtes Hauptsystem. Die Anzahl der Elastizitätsgleichungen wird dadurch bedeutend vermindert; dagegen erfordert die Berechnung der Vor- und Belastungszahlen a_{ik} und a_{ko} gewöhnlich mehr Arbeit als bei einem statisch bestimmten Grundsystem.

Der Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, daß man gleich unmittelbar die Zahlenwerte erhält, die man sonst als Differenzen sehr großer, nahezu gleicher Zahlen zu bestimmen hätte.

Die Anzahl der unbekanntenen Größen, bezw. der Elastizitätsgleichungen einer Kuppel mit n Seiten und m Stockwerken wird von $2 \cdot n \cdot m$ auf $n \cdot (m + 1)$ vermindert, also für die 12seitige und 3stöckige Kuppel von 72 auf 48.

Nach der Belastungsumordnung einer Knoteneinzellast erhält man für den ersten und zweiten Belastungsfall (Abb. 48) je acht Elastizitätsgleichungen von der Form:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{1y_1} Y_1 + a_{1y_2} Y_2 + a_{1y_1'} Y_1' + a_{1y_2'} Y_2' + a_{1y_1''} Y_1'' + a_{1y_2''} Y_2'' + a_{10} = 0 \quad (77)$$

Für die Gleichung

$$1 \cdot a_{ik} = \int M_i M_k \frac{ds}{EJ} + \sum S_i S_k \frac{L}{EF}$$

sind die Momente und Stabkräfte des statisch unbestimmten Hauptsystems einzusetzen.

Der kürzeste und einfachste Weg zur Bestimmung der Vorzeichen a_{ik} und der Belastungsglieder a_{io} des statisch unbestimmten Grundsystems besteht in der Anwendung des sogenannten Reduktionssatzes²⁹⁾.

²⁹⁾ Pasternak, P.: Berechnung vielfach statisch unbestimmter, biege-fester Stab- und Flächentragwerke. I. Teil: Dreigliedrige Systeme, S. 43. Zürich 1927.

Die Anwendung dieses Verfahrens erspart viel mechanische Rechenarbeit. Dieses Ersparnis wird umso größer, je höher die Anzahl der statisch unbestimmten Größen des Systems ist³⁰⁾.

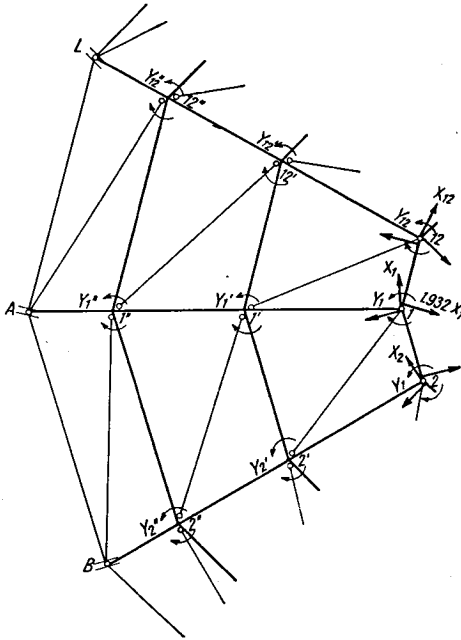


Abb. 48

Für ein n -fach statisch unbestimmtes Hauptsystem lautet die Arbeitsgleichung:

$$\sum P_i \cdot \delta_{ik}^{(n)} = \int M_i^{(n)} M_k^{(n)} \frac{ds}{EJ} + \int N_i^{(n)} N_k^{(n)} \frac{ds}{EF} + \int Q_i^{(n)} Q_k^{(n)} \frac{ds}{GF} \quad (78)$$

Ist dasselbe System m -fach statisch unbestimmt, so lautet diese Gleichung nach dem Reduktionssatz:

$$\sum P_i \cdot \delta_{ik}^{(n)} = \int M_i^{(n)} M_k^{(m)} \frac{ds}{EJ} + \int N_i^{(n)} N_k^{(m)} \frac{ds}{EF} + \int Q_i^{(n)} Q_k^{(m)} \frac{ds}{GF}, \quad (79)$$

³⁰⁾ Worch, G.: Beispiele zur Anwendung des Reduktionssatzes. Beton und Eisen, Jahrgang 1924, S. 39. — Über Rechenproben bei der Berechnung vielfach statisch unbestimmter Systeme. Der Bauingenieur 1925, S. 554.

d. h. man kann den einen der Werte M , N und Q aus einem beliebigen, z. B. m -fach statisch unbestimmten System nehmen. Man setzt häufig $m = 0$, d. h. man berechnet die Werte $M^{(m)}$, $N^{(m)}$ und $Q^{(m)}$ für das statisch bestimmte Grundsystem. Die Vorzahlengleichung lautet dann:

$$a_{ik}^{(n)} = \int M_i^{(n)} M_k^{(o)} \frac{ds}{EJ} + \sum S_i^{(n)} S_k^{(o)} \cdot \frac{L}{EF} \quad (80)$$

wobei $M_i^{(n)}$ und $S_i^{(n)}$ für das n -fach statisch unbestimmte, $M_k^{(o)}$ und $S_k^{(o)}$ für das statisch bestimmte Grundsystem zu nehmen sind.

Bei dem dritten und vierten Belastungsfall sind je 12 Elastizitätsgleichungen für die Ermittlung der Knotenmomente der drei Sparren 12—L, 1—A und 2—B erforderlich (Abb. 49).

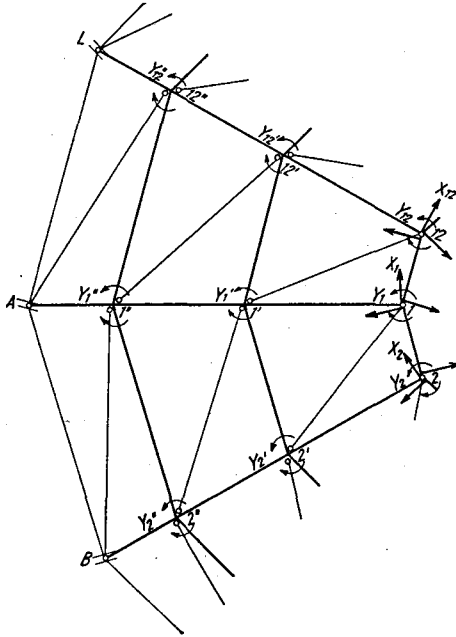


Abb. 49

Wie aus dem Beispiel einer 12seitigen und 3stöckigen Kuppel hervorgeht, ist die Anzahl der aufzulösenden Elastizitätsgleichungen trotz der Annahme eines statisch unbestimmten Grundsystems noch zu groß.

Durch Verwendung von mehreren statisch unbestimmten Hauptsystemen erhält man einzelne, von einander unabhängige, leichter lösbare Gleichungsgruppen.

Nachdem man die Schwedlerkuppel mit biegungssteifen Sparren und gelenkig angeschlossenen Ringen und Diagonalen behandelt und die Sparrenmomente und Stabkräfte dafür bestimmt hat, geht man eine Etappe weiter, indem der steife Anschluß des Laternenringes mit den steifen Sparren berücksichtigt wird, während alle anderen Ring- und Strebenanschlüsse noch gelenkig bleiben. Für die Berechnung dieses Falles wird die statisch unbestimmte Kuppel mit steifen Sparren vorausgesetzt.

Hat man das Spannungsbild dieses Falles für beliebige Belastung bestimmt, so kann der steife Anschluß des nächsten Ringes in einer zweiten Etappe berücksichtigt werden, indem als Hauptsystem die Kuppel mit biegungssteifen Sparren und Schlußring angesehen wird.

2. Berechnung der Schwedlerkuppel mit biegungssteifen Sparren und biegungssteifem Schlußring

Der Einfluß des steifen Anschlusses der Zwischenringstäbe ist, wie im vorangehenden Abschnitt bewiesen wurde, viel geringer als derjenige des Schlußringes. Wir berechnen zunächst die Biegunsmomente und die Stabkräfte der Kuppel mit biegungssteifen Sparren und biegungssteifem Schlußring.

Das Problem unterscheidet sich von der im zweiten Abschnitt behandelten Kuppel mit biegungssteifen Sparren und gelenkig angeschlossenen Ringen und Diagonalstäben dadurch, daß hier an jedem Sparrenkopf bzw. jedem Schlußringknoten zwei, in bezug auf die Querschnitt-Hauptachsen $x-x$ und $y-y$ (oder einfachheitshalber in bezug auf die waagrechten und lotrechten Achsen $a-a$ und $b-b$) unbekannte Biegunsmomente X_i und Y_i zu bestimmen sind. Die Torsionssteifigkeit des Schlußringes, sowie die seitliche Verbiegung der Sparren sind wegen ihrer Geringsfügigkeit vernachlässigbar. Für I -Profil ist die Biegungssteifigkeit (JE) 400 mal größer als seine Torsionssteifigkeit (J_dG).

Als Grundsystem dient die Kuppel mit biegungssteifen Sparren und gelenkig angeschlossenen Ringen und Streben. Für dieses System muß man die Sparrenmomente und Stabkräfte für P_o , $X_i=1$ und $Y_i=1$ kennen. Die Elastizitätsgleichungen zur Bestimmung der Sparrenmomente sind bis auf die Belastungszahlen a_{io} für alle drei Lasten P_o , $X_i=1$ und $Y_i=1$ gleich. Sind die Gleichungen für P_o einmal aufgelöst, so braucht man für jede neue Belastung nur die Zahl a_{io} zu berechnen und in diesen schon aufgelösten Gleichungen zu ersetzen, um die neuen Sparrenmomente zu bekommen.

Bei der Berechnung der Vor- und Belastungszahlen $a_{ik}^{(n)}$ und $a_{io}^{(n)}$ ist der Reduktionssatz von großem Nutzen. Besonders für die Berechnung von $a_{io}^{(n)}$ wird dieser nur als die Summe von $\left(S_i^{(n)} S_o^{(o)} \frac{L}{EF}\right)$, wobei $S_i^{(n)}$ die Stabkraft des statisch unbestimmten und $S_o^{(o)}$ die Stabkraft des statisch bestimmten Systems sind, berechnet. Für das statisch bestimmte System sind für eine Knotenbelastung nur wenige Stäbe beansprucht. Die Summe $\left(S_i^{(n)} S_o^{(o)} \frac{L}{EF}\right)$ erstreckt sich also nur auf diese Stäbe, während ohne den Reduktionssatz die Summe $\left(S_i^{(n)} S_o^{(n)} \frac{L}{EF}\right)$ für alle beanspruchten Stäbe des statisch unbestimmten Systems berechnet werden müßten. Das Integral von $\left(M_i^{(n)} M_o^{(o)} \frac{ds}{EJ}\right)$ fällt bei der Anwendung des Reduktionssatzes und Verwendung der statisch bestimmten Kuppel bei der Berechnung der Belastungszahl $a_{io}^{(n)}$ weg.

Eine weitere Vereinfachung der Berechnung der Vor- und Belastungszahlen wird durch die Belastungs-Umordnung erzielt. Infolge der zyklischen Symmetrie der Kuppel und der Symmetrie oder Antimetrie der Belastung werden einige Teile der Kuppel symmetrisch oder antimetrisch beansprucht. Die Berechnung von a_{ik} und a_{io} wird deswegen nur für einen Teil der Kuppel durchgeführt.

Für die 12seitige Kuppel, die von einer Einzelknotenlast beansprucht ist, wird die Berechnung der Summe $\left(S_i S_k \frac{L}{EF}\right)$ für

die erste und zweite Teilbelastung auf einen Viertel, für die dritte und vierte auf die Hälfte der Kuppel beschränkt.

Der Rechnungsgang sowie die Form der Elastizitätsgleichung werden nachfolgend am Beispiel der 12seitigen und 3stöckigen Kuppel für eine lotrechte Einzellast P_1 im Knotenpunkt 1 durchgeführt. Die vier Teilbelastungen werden einzeln behandelt.

I. Teilbelastung (Abb. 50).

Infolge der Symmetrie der Belastung und der zyklischen Symmetrie des Systems sind nur die Anschlußmomente X_1 , X_2 , Y_1 und Y_2 am Kopf des belasteten Sparrens 1—A und des benachbarten 2—B zu bestimmen. Die vier Elastizitätsgleichungen lauten:

$$a_{11}^{(n)} \cdot X_1 + a_{12}^{(n)} \cdot X_2 + a_{1y_1}^{(n)} \cdot Y_1 + a_{1y_2}^{(n)} \cdot Y_2 + a_{10}^{(n)} = 0 \quad (81)$$

$$a_{12}^{(n)} \cdot X_1 + a_{22}^{(n)} \cdot X_2 + a_{2y_1}^{(n)} \cdot Y_1 + a_{2y_2}^{(n)} \cdot Y_2 + a_{20}^{(n)} = 0 \quad (82)$$

$$a_{1y_1}^{(n)} \cdot X_1 + a_{2y_1}^{(n)} \cdot X_2 + a_{y_1y_1}^{(n)} \cdot Y_1 + a_{y_1y_2}^{(n)} \cdot Y_2 + a_{y_10}^{(n)} = 0 \quad (83)$$

$$a_{1y_2}^{(n)} \cdot X_1 + a_{2y_2}^{(n)} \cdot X_2 + a_{y_1y_2}^{(n)} \cdot Y_1 + a_{y_2y_2}^{(n)} \cdot Y_2 + a_{y_20}^{(n)} = 0 \quad (84)$$

Hierin bedeuten

$$a_{11}^{(n)} = \sum S_1^{(n)} \cdot S_1^{(o)} \cdot \frac{L}{EF} + \int M_1^{(n)} \cdot M_1^{(o)} \cdot \frac{ds}{EJ}$$

$$a_{12}^{(n)} = \sum S_1^{(n)} \cdot S_2^{(o)} \cdot \frac{L}{EF} + \int M_1^{(n)} \cdot M_2^{(o)} \cdot \frac{ds}{EJ}$$

$$a_{1y_1}^{(n)} = \sum S_1^{(n)} \cdot S_{y_1}^{(o)} \cdot \frac{L}{EF} + \int M_1^{(n)} \cdot M_{y_1}^{(o)} \cdot \frac{ds}{EJ}$$

$$a_{10}^{(n)} = \sum S_1^{(n)} \cdot S_0^{(o)} \cdot \frac{L}{EF}$$

u. s. w.

Bei der Berechnung der Vorzeichen ist zwecks Vereinfachung folgende Beziehung zu beachten:

$$a_{1y_2} = a_{2y_1}$$

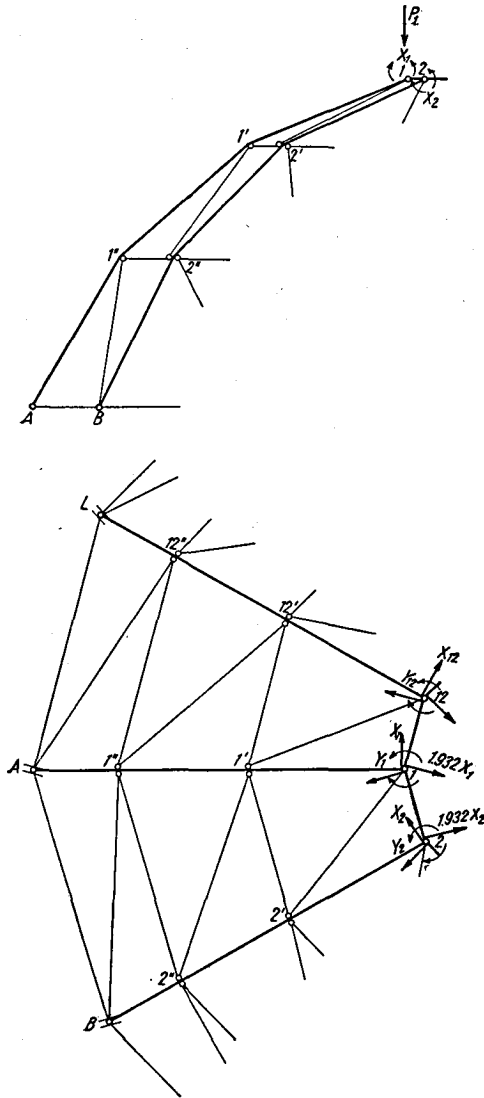


Abb. 50

Für das im früheren Abschnitt behandelte Zahlenbeispiel lauten die Elastizitätsgleichungen (siehe Tafel IV im Anhang):

$$+ 106957,0 X_1 - 104702,4 X_2 + 28649,7 Y_1 - 28649,7 Y_2 - 2544109 = 0 \quad (I)$$

$$- 104702,4 X_1 + 109253,4 X_2 - 28649,7 Y_1 + 28649,7 Y_2 + 2541382 = 0 \quad (II)$$

$$+ 28649,7 X_1 - 28649,7 X_2 + 8934,4 Y_1 - 7274,1 Y_2 - 691453 = 0 \quad (III)$$

$$- 28649,7 X_1 + 28649,7 X_2 - 7274,1 Y_1 + 10594,7 Y_2 + 691453 = 0 \quad (IV)$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$X_1 = + 14,911 \text{ tcm}, \quad X_2 = - 6,789 \text{ tcm},$$

$$Y_1 = + 5,549 \text{ tcm}, \quad Y_2 = - 2,774 \text{ tcm}$$

Für die Sparrenbiegungsmomente $X_{1'}$, $X_{2'}$, $X_{1''}$, und $X_{2''}$ gilt:

$$\begin{aligned} X_{1'} &= X_{1'}^0 + x_{1'1} \cdot X_1 + x_{1'2} \cdot X_2 + y_{1'1} \cdot Y_1 + y_{1'2} \cdot Y_2 \\ X_{2'} &= X_{2'}^0 + x_{2'1} \cdot X_1 + x_{2'2} \cdot X_2 + y_{2'1} \cdot Y_1 + y_{2'2} \cdot Y_2 \\ X_{1''} &= X_{1''}^0 + x_{1''1} \cdot X_1 + x_{1''2} \cdot X_2 + y_{1''1} \cdot Y_1 + y_{1''2} \cdot Y_2 \\ X_{2''} &= X_{2''}^0 + x_{2''1} \cdot X_1 + x_{2''2} \cdot X_2 + y_{2''1} \cdot Y_1 + y_{2''2} \cdot Y_2 \end{aligned} \quad (85)$$

darin bedeuten:

$X_{1'}^0$, $X_{2'}^0$, $X_{1''}^0$ und $X_{2''}^0$ die Biegemomente infolge der Belastung der statisch bestimmten Kuppel durch P ,

$x_{1'1}$, $x_{2'1}$, $x_{1''1}$ und $x_{2''1}$ die Biegemomente infolge der Belastung der statisch bestimmten Kuppel durch $X_1 = 1$,

$y_{1'2}$, $y_{2'2}$, $y_{1''2}$ und $y_{2''2}$ die Biegemomente infolge der Belastung der statisch bestimmten Kuppel durch $Y_2 = 1$

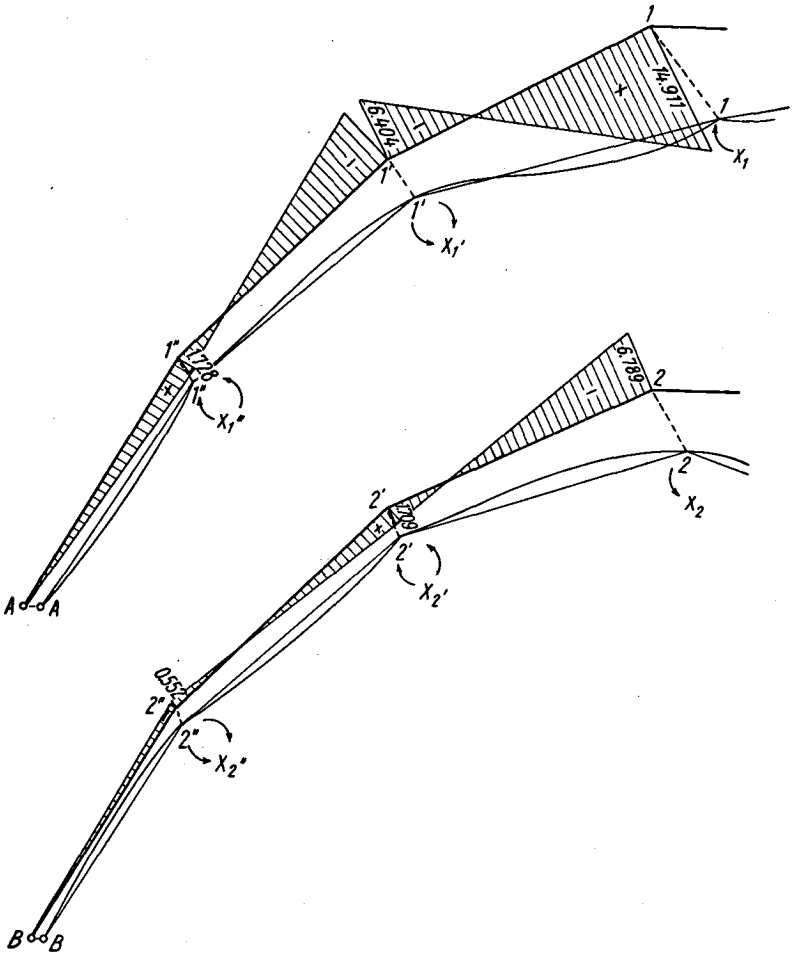
u. s. w.

Wir erhalten:

$$X_{1'} = + 6,404 \text{ tcm}, \quad X_{2'} = - 1,709 \text{ tcm},$$

$$X_{1''} = - 1,728 \text{ tcm}, \quad X_{2''} = + 0,552 \text{ tcm}$$

Das Vorzeichen bezieht sich auf die Richtung der Biegemomenten-Vektoren. Für $X_{1'}$ und $X_{1''}$ unmittelbar oberhalb der Knotenpunkte 1' und 1'', und für X_1 unmittelbar unterhalb des Knotenpunktes 1, gelten die positiven Vorzeichen, wenn der Momentenvektor, von außen nach dem Kuppelzentrum gesehen, nach links gerichtet ist. Für das negative Vorzeichen gilt die entgegengesetzte Richtung.



I-Teilbelastung. Sparren-Biegemomente

Abb. 51

II. Teilbelastung (Abb. 53).

Bei dieser Belastung sind vier unbekannte Biegemomente X_1, X_2, Y_1 und Y_2 zu ermitteln. Die vier Elastizitätsgleichungen sind von der gleichen Form wie diejenigen des ersten Belastungsfalles, die Vor- und Belastungszahlen aber sind verschieden.

Die Berechnung der Vor- und Belastungszahlen erfolgt für diese Teilbelastung in derselben Weise wie bei der ersten Belastung.

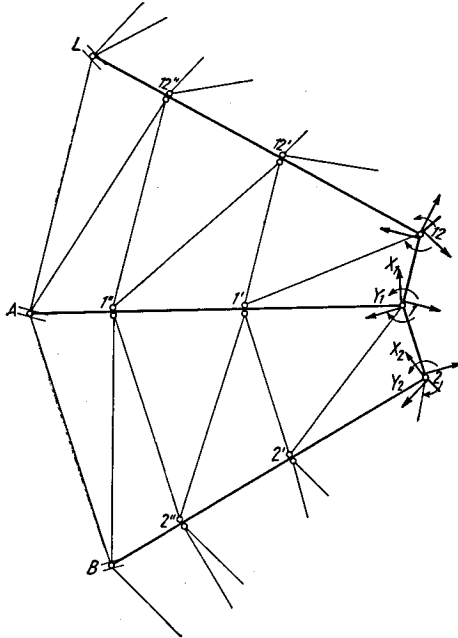


Abb. 53

III. Teilbelastung (Abb. 54).

Infolge der Anordnung der Lasten müssen für diesen Belastungsfall 6 Biegemomente, die je zwei auf die Knoten 12, 1 und 2 wirken, berechnet werden. Die 6 Elastizitätsgleichungen werden in der Form

$$a_{12\ 12} \cdot X_{12} + a_{12\ 1} \cdot X_1 + a_{12\ 2} \cdot X_2 + a_{12y_{12}} \cdot Y_{12} + a_{12y_1} \cdot Y_1 + a_{12y_2} \cdot Y_2 + a_{12\ 0} = 0 \quad (86)$$

aufgestellt.

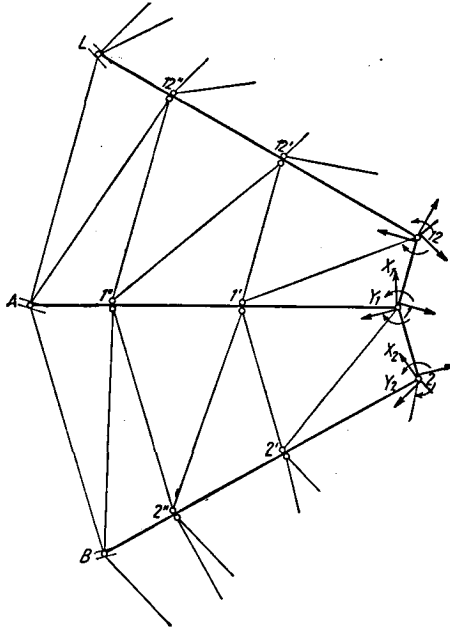


Abb. 54

IV. Teilbelastung.

Dieser Belastungsfall kann durch Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn aus der dritten Teilbelastung gewonnen werden. So ist z. B.

$$X_1 \text{ bei IV} = X_{10} \text{ bei III}$$

$$Y_1 \text{ bei IV} = Y_{10} \text{ bei III}$$

u. s. w.

Durch Superposition aller vier Belastungsfälle erhält man nur den Einfluß des biegesteifen Schlußringes bei Knoteneinlast.

3. Berechnung der Schwedlerkuppel mit biegesteifen Sparren, Schlußring und Zwischenringen

Wir berücksichtigen nun auch noch die Biegesteifigkeit der Zwischenringe, indem wir vom vorangehend berechneten System als Grundsystem ausgehen. Für dieses System werden zuerst die Biegemomente X_i und Y_i sowie die Stabkräfte der Kuppel in-

folge $X_{i'} = 1$ und $Y_{i'} = 1$ bestimmt. Dies erfolgt auf Grund der Gleichungen (81) bis (86), indem hier die Belastungszahlen für $X_{i'} = 1$ bzw. $Y_{i'} = 1$ statt für P eingesetzt werden.

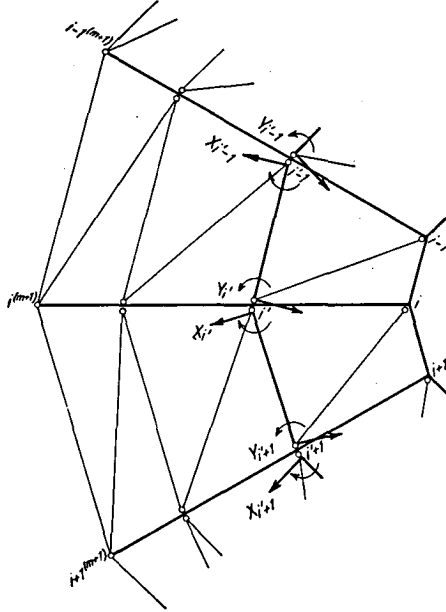


Abb. 55

Nachdem man die Momente und Stabkräfte der Kuppel für $X_{i'} = 1$ und $Y_{i'} = 1$ bestimmt hat, ist der Berechnungsgang analog wie beim Schlußring. Für die Berechnung der Vor- und Belastungszahlen nach der virtuellen Arbeitsgleichung

$$a_{ik}^{(m)} = \int M_i^{(m)} M_k^{(o)} \frac{ds}{EJ} + \sum S_i^{(n)} S_k^{(o)} \frac{L}{EF}$$

sind $M_i^{(m)}$ und $S_i^{(m)}$ die Biegemomente und Stabkräfte des statisch unbestimmten Systems (Kuppel mit steifen Sparren und Schlußring), während $M_k^{(o)}$ und $S_k^{(o)}$ die Biege- und Stabkräfte des statisch bestimmten Systems (Kuppel mit gelenkigen Knoten) darstellen.

Für die behandelte 12seitige Kuppel sind also im ersten und zweiten Belastungsfall je vier Elastizitätsgleichungen folgender Form erforderlich:

$$a_{1'1'} \cdot X_{1'} + a_{1'2'} \cdot X_{2'} + a_{1'y_{1'}} \cdot Y_{1'} + a_{1'y_{2'}} \cdot Y_{2'} + a_{1'0} = 0 \quad (87)$$

Im dritten und vierten Belastungsfall sind je sechs Gleichungen nötig. Diese werden in der Form

$$\begin{aligned} a_{12'y_{12'}} \cdot X_{12'} + a_{12'1'} \cdot X_{1'} + a_{12'y_{2'}} \cdot X_{2'} + a_{12'y_{12'}} \cdot Y_{12'} \\ + a_{12'y_{1'}} \cdot Y_{1'} + a_{12'y_{2'}} \cdot Y_{2'} + a_{12'0} = 0 \end{aligned} \quad (88)$$

aufgestellt.

Auf diese Weise kann der Einfluß jedes einzelnen biegesteifen Ringes für sich bestimmt werden.

4. Geringfügigkeit des Einflusses der Art der Anschlüsse der Zwischenringstäbe auf die Stabkräfte der Kuppel

Die Art der Anschlüsse der Zwischenringstäbe mit den steifen Sparren hat nur geringen Einfluß auf die Stabkräfte der Kuppel. Sie wird aber wesentlich für die Beanspruchung dieser Ringstäbe selbst. Zum Vergleich nehmen wir folgende beiden Fälle:

Fall a): Bei der Annahme gelenkiger Anschlüsse der Zwischenringstäbe mit den steifen Sparren in i' werden die Sparrenbiegemomente unmittelbar ober- und unterhalb des Knotens i' gleich. Bei der Aufstellung der Elastizitätsgleichungen zur Berechnung des Sparrenbiegemomentes X_0^i werden die Vorzeichen a_{ik} mit den Stabkräften der Kuppel für den Belastungszustand $X_{i'}^0 = X_{i'}^u = 1$ tcm nach der Arbeitsgleichung ermittelt. Die Berechnung dieser Stabkräfte erfolgt mit den Knotenlasten aus den Auflagerdrücken zufolge der Anschlußmomente (Abb. 56).

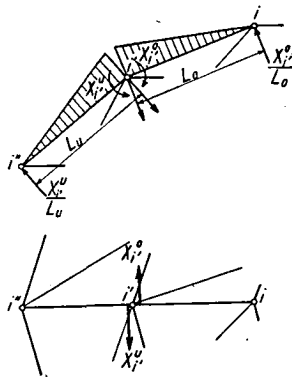


Abb. 56

Fall b): Durch die steifen Anschlüsse der Zwischenringstäbe mit den Sparren werden aber $X_{i'}^0$ und $X_{i'}^u$ ein wenig voneinander verschieden. Der Unterschied zwischen diesen Sparrenmomenten wird durch die steif angeschlossenen Ringstäbe unmittelbar links und rechts von i' aufgenommen (Abb. 57).

Die am Knoten i' angreifenden Sparren und Ringbiegemomente müssen im Gleichgewicht sein.

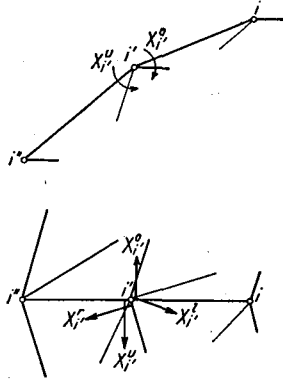


Abb. 57

$$X_{i'}^0 - X_{i'}^u - (X_{i'}^l + X_{i'}^r) \sin \frac{\omega}{2} = 0 \quad \text{oder}$$

$$X_{i'}^u - (X_{i'}^l + X_{i'}^r) \sin \frac{\omega}{2} = X_{i'}^0 \quad (89)$$

$X_{i'}^u$, $X_{i'}^l$ und $X_{i'}^r$ können durch $X_{i'}^0$ (wie im Abschnitt III unter (4), Seite 79) ausgedrückt werden, und zwar

$$X_{i'}^u = \mu'_s \cdot X_{i'}^0 \quad \text{und} \quad X_{i'}^l = X_{i'}^r = \mu'_r \cdot X_{i'}^0$$

Die Elastizitätsgleichungen zur Berechnung von $X_{i'}^0$ sind identisch mit denjenigen des Falles a) der Kuppel mit gelenkig angeschlossenen Zwischenringstäben mit steifen Sparren. Die Vorzeichen beider Fälle sind aber verschieden, da hier a_{ik} mit den Stabkräften der Kuppel für den Belastungszustand

$$X_{i'}^0 = \mu'_s X_{i'}^0 + 2\mu'_r X_{i'}^0 \cdot \sin \frac{\omega}{2} = 1 \text{ tcm}$$

zu ermitteln ist.

Die Berechnung dieser Stabkräfte erfolgt wie in a) durch Ersetzen der Sparren- und Ringbiegemomente durch ihre Auflagerdrücke, die in den Knotenpunkten als äußere Belastung wirkend betrachtet werden.

Die Stabkräfte unterscheiden sich von denjenigen des Falles a), indem hier für

$$\left(\mu'_s \cdot X_{iv}^0 + 2\mu'_r \cdot X_{iv}^0 \sin \frac{\omega}{2} \right) = 1$$

statt für $X_{iv}^u = 1$ tcm berechnet werden. Für $X_{iv}^0 = 1$ sind die Stabkräfte beider Fälle identisch. Es bleibt also noch zu zeigen, wie sich die Stabkräfte S_{iv} der Kuppel infolge

$$\left(\mu'_s X_{iv}^0 + 2\mu'_r X_{iv}^0 \sin \frac{\omega}{2} \right) = 1$$

gegenüber denjenigen S_{iv}^u für $X_{iv}^u = 1$ tcm verhalten.

Bezeichnet man mit S_{iv}^0 die Stabkraft für die Belastung $X_{iv}^0 = 1$ tcm

$$S_{iv}^u \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad X_{iv}^u = 1 \quad "$$

$$S_{iv}^l \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad X_{iv}^l = 1 \quad "$$

und $S_{iv}^r \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad X_{iv}^r = 1 \quad "$

so kann die gesamte Stabkraft infolge

$$\mu'_s X_{iv}^0 + (\mu'_l X_{iv}^0 + \mu'_r X_{iv}^0) \sin \frac{\omega}{2} = 1$$

wie folgt superponiert werden:

$$S_{iv} = \mu'_s \cdot S_{iv}^u + (\mu'_l S_{iv}^l + \mu'_r \cdot S_{iv}^r) \sin \frac{\omega}{2}$$

Die Kräfte S_{iv}^l und S_{iv}^r , die durch die Knotenlasten $\frac{1}{L_r}$ verursacht werden, sind nur von der Ringstablänge L_r abhängig. Je größer diese Länge, je kleiner werden die Knotenlasten bzw. die Stabkräfte (Abb. 58).

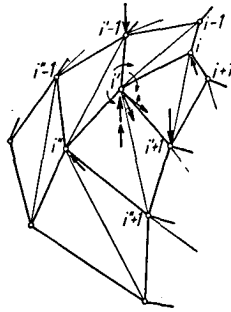


Abb. 58

Bei der Belastung

$$\mu'_s X_{ii}^0 + (\mu'_i X_{ii}^0 + \mu'_r X_{ii}^0) \sin \frac{\omega}{2} = 1$$

bezw.
$$\mu'_s + (\mu'_i + \mu'_r) \sin \frac{\omega}{2} = 1$$

sind die Stabkräfte S_{ii}^I und S_{ii}^r noch mit $\mu'_i \cdot \sin \frac{\omega}{2}$ und $\mu'_r \cdot \sin \frac{\omega}{2}$ zu multiplizieren. μ'_i und μ'_r sind aber, wie in Abschnitt III unter (4) bewiesen wurde, kleine Verhältniszahlen, die durch die Multiplikation mit $\sin \frac{\omega}{2}$ noch viel geringer werden und deshalb vernachlässigt werden dürfen. Die Stabkraft S_{ii} ist dann nur von $\mu'_s \cdot X_{ii}^0$ abhängig.

$$S_{ii} = \mu'_s \cdot S_{ii}''$$

Die Stabkräfte beider Fälle a) und b) verhalten sich also wie

$$\frac{S_{ii}^0 + S_{ii}''}{S_{ii}^0 + \mu'_s \cdot S_{ii}''}$$

μ'_s liegt nach S. 79 zwischen

$$\frac{1}{1 + 1,5 u' \sin^2 \frac{\omega}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1 + 2 v' \sin^2 \frac{\omega}{2}}$$

wobei $v' = \frac{L'_s \cdot J'_r}{L'_r \cdot J'_s}$ bedeutet. Wird ω klein (bei größerer Seiten-

zahl der Kuppel) und sind die Sparren steifer als der Zwischenring, wie es in der Regel ausgeführt wird, so ist μ'_s wenig von 1 verschieden.

Zahlenbeispiel:

Im durchgerechneten Beispiel einer dreistöckigen und zwölfseitigen Kuppel wird:

Für den oberen Zwischenring i' bei voller Einspannung des Rings mit den Sparren:

$$\begin{aligned}\mu'_s &= 0,911 \\ \mu'_r &= 0,172 \\ \sin \frac{\omega}{2} &= 0,2588\end{aligned}$$

und

$$\mu'_r \cdot \sin \frac{\omega}{2} = 0,172 \cdot 0,2588 = 0,0445$$

Für den unteren Zwischenring i'' ist bei voller Einspannung mit dem Sparren:

$$\begin{aligned}\mu''_s &= 0,964 \\ \mu''_r &= 0,0703\end{aligned}$$

und

$$\mu''_r \cdot \sin \frac{\omega}{2} = 0,0703 \cdot 0,2588 = 0,018$$

Folgerung: Die Art der Anschlüsse der Zwischenringe (gelenkig oder eingespannt) ist also von sehr geringem Einfluß auf die Stabkräfte der Kuppel.

5. Stabkräfte der Kuppel mit biegingssteifen Sparren und Ringen

Die Stabkräfte ergeben sich durch Superposition der Werte am Grundsystem infolge der äußeren Knotenlasten und der statisch unbestimmten Anschlußmomente. Man kann auch von einem statisch unbestimmten Grundsystem ausgehen und die Endwerte aus beiden Rechnungen zur Kontrolle miteinander vergleichen.

$$\begin{aligned}S &= S_0 + S_1 \cdot X_1 + S_2 X_2 + \dots + S_n \cdot X_n \\ &+ S_{1'} X_{1'} + S_{2'} X_{2'} + \dots + S_{n'} X_{n'} \\ &+ S_{1''} X_{1''} + S_{2''} X_{2''} + \dots + S_{n''} X_{n''} + \text{usw.} \quad (89)\end{aligned}$$

Auf Tafel V des Anhangs werden die Stabkräfte einer zwölfseitigen und dreistöckigen Kuppel mit steifen Sparren und Schlußring berechnet.

6. Spannungen

Für die als gelenkig angeschlossenen Stäbe sind die Spannungen über der ganzen Länge konstant und gleich $\frac{S}{F}$. Für die biegeungssteifen Stäbe sind die Spannungen von Schnitt zu Schnitt verschieden, je nach dem Verlauf des Biegemomentes.

$$\sigma = \frac{S}{F} \pm \frac{M}{W}$$

7. Knotenverschiebungen

Die Knotenverschiebungen werden zerlegt in die lotrechte Komponente δ_z , in die horizontale Komponente der Meridianebene δ_x und in die horizontale Komponente senkrecht dazu δ_y . Eine Verschiebung δ_i des Knotenpunktes i des statisch unbestimmten Systems wird

$$\begin{aligned} \delta_i = & \delta_{i0} + \delta_{i1} \cdot X_1 + \delta_{i2} \cdot X_2 + \dots + \delta_{in} \cdot X_n \\ & + \delta_{i1'} \cdot X_{1'} + \delta_{i2'} \cdot X_{2'} + \dots + \delta_{in'} \cdot X_{n'} \\ & + \delta_{i1''} \cdot X_{1''} + \delta_{i2''} \cdot X_{2''} + \dots + \delta_{in''} \cdot X_{n''} \\ & + \dots \end{aligned} \quad (90)$$

Die Vorzahlen δ_{i1} , $\delta_{i1'}$ und δ_{in} stellen die Verschiebung des Knotenpunktes i infolge

$$X_1 = 1, \quad X_{1'} = 1 \quad \text{und} \quad X_n = 1 \text{ dar.}$$

Sie ergeben sich mit der virtuellen Arbeitsgleichung zu:

$$\delta_{in} = \sum S_i S_n \frac{L}{EF} + \int M_i M_n \frac{ds}{EJ}$$

Für Belastungsfall I wird

$$\delta_{i0z} = + 94,387 - 2 \cdot 13,362 + 2 \cdot 0,0118 = + 67,686 \text{ cm}$$

$$\delta_{1z} = \delta_{i0z} + \delta_{1i} M_i$$

$$= + 67,686 - \frac{1}{4 \cdot 2150000} \left[23715072 \cdot \frac{X_1}{14,911} + 23713092 \cdot \frac{X_2}{6,789} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &+ 1448\,664 \cdot \overline{X_1'} + 1446\,983 \cdot \overline{X_2'} - 181\,869 \cdot \overline{X_1''} \\
 &- 181\,738 \cdot \overline{X_2''} + 653\,0996 \left(\overline{Y_1} + \overline{Y_2} \right) \Big] \\
 &= + 67,686 - 67,486 = + 0,20 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

8. Zusammenfassung

Die Verbindung der Ringe mit den Sparren ist im ersten und zweiten Abschnitt als gelenkartig, im vorliegenden aber als starr betrachtet worden. Die Anordnung der biegungssteifen Anschlüsse ist im allgemeinen zweckmäßig und bei der konstruktiven Durchbildung der steifen Knoten üblich. Zwei benachbarte Sparren bilden in diesem Falle mit dem entsprechenden Ringabschnitt einen räumlichen Rahmenträger. Die Kuppel stellt also einen sogenannten räumlichen Stockwerkrahmen dar. Die Ringe bilden nicht mehr eine geschlossene Kette, sondern vielmehr einen durchlaufenden Träger auf elastisch drehbaren und senkbaren Stützen.

Der Einfluß der steifen Ringe hängt stark von deren Steifigkeit und von der Anzahl der Ringseiten ab. Es ist bewiesen, daß sich die Spannungsverteilung bei einseitigem Lastangriff umso gleichmäßiger vollzieht, je steifer der Schlußring ausgebildet wird.

Es zeigt sich, daß biegungssteif verbundene Zwischenringstäbe als gelenkig angeschlossen in die Berechnung eingeführt werden können, indem dadurch die Stabkräfte der Kuppel nur geringfügig beeinflußt werden. Für die Untersuchung der Spannungen der Zwischenringstäbe können ihre Biegemomente näherungsweise mit genügender Genauigkeit nach der Formel

$$M_{ii}^r = \mu_r' \cdot M_{ii}^0$$

berechnet werden. μ_r' hängt von der Art des Anschlusses des Ringstabes mit dem benachbarten Sparren ab. Bei dem behandelten Zahlenbeispiel der zwölfseitigen Kuppel wird $\mu_r' = 0,172$, also für Fall I:

$$M_{11}^0 = 6,404 \text{ tcm: } M_{11}^r = 0,172 \cdot 6,404 = 1,102 \text{ tcm}$$

Wollte man aber die steifen Anschlüsse der Ringstäbe in der Berechnung berücksichtigen, so würde zwar der Gang der Untersuchung der gleiche bleiben, die Berechnung aber an Einfachheit und Übersichtlichkeit verlieren. Der Gewinn an Genauigkeit dürfte aber den größeren Arbeitsaufwand kaum rechtfertigen.

Das Zahlenbeispiel zeigt für die erste Teilbelastung

$$(P_1 = P_4 = P_7 = P_{10} = 1 \text{ t})$$

viel gleichmäßigere Stabkräfte als für die Kuppel mit steifen Sparren und gelenkig angeschlossenen Ringen. Der steife Schlußring bewirkt eine gleichmäßige Verteilung der Kräfte auf die ganze Kuppel. Die Stabkräfte der verschiedenen Teile der Kuppel weichen nicht stark voneinander ab. So sind z. B. die Schlußringstabkräfte $S_{1-2} = -1,259 \text{ t}$, $S_{2-3} = -1,224 \text{ t}$ und $S_{3-4} = -1,271 \text{ t}$. Ebenso nähern sich die Stabkräfte der Fußringe und Zwischenringe, die in der Berechnung als gelenkig angeschlossen angenommen sind:

$$\begin{aligned} S_{A-B} &= + 0,321 \text{ t}, & S_{B-C} &= + 0,286 \text{ t}, & S_{C-D} &= + 0,286 \text{ t} \\ S_{1-2'} &= + 0,657 \text{ t}, & S_{2-3'} &= + 0,624 \text{ t} & \text{und } S_{3-4'} &= + 0,554 \text{ t} \end{aligned}$$

Mit Ausnahme der Stabkräfte der belasteten Sparren weichen diejenigen der andern Sparren wenig voneinander ab.

$$S_{1-1'}(\text{belastet}) = -0,894 \text{ t}, \quad S_{2-2'} = -0,668 \text{ t} \quad \text{und} \quad S_{3-3'} = -0,663 \text{ t}$$

Der obere belastete Ring erfährt Druck, während alle andern Ringe gezogen werden. Die Sparrenstäbe sind alle gedrückt. Die Diagonalkräfte sind sehr klein. Im allgemeinen sind, im Gegensatz zur gelenkigen Kuppel, die Stabkräfte der unteren Zone kleiner als diejenigen der oberen.

Es ist noch zu erwähnen, daß kein konstantes Verhältnis zwischen den Stabkräften der gelenkigen und der steifen Kuppel vorhanden ist, sondern es variiert von Stab zu Stab. Die Stabkräfte des gelenkigen Systems sind unregelmäßig und weichen stark voneinander ab, während diejenigen des steifen Systems regelmäßig und voneinander wenig verschieden sind.

Die Verschiebungen der Knotenpunkte der Kuppel mit biegesteifen Sparren und Ringen sind viel kleiner als diejenigen

der Kuppel mit nur biegungssteifen Sparren. Aus dem Zahlenbeispiel geht hervor, daß die lotrechte Verschiebung des Knotenpunktes I unter Berücksichtigung der steifen Anschlüsse der Schlußringstäbe $+0,20$ cm beträgt, während bei durchwegs gelenkigen Ringstäben im Abschnitt II dafür $7,281$ cm berechnet wurde.

V. Modellversuche

1. Allgemeines

Zur Kontrolle der in den vorangehenden Abschnitten auf rein theoretischem Wege gewonnenen Resultate wurden Messungen an einem Modell vorgenommen. Es galt hier vor allem die Zuverlässigkeit der eingesetzten Annahmen und Vereinfachungen festzustellen. Um zu brauchbaren quantitativen Schlüssen zu kommen, mußte große Sorgfalt verwendet werden insbesondere auf die Wahl des Modellbaustoffs, die Dimensionierung und Herstellung des Modells und die Wahl und Anordnung der Meßinstrumente.

2. Die Wahl des Modellbaustoffs

Zur Geringhaltung der Kosten und zur bequemeren Handhabung bei den Messungen werden Modelle gewöhnlich in zum Originalbauwerk reduziertem Maßstab hergestellt. Mit demselben Material ausgeführt und auf dieselbe Sicherheit belastet, zeigen sich an entsprechenden Stellen von Modell und Original gleiche Spannungen. Die auf die Längeneinheit bezogenen Verformungsgrößen (Dehnungen, Krümmungen) stimmen dort ebenfalls überein. Die durch Integration dieser bezogenen Verformungsgrößen über Stablängen gewonnenen absoluten Verschiebungen stehen dann in einem konstanten Verhältnis, nämlich dem Reduktionsmaßstab der Längen. Diese Reduktion der Verschiebungen wirkt sich nun in bezug auf die Meßgenauigkeit sehr ungünstig aus. Um nun am Modell trotz reduziertem Maßstab und beschränkter Tragfähigkeit gut meßbare Deformationen zu erhalten, muß ein Material geringeren Elastizitätsmoduls verwendet werden. Da das Original für Stahl berechnet wurde, bietet die Auffindung eines solchen Materials keine Schwierigkeit. Alle übrigen für Bauzwecke in Frage kommenden Materialien zeigen geringeren Elastizitätsmodul. Für die Herstellung von Modellen kleiner Abmessungen können hiervon nur solche Verwendung finden, die große

Homogenität aufweisen, die auf Klimaeinflüsse unempfindlich sind und deren Proportionalitätsgrenze im Verhältnis zur Bruchspannung relativ hoch liegt. So eignet sich zum Beispiel Aluminium mit seinen Legierungen zufolge der Reduktion seines Elastizitätsmoduls auf den dritten Teil von demjenigen des Stahls bei gleicher Homogenität und Klima-Unabhängigkeit. Die gute Bearbeitbarkeit dieses Metalls erlaubt sehr genaue Nachbildung des Bauwerks. Eine weitere Reduktion des Elastizitätsmoduls wird durch Anwendung von Hölzern erreicht (auf den fünfzehnten bis zwanzigsten Teil desjenigen von Stahl). Sie sind aber zufolge ihrer ausgeprägten Heterogenität ungeeignet für die Ausführung kleinerer Modelle. Die Elastizitätseigenschaften können stark streuen. Das Modell selbst wird klimaabhängig, und es müßten diesbezüglich besondere Vorsichtsmaßnahmen getroffen werden. Was die Reduktion des Elastizitätsmoduls anbelangt, erscheinen nun Bepelit-Kunstharze und Celluloid am geeignetsten. Hier beträgt der Elastizitätsmodul noch rund den achtzigsten Teil von demjenigen des Stahls. Die Kunstharze zeigen große Homogenität und Klima-Unabhängigkeit. Ihre Verwendung für Modellzwecke stellt sich aber noch ziemlich kostspielig.

Celluloid wurde zufolge seiner geringen Beschaffungskosten und der guten Bearbeitbarkeit mit einfachsten Mitteln schon häufig zu Modellzwecken herangezogen. Es eignet sich besonders zur Herstellung homogener Verbindungen durch Zusammenkleben der Anschlußstellen nach Aufweichen mittels Aceton. Der Elastizitätsmodul ist konstant bis etwa zur halben Bruchlast. Die Verformung stellt sich kriechend ein, indem kurz nach Aufbringen der Last erst 93—95 % des gesamten Betrages vorhanden sind³⁰⁾. Der Endwert wird praktisch erst nach 20—30 Minuten erreicht. Dieser Zeiteinfluß kann durch Vornahme der Ablesungen in regelmäßigen Zeitintervallen ausgeschaltet werden. Weiter zeigt das Material die unangenehme Erscheinung des Alterns, indem mit der Zeit Volumenänderungen und damit Änderungen der elastischen Eigenschaften sich einstellen. Diese Än-

³⁰⁾ Hofacker, K.: Das Talsperrengewölbe, Mitteilungen aus dem Institut für Baustatik, Nr. 8. Zürich 1936.

derungen können sich ganz ungleichmäßig auswirken, wenn das Modell äußeren Einflüssen einseitig ausgesetzt ist. Die Versuche müssen sofort nach Fertigstellung des Modells gleichzeitig mit den Elastizitätsmessungen an einzelnen Proben vorgenommen werden. Das Modell ist während dieser Zeit bei möglichst konstanter Temperatur und in einem Raum gleichmäßiger Feuchtigkeit zu halten.

3. Dimensionierung des Modells und Berechnung der Modellkonstanten

a) Allgemeines.

Für die Stäbe des Kuppelmodells wurde aus Herstellungsgründen Rechteckquerschnitt gewählt. Das Bauwerk wurde zunächst auf ein Ersatzsystem gleicher Abmessungen, aber mit rechteckigen Stabquerschnitten umgerechnet. Die Umgestaltung der Stahlprofile in Rechtecke geschah unter Beibehaltung der Querschnittsfläche F und des größten Trägheitsmomentes J_x . Das Trägheitsmoment J_y und die Widerstandsmomente W_x und W_y stimmen nicht mehr mit dem Original überein. So zeigt zum Beispiel der Querschnitt des obersten Ringstabes aus einem Normalprofil *NP 18* eine Fläche $F = 27,9 \text{ cm}^2$ und ein größtes Trägheitsmoment: $J_x = 1450 \text{ cm}^4$. Der entsprechende Rechteckquerschnitt des Ersatzsystems ist damit eindeutig bestimmt (Abb. 59):

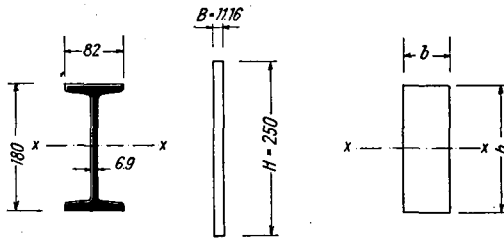


Abb. 59

$$\left. \begin{aligned} B_e H_e &= 27,9 \text{ cm}^2 \\ \frac{B_e H_e^3}{12} &= 1450 \text{ cm}^4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} B_e &= 1,12 \text{ cm} \\ H_e &= 25,0 \text{ cm} \end{aligned}$$

Hierin deutet der Index e auf das Ersatzsystem hin.

Original- und Ersatzquerschnitt unterscheiden sich nun in folgenden Größen:

	H	J_y	W_x	W_y
Original:	18 cm	81,3 cm ⁴	161 cm ³	19,8 cm ³
Ersatzsystem:	25 „	2,93 „	116 „	5,23 „

Indem das Modell durch Reduktion mit über alle Stäbe je konstantem Verhältnis der Längen, der Querschnittsflächen und der größten Trägheitsmomente aus diesem Ersatzsystem gewonnen wird, zeigt sich mit dem Original-Bauwerk nur Ähnlichkeit bezüglich der Verschiebungsanteile aus den Stablängskräften und den Stabbiegungsmomenten um die x -Querschnittsachse. Für die Randspannungen gilt von Stab zu Stab ein anderes Verhältnis.

b) Die Maßstäbe.

Es wird ausgegangen vom Maßstab der Stablängen $L = l/l_m$, der Querschnittsflächen $\mathcal{F} = F/F_m$ und der größten Trägheitsmomente $I_x = J_x/J_{xm}$. Für die Querschnittshöhen setzen wir ebenfalls den Längenmaßstab L ein. Für die Breiten der Rechteckquerschnitte ergibt sich verglichen mit dem Ersatzsystem folgendes Verhältnis:

$$\frac{H_e}{B_e \cdot H_e} = L \cdot \frac{H_m}{\mathcal{F} \cdot B_m H_m} \quad \frac{B_e}{B_m} = \mathcal{F} \cdot \frac{H_m}{H_e} = \frac{\mathcal{F}}{L} \quad (91)$$

Durch die Wahl des Längen-, Höhen- und Flächenmaßstabes ist der Maßstab der Trägheitsmomente ebenfalls bestimmt:

$$I_x = \frac{B_e \cdot H_e^3}{B_m \cdot H_m^3} = \mathcal{F} \cdot L^2 \quad (92)$$

c) Die Verschiebungskoeffizienten.

Wir vergleichen die Verschiebungen des Knotens i beim Original und Modell, indem wir die Arbeitsgleichung mit dem Verschiebungszustand entsprechend der tatsächlichen Belastung P und dem Belastungszustand entsprechend der virtuellen Kraft $P_i = 1$ anschreiben:

Am Original: $\delta_i = \sum \left(\frac{S \cdot S'}{E \cdot F} l \right) + \int \frac{M M'}{E J_x} ds + \int \frac{Q Q'}{G F'} ds \quad (93)$

Am Modell: $\delta_{i_m} = \sum \left(\frac{S_m \cdot S'_m}{E_m \cdot F_m} \cdot l_m \right) + \int \frac{M_m M'_m}{E_m J_{x_m}} ds_m + \int \frac{Q_m Q'_m}{G_m F'_m} ds_m \quad (94)$

Wir rechnen nur mit Biegemomenten um die x -Achsen. Der Querkraftanteil wird im folgenden vernachlässigt. Die äußere Last denken wir uns in einzelne Knotenlasten aufgeteilt. Wir untersuchen nun den Fall einer einzelnen Knotenlast, zum Beispiel P_k im Knoten k . Der allgemeine Fall kann durch Superposition solcher Einzellastfälle dargestellt werden. Wir berechnen zunächst die Stablängskräfte und -Biegemomente für $P_i = 1$ und $P_k = 1$. Dies sind reine Systemgrößen. Die bei der Lasteinheit vorhandenen Stabkräfte bezeichnen wir mit k , wenn es sich um den Verschiebungszustand handelt und mit k' für den virtuellen Belastungszustand. Die Biegemomente zeigen bei Knotenbelastung über die Stäbe linearen Verlauf. Wir stellen sie dar durch die Größe der exzentrisch angreifenden resultierenden Stabkraft und die Größe der Hebelarme zur Stabachse (Abb. 60). Diese letztern zeigen einen linearen Verlauf mit den Stabendwerten $r_1 = M_1/S$ und $r_2 = M_2/S$.

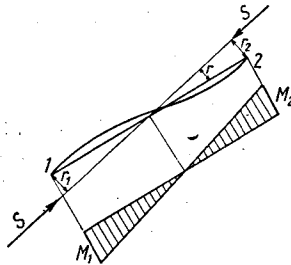


Abb. 60

Sie sind verschieden, je nachdem es sich um den Verschiebungszustand oder den virtuellen Belastungszustand handelt. Im ersten Falle werden sie mit r , im zweiten mit r' bezeichnet. Unter Vorsetzen der Lasten und der stabweise konstanten Querschnittswerte erhalten wir nun als Anteil eines einzelnen Stabes:

$$\text{Am Original: } \delta_i = \frac{P \cdot k \cdot k' \cdot l}{E \cdot F} + \frac{P}{EJ} k \cdot k' \int r \cdot r' ds = \delta_i' + \delta_i'' \quad (95)$$

$$\text{Am Modell: } \delta_{i_m} = \frac{P_m}{E_m \cdot F_m} k \cdot k' \cdot l_m + \frac{P_m}{E_m J_m} k \cdot k' \int r_m \cdot r_m' ds_m = \delta_{i_m}' + \delta_{i_m}'' \quad (96)$$

wobei $S = P \cdot k$ und $S' = 1 \cdot k'$
 $M = S \cdot r = P \cdot k \cdot r$ und $M' = S' \cdot r' = 1 \cdot k' \cdot r'$
 bedeuten.

Es bestehen hier folgende Verhältnisse:

für den Längskraftanteil: $\frac{\delta'_i}{\delta''_{i_m}} = \frac{P}{P_m} \cdot \frac{E_m}{E} \cdot \frac{L}{\mathcal{F}}$
 für den Biegemomentenanteil: $\frac{\delta''_i}{\delta''_{i_m}} = \frac{P}{P_m} \cdot \frac{E_m}{E} \cdot \frac{L^3}{I_x} = \frac{P}{P_m} \cdot \frac{E_m}{E} \cdot \frac{L}{\mathcal{F}}$

Diese Verhältnisse sind unter sich und für sämtliche Stäbe gleich. Ihr Wert gilt deshalb insbesondere auch für die Verschiebung im Knoten i . Denselben Wert erhält man auch für jeden andern Knoten und jeden andern Lastfall, sodaß in diesem Verschiebungskoeffizient eine System-Invariante vorliegt.

$$\frac{\delta}{\delta_m} = \frac{P}{P_m} \cdot \frac{E_m}{E} \cdot \frac{L}{\mathcal{F}} \quad (97)$$

d) Die Spannungskoeffizienten.

Für das Ersatzsystem ist die größte Randspannung in einem Stabquerschnitt unter Vernachlässigung der Biegemomente um die y -Querschnittachse:

$$\sigma_e = \frac{S}{F} \pm \frac{M_x}{W_{x_e}}$$

Mit $S = k \cdot P$, $M_x = k \cdot P \cdot r$ und $W_{x_e} = B_e \cdot H_e / 6$ wird:

$$\sigma_e = \frac{k \cdot P}{F} \pm \frac{6 \cdot k \cdot P \cdot r}{F \cdot H_e} = \sigma'_e \pm \sigma''_e \quad (100)$$

Für das Modell erhalten wir: $\sigma_m = \frac{k \cdot P_m}{F_m} \pm \frac{6 \cdot k \cdot P_m \cdot r_m}{F_m \cdot H_m} = \sigma'_m \pm \sigma''_m \quad (101)$

Das Verhältnis der Längskraft- und Biegemomente unter sich wird:

$$\frac{\sigma'_e}{\sigma'_m} = \frac{P}{P_m} \cdot \frac{1}{\mathcal{F}}, \quad \frac{\sigma''_e}{\sigma''_m} = \frac{P}{P_m} \cdot \frac{L}{L \cdot \mathcal{F}} = \frac{P}{P_m} \cdot \frac{1}{\mathcal{F}}$$

Es ist für Modell und Ersatzsystem gleich, also ist auch das Verhältnis der resultierenden Spannungen vom Betrage:

$$\frac{\sigma_e}{\sigma_m} = \frac{P}{P_m} \cdot \frac{1}{\mathcal{F}} \quad (102)$$

Nun sind die Widerstandsmomente W_{x_e} von den Werten am Original W_x stabweise verschieden. Für den Vergleich der Randspannungen aus Biegung allein am Modell und am fertigen Bauwerk kommt zum obigen Spannungskoeffizienten noch ein Umrechnungsverhältnis vom Betrage:

$$\frac{\sigma''}{\sigma_e''} = \frac{W_{x_e}}{W_x} = \frac{H}{H_e} \quad (103)$$

Für die Umrechnung der Randspannungen aus Biegung vom Originalbauwerk auf das Modell gilt dann das Verhältnis:

$$\frac{\sigma''}{\sigma_e''} = \frac{P}{P_m} \cdot \frac{1}{\mathcal{F}} \cdot \frac{H}{H_e} \quad (104)$$

Es ist stabweise verschieden. Für den oberen Ringstab wird $H_e/H = 1,389$. Es zeigt sich hier am Modell eine Verstärkung der Biegungsrandspannungen gegenüber den Längskraftspannungen um rund 39 %.

e) Herstellung des Modells.

Die Originalkuppel von 20 m Durchmesser und 7 m Höhe wurde im Längenmaßstab $L=20$ auf eine Modellkuppel von 100 cm Durchmesser und 35 cm Höhe umgestaltet. Die Stäbe wurden mit Rechteckquerschnitten ausgebildet auf Grund der unter a) behandelten Gesichtspunkte. Die übrigen Maßstäbe betragen $L=20$ für die Querschnittshöhen, bezogen auf das Ersatzsystem, $\mathcal{F}=50$ für die Querschnittsflächen und $I_x=20000$ für die größten Trägheitsmomente. Für die Reduktion der Querschnittsbreiten aus dem Ersatzsystem ergibt sich folgendes Verhältnis:

$$\frac{B_e}{B_m} = \frac{\mathcal{F}}{L} = 2,5 \quad (91)$$

Die Profilquerschnitte der Originalkuppel sowie des Modelles sind auf Seite 140 im Anhang dargestellt.

f) Ermittlung des Elastizitätsmoduls des Modellbaustoffs.

Der Elastizitätsmodul wurde gemessen an mehreren Stäben, die aus derselben Platte herausgeschnitten wurden, welche zur Anfertigung der Modellstäbe diente. Die Längenänderung des Stabes von quadratischem Querschnitt wurde für verschiedene Stufen der angehängten Last auf eine Meßstrecke von 50 cm mittels Meßmikroskop bestimmt³⁰⁾ (Abb. 61). Als Mittelwert aus vielen Messungen ergab sich ein Elastizitätsmodul von $E_m = 25590$ kg/cm².

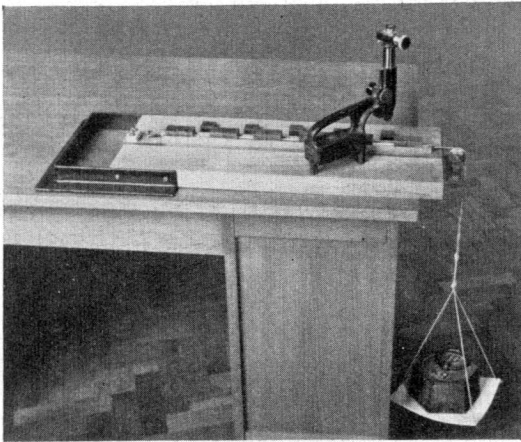


Abb. 61

g) Wahl der Modellbelastung.

Die Proportionalitätsgrenze des Materials darf an keiner Stelle überschritten werden. Am Bauwerk aus Stahl beträgt diese Grenze $\sigma_p = 1800$ kg/cm², am Celluloidmodell $\sigma_p = 100$ kg/cm². Beim Ersatzsystem aus Stahl wird die Proportionalitätsgrenze örtlich erreicht bei Belastung des Schlußringes mit $P_1 = P_4 = P_7 = P_{10} = 4000$ kg. Soll für diesen Lastfall im Modell ebenfalls gerade die Proportionalitätsgrenze erreicht werden, so ergibt sich folgende Lastgröße:

³⁰⁾ Hofacker, K.: Das Talsperrengewölbe, Mitteilungen aus dem Institut für Baustatik, Nr. 8. Zürich 1936.

$$P_m = P \frac{\sigma_m}{\sigma_e} \cdot \frac{1}{\mathcal{F}} = \frac{4000}{18 \cdot 50} = 4,44 \text{ kg}$$

Wir wählen als Modellbelastung $P_m = 2 \text{ kg}$.

h) Übertragung der Verschiebungsgrößen.

Die Verschiebungsgrößen können vom Modell direkt auf das Originalbauwerk umgerechnet werden mit dem Verhältnis:

$$\frac{\delta}{\delta_m} = \frac{P}{P_m} \cdot \frac{E_m}{E} \cdot \frac{L}{\mathcal{F}}$$

Wir haben:	$E_m = 25590 \text{ kg/cm}^2$,	$E_m/E = 0,01190$
	$E = 2150000 \text{ kg/cm}^2$	
	$P_m = 2 \text{ kg}$	$P/P_m = 500$
	$P = 1000 \text{ kg}$	$L = 20$
		$\mathcal{F} = 50$

also wird: $\delta = 2,38 \delta_m$.

4. Durchführung der Modellversuche

a) Allgemeines.

Die Kuppel wurde zunächst durchgemessen bei steifen Anschlüssen sämtlicher Stäbe, auch der Diagonalen. Dann wurden die Diagonalen durch Einkerben an den Anschlüssen gelenkig gemacht. Hier liegt das Modell entsprechend dem unter Abschnitt IV berechneten System vor. Schließlich wurden auch noch die Ringe bis auf den Schlußring an den Anschlüssen gelenkig gemacht. Diese beiden Varianten entsprechen den Rechnungsannahmen in den Abschnitten III und IV. Es konnte so insbesondere auch der Einfluß der biegeungssteifen Diagonalenanschlüsse nachgeprüft werden.

b) Spannungsmessungen.

Mittels Huggenberger-Tensometern wurden die Längenänderungen an den Stabrändern auf eine Meßstrecke von 2 cm gemessen. Die Instrumente wurden mittels Doppelklammern paarweise an gegenüberliegenden Randfasern angeklemt (Abb. 62). Die Längenänderung in mm wird durch zwei Hebel in einem

Übersetzungsverhältnis n von rd. 1000 auf eine Skala übertragen. Wir bilden die Instrumentenkonstante $\varphi = 1000/n$, eine Zahl ungefähr gleich der Einheit.

Bei einer Meßstrecke von $s = 2$ cm und einer Instrumentenkonstanten φ wird bei einer Ablesedifferenz von $\Delta\eta$ Teilstrichen zwischen belastetem und unbelastetem Zustand die Dehnung an der betreffenden Faser

$$\varepsilon = \varphi \frac{\Delta\eta}{20000}$$

die Spannung wird

$$\sigma = \varphi \cdot \frac{\Delta\eta}{20000} \cdot E \quad (105)$$

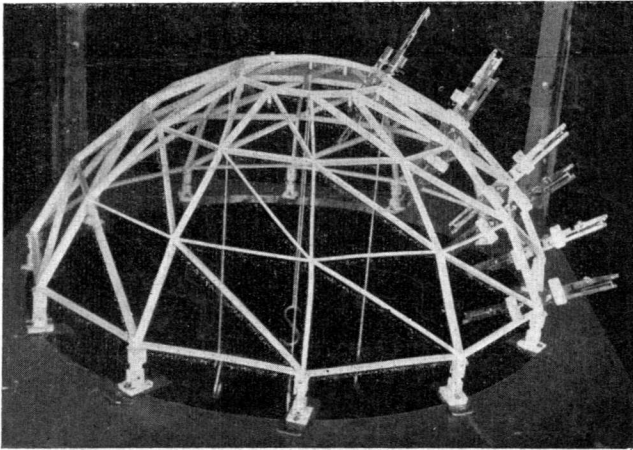


Abb. 62

Am Schnitt in der Mitte der Meßstrecke ergibt sich die Stabkraft zu

$$S_m = F_m \cdot (\sigma_m^0 \mp \sigma_m^u) / 2 \text{ und das Biegemoment zu}$$

$$M_m = W_m \cdot (\sigma_m^0 - \sigma_m^u) / 2$$

Die Stabkraft wird positiv genommen bei Zug und das Biegemoment wird positiv bei nach außen gekrümmter Stabbiegungslinie.

Die Umrechnung der Stabkräfte auf das Originalbauwerk erfolgt mit dem Spannungskoeffizienten, während bei der Umrechnung der Biegemomente noch die Verschiedenheit der Wider-

standsmomente im Original- und Ersatzbauwerk beachtet werden muß. Dies geschieht nach Gleichung (104) durch Multiplikation mit dem Verhältnis der Querschnittshöhen in beiden Systemen.

Es ergibt sich:

$$S = F \left(\frac{\sigma_m^0 + \sigma_m^u}{2} \right) \cdot \frac{P}{P_m} \cdot \frac{1}{\mathcal{F}} \quad (106)$$

$$M_x = W_x \left(\frac{\sigma_m^0 - \sigma_m^u}{2} \right) \cdot \frac{P}{P_m} \cdot \frac{1}{\mathcal{F}} \cdot \frac{H_e}{H} = F \left(\frac{\sigma_m^0 - \sigma_m^u}{2} \right) \frac{P}{P_m} \cdot \frac{1}{\mathcal{F}} \cdot \frac{H_e}{6} \quad (107)$$

c) Verschiebungsmessungen.

Die Verschiebung der einzelnen Knoten wurde gemessen in den Richtungen lotrecht, waagrecht in der Meridianebene und

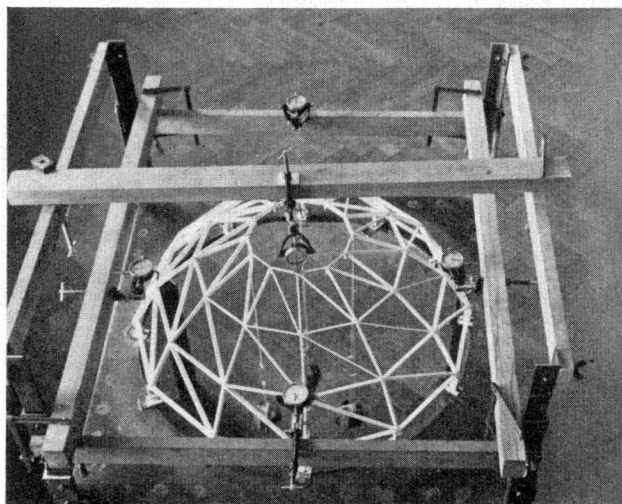


Abb. 63

waagrecht aber senkrecht zur Meridianebene. In diesen Richtungen wurden vom Knoten aus Stahldrähte oder dünne Holzstäbe festgemacht. Sie wurden weiter festgeklemmt an den Klemmen von Huggenberger-Deflektometern, die an einem starren Gerüst montiert waren (Abb. 63) (mit der passenden Stiftrichtung). Die Verschiebung wird hier derart übersetzt, daß eine volle Umdrehung

auf der Skala einem mm entspricht. Die Skala enthält 100 Teilstriche, sodaß der Angabewert eines Teilstrichs $1/100$ mm beträgt. Die gesuchte Verschiebungskomponente ergibt sich durch Ablesung der Zeiger vor und nach der Belastung unter Einhaltung einer bestimmten Pause zur Ausbildung der vollen Deformation. Die Differenz der Ablesungen ergibt die betreffende Verschiebung in $1/100$ mm.

5. Vergleich der Resultate aus Versuch und Rechnung

Der Vergleich wird nur für den ersten Lastfall vorgenommen, wobei am Modell $P_{1m} = P_{4m} = P_{7m} = P_{10m} = 2$ kg wirken (Anhang: Tafel V a bis h). Die Übereinstimmung ist für die Stabkräfte und Momente wesentlich besser als für die Knotendurchbiegungen.

a) Knotenverschiebungen.

Für den ersten Lastfall beträgt die Verschiebung des Schlußringknotens 1 in lotrechter Richtung nach Rechnung mit dem statisch unbestimmten Grundsystem $\delta_{1z} = 1,96$ mm und mit dem statisch bestimmten System $\delta_{1z} = 2,00$ mm. Nach dem Modellversuch beträgt diese Verschiebung aber nur $\delta_{1z} = 1,465$ mm. Diese beträchtliche Abweichung wird eher in Mängeln der Messung als der Rechnung vermutet, wie zum Beispiel Einfluß des Meßuhrfederdruckes, Auflagerreibung des Modells und andere.

b) Stabkräfte und Biegemomente.

α) Kuppel mit durchwegs steifen Stabanschlüssen.

Die Stabkräfte divergieren von der Rechnung nach Abschnitt IV (Kuppel mit biegesteifen Sparren und Ringen und gelenkig angeschlossenen Streben) um höchstens $\pm 5\%$, die Biegemomente bis zu $\pm 8\%$. Die an den Diagonalanschlüssen gemessenen Biegemomente sind verschwindend, sodaß sich ihre Vernachlässigung bei der theoretischen Behandlung voll rechtfertigt.

β) Kuppel mit steifen Sparren und Ringen.

Die Stabkräfte und Momente weisen praktisch die gleichen Werte auf wie im vorigen Fall. Die Biegemomente weichen nur noch bis $\pm 5\%$ von den Rechnungswerten (der Kuppel mit biegungssteifen Sparren und Ringen und gelenkigen Diagonalen) ab.

γ) Kuppel mit steifen Sparren und steifem Schlußring.

Hier stimmen die Resultate aus Versuch und Rechnung (Kuppel mit biegungssteifen Sparren und Schlußring und gelenkig angeschlossenen Zwischenringen und Diagonalen) so gut wie vollständig überein (Bereich $\pm 3\%$).

Es zeigt sich, daß in bezug auf die Stabkräfte und Momente die vereinfachenden Annahmen der Rechnung (Vernachlässigung der Verdrehsteifigkeit der Ringe und der seitlichen Biegesteifigkeit der Sparren) sich durch die gute Übereinstimmung mit den Messungen voll rechtfertigen. Hinsichtlich der Knotenverschiebungen konnte nicht eine ebenso gute Übereinstimmung festgestellt werden.

Schlußfolgerung

Bei der Konstruktion von Schwedlerkuppeln werden die Sparren und Ringe in den Knotenpunkten durch Nietung oder Schweißung steif miteinander verbunden. Es liegen keine reibungslosen Gelenke vor, wie Schwedler in seinem Berechnungsverfahren voraussetzt. Die Sparren und Ringe werden aus I-Profilen oder ähnlichen für große Spannweiten geeigneten Trägern hergestellt.

Die Steifheit der Knoten wirkt sich einmal dahin aus, daß in den Stäben der belasteten Kuppel auch Biegemomente entstehen. Sodann werden bei einer Einzellast alle Stäbe der Kuppel beansprucht, während nach Schwedler nur eine beschränkte Zahl beanspruchter Stäbe gefunden wird.

Die Berechnung der Sparren- und Ringbiegemomente und deren Einflüsse auf die Stabkräfte der Kuppel ist für die Praxis sehr wichtig. Durch die genaue Erfassung der tatsächlichen Beanspruchungen und Verformungen wird ein sicheres und wirtschaftliches Konstruieren ermöglicht. Der Rechnungsgang muß aber unkompliziert, übersichtlich und wenig fehlerempfindlich sein, um in die Praxis Eingang zu finden.

Eine genaue Berechnung unter Berücksichtigung aller Einflüsse ist für ein solches vielfach statisch unbestimmtes System unter unsymmetrischer Last recht verwickelt. Es ist eine große Zahl von Elastizitätsgleichungen aufzustellen, deren Lösung sich sehr umständlich und zeitraubend gestaltet.

Durch zweckmäßige Vereinfachungen, Berücksichtigung der wichtigeren Einflüsse und Vernachlässigung oder Schätzung der untergeordneten wurde hier ein für die Praxis brauchbares Verfahren gewonnen. Die Genauigkeit dieses Verfahrens ist an Hand eines Modellversuches nachgewiesen worden.

Als Zahlenbeispiel wurde eine Kuppel behandelt, so wie sie in der Praxis ausgeführt würde. Die nach Theorie und Versuch ermittelten Stabkräfte und Biegemomente lassen die Wirkung der steifen Knoten deutlich erkennen. Die Stabkräfte sind viel kleiner und gleichmäßiger über die Kuppel verteilt als dies beim Schwedlerschen System der Fall ist. Hier wurden für eine Einzelast P_1 nur 40 Stäbe beansprucht gefunden, während tatsächlich sämtliche 120 Stäbe Spannungen erfahren.

Aus dem Zahlenbeispiel ergab sich weiter, daß die Mehrzahl der Stäbe tatsächlich mit einer entgegengesetzten Längskraft beansprucht wird, verglichen mit der ideellen Schwedlerschen Kuppel.

Eine nach dem gelenkigen System dimensionierte Kuppel weist folgende Mängel auf:

Die aus der Rechnung sich ergebenden Druckstäbe werden tatsächlich überdimensioniert. Die auf Zug dimensionierten Stäbe weisen tatsächlich zu geringe Sicherheit auf, indem sie effektiv gedrückt werden können.

Die Berechnung wird zweckmäßigerweise mit Einzellasten oder Lastgruppen vorgenommen. Ein allgemeiner Lastfall kann daraus durch Superposition gewonnen werden.

Der Rechnungsgang zeigt folgende drei Stufen:

1. Berechnung der statisch bestimmten Kuppel (z. B. nach dem hier ausführlich behandelten Konjugationsverfahren). Erste Dimensionierung.
2. Berücksichtigung der steifen Verbindungen der Sparrenstäbe. Die Ringstäbe und die Streben werden als gelenkig angeschlossen betrachtet. Die Sparren stellen durchlaufende Träger auf frei senkbaren Stützen dar. Nach Abschnitt II ergeben sich Sparrenbiegemomente und damit neue Stabkräfte.
3. Zusätzliche Berücksichtigung des steifen Schlußrings unter Benützung des Systems 2 als statisch unbestimmtes Grundsystem. Die Streben und die übrigen Ringstäbe werden als gelenkig angeschlossen betrachtet, ohne daß dadurch nennenswerte Abweichungen vom tatsächlichen Verhalten zu erwarten

sind. Die berechneten Biegemomente und Stabkräfte werden für die endgültige Dimensionierung der Kuppel verwendet. Die in den Zwischenringstäben zufolge ihrer steifen Anschlüsse entstehenden Biegemomente $M_{ij}^r = M_{ij}^l = \mu_r' \cdot M_{ij}^o$ müssen für den Spannungsnachweis nachgerechnet werden.

In der vorliegenden Arbeit wurde versucht, für die genaue Berechnung von Schwedlerkuppeln einen für die Praxis übersichtlicheren Rechnungsgang zu entwickeln und an Hand eines Zahlenbeispiels durch den Modellversuch zu prüfen.

Ich hoffe, damit dem vor bald einem halben Jahrhundert von A. Föppl ausgesprochenen Wunsch nachgekommen zu sein. Föppl äußert sich in seinem Buch „Das Fachwerk im Raume“ folgendermaßen: „Man kann lebhaft wünschen, daß für eine Schwedlerkuppel einmal eine Experimentaluntersuchung mit ähnlicher Sorgfalt für den Fall der Belastung eines einzelnen Knotenpunktes durchgeführt würde. Aus den Ergebnissen einer solchen Untersuchung können wir die Änderungen in der Spannungsverteilung zwischen der Berechnung für reibungslose Knoten und den tatsächlich steifen Knoten ermitteln. Diese ließen weiter sicherere und für die Anwendung wertvollere Folgerungen ableiten, als aus der Auflösung der Gleichungen der Theorie der Nebenspannungen.“

Leer - Vide - Empty

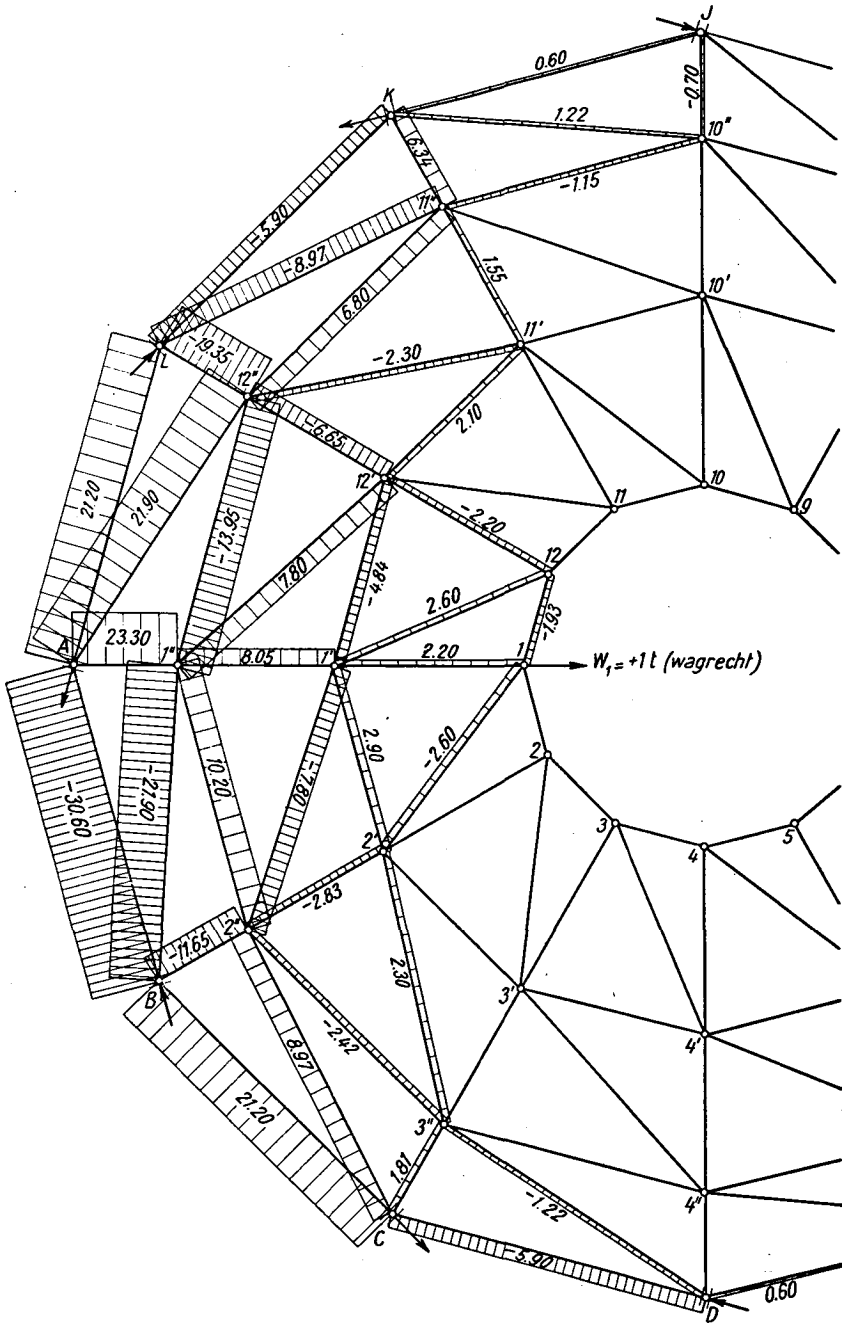
Anhang

Leer - Vide - Empty

Tafel Ia Stabkräfte der Schwedler-Kuppel mit gelenkigen Knoten infolge:

Stab	$P_{1=1}^t$	$W_{1=1}^t$	$P_{1'=1}^t$	$W_{1'=1}^t$	$P_{1''=1}^t$	$W_{1''=1}^t$	$H_{1=1}^t$	M_{1a} = 1_{tm} kg	$M_{1'a}$ = 1_{tm} kg	$M_{1''a}$ = 1_{tm} kg	M_{1b} = 1_{tm} kg
R ₁₁ -12								- 48,68			- 13,13
12 - 1	- 3,86	- 1,93					- 0,52	+ 110,23	+ 12,62		+ 24,40
1 - 2								- 48,68			- 11,27
S ₁₁ -11'								- 53,74			- 14,88
12 -12'	- 4,25	- 2,20					- 0,58	+ 146,76	+ 13,99		+ 40,75
1 - 1'	+ 2,00	+ 2,20					- 0,58	- 112,40	- 8,08		- 40,72
2 - 2'								+ 25,29			+ 14,85
D ₁₁ -12'								+ 63,60			+ 17,57
12 - 1'	+ 5,03	+ 2,60					+ 0,68	- 207,35	- 16,55		- 48,15
1 - 2'	- 5,03	- 2,60					+ 0,68	+ 207,35	+ 16,55		+ 48,15
2 - 3'								- 63,60			- 17,57
R _{10'} -11'								+ 46,78			+ 14,12
11' -12'	+ 3,70	+ 2,10					+ 0,54	- 199,17	- 12,42		- 57,58
12' - 1'	- 7,37	- 4,84	- 1,93	- 1,93			- 0,26	+ 321,68	+ 9,71	+ 8,13	+ 90,68
1' - 2'	+ 5,59	+ 2,90					- 0,76	- 252,95	- 18,41		- 66,82
2' - 3'								+ 70,68			+ 19,62
S _{10'} -10''								+ 36,29			+ 10,44
11'' -11''	+ 2,87	+ 1,55					+ 0,38	- 224,35	- 9,53		- 63,07
12'' -12''	-11,25	- 6,65	- 1,50	- 1,55			- 0,96	+ 510,60	+ 25,85	+ 6,31	+142,76
1' - 1''	+12,47	+ 8,05	+ 0,09	+ 1,55			- 0,58	- 568,38	- 37,50	+ 3,38	-158,65
2' - 2''	- 5,53	- 2,83					+ 0,74	+ 315,67	+ 18,16		+ 87,66
3' - 3''								- 69,92			- 19,14
D _{10'} -11''								- 53,74			- 15,52
11'' -12''	- 4,25	- 2,30					- 0,58	+ 282,42	+ 14,12		+ 79,85
2' - 1''	+12,72	+ 7,80	+ 2,22	+ 2,28			+ 0,87	- 570,90	- 25,36	- 9,31	-159,99
1' - 2''	-12,72	- 7,80	- 2,22	- 2,28			+ 0,87	+ 570,90	+ 25,36	+ 9,31	+159,99
2' - 3''	+ 4,25	+ 2,30					- 0,58	- 282,42	- 14,12		- 79,85
3' - 4''								+ 53,74			+ 15,52
9'' -10''								- 25,29			- 7,71
10'' -11''	- 2,00	- 1,15					- 0,62	+ 215,86	+ 6,73		+ 64,67
11'' -12''	+12,54	+ 6,80	+ 1,10	+ 1,05			+ 1,28	- 664,91	- 32,98	- 4,45	-191,81
12'' - 1''	-22,60	-13,95	- 2,50	- 3,50	- 0,95	- 1,93	- 0,54	+1021,33	+ 59,77	+ 0,15	+284,09
R _{1''} -2''	+17,80	+10,20	+ 2,43	+ 2,45			- 1,45	- 844,99	- 40,28	-10,09	-230,35
2'' - 3''	- 4,65	- 2,42					+ 0,64	+ 357,97	+ 15,32		+ 97,48
3'' - 4''								- 58,79			- 16,37
S _{9''} - I								- 16,73			- 4,73
10'' - J	- 1,32	- 0,70					- 0,18	+ 187,66	+ 4,37		+ 51,14
11'' - K	+11,85	+ 6,34	+ 0,70	+ 0,70			+ 1,31	- 765,66	- 33,62	- 2,90	-210,02
12'' - L	-32,60	-19,35	- 3,53	- 4,30	- 0,63	- 1,28	- 2,04	+1550,36	+ 83,41	+ 8,13	+428,16
1'' - A	+38,00	+23,30	+ 3,62	+ 5,45	- 0,48	+ 1,28	- 0,93	-1748,08	- 96,04	-14,61	-483,51
2'' - B	-20,70	-11,65	- 1,93	- 1,94			+ 2,06	+1110,98	+ 53,79	+ 7,99	+306,69
3'' - C	+ 3,58	+ 1,81					- 0,48	- 363,99	- 11,73		- 99,98
4'' - D								+ 45,27			+ 12,25
D _{9''} - J								+ 28,70			+ 8,23
10'' - K	+ 2,27	+ 1,22					+ 0,31	- 273,56	- 7,53		- 75,07
11'' - L	-16,50	- 8,97	- 1,20	- 1,25			- 1,76	+ 961,35	+ 45,03	+ 5,07	+261,75
12'' - A	+36,80	+21,90	+ 4,10	+ 5,15	+ 1,08	+ 2,20	+ 1,65	-1711,91	- 95,03	- 5,38	-466,11
1'' - B	-36,80	-21,90	- 4,10	- 5,15	- 1,08	- 2,20	+ 1,65	+1711,91	+ 95,03	+ 5,38	+466,11
2'' - C	+16,50	+ 8,97	+ 1,20	+ 1,25			- 1,76	- 961,35	- 45,03	- 5,07	-261,75
3'' - D	- 2,27	- 1,22					+ 0,31	+ 273,56	+ 7,53		+ 75,07
4'' - E								- 28,70			- 8,23
R _I - J								+ 14,29			+ 4,06
J - K	+ 1,13	+ 0,60					+ 0,16	- 174,81	- 3,74		- 47,00
K - L	-11,27	- 5,90	- 0,60	- 0,60			- 1,25	+ 788,41	+ 32,35	+ 2,48	+216,52
L - A	+35,93	+21,20	+ 3,68	+ 4,30	+ 0,54	+ 1,10	+ 2,60	-1799,18	- 93,28	- 9,57	-496,58
A - B	-50,75	-30,60	- 5,05	- 7,05	- 0,06	- 2,10	-	+2342,23	+130,17	+19,20	+646,00
B - C	+35,93	+21,20	+ 3,68	+ 4,30	+ 0,54	+ 1,10	- 2,60	-1799,18	- 93,28	- 9,57	-496,58
C - D	-11,27	- 5,90	- 0,60	- 0,60			+ 1,25	+ 788,41	+ 32,35	+ 2,48	+216,52
D - E	+ 1,13	+ 0,60					- 0,16	- 174,81	- 3,74		- 47,00
E - F								+ 14,29			+ 4,06

Tafel Ia Stabkräfte der Kuppel mit gelenkigen Knoten für $W_1 = 1t$



Tafel Ib Waagrechte und lotrechte Verschiebungen des Knotenpunktes 1 der gelenkigen Kuppel für lotr. Einzellast $P_1 = + 1^t$

Stab	$\frac{L}{EF}$	S_1	$\frac{S_1^2 L}{EF}$	S'_1	$\frac{S'_1{}^2 L}{EF}$	$\frac{S_1 S'_1 L}{EF}$		
			+		+	+		
R ₁₂ - 12	0,00258	- 3,86	0,038440	- 1,93	0,009610	0,019220		
S ₁₂ - 12'	0,00580	- 4,25	0,102960	- 2,20	0,027588	0,053295		
1 - 1'	"	+ 2,00	0,022820	+ 2,20	0,027588	0,025080		
D ₁₂ - 1'	0,00750	+ 5,03	0,189757	+ 2,60	0,050700	0,098085		
1 - 2	"	- 5,03	0,181757	- 2,60	0,050700	0,098085		
R _{11'} - 12'	0,00520	+ 3,70	0,071188	+ 2,10	0,022932	0,040404		
12' - 1'	"	- 7,37	0,282448	- 4,84	0,121813	0,185488		
1' - 2'	"	+ 5,59	0,162490	+ 2,90	0,043732	0,084297		
S _{11'} - 11''	0,00570	+ 2,87	0,046950	+ 1,55	0,013694	0,025356		
12' - 12''	"	- 11,25	0,721406	- 6,65	0,252068	0,426431		
1' - 1''	"	+ 12,47	0,887066	+ 8,05	0,369374	0,572186		
2' - 2''	"	- 5,53	0,174311	- 2,83	0,045651	0,089204		
D _{11'} - 12''	0,00934	- 4,25	0,169101	- 2,30	0,049409	0,091299		
12' - 1''	"	+ 12,72	1,512385	+ 7,80	0,568246	0,926677		
1' - 2''	"	- 12,72	1,512385	- 7,80	0,568246	0,926677		
2' - 3''	"	+ 4,25	0,169101	+ 2,30	0,049409	0,091299		
R _{10''} - 11''	0,00733	- 2,00	0,029320	- 1,15	0,009694	0,016859		
11'' - 12''	"	+ 12,54	1,152654	+ 6,80	0,338939	0,625044		
12'' - 1''	"	- 22,60	3,743871	- 13,95	1,426436	2,310929		
1'' - 2''	"	+ 17,80	2,322437	+ 10,20	0,762613	1,330835		
2'' - 3''	"	- 4,65	0,158493	- 2,42	0,042927	0,082484		
S _{10''} - J	0,00346	+ 1,32	0,006056	- 0,70	0,001695	0,003204		
11'' - K	"	+ 11,85	0,485862	+ 6,34	0,139077	0,259946		
12'' - L	"	- 32,60	3,677150	- 19,35	1,295502	2,182603		
1'' - A	"	+ 38,00	4,996240	+ 23,30	1,878399	3,063484		
2'' - B	"	- 20,70	1,842575	- 11,65	0,469600	0,834396		
3'' - C	"	+ 3,85	0,044345	+ 1,81	0,011335	0,022420		
D _{10''} - K	0,00726	+ 2,27	0,037410	+ 1,22	0,010806	0,020106		
11'' - L	"	- 16,50	1,976535	- 8,97	0,584146	1,074516		
12'' - A	"	+ 36,80	9,831782	+ 21,90	3,481969	5,850979		
1'' - B	"	- 36,80	9,831782	- 21,90	3,481969	5,850979		
2'' - C	"	+ 16,50	1,976535	+ 8,97	0,584146	1,074516		
3'' - D	"	- 2,27	0,037410	- 1,22	0,010806	0,020106		
R _J - K	0,00856	+ 1,13	0,010930	+ 0,60	0,003082	0,005804		
K - L	"	- 11,27	1,087230	- 5,90	0,297973	0,569180		
L - A	"	+ 35,93	11,050660	+ 21,20	3,847205	6,520289		
A - B	"	- 50,75	22,046815	- 30,60	8,015242	13,293252		
B - C	"	+ 35,93	11,050660	+ 21,20	3,847206	6,520289		
C - D	"	- 11,27	1,087230	- 5,90	0,297973	0,569180		
D - E	"	+ 1,13	0,010930	+ 0,60	0,003082	0,005804		
$\Sigma =$			94,387457	$\Sigma =$			33,112583	56,820417

S_1 = Stabkraft infolge $P_1 = + 1^t$ (lotr.) wirkend in Knotenpunkt 1.

S'_1 = Stabkraft infolge $W_1 = + 1^t$ (wagr.) wirkend in Knotenpunkt 1.

$\delta_{10z} = \sum \frac{S_1^2 L}{EF} = + 94,39 \text{ cm} = \text{lotr. Verschiebung des Knotenpunktes 1 infolge lotr. Einzellast } P_1 = 1^t \text{ wirkend in demselben Knotenpunkt.}$

$\delta_{10x} = \sum S_1 S'_1 \frac{L}{EF} = 56,82 \text{ cm} = \text{waagrechte Verschiebung des Knotenpunktes 1 in der meridianen Durchmessersebene infolge der lotr. Einzellast } P_1 = 1^t.$

Tafel Ib (Fortsetzung) Verschiebungen des Knotenpunktes 1' der gelenkigen Kuppel für lotr. Einzellast $P_1 = + 1'$ und waagr. $W_1 = + 1'$

Stab	$\frac{L}{EF}$	S_1'	S_1	S_1	$\frac{S_1 S_1' L}{EF}$	$\frac{S_1' S_1 L}{EF}$	$S_1'^2 \frac{L}{EF}$	$\frac{L}{S_1' S_1 EF}$	$\frac{L}{S_1' S_1 EF}$	$\frac{L}{S_1' S_1 EF}$		
R 12' - 1'	0,00520	-1,93	-7,37	-4,84	0,076648	0,073965	0,020800	+	0,050336	+	0,048574	
S 12' - 12''	0,00570	-1,50	-11,25	-6,65	0,096188	0,093994	0,012825	+	0,056858	+	0,058753	
1' - 1''	+0,085	+1,55	+12,47	+8,05	0,006042	0,110172	0,000041	+	0,003900	+	0,071122	
D 12' - 2''	+2,22	+2,28	+12,72	+7,80	0,263747	0,270875	0,046131	+	0,161731	+	0,166103	
1' - 2''	-2,22	-2,28	-12,72	-7,80	0,263747	0,270875	0,046131	+	0,161731	+	0,166103	
R 11'' - 12''	+1,10	+1,05	+12,54	+6,80	0,101110	0,096514	0,008869	+	0,054828	+	0,052336	
12'' - 1''	-2,50	-3,50	-22,60	-13,95	0,414145	0,579803	0,045813	+	0,255634	+	0,357887	
1'' - 2''	+2,43	+2,45	+17,80	+10,20	0,317052	0,319661	0,043283	+	0,181681	+	0,183177	
S 11'' - K	+0,70	+0,70	+11,85	+6,34	0,028701	0,028701	0,001695	+	0,015355	+	0,015355	
12'' - L	-3,53	-4,30	-32,60	-19,35	0,398170	0,485023	0,043115	+	0,236337	+	0,287889	
1'' - A	+3,62	+5,45	+38,00	+23,30	0,475958	0,716566	0,045341	+	0,291837	+	0,493968	
2'' - B	-1,93	-1,94	-20,70	-11,65	0,137872	0,138947	0,012821	+	0,077595	+	0,078199	
D 11'' - L	0,00726	-1,20	-16,50	-8,97	0,143748	0,149738	0,010454	+	0,078147	+	0,081403	
1'' - A	+4,10	+5,15	+36,80	+21,90	1,095389	1,375915	0,192553	+	0,651875	+	0,818819	
1'' - B	-4,10	-5,15	-36,80	-21,90	1,095389	1,375915	0,192553	+	0,651875	+	0,818819	
2'' - C	+1,20	+1,25	+16,50	+8,97	0,143748	0,149738	0,010454	+	0,078147	+	0,081403	
R K - L	0,00856	-0,60	-11,27	-5,90	0,057883	0,057883	0,003082	+	0,030302	+	0,030302	
L - A	+3,68	+4,30	+35,93	+21,20	1,131827	1,322511	0,115923	+	0,667817	+	0,780329	
A - B	-5,05	-7,05	-50,75	-30,60	2,193821	3,062661	0,218301	+	1,322777	+	1,846649	
B - C	+3,68	+4,30	+35,93	+21,20	1,131827	1,322511	0,115923	+	0,667817	+	0,780329	
C - D	-0,60	-0,60	-11,27	-5,90	0,057883	0,057883	0,003082	+	0,030302	+	0,030302	
$\Sigma =$										1,623157	5,735882	7,193221

$S_1' =$ Stabkraft infolge $P_1' = + 1'$ (lotr.) wirkend in Knotenpunkt 1'.

$S_1 =$ Stabkraft infolge $W_1' = + 1'$ (waagr.) wirkend in Knotenpunkt 1'.

$\delta_{1,0z}^L = \sum S_1 S_1' \frac{L}{EF} =$ lotr. Verschiebung des Knotenpunktes 1' infolge der lotr. Einzellast $P_1 = + 1'$
 $= + 9,631$ cm.

$\delta_{1,0x}^L = \sum S_1 S_1' \frac{L}{EF} =$ waagr. Verschiebung des Knotenpunktes 1' in die meridiane Ebene infolge der lotr. Einzellast $P_1 = + 1'$
 $= + 12,065$ cm.

Tafel 1b (Fortsetzung) Verschiebungen des Knotenpunktes 1'' des Grundsystems (gelenkige Kuppel) für lotr. Einzellast $P_1 = +1'$ und waagr. $W_1 = +1'$

Stab	$\frac{L}{EF}$	$S_{1''}$	$S'_{1''}$	S_1	S'_1	$\frac{S_1 S_{1''} L}{EF}$	$S_1 S'_{1''} \frac{L}{EF}$	$S_{1''}^2 \frac{L}{EF}$	$S'_{1''}^2 \frac{L}{EF}$	$S_{1''} S'_1 \frac{L}{EF}$	$S_{1''} S_1 \frac{L}{EF}$	$S'_{1''} S'_1 \frac{L}{EF}$
R _{12''-1''}	0,00733	-0,95	-1,93	-22,60	-13,95	+0,157872	+0,319720	+0,006657	+0,027304	+0,097400	+0,197349	+0,085697
S _{12''-L}	0,00346	-0,63	-1,28	-32,60	-19,35	+0,069934	+0,144379	+0,001330	+0,005669	+0,041510	+0,085697	+0,103191
1''-A	"	-0,48	+1,28	+38,00	+23,30	+0,068370	+0,168294	+0,000936	+0,005669	+0,041921	+0,103191	+0,103191
D _{12''-A}	0,00726	+1,08	+2,20	+36,80	+21,90	+0,288541	+0,587770	+0,008468	+0,035138	+0,171714	+0,349787	+0,349787
1''-B	"	-1,08	-2,20	-36,80	-21,90	+0,288541	+0,587770	+0,008468	+0,035138	+0,171714	+0,349787	+0,349787
R _{L-A}	0,00856	+0,54	+1,10	+35,93	+21,20	+0,166083	+0,338317	+0,002496	+0,010358	+0,097995	+0,199620	+0,199620
A-B	"	-0,06	-2,10	-50,75	-30,60	+0,086884	+0,912282	+0,000342	+0,037750	+0,052387	+0,500066	+0,500066
B-C	"	+0,54	+1,10	+35,93	+21,20	+0,166083	+0,338317	+0,002496	+0,010357	+0,097995	+0,199620	+0,199620
$\Sigma =$						1,155568	3,396849	0,031193	0,167383	0,688842	2,035117	2,035117

Verschiebungen des Knotenpunktes A des Grundsystems für lotr. Einzellast $P_1 = +1'$ und waagr. $W_1 = +1'$

Stab	$\frac{L}{EF}$	S_A für $P=1$ in A	S'_A für $W=1$ in A	S_1 für $P=1$ in 1	S'_1 für $W=1$ in 1	$S_1 S'_A \frac{L}{EF}$	$S'_1 S'_A \frac{L}{EF}$	$S'_1 S_A \frac{L}{EF}$	$S'_1 S'_A \frac{L}{EF}$	$S'_A^2 \frac{L}{EF}$	$S'_1 S'_A \frac{L}{EF}$	$S'_A S_1 \frac{L}{EF}$
RA-B	0,00856	0	-1,932	-50,75	-30,6	+0,838431	+0,505536	0,116472	0,031885	0,083430	0,003304	0,003304

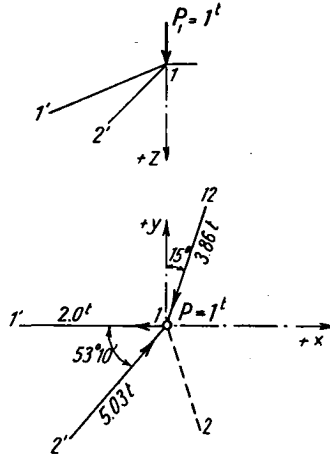
$S_{1''}$ = Stabkraft infolge $P_1 = +1'$ (lotr.) wirkend in Knotenpunkt 1'',
 $S'_{1''}$ = Stabkraft infolge $W_1 = +1'$ (waagr.) wirkend in Knotenpunkt 1'',
 $\delta_{1''oz}$ = $\sum S_1 S_{1''} \frac{L}{EF}$ = lotr. Verschiebung des Knotenpunktes 1'' infolge der lotr. Einzellast $P_1 = +1'$.
 $\delta_{1''ox}$ = $\sum S_1 S'_{1''} \frac{L}{EF}$ = waagrechte Verschiebung des Knotenpunktes 1'' in der meridianen Ebene infolge der lotr. Einzellast $P_1 = +1'$.
 δ_{Aoz} = $\sum S_A S'_A \frac{L}{EF}$ = waagrechte Verschiebung des Knotenpunktes A in der meridianen Ebene infolge der lotr. Einzellast $P_1 = +1'$.
 δ_{Aox} = $\sum S_A S'_A \frac{L}{EF}$ = waagrechte Verschiebung des Knotenpunktes A in der meridianen Ebene infolge der lotr. Einzellast $P_1 = +1'$.

Tafel Ic Analytische Kontrolle der Stabkräfte des Raumbachwerkes für lotrechte Einzellast $P_1 = + 1^t$

Das rein analytische Verfahren (Seite 16) wird angewendet zur Kontrolle des graphischen Verfahrens. Man schreibt für jeden Knotenpunkt die drei Gleichgewichtsgleichungen für die drei zueinander senkrecht stehenden Achsen x, y und z .

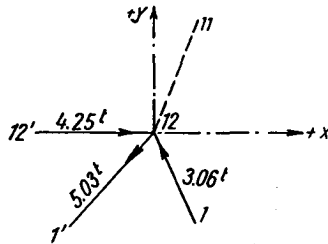
Knotenpunkt 1:

$$\begin{aligned} Z &= 1,0 + 2,0 \cdot 0,441 - 5,03 \cdot 0,374 \\ &= 1,0 + 0,882 - 1,882 = 0 \\ X &= -3,86 \cdot 0,2588 - 2,0 \cdot 0,8975 \\ &\quad + 5,03 \cdot 0,927 \cdot 0,60 \\ &= -1,00 - 1,80 + 2,804 = 0 \\ Y &= -3,86 \cdot 0,966 + 5,03 \cdot 0,927 \cdot 0,80 \\ &= -3,73 + 3,73 = 0 \end{aligned}$$



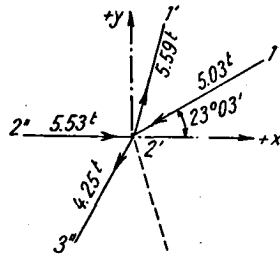
Knotenpunkt 2:

$$\begin{aligned} Y &= 3,86 \cdot 0,966 - 5,03 \cdot 0,927 \cdot 0,80 = 0 \\ X &= -3,86 \cdot 0,2588 - 5,03 \cdot 0,927 \\ &\quad + 4,25 \cdot 0,8975 \\ &= -1,0 - 2,80 + 3,83 = 0 \\ Z &= 5,03 \cdot 0,374 - 4,25 \cdot 0,441 = 0 \end{aligned}$$



Knotenpunkt 2':

$$\begin{aligned} Z &= +5,03 \cdot 0,374 - 5,53 \cdot 0,707 \\ &\quad + 4,25 \cdot 0,477 = +1,88 - 3,91 + 2,03 = 0 \\ X &= +5,59 \cdot 0,2588 + 5,53 \cdot 0,707 \\ &\quad - 5,03 \cdot 0,9275 \cdot 0,9202 \\ &\quad - 4,25 \cdot 0,8788 \cdot 0,2874 \\ &= +1,447 + 3,91 - 4,29 - 1,067 = 0 \\ Y &= +5,59 \cdot 0,966 - 5,03 \cdot 0,927 \cdot 0,3915 \\ &\quad - 4,25 \cdot 0,8788 \cdot 0,9587 \\ &= +5,40 - 1,825 - 3,575 = 0 \end{aligned}$$



Tafel II Stabkräfte der gelenkigen Kuppel infolge:

Stab	Eigen- gewicht	Dach- haut	Schnee		Winddruck		Saugkraft		Wind + Saug
			voll	unsym.	Val Komp.	Hal Komp.	Val Komp.	Hal Komp.	
	t	t	t	t	t	t	t	t	t
R 1 - 2	-0,343	-2,310	-1,0	-1,0	-0,353	-0,087	—	—	-0,440
2 - 3	"	"	"	-1,0	-0,250	-0,050	—	—	-0,255
3 - 4	"	"	"	-0,75	-0,055	-0,014	+0,562	+0,150	+0,643
4 - 5	"	"	"	-0,5	—	—	+1,125	+0,285	+1,410
5 - 6	"	"	"	-0,5	—	—	"	"	+1,410
6 - 7	"	"	"	-0,5	—	—	"	"	+1,410
8 - 9	"	"	"	-0,5	—	—	"	"	+1,410
9 - 10	"	"	"	-0,75	-0,055	-0,014	+0,562	+0,135	+0,628
10 - 11	"	"	"	-1,0	-0,205	-0,052	—	—	-0,257
11 - 12	"	"	"	-1,0	-0,353	-0,090	—	—	-0,443
12 - 1	"	"	"	-1,0	-0,407	-0,103	—	—	-0,510
S 1 - 1'	-0,20	-1,350	-0,585	-0,585	-0,178	+0,018	—	—	-0,160
2 - 2'	"	"	"	"	-0,043	+0,043	—	—	—
3 - 3'	"	"	"	-0,312	+0,043	"	+0,615	+0,160	+0,861
4 - 4'	"	"	"	-0,164	+0,028	+0,015	+0,945	"	+1,148
5 - 5'	"	"	"	-0,293	—	—	+0,657	-0,003	+0,654
6 - 6'	"	"	"	"	—	—	"	"	+0,654
7 - 7'	"	"	"	"	—	—	"	"	+0,654
8 - 8'	"	"	"	"	—	—	"	"	+0,654
9 - 9'	"	"	"	-0,566	-0,060	-0,015	+0,045	-0,163	-0,193
10 - 10'	"	"	"	-0,710	-0,195	-0,043	-0,285	-0,163	-0,686
11 - 11'	"	"	"	-0,585	-0,282	"	—	—	-0,325
12 - 12'	"	"	"	"	-0,265	-0,015	—	—	-0,280
D 1 - 2'	0	0	0	"	-0,070	-0,020	—	—	-0,090
2 - 3'	0	0	0	—	-0,193	-0,052	—	—	-0,245
3 - 4'	0	0	0	-0,322	-0,193	-0,052	-0,725	-0,195	-1,165
4 - 5'	0	0	0	"	-0,070	-0,020	"	"	-1,010
5 - 6'	0	0	0	—	—	—	—	—	—
6 - 7'	0	0	0	—	—	—	—	—	—
7 - 8'	0	0	0	—	—	—	—	—	—
8 - 9'	0	0	0	—	—	—	—	—	—
9 - 10'	0	0	0	+0,322	+0,070	+0,020	+0,725	+0,195	+1,010
10 - 11'	0	0	0	+0,322	+0,193	+0,052	+0,725	+0,195	+1,165
11 - 12'	0	0	0	—	"	+0,052	—	—	+0,245
12 - 1'	0	0	0	—	+0,070	+0,020	—	—	+0,090
R 1' - 2'	-0,401	-2,312	-0,297	-0,297	-0,941	-0,868	—	—	-1,809
2' - 3'	"	"	"	-0,542	-0,434	-0,460	-0,547	-0,147	-1,588
3' - 4'	"	"	"	-0,103	+0,027	-0,080	+0,833	+0,688	+1,468
4' - 5'	"	"	"	+0,214	+0,079	+0,021	+1,945	+1,364	+3,409
5' - 6'	"	"	"	-0,148	—	—	+1,131	+1,150	+2,281
6' - 7'	"	"	"	-0,148	—	—	+1,131	+1,150	+2,281
7' - 8'	"	"	"	-0,148	—	—	+1,131	+1,150	+2,281
8' - 9'	"	"	"	+0,095	+0,053	+0,014	+1,679	+1,294	+3,040
9' - 10'	"	"	"	-0,341	-0,075	-0,125	+0,299	+0,460	+0,559
10' - 11'	"	"	"	-0,658	-0,576	-0,532	-0,815	-0,216	-2,139
11' - 12'	"	"	"	-0,297	-1,039	-0,914	—	—	-1,953
12' - 1'	"	"	"	-0,297	-1,145	-1,031	—	—	-2,176

Tafel II (Fortsetzung)

Stab	Eigen- gewicht	Dach- haut	Schnee		Winddruck		Saugkraft		Wind + Saug
			voll	unsym.	Val Komp.	Hal Komp.	Val Komp.	Hal Komp.	
	t	t	t	t	t	t	t	t	t
S									
1' - 1''	-0,490	-2,908	-0,796	-0,796	-0,753	+0,150	—	—	-0,603
2' - 2''	„	„	„	-0,989	-0,336	+0,365	-0,430	-0,117	-0,518
3' - 3''	„	„	„	-0,303	-0,080	+0,343	+1,395	+0,742	+2,400
4' - 4''	„	„	„	-0,272	-0,101	+0,093	+1,766	+0,640	+2,398
5' - 5''	„	„	„	-0,755	-0,077	-0,021	+0,666	+0,739	+1,307
6' - 6''	„	„	„	-0,399	—	—	+1,458	+0,958	+2,416
7' - 7''	„	„	„	-0,399	—	—	+1,458	+0,958	+2,416
8' - 8''	„	„	„	-0,208	+0,042	+0,011	+1,891	+1,073	+3,017
9' - 9''	„	„	„	-0,886	-0,124	-0,118	+0,059	+0,215	+0,032
10' - 10''	„	„	„	-0,925	-0,587	-0,352	-0,304	+0,318	-0,925
11' - 11''	„	„	„	-0,440	-0,874	-0,332	+0,796	+0,220	-0,190
12' - 12''	„	„	„	-0,796	-0,897	-0,093	—	—	-0,990
D									
1' - 2''	0	0	0	—	-0,197	-0,178	—	—	-0,375
2' - 3''	0	0	0	+0,277	-0,599	-0,503	+0,621	+0,168	-0,313
3' - 4''	0	0	0	-0,497	-0,596	-0,506	-1,559	-0,972	-3,633
4' - 5''	0	0	0	-0,497	-0,136	-0,163	-1,559	-0,972	-2,830
5' - 6''	0	0	0	+0,277	+0,060	+0,018	+0,621	+0,168	+0,867
6' - 7''	0	0	0	—	—	—	—	—	—
7' - 8''	0	0	0	—	—	—	—	—	—
8' - 9''	0	0	0	-0,277	-0,060	-0,018	-0,621	-0,168	-0,867
9' - 10''	0	0	0	+0,497	+0,136	+0,163	+1,559	+0,972	+2,830
10' - 11''	0	0	0	+0,497	+0,596	+0,506	+1,559	+0,972	+3,633
11' - 12''	0	0	0	-0,277	+0,599	+0,503	-0,621	-0,168	+0,313
12' - 1''	0	0	0	—	+0,197	+0,178	—	—	+0,375
R									
1'' - 2''	-0,017	-0,04	+0,586	+0,715	-0,401	-2,780	+0,293	+0,083	-2,805
2'' - 3''	„	„	„	-0,063	+0,194	-1,220	-1,673	-0,689	-3,388
3'' - 4''	„	„	„	+0,750	+0,572	+0,090	+0,798	+1,817	+3,277
4'' - 5''	„	„	„	+1,066	+0,201	+0,193	+1,934	+3,455	+5,783
5'' - 6''	„	„	„	-0,010	-0,065	-0,018	-0,977	+2,050	+0,990
6'' - 7''	„	„	„	+0,293	—	—	-0,298	+2,235	+1,937
7'' - 8''	„	„	„	+0,162	-0,028	-0,008	-0,590	+2,150	+1,524
8'' - 9''	„	„	„	+0,940	+0,158	+0,100	+1,372	+2,924	+4,554
9'' - 10''	„	„	„	+0,141	+0,137	-0,390	-1,094	+0,432	-0,915
10'' - 11''	„	„	„	-0,196	-0,525	-1,970	-2,229	-1,215	-5,939
11'' - 12''	„	„	„	+0,888	-0,885	-3,280	+0,680	+0,185	-3,300
12'' - 1''	„	„	„	+0,586	-0,704	-3,483	—	—	-4,187
S									
1'' - A	-0,861	-5,11	-0,694	-0,606	-1,670	+0,627	+0,197	+0,054	-0,792
2'' - B	„	„	„	-1,393	-1,055	+3,367	-1,710	-0,607	-2,006
3'' - C	„	„	„	-0,204	-0,556	+1,178	+2,687	+2,292	+5,601
4'' - D	„	„	„	-0,143	-0,598	+0,130	+2,376	+1,600	+3,508
5'' - E	„	„	„	-1,420	-0,259	-0,176	-0,631	-1,247	-2,313
6'' - F	„	„	„	-0,113	+0,051	+0,014	+2,684	+0,113	+2,862
7'' - G	„	„	„	-0,436	-0,020	-0,005	+1,959	-0,082	+1,852
8'' - H	„	„	„	+0,352	+0,160	+0,078	+3,863	+0,579	+4,680
9'' - I	„	„	„	-1,237	-0,092	-0,427	-0,532	-2,319	-3,370
10'' - J	„	„	„	-0,901	-1,018	-1,363	-0,191	-1,629	-4,201
11'' - K	„	„	„	+0,373	-1,446	-1,156	+2,790	+1,217	+1,405
12'' - L	„	„	„	-0,932	-1,589	-0,188	-0,530	-0,141	-2,448



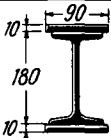

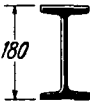
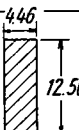

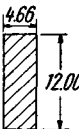
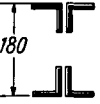
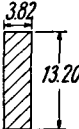

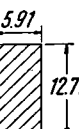
Tafel II (Fortsetzung)

Stab	Eigen- gewicht	Dach- haut	Schnee		Winddruck		Saugkraft		Wind +
			voll	unsym	Val	Hal	Val	Hal	

— 140 —

Tafel III

Vergleich der Stabquerschnitte des Bauwerks mit den Modellprofilen

Stab	Bauwerkprofil	Modellprofil	Bauwerk		Modell	
			F	J_x	F_m	J_{xm}
Obere und mittlere Sparren I 18			cm ²	cm ⁴	mm ²	mm ⁴
			27,9	1450,0	55,8	725,0
Untere Sparren			45,9	3076,5	91,8	1538,2
Oberer und zwischen Ringe I 18			27,9	1450,0	55,8	725,0
Fußring [18			28,0	1350,0	56,0	675,0
Obere und mittlere Diagonalen 4 L 55·55·6			25,24	1466,0	50,48	733,0
Untere Diagonale 4 L 70·70·7			37,6	2029,6	75,2	1014,8

Bezeichnungen zu Tafel IV

- L = Länge des Kuppelstabes in cm
 F = Querschnittsfläche des Stabes in cm^2
 E = Elastizitätsmodul des Stabmaterials in kg/cm^2

Für die Kuppel mit gelenkigen Knoten ist:

- $S_{i'}^0$ = Stabkraft infolge Belastung $X_{i'} = \dots = +1 \text{ tcm}$
 $S_{i''}^0$ = „ „ „ „ $X_{i''} = \dots = +1 \text{ tcm}$
 S_I^0 = Stabkraft infolge der I-Teilbelastung $P_1 = P_4 = P_7 = P_{10} = +1 \text{ t}$
 S_{II}^0 = „ „ „ II- „ „ $P_1 = -P_4 = P_7 = -P_{10} = +1 \text{ t}$
 S_{III}^0 = „ „ „ III- „ „ $P_1 = -P_4 = -P_7 = P_{10} = +1 \text{ t}$
 S_i^0 = „ „ „ Belastung $X_i = \dots = +1 \text{ tcm}$
 $S_{y_i}^0$ = „ „ „ „ $Y_i = \dots = +1 \text{ tcm}$

Für die Kuppel mit biegungssteifen Sparren (r -fach statisch unbestimmt) ist:

$$S_{1a}^r = \text{Stabkraft infolge Belastung } M_{1a} = M_{4a} = M_{7a} = M_{10a} = +1 \text{ tcm}$$

$$= S_1^0 + S_{1'}^0 \cdot X_{1'1} + S_{2'}^0 \cdot X_{2'1} + S_{1''}^0 \cdot X_{1''1} + S_{2''}^0 \cdot X_{2''1}$$

wobei $X_{1'1}$, $X_{2'1}$, $X_{1''1}$ und $X_{2''1}$ die Sparren-Biegunsmomente infolge der Belastung $M_{1a} = M_{4a} = M_{7a} = M_{10a} = +1 \text{ tcm}$ sind. Analog ist:

$$S_{2a}^r = S_2^0 + S_{1'}^0 \cdot X_{1'2} + S_{2'}^0 \cdot X_{2'2} + S_{1''}^0 \cdot X_{1''2} + S_{2''}^0 \cdot X_{2''2},$$

$$S_{1b}^r = S_{y_1}^0 + S_{1'}^0 \cdot X_{1'y_1} + S_{2'}^0 \cdot X_{2'y_1} + S_{1''}^0 \cdot X_{1''y_1} + S_{2''}^0 \cdot X_{2''y_1}$$

und $S_{2b}^r = S_{y_2}^0 + S_{1'}^0 \cdot X_{1'y_2} + S_{2'}^0 \cdot X_{2'y_2} + S_{1''}^0 \cdot X_{1''y_2} + S_{2''}^0 \cdot X_{2''y_2}.$

$$a_{ik}^r = \sum \frac{S_i^{(r)} \cdot S_k^{(0)} \cdot L}{EF} + \int M_i^{(r)} M_k^{(0)} \frac{ds}{EJ}.$$

Tafel IV Stabkräfte und Vorzeichen a_{ik} für die Kuppel mit gelenkigen Knoten

Stab	$\frac{L}{EF}$	S_1'	S_2'	S_1''	S_2''	$a_{1'1'}$	$a_{1'2'}$	$a_{1'1''}$	$a_{1'2''}$	$a_{1''1''}$	$a_{1''2''}$
R 1-2	5,477		+ 12,62								
2-3	"	+ 12,62									
3-4	"		+ 12,62								
S 1-1'	12,258	- 8,08	+ 13,99			872	- 1386				
2-2'	"	+ 8,08	+ 5,91			800					
3-3'	"	+ 13,99	- 8,08			2399	- 1386				
D 1-2'	16,120	+ 16,55	- 16,55			4415	- 4415				
2-3'	"		0								
3-4'	"	- 16,55	+ 16,55			4415	- 4415				
R 1'-2'	11,190	- 18,41	- 2,70			3792	+ 556				
2'-3'	"	- 12,42	8,70			1726	+ 1209				
3'-4'	"	+ 9,71	- 30,82			1055	- 3349				
S 1'-1''	12,258	+ 8,63	+ 34,48			17238	- 15850				
2'-2''	"	+ 25,85	- 11,65			913	- 1232				
3'-3''	"	+ 25,85	- 28,86			8191	- 9145				
D 1'-2''	20,100	+ 25,36	- 25,36			12927	- 12927				
2''-3''	"	0	0			0	0				
3''-4''	"	+ 25,36	- 25,36			12927	- 12927				
R 1''-2''	15,795	- 33,50	+ 42,11			17720	- 22275				
2''-3''	"	- 17,66	+ 26,27			4925	- 7325				
3''-4''	"	+ 59,77	- 51,16			56409	- 48283				
S 1''-A	7,451	- 91,66	+ 91,66			62600	- 62730				
2''-B	"	+ 20,17	- 19,98			3031	- 3003				
3''-C	"	+ 71,50	- 71,50			38283	- 38187				
D 1''-B	15,585	+ 87,50	- 87,50			119323	- 119323				
2''-C	"	0	0								
3''-D	"	- 87,50	+ 87,50			119323	- 119323				
R A-B	18,464	+ 122,69	- 121,86			277981	- 276078				
B-C	"	- 60,93	+ 61,76			68547	- 69481				
C-D	"	- 60,93	+ 61,76			68547	- 69481				

$\sum \frac{S_i^{(0)} \cdot S_k^{(0)} \cdot L}{EF} =$	+908359	-900756	+109859	-113778	+18601	-14020
---	---------	---------	---------	---------	--------	--------

I - Belastungsfall

Vor- und Belastungszahlen a_{ik} und a_{io} für die Kuppel mit gelenkigen Knoten

Stab	$\frac{L}{F}$	$a_{2' 2'}$	$a_{2' 2''}$	$a_{2'' 2''}$	S_I^0	$a_{01'}$	$a_{02'}$	$a_{01''}$	$a_{02''}$
R 1 - 2	5,477	+ 872		+					
2 - 3	"	872							
3 - 4	"				- 3,86	266,8			
S 1 - 1'	12,258	2399			+ 2,00	198,1	+ 343,0		
2 - 2'	"	428							
3 - 3'	"	800			- 4,25	728,8	+ 420,9		
D 1 - 2'	16,120	4415			- 5,03	1341,9	+ 1341,9		
2 - 3'	"								
3 - 4'	"	4415			+ 5,03	1341,9	+ 1341,9		
R 1' - 2'	11,190	82	- 246	727	+ 5,59	1151,6	- 168,9		+ 508,5
2' - 3'	"	847	- 791	727	+ 3,70	514,2	- 360,2		+ 336,6
3' - 4'	"	10629			- 7,37	800,8	+ 2541,7	670,5	
S 1' - 1''	12,258	14573	+ 2667	488	+12,47	5732,1	+ 5270,5	516,7	+ 964,5
2' - 2''	"	1664	+ 418	105	- 2,66	281,4	+ 379,9		- 95,5
3' - 3''	"	10210	+ 1196	140	-11,25	3564,8	+ 3979,9	870,2	+ 466,1
D 1' - 2''	20,100	12927	+ 4746	1742	-12,72	6484,0	+ 6484,0	2380,3	+ 2380,3
2' - 3''	"								
3' - 4''	"	12927	+ 4746	1742	+12,72	6484,5	+ 6484,0	2380,3	+ 2380,3
R 1'' - 2''	15,790	28000	- 2859	292	+15,80	8357,6	+ 10505,7	2517,3	- 1072,8
2'' - 3''	"	10897	- 4123	1560	+ 7,89	2200,1	+ 3272,8	554,4	- 1238,4
3'' - 4''	"	41328	+ 11738	3334	-22,60	21329,2	+ 18256,7	53,5	+ 5185,1
S 1'' - A	7,451	62860	+ 9056	1302	+36,68	25050,9	+ 25102,9	3993,0	+ 3613,1
2'' - B	"	2974	+ 965	313	- 8,85	1330,0	+ 1317,5	336,3	+ 427,3
3'' - C	"	38091	+ 5066	674	-29,02	15499,2	+ 15460,3	1757,9	+ 2056,3
D 1'' - B	15,585	119323	+ 7337	451	-34,53	47088,1	+ 47088,1	2895,2	+ 2895,2
2'' - C	"								
3'' - D	"	119323	+ 7337	451	+34,53	47088,1	+ 47088,1	2895,2	+ 2895,2
R A - B	18,464	274278	+ 31928	3718	-48,49	109846,7	+109103,6	17190,1	+12704,6
B - C	"	70427	+ 13809	2708	+24,66	27742,8	+ 28120,7	3228,2	+ 5514,0
C - D	"	70427	+ 13809	2708	+24,66	27742,8	+ 28120,7	3228,2	+ 5514,0
$\sum \frac{S_i^{(0)} \cdot S_k^{(0)} \cdot L}{EF} =$		+915988	+105963	+23207		-362166	+361746	-45467	+45435

$$a_{2' 2'} = 4 \left(+ 915\,988 + \frac{2 \cdot 1000^2 \cdot 342 \cdot 2}{3 \cdot 1450} \right) = + 4\,921\,880 \text{ kg. cm} \left[\frac{E}{E_c} = 1 \text{ gesetzt} \right]$$

$$a_{2' 2''} = 4 \left(+ 105\,963 + \frac{2 \cdot 1000^2 \cdot 342}{6 \cdot 1450} \right) = + 738\,334 \text{ ,,}$$

$$a_{2'' 2''} = + 92\,828 + 925\,552 = + 1\,018\,380 \text{ ,,}$$

$$a_{1' 1'} = + 4 \left(+ 908\,359 + \frac{1000^2 \cdot 342 \cdot 2}{3 \cdot 1450} \right) = + 4\,262\,400 \text{ kg. cm}$$

$$a_{1' 1''} = + 4 \left(+ 109\,859 + \frac{1000^2 \cdot 342}{1450} \right) = + 596\,677 \text{ kg. cm}$$

$$a_{1'' 1''} = + 4 \left[+ 18\,601 + 1000^2 \cdot \frac{342}{3} \left(\frac{1}{1450} + \frac{1}{3075} \right) \right] = + 537\,180 \text{ kg. cm.}$$

II - Belastungsfall

Stabkräfte und Vorzeichen a_{ik} für die Kuppel mit gelenkigen Knoten

Stab	$\frac{L}{F}$	S_1^0	S_2^0	$S_{1''}^0$	$S_{2''}^0$	$a_{1'1'}$	$a_{1'g'}$	$a_{1''1''}$	$a_{1''g''}$	$a_{1'1''}$	$a_{1''g'}$
R 1-2	5,477		+ 12,62			+					
2-3	"	- 12,62	- 12,62								
3-4	"										
S 1-1'	12,258	- 8,08	+ 13,99			872	1386				
2-2'	"		- 22,07			800					
3-3'	"	- 13,99	+ 8,08			2399	1386				
D 1-2'	16,120	+ 16,55	- 16,55			4415	4415				
2-3'	"		+ 33,10								
3-4'	"	+ 16,55	- 16,55			4415	4415				
R 1'-2'	11,190	- 18,41	+ 22,13								
2'-3'	"	+ 12,42	- 28,12								
3'-4'	"	- 9,71	+ 30,83			1055	3349	884	1130		
S 1'-1''	12,258	- 37,50	+ 53,54	- 8,13	+ 6,31	17238	24611	1554	2901	740	261
2'-2''	"	+ 27,69	- 63,35	- 3,38	- 9,69	9399	21503	1999	3289	488	261
3'-3''	"	- 25,85	+ 65,19	- 6,31	+ 3,38	8191	20657	1071	1071	488	261
D 1'-2''	20,100	+ 25,36	- 53,60	+ 9,31	- 9,31	12927	27322	4746	4746	1742	1742
2'-3''	"	- 28,24	+ 50,72		+ 18,62	16030	28790	4746	10569		
3'-4''	"	+ 25,36	- 53,60	+ 9,31	- 9,31	12927	27322	4746	4746	1742	1742
R 1''-2''	15,790	- 46,96	+ 108,07	- 10,09	+ 4,60	34821	80134	7482	3411	1742	1742
2''-3''	"	+ 48,30	- 106,76	+ 4,45	- 10,24	36836	81398	3394	7810	1608	733
3''-4''	"	- 59,77	+ 95,26	- 0,15	+ 14,54	56409	89903	142	13713	313	720
S 1''-A	7,451	- 100,41	+ 182,55	- 14,01	+ 19,02	75122	136576	10931	14230	0	34
2''-B	"	+ 87,41	- 195,55	+ 10,89	- 22,74	56922	127343	7092	14808	1590	2071
3''-C	"	- 95,14	+ 187,82	- 8,13	+ 25,50	67435	133126	5762	18074	884	1845
D 1''-B	15,585	+ 102,56	- 192,82	+ 5,38	- 15,52	163932	307883	8599	24807	492	1545
2''-C	"	- 90,06	+ 205,12	- 10,14	+ 10,76	126407	287903	14232	15103	1602	1701
3''-D	"	+ 102,56	- 192,62	+ 5,38	- 15,52	163932	307883	8599	24807	492	1545
R A-B	18,404	- 137,64	+ 253,26	+ 19,20	- 24,10	349796	638548	48795	61247	6807	8544
B-C	"	+ 125,63	- 263,27	- 12,05	+ 31,25	291415	610690	27952	72489	2681	6953
C-D	"	+ 125,63	- 263,27	+ 12,05	- 31,25	291415	610690	27952	72489	2681	6953

$$\sum \frac{S_k^{(0)} \cdot S_k^0 \cdot L}{EF} =$$

+1810628	-3585700	+184861	-373115	+24412	-37707
----------	----------	---------	---------	--------	--------

II - Belastungsfall

Vor- und Belastungszahlen a_{ik} und a_{i0} für die Kuppel mit gelenkigen Knoten

Stab	$\frac{L}{F}$	$a_{2'2'}$	$a_{2'2''}$	$a_{2''2''}$	S_{II}^0	$a_{01'}$	$a_{02'}$	$a_{01''}$	$a_{02''}$
		+	+	+		-	+	-	+
R 1 - 2	5,477	872							
2 - 3	"	872							
3 - 4	"	—			+ 3,86	266,8			
S 1 - 1'	12,258	2399			+ 2,00	198,1	343,0		
2 - 2'	"	—							
3 - 3'	"	800			+ 4,25	728,8	420,9		
D 1 - 2'	16,120	4415			- 5,03	1341,9	1341,9		
2 - 3'	"	—							
3 - 4'	"	4415			- 5,03	1341,9	1341,9		
R 1' - 2'	11,190	5480	2013	740	+ 5,59	1151,6	1384,0	—	508,5
2' - 3'	"	8848	2558	740	- 3,70	514,2	1164,0	—	336,6
3' - 4'	"	10629	—	—	+ 7,37	800,8	2541,7	670,5	—
S 1' - 1''	12,258	35138	4141	488	+12,47	5732,1	8184,0	516,7	964,5
2' - 2''	"	49194	7525	1151	- 8,40	2851,2	6523,0	—	997,8
3' - 3''	"	52093	2701	140	+11,25	3564,8	8989,9	870,2	466,1
D 1' - 2''	20,100	57746	10030	1742	-12,72	6484,0	13704,0	2380,3	2380,3
2' - 3''	"	51708	18983	6969	+ 8,50	4824,8	8665,5	—	3181,2
3' - 4''	"	57746	10030	1742	-12,72	6484,0	13704,0	2380,3	2380,3
R 1'' - 2''	15,790	184413	7849	334	+19,80	14681,7	33787,2	3154,0	1438,2
2'' - 3''	"	179868	17257	1656	-17,19	13110,1	28969,7	1207,9	2779,4
3'' - 4''	"	143286	21870	3334	+22,60	21329,2	33993,9	53,5	5185,1
S 1'' - A	7,451	248267	25867	2695	+39,32	29417,4	53475,0	4280,3	5572,4
2'' - B	"	284887	33129	3853	-32,55	21196,7	47420,4	2641,2	5515,1
3'' - C	"	262809	35681	4845	+36,18	25644,1	50625,2	2191,7	6874,2
D 1'' - B	15,585	578242	46591	3754	-39,07	62449,4	117287,5	3275,9	9450,2
2'' - C	"	655727	34398	1805	+33,00	46318,3	105494,2	5215,1	5533,9
3'' - D	"	578242	46591	3754	-39,07	62449,4	117287,5	3275,9	9450,2
R A - B	18,464	1165662	111806	10724	-53,01	134718,8	245927,4	18792,5	23588,5
B - C	"	1279760	151907	18031	+47,20	109486,6	229440,0	10501,6	27234,4
C - D	"	1279760	151907	18031	-47,20	109486,6	229440,0	10501,6	27234,4
$\sum \frac{S_i^{(0)} \cdot S_k^{(0)} \cdot L}{EF} =$		+7183278	+742834	+86527		-686573	+1361456	-71910,	+141071

$$a_{1'1'} = + 7\,242\,512 + 628\,964 = + 7\,871\,476 \text{ kg. cm} \left[\frac{E}{E_c} = 1 \text{ gesetzt} \right]$$

$$a_{1'1''} = + 739\,444 + 157\,241 = + 896\,685 \text{ ,,}$$

$$a_{1''1''} = + 97\,648 + 462\,776 = + 560\,424 \text{ ,,}$$

III - Belastungsfall
Vorzeichen a_{iH} der statisch bestimmten Kuppel mit gelenkigen Knoten

Stab	$\frac{L}{F}$	S_1^0	S_2^0	S_1^1	S_2^1	S_2^2	$a_{1'1'}$	$a_{1'2'}$	$a_{1'1''}$	$a_{1'2''}$	$a_{1''1''}$	
R 1 - 2	5,477		+ 12,62									
2 - 3	"	- 12,62	- 12,62									
3 - 4	"						872					
4 - 5	"											
5 - 6	"											
6 - 7	"											
S 1 - 1'	12,258	12,62	+ 13,99				872	1386				
2 - 2'	"	8,08	- 22,07				800					
3 - 3'	"	- 13,99	+ 8,08				2399	1386				
4 - 4'	"	+ 8,08					800					
5 - 5'	"											
6 - 6'	"	- 13,99	- 16,55				2399					
D 1 - 2'	16,120	+ 16,55	+ 33,10				4415	4415				
2 - 3'	"	+ 16,55	- 16,45				4415	4415				
3 - 4'	"	- 16,55										
4 - 5'	"											
5 - 6'	"											
6 - 7'	"	+ 16,55					4415					
R 1' - 2'	11,190	- 18,41	+ 22,13				3792	4559		1675		
2' - 3'	"	+ 12,42	- 28,12				1726	3908		1130		
3' - 4'	"	- 9,71	+ 18,41				1055	2000	884		727	
4' - 5'	"	+ 18,41					3792					
5' - 6'	"	+ 12,42					1726					
6' - 7'	"	- 9,71	+ 12,42				1055	1349	884		727	
S 1' - 1''	12,258	- 37,50	+ 35,38				17238	16363	884	2901		
2' - 2''	"	- 27,69	- 63,35				9399	21503	1554	3289		
3' - 3''	"	+ 25,85	+ 55,66				8191	17637	1999	1071		
4' - 4''	"	- 37,50	- 18,16				17238	8348	1554		488	
5' - 5''	"	+ 8,62					913				140	
6' - 6''	"	- 25,85	+ 9,53				8191	3020	1999		488	

D	1' - 2''	20,100	+ 25,36	- 39,48	+ 9,31	- 9,31	+ 12927	- 20124	+ 4746	- 4746	+ 1742
	2' - 3''	"	- 28,24	+ 50,72	+ 9,31	+18,62	16030	28790	10569	10569	1742
	3' - 4''	"	+ 25,36	- 39,48	+ 9,31	- 9,31	12927	20124	4746	4746	1742
	4' - 5''	"	- 25,36	+ 14,12	- 9,31	- 9,31	12927	7197	4746	4746	1742
	5' - 6''	"	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	6' - 7''	"	+ 25,36	- 14,12	+ 9,31	- 9,31	12927	7197	4746	4746	1742
R	1'' - 2''	15,790	+ 46,96	- 92,75	+ 10,09	+ 4,60	34821	68774	3411	3411	1608
	2'' - 3''	"	- 48,30	+100,00	+ 4,45	-10,24	36836	76266	3394	7810	313
	3'' - 4''	"	- 59,77	+ 55,55	- 0,15	+10,09	56409	52426	142	9523	1608
	4'' - 5''	"	+ 33,50	- 15,32	+10,09	- 15,32	17720	8104	5337	5337	313
	5'' - 6''	"	+ 17,66	- 6,73	+ 4,45	- 4,45	4925	1877	1241	1241	1608
	6'' - 7''	"	- 59,77	+ 39,71	- 0,15	+ 4,45	56409	37477	142	4200	1590
S	1'' - A	7,451	-100,41	+117,03	-14,61	+11,03	75122	87557	10931	8252	884
	2'' - B	"	+ 87,41	-179,44	+10,89	-22,74	56922	116868	7092	14808	492
	3'' - C	"	- 95,13	+149,83	- 8,13	+22,60	67435	106202	5762	16019	1590
	4'' - D	"	+ 91,67	- 65,52	+14,61	- 7,99	62600	44752	9978	5457	194
	5'' - E	"	- 20,17	+ 7,36	- 5,09	-	3031	1106	766	-	492
	6'' - F	"	- 71,68	+ 37,99	- 8,13	+ 2,90	38283	20209	4342	1549	451
D	1'' - B	15,585	+102,56	-140,06	+ 5,38	-10,45	163932	223871	8599	16703	1602
	2'' - C	"	- 90,06	+190,06	-10,14	+10,76	126407	266765	14232	15103	451
	3'' - D	"	+102,56	-140,06	+ 5,38	-10,45	163932	223871	8599	16703	451
	4'' - E	"	- 87,50	+ 52,56	- 5,38	+ 5,07	119323	71675	7337	6914	451
	5'' - F	"	+ 87,50	- 52,56	+ 5,38	- 5,07	119323	71675	7337	6914	451
R	A - B	18,464	+130,17	-125,63	+19,20	-12,05	312858	301947	46146	28962	6807
	B - C	"	-125,63	+223,45	-12,05	+28,77	291415	518321	27952	66736	2681
	C - D	"	+125,63	-223,45	+12,05	-28,77	291415	518321	27952	66736	2681
	D - E	"	-130,17	+125,63	-19,20	+12,05	312858	301947	46146	28962	6807
	E - F	"	+ 60,93	- 32,35	+ 7,09	- 2,48	68547	33159	7976	2790	928
	F - G	"	+ 60,93	- 32,35	+ 7,09	- 2,48	68547	33159	7976	2790	928
$\sum \frac{S_i^{(0)} \cdot L}{E F} =$											
+2716926											
-3360030											
+294719											
-360470											
+43000											

$$\left[\frac{E}{E_c} = 1 \text{ gesetzt} \right]$$

$$a_1' 1' = + 5\,433\,852 + 628\,964 = + 6\,062\,816 \text{ kg. cm}$$

$$a_1' 1'' = + 589\,438 + 157\,241 = + 746\,679 \text{ "}$$

$$a_1'' 1'' = + 86\,000 + 462\,776 = + 548\,776 \text{ "}$$

III - Belastungsfall
Vor- und Belastungszahlen der statisch bestimmten Kuppel mit gelenkigen Knoten

Stab	$a_{2' 2'}$	$a_{1'' 2''}$	$a_{2'' 2''}$	S_{III}^0	$u_{0 12'}$	$a_{0 1'}$	$a_{0 2'}$	$a_{0 13''}$	$a_{0 1''}$	$a_{0 2''}$
R										
1 - 2	+									
2 - 3	872			+ 3,86		267				
3 - 4	872			+ 3,86		267				
4 - 5				+ 2,00		198	343			
5 - 6				+ 4,25		729	421			
6 - 7				- 2,00	+ 343	198				
S										
1 - 1'	2399			+ 4,24	+ 421	729				
2 - 2'	5971			- 5,03		1342	1342			
3 - 3'	800			- 5,03		1342	1342			
4 - 4'				+ 5,03	+ 1342	1342				
5 - 5'				- 5,03		1342				
6 - 6'				+ 5,03	+ 1342	1342				
D										
1 - 2'	4415			- 5,03		1342				
2 - 3'	17660			+ 5,03		1342				
3 - 4'	4415			- 5,03		1342				
4 - 5'				+ 5,03		1342				
5 - 6'				- 5,03		1342				
6 - 7'				+ 5,03		1342				
R										
1' - 2'	5480		2013	- 5,03	+ 1342	1342				
2' - 3'	8848		2558	+ 5,59		1152	1384			509
3' - 4'	3792			- 3,70		514	1164		670	337
4' - 5'				+ 7,37	+ 1024	801	1518			
5' - 6'				- 5,57	- 169	1152		+ 509		
6' - 7'				- 3,70	- 360	514		+ 337		
S										
1' - 1''	15344		2737	+ 7,37	+ 1518	801	1024			
2' - 2''	49194		7525	+ 12,47	+ 2776	5732	5408		670	965
3' - 4''	37976		2306	- 8,40		2851	6523		517	998
4' - 4''	4043	261		+ 11,25	+ 1314	3565	7676		870	466
5' - 5''		261		- 12,47	+ 2496	5732	2776		517	
6' - 6''	1113			+ 2,66	+ 380	281		+ 965		
				+ 11,25	+ 2667	3565	1314	+ 466	870	

I - Belastungsfall

Belastungszahlen der statisch bestimmten Kuppel für Belastung $M_{1,a} \equiv M_{4,a} \equiv M_{7,a} \equiv M_{10,a} \equiv 1 \text{ tcm}$
 bzw. $M_{1,b} \equiv M_{4,b} \equiv M_{7,b} \equiv M_{10,b} \equiv 1 \text{ tcm}$

Stab	$\frac{L}{F}$	S^0	$S^0_{y_1}$	$a_{11'}$	$a_{12'}$	$a_{11''}$	$a_{12''}$	$a^0_{y_1,1'}$	$a_{y_1,2'}$	$a_{y_1,1''}$	$a_{y_1,2''}$
R 1 - 2	5,477	- 48,68	- 11,27	+	- 3365	+	-	+	779	+	
2 - 3	"	- 48,68	- 13,13		3365		-		908		
3 - 4	"	+ 110,23	+ 24,40	7619			-	1687			
S 1 - 1'	12,258	- 112,40	- 40,72	11133	- 19275		-	4033	6983		
2 - 2'	"	- 28,45	- 0,03		2061		-				
3 - 3'	"	+ 146,76	+ 40,75	25168	- 14536		-	6988	4036		
D 1 - 2'	16,120	+ 207,35	+ 48,15	55318	- 55318		-	12846	12846		
2 - 3'	"	0	0				-				
3 - 4'	"	- 207,35	- 48,15	55318	- 55318		-	12846	12846		
R 1' - 2'	11,190	- 206,17	- 52,70	42473	+ 6229		-	10857	1592		4794
2' - 3'	"	- 128,49	- 37,96	17858	+ 12509		-	5276	3696		3453
3' - 4'	"	+ 321,68	+ 90,68	34952	- 110940	29265	-	9853	31273	8250	
S 1' - 1''	12,258	- 532,09	- 148,21	244588	- 224891	22046	-	68128	62642	6141	- 11464
2' - 2''	"	+ 91,32	+ 24,59	9960	- 13041		+	2601	3512		883
3' - 3''	"	+ 440,68	+ 123,62	139638	- 155898	34086	-	39172	43733	9562	5122
D 1' - 2''	20,100	+ 517,16	+ 144,47	263615	- 263615	96777	-	73642	73642	27035	- 27035
2' - 3''	"	0	0				-				
3' - 4''	"	- 517,16	- 144,47	263615	- 263615	96777	-	73642	73642	27035	- 27035
R 1'' - 2''	15,790	- 629,13	- 165,68	332788	- 418319	100234	+	87639	110163	26396	- 11249
2'' - 3''	"	- 306,94	- 94,33	85591	- 127320	21567	+	26304	39128	6628	+ 14805
3'' - 4''	"	+ 937,25	+ 260,01	884547	- 757126	2220	-	245389	210040	616	- 59654
S 1'' - A	7,451	- 1515,15	- 420,12	1034785	- 1036930	104938	-	286925	287519	45734	- 41383
2'' - B	"	+ 345,87	+ 96,67	51980	- 51490	13143	-	14528	14391	3673	- 4667
3'' - C	"	+ 1169,64	+ 323,45	624690	- 623122	70853	-	172751	172317	19594	- 22919

D	1" - B	15,585	+1409,65	+382,81	1922323	- 1922323	118195	- 118195	522033	- 512033	32098	- 32098
	2" - C	"	0	0	1922323	- 1922323	118195	- 118195	522033	- 522033	32098	- 32098
	3" - D	"	-1409,65	-382,81	1922323	- 1922323	118195	- 118195	522033	- 522033	32098	- 32098
R	A - B	18,464	+1992,61	+552,00	4513955	- 4483418	706398	- 522072	1250472	-1242013	195689	-144626
	B - C	"	- 996,48	-276,00	1121052	- 1136323	130449	- 222812	310503	- 314733	36131	- 61713
	C - D	"	- 996,48	-276,00	1121052	- 1136323	130449	- 222812	310503	- 314733	36131	- 61713
				$\Sigma =$	+14786041	-14781517	+1855592	-1857185	+4070651	-4070651	+512811	-512811

$$a_{1,1'} = + 59\,144\,164 - \frac{1000^2 \cdot 342 \cdot 4}{6 \cdot 1450} = + 54\,144\,164 - 157\,241 = + 58\,986\,923 \text{ kg} \cdot \text{cm} \left[\frac{E}{E_c} = 1 \text{ gesetzt} \right]$$

I - Belastungsfall
 Ermittlung der Stabkräfte in kg der Kuppel mit biegeungssteifen Sparren infolge
 $M_{1,a} = M_{4,a} = M_{7,a} = M_{10,a} = M_{10,a} = 1^{tem}$

Stab	S_1^0	$S_{1'}^0 \cdot X_{1/1}$	$S_{2'}^0 \cdot X_{2/1}$	$S_{1''}^0 \cdot X_{1/1}$	$S_{2''}^0 \cdot X_{2/1}$	$S_{1'}^1$	S_2^0	$S_{1'}^0 \cdot X_{1/2}$	$S_{2'}^0 \cdot X_{2/2}$	$S_{1''}^0 \cdot X_{1/2}$	$S_{2''}^0 \cdot X_{2/2}$	$S_{1'}^1$	$S_{2'}^1$
R 1 - 2	- 48,68		+ 63,50			+ 14,82	+ 61,55		- 60,70				+ 0,85
2 - 3	- 48,68		+ 63,50			+ 14,82	+ 61,55		- 60,70				+ 0,85
3 - 4	+ 110,23	- 124,20				- 13,97	- 97,36	+ 126,99					+ 29,63
S 1 - 1'	- 112,40	+ 79,52	+ 70,39			+ 37,51	+ 118,31	- 81,31	- 67,29				- 30,29
2 - 2'	- 28,45	+ 29,74	+ 29,74			+ 1,29	+ 34,36		- 28,43				+ 5,93
3 - 3'	+ 146,76	- 137,68	- 40,65			- 31,57	- 140,85	+ 140,78	+ 38,87				+ 38,80
D 1 - 2'	+ 207,35	- 162,88	- 83,27			- 38,80	- 207,35	+ 166,54	+ 79,61				+ 38,80
2 - 3'	0					0	0						0
3 - 4'	- 207,35	+ 162,88	- 83,27			+ 38,80	+ 207,35	- 166,54	- 79,61				- 38,80
R 1' - 2'	- 206,17	+ 181,18	- 13,58			- 44,09	+ 193,19	- 185,26	+ 12,99			+ 5,11	+ 26,03
2' - 3'	- 128,49	+ 122,23	- 43,77		- 5,52	- 55,55	+ 115,51	- 124,98	+ 41,85			+ 5,11	+ 37,49
3' - 4'	+ 321,68	- 95,56	- 155,07	+ 10,63		+ 81,68	- 334,61	+ 97,71	+ 148,25	- 11,05			- 99,70
S 1' - 1''	- 532,09	+ 369,06	+ 173,48	- 4,42		+ 1,74	+ 532,00	- 377,30	- 165,85	+ 4,59		+ 3,96	- 2,66
2' - 2''	+ 91,32	- 84,93	- 58,62	- 1,99		- 54,22	- 91,40	+ 86,84	+ 56,04			+ 1,84	+ 53,32
3' - 3''	+ 440,68	- 245,40	- 145,21	+ 8,25		+ 51,62	- 440,77	+ 260,12	+ 138,82	- 8,58		+ 2,12	- 52,53
D 1' - 2''	+ 517,16	- 249,58	- 127,60	+ 12,18		+ 158,49	- 517,16	+ 255,19	+ 121,98	- 12,65		+ 5,85	- 158,49
2' - 3''	0					0	0						0
3' - 4''	- 517,16	+ 249,58	+ 127,60	- 12,18		- 158,49	+ 517,16	- 255,19	- 121,98	+ 12,65		+ 5,85	+ 158,49
R 1'' - 2''	- 629,13	+ 329,69	+ 211,87	- 13,20		- 97,85	+ 630,31	- 337,10	- 202,55	+ 13,71		+ 2,70	+ 101,67
2'' - 3''	- 306,94	+ 173,80	+ 132,17	- 5,82		+ 0,04	+ 308,12	- 177,71	- 126,36	+ 6,05		+ 6,25	+ 3,85
3'' - 4''	+ 937,25	- 588,23	- 257,41	+ 0,20		+ 101,68	- 936,07	+ 601,45	+ 246,08	- 0,20		+ 9,13	- 97,87
S 1'' - A	- 1515,15	+ 902,07	+ 462,13	- 19,11		- 179,04	+ 1515,51	- 922,36	- 441,81	+ 19,85		+ 8,31	+ 179,50
2'' - B	+ 345,87	- 198,50	- 100,53	+ 6,67		+ 57,91	- 345,51	+ 202,97	+ 96,11	- 6,93		+ 4,07	- 57,43
3'' - C	+ 1169,64	- 705,44	- 359,75	+ 10,63		+ 121,54	- 1170,28	+ 721,30	+ 343,92	- 11,05		+ 5,98	- 122,09
D 1'' - B	+ 1409,65	- 861,13	- 440,25	+ 7,04		+ 118,97	- 1409,65	+ 880,50	+ 420,88	- 7,32		+ 3,38	- 118,97
2'' - C	0					0	0						0
3'' - D	- 1409,65	+ 861,13	+ 440,25	- 7,04		- 118,97	+ 1409,65	- 880,50	- 420,88	+ 7,32		+ 3,38	+ 118,97
R A - B	+ 1992,61	- 1207,45	- 613,13	+ 25,11		+ 206,78	- 1992,96	+ 1234,60	+ 586,10	- 26,09		- 12,06	- 210,35
B - C	- 996,48	+ 599,64	+ 310,74	- 9,27		- 103,60	+ 906,13	- 613,13	- 297,07	+ 9,64		+ 4,46	+ 100,03
C - D	- 996,48	+ 599,64	+ 310,74	- 9,27		- 103,60	+ 906,13	- 613,13	- 297,07	+ 9,64		+ 4,46	+ 100,03

I - Belastungsfall

Ermittlung der Stabkräfte in kg der Kuppel mit steifen Sparren infolge $M_{1,b} = M_{4,b} = M_{7,b} = M_{10,b} = 1 \text{cm}$

Stab	$S_0^{y_1}$	$S_0^{y_1} \cdot X_{1,y_1}$	$S_0^{y_2} \cdot X_{2,y_1}$	$S_0^{y_1} \cdot X_{1,y_1}$	$S_0^{y_2} \cdot X_{2,y_1}$	$S_0^{y_2}$	$S_0^{y_1} \cdot X_{1,y_2}$	$S_0^{y_2} \cdot X_{2,y_2}$	$S_0^{y_1} \cdot X_{1,y_2}$	$S_0^{y_2} \cdot X_{2,y_2}$	$S_{2,b}$
R 1 - 2	- 11,27	+ 17,21	+ 17,21			+ 5,94	+ 11,27	- 17,30			kg - 6,03
2 - 3	- 13,13	+ 17,21				+ 4,08	+ 13,13	- 17,30			- 4,17
3 - 4	+ 24,40	- 34,52				- 10,12	- 24,40				+ 10,03
S 1 - 1'	- 40,72	+ 22,10	+ 19,08			+ 0,46	+ 40,72	- 19,18			- 0,50
2 - 2'	- 0,03	+ 8,06	+ 8,06			+ 8,03	0	- 8,10			- 8,10
3 - 3'	+ 40,75	- 38,26	- 11,02			- 8,53	- 40,75	+ 11,08			+ 8,49
D 1 - 2'	+ 48,15	- 45,26	- 22,57			- 19,68	+ 48,15	+ 22,69			+ 19,69
2 - 3'	0	0	0			0	0	0			0
3 - 4'	+ 48,15	+ 45,26	+ 22,57			+ 19,68	+ 48,15	- 22,69			- 19,69
R 1' - 2'	- 52,70	+ 50,35	- 3,68			- 7,38	+ 52,70	+ 3,70			+ 7,72
2' - 3'	- 37,96	+ 33,97	- 11,87	- 1,35		- 17,21	+ 37,96	+ 11,93			+ 17,55
3' - 4'	+ 90,68	- 26,56	- 42,04	+ 2,89		+ 24,97	- 90,68	+ 42,25	- 2,70		- 24,64
S 1' - 1''	- 148,21	+ 102,56	+ 47,03	- 1,20		- 0,87	+ 148,21	- 102,30	+ 1,12		+ 1,20
2' - 2''	+ 24,59	- 23,60	- 15,89	-		- 15,39	- 24,59	+ 15,97	-		+ 0,56
3' - 3''	+ 123,62	- 70,70	- 39,37	+ 2,24		+ 16,35	- 123,62	+ 39,57	- 2,09		- 0,64
D 1' - 2''	+ 144,47	- 69,36	- 34,59	+ 3,31		+ 45,38	- 144,47	+ 34,77	- 3,09		- 1,77
2' - 3''	0	0	0	0		0	0	0	0		0
3' - 4''	- 144,47	+ 69,36	+ 34,59	- 3,31		- 45,38	+ 144,47	- 34,77	+ 3,09		+ 1,77
R 1'' - 2''	- 165,68	+ 91,62	+ 57,44	- 3,58		- 19,49	+ 165,68	- 57,73	+ 3,35		- 0,82
2'' - 3''	- 94,33	+ 48,30	+ 35,83	- 1,58		- 10,13	+ 94,33	- 36,02	+ 1,48		+ 1,89
3'' - 4''	+ 260,01	- 163,47	- 69,78	+ 0,05		+ 29,22	- 260,01	+ 70,14	- 0,05		- 2,76
S 1'' - A	- 420,12	+ 250,69	+ 125,28	- 5,19		- 51,53	+ 420,12	- 250,05	+ 4,85		+ 51,50
2'' - B	+ 96,67	- 55,16	- 27,25	+ 1,81		+ 17,15	- 96,67	+ 27,39	- 1,69		- 17,18
3'' - C	+ 323,45	- 196,04	- 97,53	+ 2,89		+ 34,35	- 323,45	+ 98,03	- 2,70		- 34,39
D 1'' - B	+ 382,81	- 239,31	- 119,35	+ 1,91		+ 26,95	- 382,81	+ 119,96	- 1,79		- 26,96
2'' - C	0	0	0	0		0	0	0	0		0
3'' - D	- 382,81	+ 239,31	+ 119,35	- 1,91		- 26,95	+ 382,81	- 119,96	+ 1,79		+ 26,96
R A - B	+ 552,00	- 335,56	- 166,22	+ 6,82		+ 59,40	- 552,00	+ 167,07	- 6,39		- 59,32
B - C	- 276,00	+ 166,64	+ 84,24	- 2,52		- 29,65	+ 276,00	- 84,67	+ 2,35		+ 29,76
C - D	- 276,00	+ 166,64	+ 84,24	- 2,52		- 29,65	+ 276,00	- 84,67	+ 2,35		+ 29,76

Fall I Stabkräfte und Vorzahlen $a_{ik}^{r,0}$ der Kuppel mit biegeungssteifen Sparren als Grundsystem

Stab	$\frac{L}{F}$	S'_{1a}	S'_{2a}	S'_{1b}	S'_{2b}	$a_{11}^{r,0}$	$a_{12}^{r,0}$	$a_{1y_1}^{r,0}$	$a_{1y_2}^{r,0}$	$a_{22}^{r,0}$	$a_{2y_2}^{r,0}$
R 1 - 2	5,477	+ 14,82	+ 0,85	+ 5,94	- 6,03	-	+ 4996	-	+ 1584	+ 287	-
2 - 3	"	+ 14,82	+ 0,85	+ 4,08	- 4,17	-	+ 4996	-	+ 1088	+ 287	-
3 - 4	"	+ 13,97	+ 29,63	+ 10,12	+ 10,03	-	+ 7449	-	+ 6110	+ 1580	-
S 1 - 1'	12,258	+ 37,51	+ 30,29	+ 0,46	- 0,50	-	+ 54399	-	+ 634	+ 43928	-
2 - 2'	"	+ 1,29	+ 5,93	+ 8,03	- 8,10	-	+ 543	-	+ 2800	+ 2498	-
3 - 3'	"	+ 31,57	+ 38,80	+ 8,53	+ 8,49	-	+ 54507	-	+ 15345	+ 66990	-
D 1 - 2'	16,120	- 38,80	+ 38,80	- 19,68	+ 19,69	-	+ 129688	-	+ 65780	- 129688	-
2 - 3'	"	- 38,80	+ 38,80	+ 19,68	- 19,69	-	+ 129688	-	+ 65780	- 129688	-
3 - 4'	"	- 44,09	+ 26,03	- 7,38	+ 7,72	+	+ 95314	-	+ 17026	+ 56272	-
R 1' - 2'	11,190	- 55,55	+ 37,49	- 17,21	+ 17,55	+	+ 71802	-	+ 24745	+ 48458	+
2' - 3'	"	+ 81,68	- 99,70	+ 24,97	- 24,64	+	- 305833	-	+ 89882	+ 373305	+
3' - 4'	"	+ 1,74	- 2,66	- 0,87	+ 0,96	-	+ 11349	-	+ 5674	- 17347	+
S 1' - 1''	12,258	- 54,22	+ 53,32	- 15,39	+ 15,48	-	+ 60694	-	+ 17228	- 59739	+
2' - 2''	"	+ 51,62	- 52,53	+ 16,35	- 16,26	+	+ 278844	-	+ 88326	+ 283817	+
3' - 3''	"	+ 158,49	- 158,49	+ 45,38	- 45,38	+	+ 1647490	-	+ 471721	+ 1647490	+
D 1' - 2''	20,100	- 158,49	+ 158,49	- 45,38	+ 45,38	+	+ 1647490	-	+ 471721	+ 1647490	+
2' - 3''	"	- 97,85	+ 101,67	- 19,49	+ 19,09	+	+ 972039	-	+ 193613	+ 1011880	+
R 1'' - 2''	15,790	- 0,04	+ 3,85	- 10,13	+ 9,72	+	+ 194	-	+ 49096	+ 18731	-
2'' - 3''	"	+ 101,68	- 97,87	+ 29,22	- 29,63	+	+ 1504780	-	+ 432432	+ 1446572	-
3'' - 4''	"	- 179,04	+ 179,50	- 51,53	+ 51,50	+	+ 2021251	-	+ 581403	+ 2026926	-
S 1'' - A	7,451	+ 57,91	- 57,43	+ 17,15	- 17,18	+	+ 149239	-	+ 44197	+ 147847	+
2'' - B	"	+ 121,54	- 122,09	+ 34,35	- 34,39	+	+ 1059220	-	+ 299360	+ 1064596	+
3'' - C	"	+ 118,97	- 118,97	+ 26,95	- 26,96	+	+ 2613698	-	+ 592075	+ 2613698	+
D 1'' - B	15,585	- 118,97	+ 118,97	- 26,95	+ 26,96	+	+ 2613698	-	+ 592075	+ 2613698	+
2'' - C	"	+ 206,78	- 210,35	+ 59,40	- 59,32	+	+ 7609101	-	+ 592075	+ 2613698	+
R A - B	18,464	- 103,60	+ 100,03	- 29,65	+ 29,76	+	+ 1906137	-	- 2182474	+ 7740461	-
B - C	"	- 103,60	+ 100,03	- 29,65	+ 29,76	+	+ 1905467	-	- 547554	+ 1839806	+
C - D	"	- 103,60	+ 100,03	- 29,65	+ 29,76	+	+ 1905467	-	- 547554	+ 1839806	+
$\sum \frac{S_i^{(0)} \cdot S_k \cdot L}{EF} =$											
		+ 25946904	- 25693458	+ 7053811	- 7055189	+ 25960745	+ 7055307				

Die endgültige Größe der Vorzahlen a_{ik}^{r0} für den I-Belastungsfall sind:

$$\begin{aligned} a_{11}^{r0} &= \sum \frac{S_i^{(r)} \cdot S_k^{(0)} \cdot L}{EF} + \int \frac{M_i^{(r)} \cdot M_k^{(0)} ds}{EJ} \\ &= 4 \left[25\,946\,904 + (1,0 \cdot 1,0 \cdot 2 + 9,8475 \cdot 1,0) \frac{342 \cdot 10^6}{1450 \cdot 6} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1,932^2 \cdot 152,8 \cdot 2 \cdot 10^6}{3 \cdot 1163} \right] \\ &= 106\,956\,973 \text{ kg} \cdot \text{cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12}^{r0} &= -4 \left[25\,693\,458 + \frac{5,0314 \cdot 1,0 \cdot 342 \cdot 2 \cdot 10^6}{1450 \cdot 6} + \frac{1,932^2 \cdot 152,8 \cdot 2 \cdot 10^6}{6 \cdot 1163} \right] \\ &= -104\,702\,407 \text{ kg} \cdot \text{cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{22}^{r0} &= +4 \left[25\,960\,755 + \frac{1,0 \cdot 1,0 \cdot 2 \cdot 4,8101 \cdot 342 \cdot 2 \cdot 10^6}{1450 \cdot 6} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1,932^2 \cdot 152,8 \cdot 5 \cdot 10^6}{1163 \cdot 3} \right] \\ &= +109\,253\,120 \text{ kg} \cdot \text{cm} \end{aligned}$$

$$a_{y_1 y_1}^{r0} = +4 \left[1\,956\,881 + \frac{1,0^2 \cdot 152,8 \cdot 2 \cdot 10^6}{3 \cdot 368,3} \right] = +8\,934\,447 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

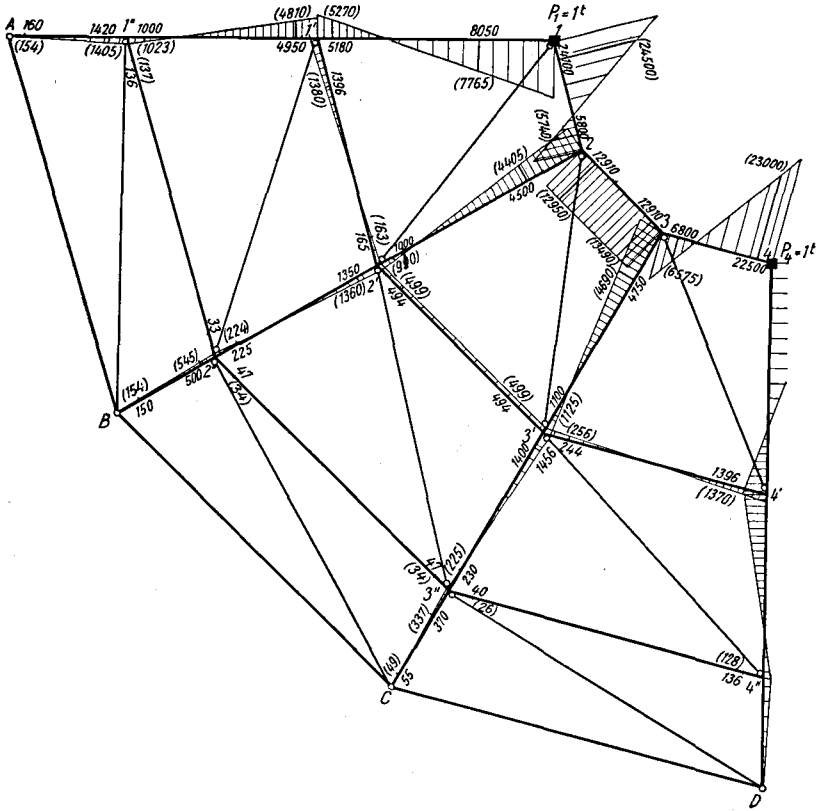
$$a_{y_1 y_2}^{r0} = +4 \left[-1\,956\,881 + \frac{1,0^2 \cdot 152,8 \cdot 2 \cdot 10^6}{6 \cdot 368,3} \right] = -7\,274\,062 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$\begin{aligned} a_{y_2 1}^{r0} &= +4 \left[-7\,055\,189 - \frac{1,364 \cdot 1,0 \cdot 342 \cdot 2 \cdot 10^6}{6 \cdot 1450} \right] = -28\,645\,471 \text{ kg} \cdot \text{cm} \\ &= a_{y_1 2}^{r0} \end{aligned}$$

$$a_{y_2 y_2}^{r0} = +4 \left[1\,957\,250 + \frac{1,0^2 \cdot 152,8 \cdot 5 \cdot 10^6}{3 \cdot 368,3} \right] = +10\,596\,308 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$a_{y_2 2}^{r0} = +4 \left[7\,055\,307 + \frac{1,0^2 \cdot 1,371 \cdot 342 \cdot 2 \cdot 10^6}{6 \cdot 1450} \right] = +28\,652\,380 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

Tafel Vd

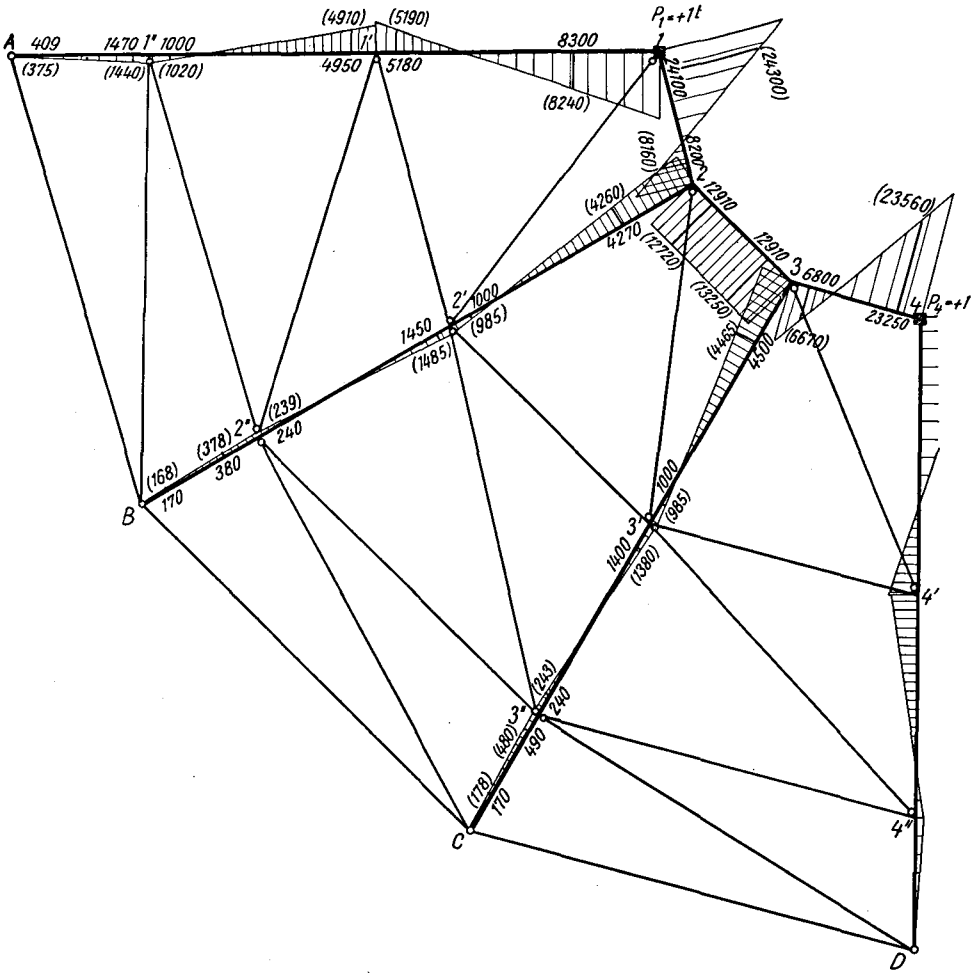


1 cm = 20 000 kg·cm

Ohne Klammern: Theoretische Biegemomente der Kuppel mit biegesteifen Sparren und Ringen und gelenkig angeschlossenen Streben.

In Klammern: Biegemomente nach Modellversuchen für Kuppel mit steifen Sparren und Ringen und gelenkig angeschlossenen Streben.

Tafel Vf



Ohne Klammern: Theoretische Biegemomente
 In Klammern: Biegemomente nach Modellversuch.

der Kuppel mit biegesteifen Sparren und Schlußring und gelenkig angeschlossenen Zwischenringen und Streben.

Tafel Vh

Vergleich der Spannungen der verschiedenen Kuppelsysteme

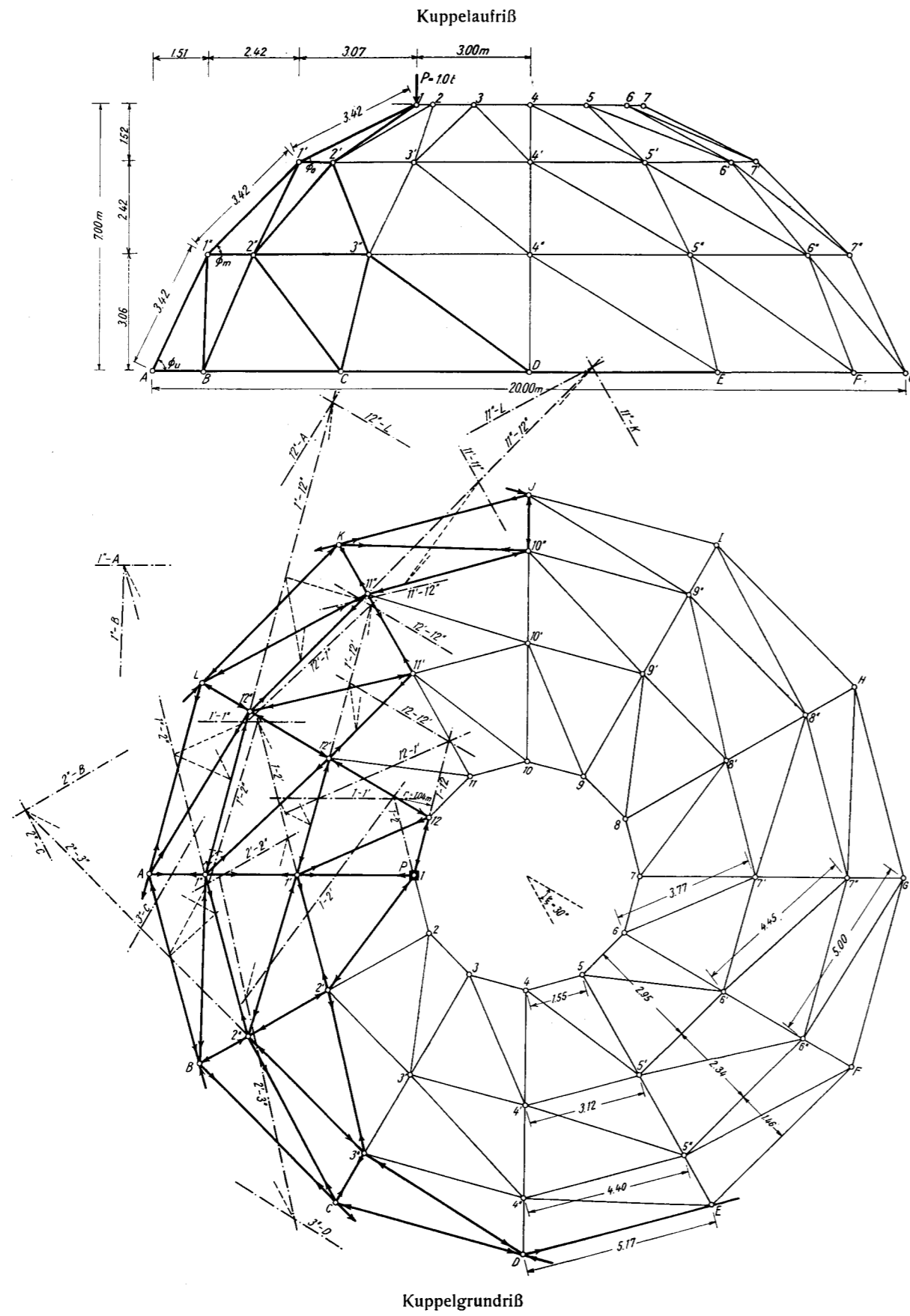
I. Belastungsfall

Stab	gelenkige Kuppel		Kuppel mit steifen Sparren			Kuppel mit steifen Sparren u. Ringen				Modellversuche für Kuppel mit steifen Sparren, Ringen und Streben		
	S ₀ t	σ ₀ kg/cm ²	S t	M tcm	σ _{max} kg/cm ²	S t	M _x tcm	M _y tcm	σ _{max} kg/cm ²	S t	M _x tcm	σ kg/cm ²
R ₁ - 2	0	0	-1,524	0	54,6	-1,259	28,14	8,24	219,9	-1,248	28,20	220,8
2 - 3	0	0	-1,524	0	54,6	-1,224	12,91	3,54	124,1	-1,260	12,99	125,7
3 - 4	- 3,86	138,3	-0,778	0	27,9	-1,271	28,14	8,24	220,3	-1,262	28,60	222,9
S ₁ - 1'	+ 2,00	71,6	-1,663	244,21	1577,6	-0,894	14,91	—	124,5	-0,898	14,75	123,7
2 - 2'	0	0	-0,714	120,76	775,6	-0,668	6,79	—	66,1	-0,662	6,94	66,9
3 - 3'	- 4,25	152,2	+0,142	120,76	755,1	-0,663	6,79	—	65,9	-0,676	6,75	65,9
D ₁ - 2'	- 5,03	199,5	+0,010	0	40,1	+0,004	—	—	0,2	+0,002	1,07	6,6
2 - 3'	0	0	0	0	0	0	—	—	0	0	1,27	7,7
3 - 4'	+ 5,03	199,5	-1,010	0	40,1	-0,004	—	—	0,2	-0,002	1,20	7,4
R _{1'} - 2'	+ 5,59	200,3	+1,554	0	55,7	+0,657	1,85	—	35,1	+0,635	1,84	34,2
2' - 3'	+ 3,70	132,6	+1,851	0	66,4	+0,624	0,49	—	25,4	+0,624	0,51	25,5
3' - 4'	- 7,37	264,1	-1,548	0	55,5	+0,554	1,85	—	31,4	+0,559	1,87	31,6
S _{1'} - 1''	+12,47	447,0	-0,635	244,21	1541,0	-0,599	5,84	—	57,7	-0,597	5,85	57,7
2' - 2''	- 2,66	95,4	+0,902	120,76	782,4	-0,397	1,59	—	24,1	-0,404	1,68	24,9
3' - 3''	-11,25	403,0	-1,718	120,76	811,6	-0,456	1,59	—	26,3	-0,465	1,56	26,4
D _{1'} - 2''	-12,72	504,0	-3,928	0	155,9	-0,111	—	—	4,4	-0,112	0,12	5,2
2' - 3''	0	0	0	0	0	0	—	—	0	0	0,20	1,2
3' - 4''	+12,72	504,0	+3,928	0	155,9	+0,111	—	—	4,4	+0,107	0,09	4,8
R _{1''} - 2''	+15,80	566,0	+2,800	0	100,3	+0,490	0,15	—	18,5	+0,489	0,15	18,5
2'' - 3''	+ 7,87	282,7	+0,300	0	14,0	+0,280	0,05	—	10,3	+0,284	0,04	10,4
3'' - 4''	-22,60	810,0	-2,069	0	74,2	+0,356	0,15	—	13,7	+0,345	0,14	13,3
S _{1''} - A	+36,68	799,2	+3,908	33,35	193,6	-0,409	1,67	—	14,2	-0,394	1,69	14,1
2'' - B	- 8,85	193,0	-1,788	16,40	92,4	-0,392	0,53	—	10,3	-0,391	0,51	10,2
3'' - C	-29,02	632,5	-3,308	16,40	125,4	-0,381	0,53	—	10,0	-0,397	0,50	10,3
D _{1''} - B	-34,53	919,0	-2,863	0	76,1	-0,057	—	—	1,5	-0,060	0,32	3,2
2'' - C	0	0	0	0	0	0	—	—	0	0	0,26	1,3
3'' - D	+34,53	919,0	+2,863	0	76,1	+0,057	—	—	1,5	+0,061	0,21	2,7
R _A - B	-48,49	1732,0	-4,685	0	167,3	+0,321	—	—	11,5	+0,310	0,02	11,2
B - C	+24,66	882,0	+2,757	0	98,5	+0,286	—	—	10,2	+0,294	0,01	10,5
C - D	+24,66	882,0	+2,757	0	98,5	+0,286	—	—	10,2	+0,295	0	10,5

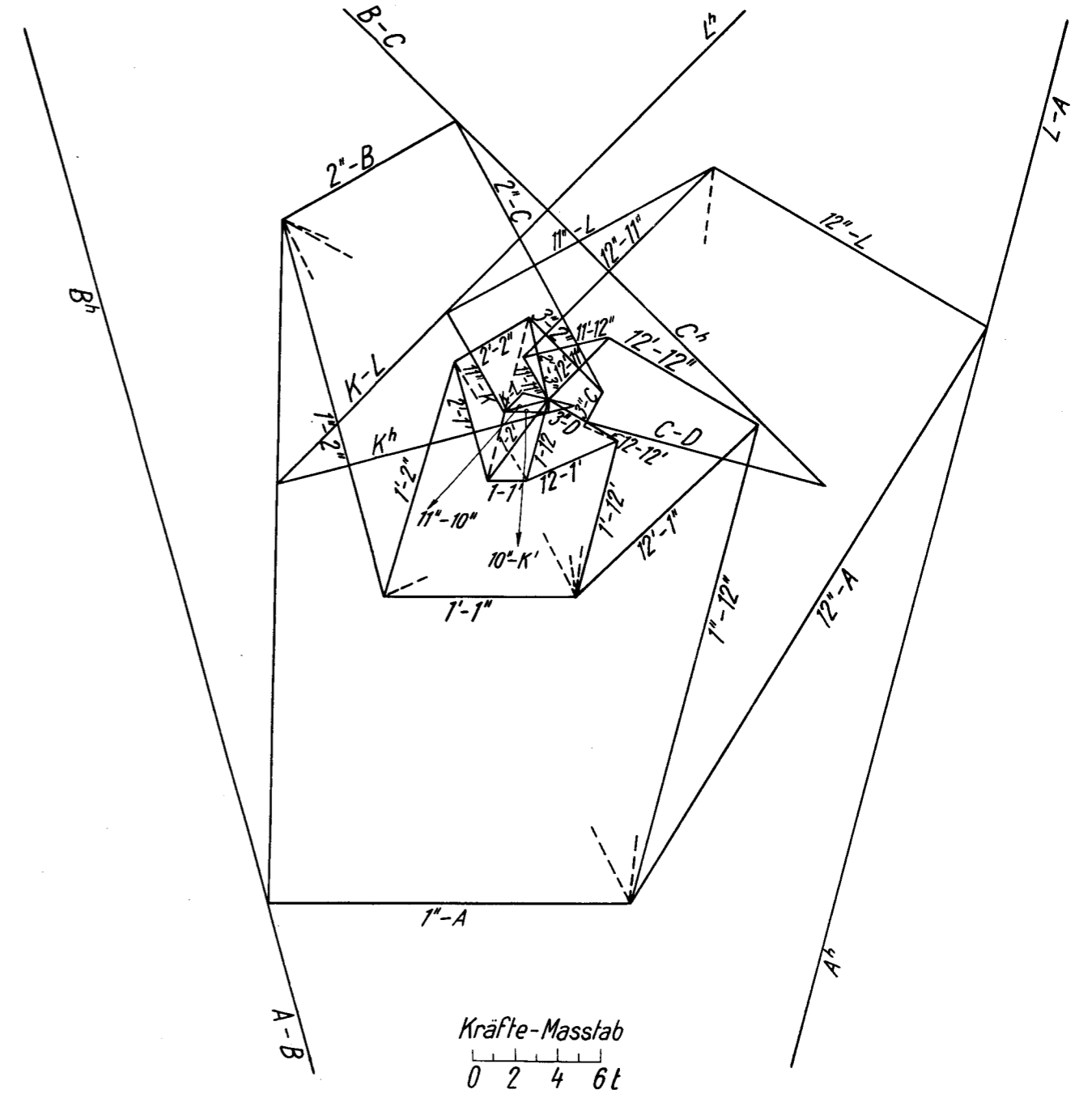
B. Die ersten drei Teilen stellen die theoretischen Größen, die letzte die aus dem Modell gemessenen Größen dar.

Plan I

Graphische Berechnung der Stabkräfte nach dem Konjugationsverfahren (Seite 25)



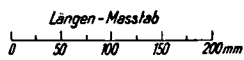
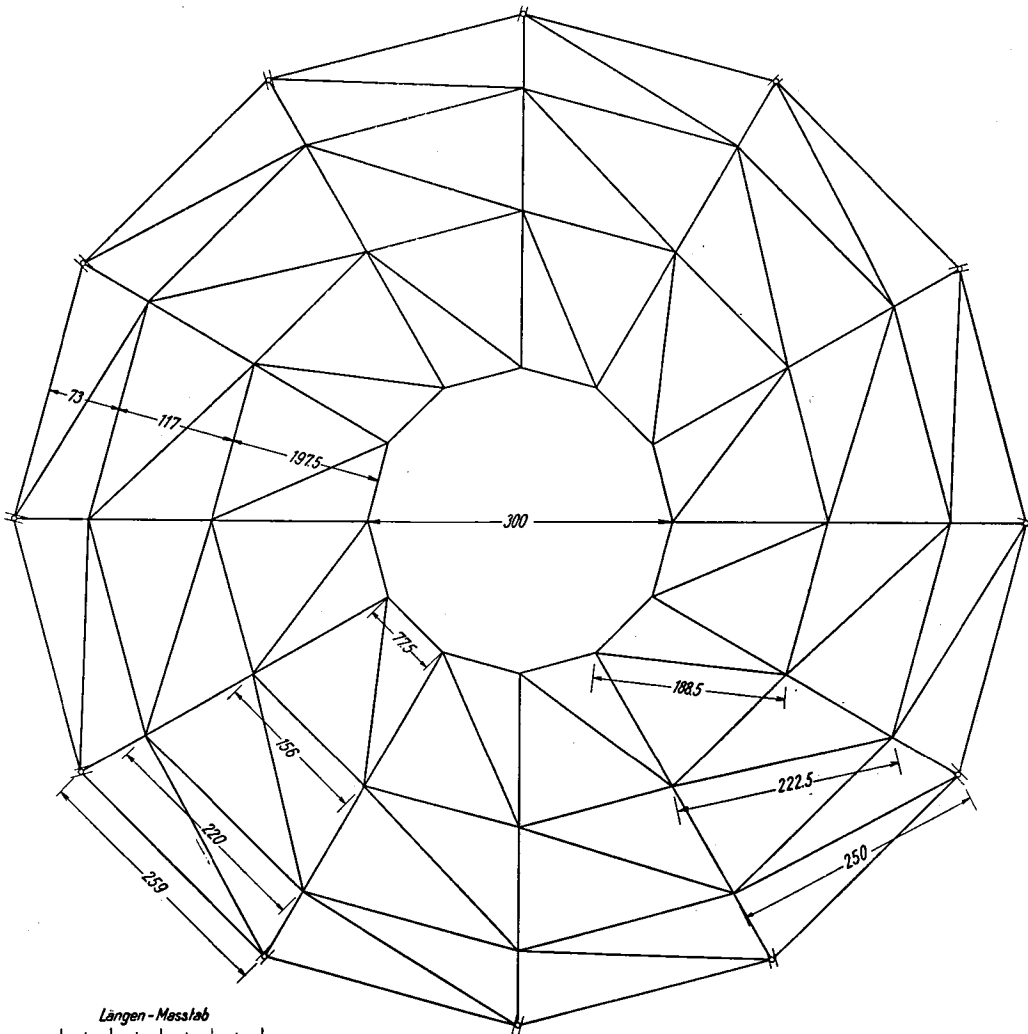
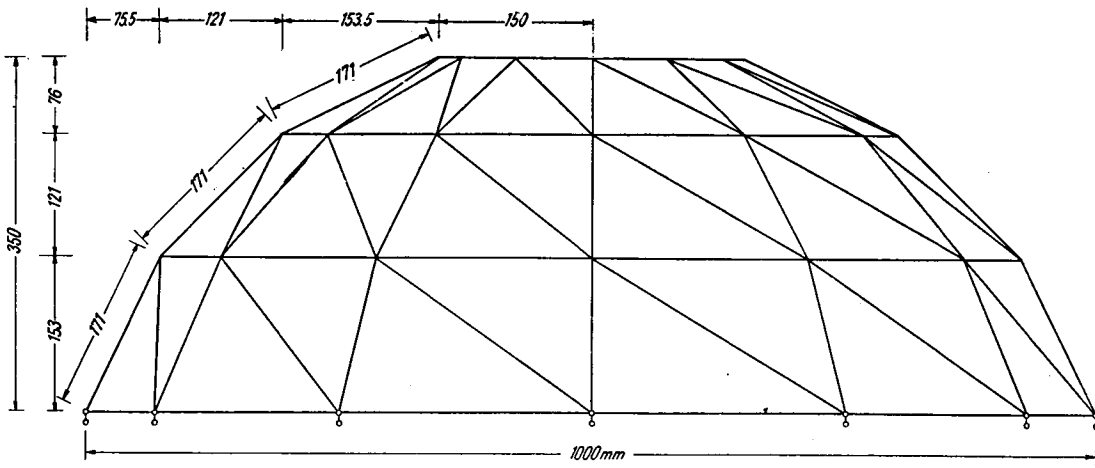
Konjugationen Kräfteplan



Plan II

Abmessungen des Celluloid-Modells

Aufriß



Grundriß

Lebenslauf

Ich wurde am 30. Januar 1911 in Kafr-el-Hawashem (Gharbia) in Ägypten geboren. Während fünf Jahren habe ich die Primarschule in Kafr-el-Zayat besucht. Die Sekundarschule habe ich von 1924 bis 1929 in Kairo absolviert. Vom Jahre 1929 bis 1933 studierte ich an der Bauingenieur-Abteilung an der Technischen Hochschule Giza bei Kairo, wo ich im Juni 1933 die Diplomprüfung mit Auszeichnung bestanden habe. Darauf war ich als Ingenieur an dem Bewässerungsamt in Tanta mit der Ausarbeitung und Durchführung verschiedener Projekte bis Ende 1934 beschäftigt. Vom Jahre 1935 bis Juni 1936 assistierte ich an der Abteilung für Baustatik an der Technischen Hochschule in Giza. Im Oktober 1936 habe ich mein Studium an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich an der Bauingenieur-Abteilung angefangen und im Herbst 1938 die Diplomprüfung der Eidgenössischen Technischen Hochschule bestanden. Seit diesem Zeitpunkt arbeitete ich an der vorliegenden Arbeit.

Zürich, 1941.

El-Sayed El-Schasly.