

Der Einfluß der Schaufelzahl des Laufrades auf den Wirkungsgrad bei Kreiselradmaschinen

(Überdrucklaufräder)

VON DER
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE IN ZÜRICH

ZUR ERLANGUNG
DER WÜRDE EINES DOKTORS DER
TECHNISCHEN WISSENSCHAFTEN

GENEHMIGTE
PROMOTIONSARBEIT

VORGELEGT VON
Mohamed Izzedin Hassan
aus Aegypten

Referent: Herr Prof. R. Dubs
Korreferent: Herr Prof. Dr. J. Ackeret



Zürich 1946 Dissertationsdruckerei AG. Gebr. Leemann & Co.
Stockerstr. 64

Erscheint als Nr. 2 der
Mitteilungen aus dem Institut für Hydraulik und hydraulische Maschinen
an der E. T. H. Zürich

Herausgegeben von Prof. R. Dubs
Verlag A.G. Gebr. Leemann & Co., Stockerstr. 64, Zürich

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Vorwort	5
Theoretischer Teil	
I. Rückblick über die vorhandenen theoretischen Berechnungen der Leistung in Funktion der Schaufelzahl	7
II. Einfluß der Schaufelzahl auf den Wirkungsgrad bei Kreiselmaschinen bei Potentialströmung	8
A. Berechnung der Leistung in Funktion der Schaufelzahl für Turbinen (Spannhake)	8
B. Berechnung der theoretischen Förderhöhe in Funktion der Schaufelzahl für Pumpen (Spannhake und Pfeleiderer)	16
III. Einfluß der Schaufelzahl auf den Wirkungsgrad bei Kreiselmaschinen bei Reibungsströmung	20
A. Berechnung des Wirkungsgrades in Funktion der Schaufelzahl für Turbinen	22
B. Berechnung der Förderhöhe in Funktion der Schaufelzahl für Pumpen	27
Zusammenfassung	28
Experimenteller Teil	
I. Beschreibung der Versuchsturbine und der Meßmethoden	30
a) Beschreibung der Versuchsturbine	30
b) Beschreibung der Meßmethoden	32
Wassermenge	32
Gefälle	35
Leistung	36
Prüfung der Meßgenauigkeit	37
II. Messungen	37
1. Messung der Verluste	37
2. Messung der Leistung	39
Zusammenfassung und Vergleich mit der Theorie	55
Anhang	58
Literaturverzeichnis	69

Leer - Vide - Empty

Vorwort

Die Anregung zur Bestimmung der optimalen Schaufelzahl bei Kreiselradmaschinen wurde von Herrn Prof. R. Dubs gegeben, der in liebenswürdiger Weise mit seinem Rat die Studien förderte und dem Verfasser die Untersuchungen in jeder Hinsicht erleichterte. Für sein der Arbeit entgegengebrachtes großes Interesse möchte ihm der Verfasser an dieser Stelle herzlich danken.

Auch der Gesellschaft für technische Physik ist der Verfasser Dank schuldig für die großzügige Unterstützung der Versuche. Ebenfalls möchte er die Mithilfe des Assistenten, Herrn Dipl. Ing. R. Obi, und der anderen Mitarbeiter, die zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben, bestens verdanken.

Zürich, April 1946.

Mohamed Izzedin Hassan.

Leer - Vide - Empty

THEORETISCHER TEIL

I. Rückblick über die vorhandenen theoretischen Berechnungen der Leistung in Funktion der Schaufelzahl

A. Radialräder

C. Pfeleiderer (1926): „Die endliche Schaufelzahl und das unmögliche Betriebsgebiet bei Kreiselradmaschinen“. Hydraulische Probleme — VDI-Verlag.

Inhalt: Pfeleiderer berechnet theoretisch die Minderleistung bei endlicher Schaufelzahl z_2 gegenüber $z_2 = \infty$, unter der Voraussetzung von dralllosem Wassereintritt in das Laufrad und einer theoretischen Förderhöhe H_{th} , die sich linear mit der Wassermenge Q verändert. Er beweist, daß die theoretische Leistung asymptotisch gegen einen Höchstwert (bei unendlicher Schaufelzahl) strebt.

W. Spannake (1930): „Eine strömungstechnische Aufgabe der Kreiselradforschung und ein Ansatz zu ihrer Lösung“. Mitteilungen des Institutes für Strömungsmaschinen der Techn. Hochschule Karlsruhe, Heft I.

Inhalt: Die Berechnung der Strömung in radialen Kreiselrädern mit ebenen radialen Schaufeln wird mittels konformer Abbildung durchgeführt. Ausgangsströmung: rotierender Zylinder in einer Wirbelquelle oder Wirbelsenke für die Strömung von innen nach außen oder von außen nach innen. Berechnung der Förderhöhe bei Pumpen, des Drehmomentes bei Turbinen und des Übergangs von Pumpe zu Turbine bei gegebenem Eintrittsdrall. Die allgemeinen Gleichungen wurden für 2 Schaufelzahlen, 2 und ∞ , numerisch ausgerechnet. Bei Pumpen ist die maximale Förderhöhe bei $z_2 = 2$ das 0,375-fache der Förderhöhe bei $z_2 = \infty$, bei Turbinen ist die maximale Leistung bei $z_2 = 2$ das 0,33-fache der maximalen Leistung bei $z_2 = \infty$. Für $z_2 = 2$ wurde auch noch der Verlauf von Druck und Geschwindigkeit um die Schaufeln angegeben.

R. Dziallas (1935): „Untersuchung einer Radialturbine“. Dissertation aus der Techn. Hochschule Hannover.

Inhalt: Experimentelle Untersuchung und theoretische Berechnung der Strömung in einer rein radialen Turbine. Auch hier ergibt sich in der Theorie eine asymptotische Annäherung an einen Höchstwert bei unendlicher Schaufelzahl.

W. Kucharski: „Eine Integralgleichung für den rotierenden Schaufelstern und ihre Lösung“. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. April 1941.

Inhalt: Berechnung der von einem rotierenden Schaufelstern erzeugten Zirkulation in Funktion der Schaufelzahl. Das Ergebnis ist eine asymptotische Annäherung gegen einen Höchstwert bei unendlicher Schaufelzahl.

Vergleich: Ein Vergleich der vier obgenannten Arbeiten zeigt, daß die asymptotische Annäherung an einen Höchstwert bei unendlicher Schaufelzahl allen vorstehenden Untersuchungsergebnissen gemeinsam ist.

B. Axialräder

Bis heute sind in der uns bekannten Literatur keine theoretischen Berechnungen der Leistung in Funktion der Schaufelzahl bei Axialrädern herausgegeben worden.

II. Einfluß der Schaufelzahl auf den Wirkungsgrad bei Kreiselradmaschinen bei Potentialströmung

A. Berechnung der Leistung in Funktion der Schaufelzahl für Turbinen (nach der Theorie von W. Spannhake¹⁾)

Unserer Berechnung wird die Theorie von W. Spannhake zugrunde gelegt. Nebenstehende Abbildung 1 zeigt das Laufrad, auf welches Spannhake seine Theorie angewendet hat.

Die allgemeine Gleichung für das Drehmoment ist nach L. Euler (1753):

$$M = \frac{\gamma \cdot Q}{g} (c_{u_1} \cdot R_1 - c_{u_2} \cdot R_2) \quad (1)$$

wobei

$$Q = \text{die Wassermenge } \frac{\text{m}^3}{\text{sec}},$$

$$\gamma = \text{das spez. Gewicht } \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

$$g = \text{die Erdbeschleunigung } \frac{\text{m}}{\text{sec}^2},$$

$$c_u = \text{die Umfangskomponente der Absolutgeschwindigkeit in m/sec,}$$

$$R = \text{den Radius in Metern}$$

bedeuten.

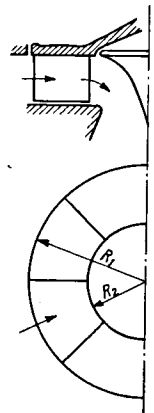


Abb. 1.

¹⁾ W. Spannhake: „Eine strömungstechnische Aufgabe der Kreiselradforschung und ein Ansatz zu ihrer Lösung“. Mitt. d. Inst. f. Strömungsmaschinen d. Techn. Hochschule Karlsruhe, Heft I, 1930.

Die Zirkulationsgleichung ist:

$$\Gamma = 2 \pi c_u R \frac{\text{m}^2}{\text{sec}},$$

aufgelöst nach $c_u R = \frac{\Gamma}{2\pi}$ (2)

setzt Spannhake in Gleichung (1) ein und erhält

$$M = \frac{\gamma Q}{g} \cdot \frac{1}{2\pi} (\Gamma_1 - \Gamma_2) \quad (3)$$

$\Gamma_1 =$ die Zirkulation vor dem Rad,
 $\Gamma_2 =$ die Zirkulation nach dem Rad.

Die Summe der Zirkulation um alle Schaufeln $\Sigma \Gamma_s$, ist gleich der Differenz der Zirkulation vor und nach dem Rad,

$$\Gamma_1 - \Gamma_2 = \Sigma (\Gamma_s) \quad (4)$$

Nun gilt nach Spannhake²⁾ für die Strömung von außen nach innen folgende Gleichung:

$$\Sigma (\Gamma_s) = \Gamma_1 \left(1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right) - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \cdot 2 \omega \mu q^2 (2J_2 - J_1)$$

Darin bedeutet

$\omega =$ die Winkelgeschwindigkeit des Rades

$$\mu = \frac{1 + p^{z_2}}{1 - p^{z_2}}$$

$$p = \frac{R_2}{R_1}$$

$$\lambda = \mu + \sqrt{\mu^2 - 1}$$

$$q = \frac{R_1}{\mu \sqrt{\frac{\mu + 1}{\mu}}}$$

$$J_1 = \int_0^\pi \frac{1 + \cos \vartheta}{\left(1 + \frac{\cos \vartheta}{\mu}\right)^{1 - \frac{2}{z_2}}} d\vartheta$$

$$J_2 = \int_0^\pi \frac{1}{\left(1 + \frac{\cos \vartheta}{\mu}\right)^{1 - \frac{2}{z_2}}} d\vartheta$$

$z_2 =$ Laufschaufelzahl

$\vartheta =$ Winkel der Polarkoordinate um den Radmittelpunkt

²⁾ W. Spannhake, wie oben, S. 24, Gleichung 55.

Wir berechnen nun die Integrale J_1 und J_2 . Vorausgesetzt daß $z_2 = \infty$, also $\mu = 1$, wird der Nenner der Integrale $1 + \cos \vartheta$. Dann wird:

$$J_1 = \int_0^{\pi} d\vartheta = \pi; \quad J_2 = \int_0^{\pi} \frac{d\vartheta}{1 + \cos \vartheta} \quad (5)$$

Um das Integral J_2 berechnen zu können, wenden wir die Substitution $\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = t$ (Vorlesung von Prof. A. Hirsch, Zürich) an und erhalten:

$$\cos \vartheta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \text{und} \quad d\vartheta = \frac{2 dt}{1 + t^2} \quad (5b)$$

Um die Grenzen des Integral J_2 zu berechnen, gelten folgende Werte: ϑ geht von null bis π ; also

$$\frac{\vartheta}{2} \quad \text{von null bis} \quad \frac{\pi}{2}$$

und

$$t = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \quad \text{von null bis} \quad \infty$$

Gleichungen (5b) in (5a) eingesetzt ergibt:

$$J_2 = \int_0^{\infty} \frac{2 dt}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^{\infty} \frac{2 dt}{1 + t^2 + 1 - t^2} = \int_0^{\infty} dt = \infty$$

Also wird bei unendlicher Schaufelzahl $z_2 = \infty$:

$$J_2 = \infty \quad J_1 = \pi.$$

In die von Spannhake gegebene Gleichung eingesetzt wird

$$(2J_2 - J_1) = \infty; \quad \lambda = 1; \quad \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = 0 \quad \text{und} \quad q = R_1$$

also wird die ganze Gleichung heißen:

$$\Sigma(\Gamma_s) = \Gamma_1(1 - 0) - 2 \cdot \omega \cdot 1 \cdot R_1^2 \cdot 0 \cdot \infty \quad (6)$$

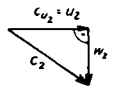
bleibt also unbestimmt.

Um $(2J_2 - J_1) \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$ zu berechnen, bestimmt man Γ_2 für $z_2 = \infty$ aus (4) und erhält mit Hilfe von (6)

$$\Gamma_2 = 2 \cdot \omega \cdot R_1^2 \cdot 0 \cdot \infty \quad (7)$$

Wir müssen berücksichtigen, daß bei unendlicher Schaufelzahl und radialen Schaufeln (siehe Abb. 1) die Relativgeschwindigkeit beim Austritt w_2 auch radial sein muß, da das Wasser genau in Richtung der Schaufeln das Rad verläßt. Die Umfangskomponente der Absolutgeschwindigkeit c_{u_2} ist also gleich der Umfangsgeschwindigkeit des Rades u_2 .

$$c_u = u_2 = R_2 \cdot \omega$$



Dadurch wird die Zirkulation nach dem Rad

$$\Gamma_2 = 2 \cdot \pi \cdot R_2^2 \cdot \omega \quad (8)$$

Setzen wir die Gleichungen (7) und (8) einander gleich, so erhalten wir:

$$\Gamma_2 = 2 \cdot \pi \cdot R_2^2 \cdot \omega = 2 \cdot \omega \cdot R_1^2 \left[(2J_2 - J_1) \cdot \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right]_{z_2 = \infty}$$

$$\left[(2J_2 - J_1) \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right]_{z_2 = \infty} = \pi \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2 = \pi p^2 \quad (9)$$

Spannhake setzt für das Verhältnis der beiden Raddurchmesser $p = 0,5$ voraus, welches — eingesetzt in (9) — den gesuchten Wert ergibt:

$$\left[(2J_2 - J_1) \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right]_{z_2 = \infty} = 0,25 \pi$$

Für die weitere Berechnung wurden zur besseren Übersicht Kurven aufgestellt, worin für

λ und μ in Abb. 2,

$\frac{q}{R_1}$ und $\frac{J_1}{\pi}$ in Abb. 3,

$\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$ in Abb. 4,

und der Verlauf der Werte in Funktion der Schaufelzahl graphisch dargestellt ist.

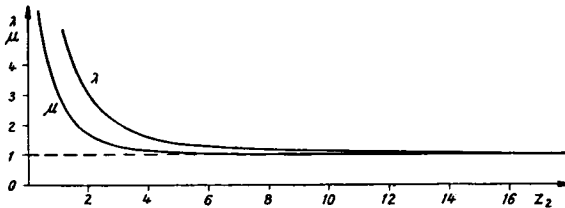


Abb. 2.

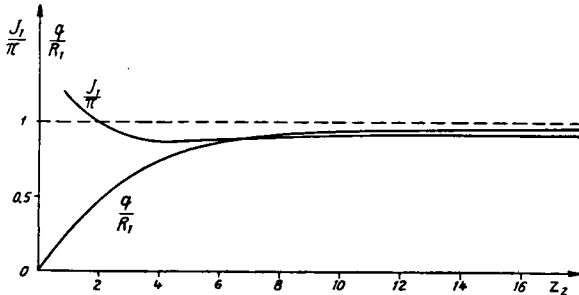


Abb. 3.

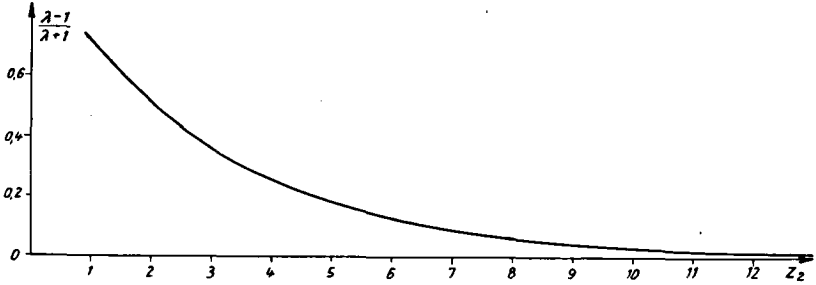


Abb. 4.

Die Integrale J_1 und J_2 wurden graphisch aufgelöst. Da das J_2 aber sehr schnell zu groß für eine genaue graphische Integration wird, wurde für die größeren Schaufelzahlen folgende Kurve (Abb. 5) aufgestellt:

$$(2J_2 - J_1) \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = f(z_2) \quad (10)$$

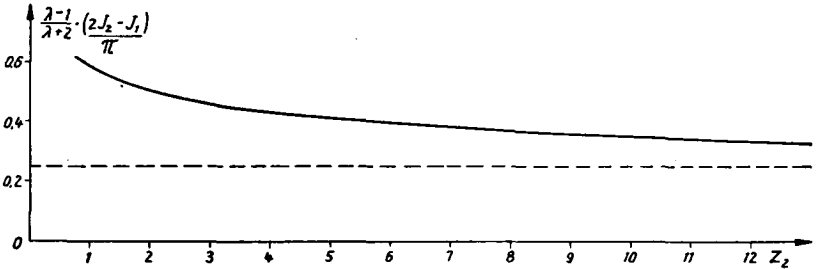


Abb. 5.

An Hand dieser Kurven können wir jetzt das Drehmoment M und die Leistung L in Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω bei konstanter Eintrittszirkulation Γ_1 nach den Gleichungen (3) und (4) berechnen:

$$M = \frac{\gamma Q}{g} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \Sigma(\Gamma_s) \quad (11)$$

Setzen wir den von Spannhake eingeführten Wert für $\Sigma(\Gamma_s)$ ein, so erhalten wir:

$$M = \frac{\gamma Q}{g} \cdot \frac{1}{2\pi} \left[\Gamma_1 \left(1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) - 2 \omega \mu q^2 (2J_2 - J_1) \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right] \quad (12)$$

Aus Gleichung (2) ersetzen wir den Wert für Γ_1 wie folgt:

$$\Gamma_1 = 2\pi c_{u_1} \cdot R_1 = 2\pi \omega_\Gamma \cdot R_1^2$$

und

$$\omega_\Gamma = \frac{\Gamma_1}{2\pi R_1^2}$$

wobei ω_Γ die Winkelgeschwindigkeit des Wassers beim Eintritt in das Laufrad bedeutet.

In (12) eingesetzt erhalten wir die gesuchte Momentengleichung:

$$M = \frac{\gamma \cdot Q}{g} \cdot \frac{1}{2\pi} \left[2\pi \omega_{\Gamma} \cdot R_1^2 \left(1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) - 2\omega \mu q^2 (2J_2 - J_1) \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right] \quad (13)$$

Wenn wir Schaufelzahl, Wassermenge und Eintrittszirkulation konstant halten, so sind in Gleichung (13) alle Glieder außer ω und M konstant. Es ergibt sich also die Gleichung einer Geraden:

$$M = A [B - C \cdot \omega]$$

Wir berechnen nun das Drehmoment M in Funktion der Winkelgeschwindigkeit, zuerst

- a) bei stillstehendem Rad ($\omega = 0$), und dann
- b) bei freilaufendem Rad ($M = 0$):

a) Wird $\omega = 0$ angenommen, so wird in Gleichung (13) das Glied $2\omega \mu q^2 (2J_2 - J_1) \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = 0$.

μ , q , $(2J_2 - J_1) \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$ hängen nur von der Schaufelzahl z_2 ab und sind immer positiv, wie man aus Abb. 2—5 sehen kann. Demzufolge hat man bei $\omega = 0$ bei jeder Schaufelzahl das größte Drehmoment, also

$$M_0 = \frac{\gamma Q}{g} \cdot \omega_{\Gamma} \cdot R_1^2 \cdot \left(1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) \quad (14)$$

Das maximale M_0 ist erreicht, wenn $1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = 1$ ist, also

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = 0$$

Das ist der Fall bei unendlicher Schaufelzahl, damit ist das größte Drehmoment

$$M_{0max} = \frac{\gamma Q}{g} \cdot \omega_{\Gamma} \cdot R_1^2$$

und folglich die Funktion

$$\frac{M_0}{M_{0max}} = 1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \quad (15)$$

als Schnittpunkt mit der Ordinate in Abb. 6 (Seite 14).

b) Bei freilaufendem Rad ist das Drehmoment $M = 0$, also

$$2\pi \omega_{\Gamma} R_1^2 \left(1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) - 2\omega \mu q^2 (2J_2 - J_1) \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} = 0$$

dann wird:

$$\frac{\omega}{\omega_{\Gamma}} = \frac{\pi \cdot R_1^2 \cdot \left(1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)}{\mu \cdot q^2 \cdot (2J_2 - J_1) \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}} \quad (16)$$

als Schnittpunkt mit der Abszisse in Abb. 6.

Übertragen wir die unter a) und b) errechneten Werte in einer Kurve, so erhalten wir für jede angenommene Schaufelzahl ($1 - \infty$)

$$\frac{M}{M_{0_{max}}} = f\left(\frac{\omega}{\omega_{\Gamma}}\right) \quad (\text{siehe Abb. 6}) \quad (17)$$

und können daraus die Leistung L durch folgende einfache Gleichung berechnen

$$L = M \cdot \omega \quad (18)$$

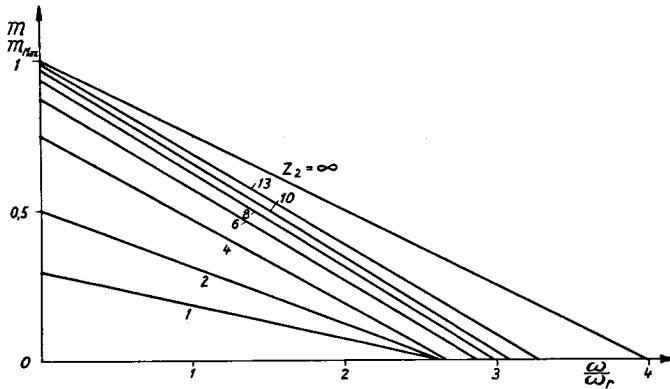


Abb. 6.

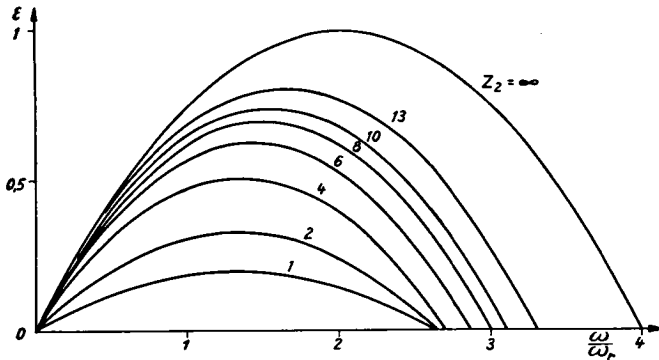


Abb. 7.

Aus Gleichung (13) wird die maximale Leistung bei unendlicher Schaufelzahl berechnet:

$$L_{max \infty} = \frac{\gamma Q}{g} \cdot R_1^2 \cdot \omega_{\Gamma}^2 \quad (18a)$$

Analog der Größe $\frac{M_0}{M_{0_{max}}}$ führen wir das Verhältnis ϵ der Leistung bei einer beliebigen Schaufelzahl z_2 zur maximalen Leistung bei unendlicher Schaufelzahl ein

$$\varepsilon = \frac{L}{L_{max\infty}} \quad (19)$$

und zeichnen die Kurven

$$\varepsilon = f\left(\frac{\omega}{\omega_{\Gamma}}\right) \quad (\text{siehe Abb. 7}) \quad (20)$$

Aus Abb. 7 kann das maximale ε jeder Schaufelzahl festgestellt werden. Dieses wird dann in Funktion der Schaufelzahl graphisch aufgetragen und ergibt:

$$\varepsilon = f(z_2) \quad (\text{siehe Abb. 8}) \quad (21)$$

woraus der Einfluß der Schaufelzahl bei Potentialströmung in Turbinen direkt ersichtlich ist.

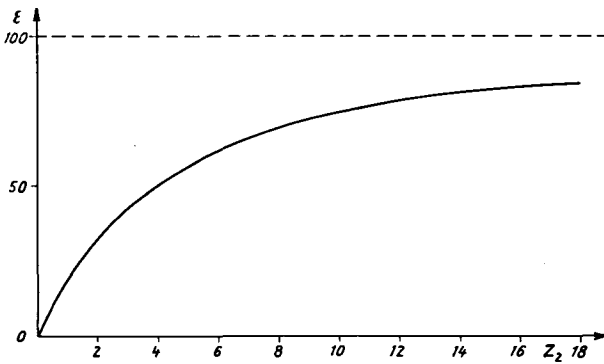


Abb. 8.

Die disponible Leistung L_d :

$$L_d = \gamma \cdot Q \cdot H$$

Bei der ebenen Potentialströmung ist statt dem Gefälle H die Eintrittszirkulation $\Gamma_1 = 2 \cdot \pi \cdot \omega_{\Gamma} \cdot R_1^2$ gegeben. Dieser Zirkulation entspricht ein Gefälle

$$H = \frac{\omega_{\Gamma}^2 \cdot R_1^2}{g}$$

Dann wird die disponible Leistung

$$L_d = \gamma \cdot Q \cdot \frac{\omega_{\Gamma}^2 \cdot R_1^2}{g}$$

Vergleichen wir diesen Wert mit Gleichung (18a), so sehen wir, daß $L_d = L_{max\infty}$ ist und infolge dessen auch ε numerisch gleich dem Wirkungsgrad bei Potentialströmung η_p .

$$\varepsilon = \eta_p$$

B. Berechnung der theoretischen Förderhöhe in Funktion der Schaufelzahl für Pumpen

a) Nach der Theorie von W. Spannhake³⁾:

Die Berechnung ist ebenfalls für das in Abb. 1, Seite 8, gezeichnete Rad durchgeführt. Die allgemeine Gleichung für die Förderhöhe H_{th} ist:

$$H_{th} = \frac{\omega}{g} (c_{u_2} \cdot R_2 - c_{u_1} \cdot R_1) \quad (22)$$

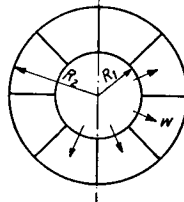


Abb. 9.

Umgeformt wie Gleichung (1) unter A ergibt es analog zu Gleichung (11)

$$H_{th} = \frac{\omega}{g} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \Sigma \Gamma_s \quad (23)$$

Spannhake³⁾ gibt für Pumpen mit Strömung von innen nach außen folgende Gleichung an:

$$\Sigma \Gamma_s = 2 \cdot \omega \cdot \mu \cdot q^2 \cdot J_1 - \Gamma_1 \left(1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right)$$

worin die Größen μ , q , J_1 und λ dieselbe Bedeutung haben wie unter A auf Seite 9 angegeben.

Dieses in Gleichung (23) eingesetzt ergibt die Gleichung für die Förderhöhe

$$H_{th} = \frac{\omega}{g} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \left[2 \cdot \omega \cdot q^2 \cdot \mu \cdot J_1 - \Gamma_1 \left(1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \right) \right] \quad (24)$$

Nimmt man, um später den Vergleich mit der Theorie von C. Pfeleiderer ziehen zu können, dralloses Anströmen des Wassers ($\Gamma_1 = 0$) an, dann wird:

$$H_{th} = \frac{\omega}{g} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 2 \cdot \omega \cdot \mu \cdot q^2 \cdot J_1$$

$$H_{th} = \frac{\omega^2 q^2}{\pi g} \cdot \mu \cdot J_1 \quad (25)$$

Bei konstanter Schaufelzahl sind J_1 , μ und q auch konstant, somit:

$$H_{th} = k \cdot \omega^2 \quad (26)$$

³⁾ W. Spannhake: „Eine strömungstechnische Aufgabe der Kreisradforschung und ein Ansatz zu ihrer Lösung“. Mitt. d. Inst. f. Strömungsmaschinen d. Techn. Hochschule Karlsruhe, Heft I, 1930, S. 22, Gleichung 45.

Bei konstanter Winkelgeschwindigkeit läßt sich die theoretische Förderhöhe in Funktion der Schaufelzahl aus Gleichung (25) berechnen, da q , μ und J_1 Funktionen von z_2 sind (siehe Abb. 2 und 3):

bei unendlicher Schaufelzahl sind

$$J_1 = \pi; \quad \mu = 1; \quad q = R_2$$

also erhalten wir aus Gleichung (25)

$$H_{th} = \frac{\omega^2 \cdot R_2^2}{g} = 2 \frac{u_2^2}{g} \quad (25 a)$$

Aus Gleichung (25) kann die theoretische Förderhöhe bei jeder Schaufelzahl berechnet werden. Diese wird dann in Funktion der Schaufelzahl graphisch aufgetragen und ergibt, dividiert durch $H_{th\infty}$

$$\frac{H_{th}}{H_{th\infty}} = f(z_2) \quad (\text{siehe Abb. 11, Kurve a}) \quad (27)$$

woraus der Einfluß der Schaufelzahl bei Potentialströmung in Pumpen direkt ersichtlich ist.

b) Nach der Theorie von C. Pfleiderer⁴⁾:

Um mit der Theorie von W. Spannhaake einen Vergleich machen zu können, wird die Berechnung nach C. Pfleiderer für das gleiche Rad durchgeführt (siehe Abb. 10):

$$\frac{R_1}{R_2} = 0,5$$

Pfleiderer nimmt in seiner Ableitung dralloses Anströmen an, also wäre in der allgemeinen Gleichung (22)

$$c_{u_1} = 0$$

damit

$$H_{th} = \frac{u^2}{g} \cdot c_{u_2}$$

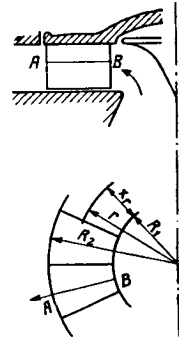


Abb. 10.

Für den Verlauf der Förderhöhe in Funktion der Schaufelzahl leitet er folgende Gleichung ab⁵⁾:

$$H_{th\infty} = H_{th} \left(1 + \psi \frac{R_2^2}{z_2 S} \right)$$

wobei:

$$\psi = \tau \pi \sin \beta_2$$

⁴⁾ C. Pfleiderer: „Die endliche Schaufelzahl und das unmögliche Betriebsgebiet bei Kreisradmaschinen“. Hydr. Probleme, VDI-Verlag 1926.

⁵⁾ C. Pfleiderer, wie oben, S. 207, Gleichung (8) und (9).

- worin $\beta_2 =$ der Laufschaufelwinkel beim Austritt,
 $\tau =$ eine Korrekturkonstante ($0,6 < \tau < 0,8$),
 $S =$ das statische Moment des mittleren Wasserfadens, also der Linie AB , bezogen auf die Axe (siehe Abb. 10) bedeutet.

$$S = \int_A^B r dx; \quad x = r - R_1; \quad r = x + R_1$$

$$S = \int_A^B (x + R_1) dx \quad (28)$$

Bei dem angenommenen Rad ist

$$R_2 = 2 R_1,$$

dann wird S aus Gleichung (28) gleich $0,375 R_2^2$.

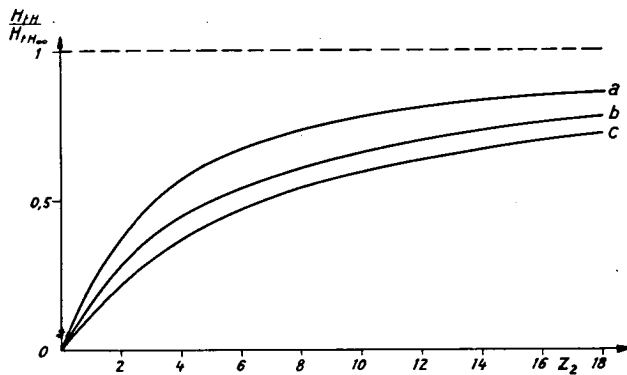


Abb. 11.

Um das ψ zu bestimmen, müssen wir die Werte von β_2 und τ einsetzen:

$\beta_2 = 90^\circ$, da das Rad identisch ist mit dem von Spannhake angenommenen (Abb. 10)

$$\sin \beta_2 = 1$$

Eingesetzt in die Gleichung von Pfeleiderer erhalten wir für den unteren Grenzwert von $\tau = 0,6$

$$\frac{H_{th}}{H_{th\infty}} = \frac{1}{1 + \frac{6,7}{z_2}} \quad (\text{siehe Abb. 11, Kurve b})$$

und für den oberen Grenzwert von $\tau = 0,8$

$$\frac{H_{th}}{H_{th\infty}} = \frac{1}{1 + \frac{5,03}{z_2}} \quad (\text{siehe Abb. 11, Kurve c})$$

Vergleichen wir nun die nach der Theorie von W. Spannhake in Abb. 11 dargestellte Kurve *a*, so ergibt sich, daß die Kurve *a* mit der wachsenden Schaufelzahl eine viel raschere Leistungszunahme aufweist als die Kurven *b* und *c*.

Um bestimmen zu können, ob die Berechnung nach Spannhake und Pfeleiderer mathematisch dieselbe Kurve ergeben und ob die in Abb. 11 sich ergebende Differenz nur von der Konstanten τ herrührt, lassen wir bei einem Punkt ($z_2 = 20$) die Kurven zusammenfallen und berechnen daraus τ , mit welchem Wert wir nach der Theorie von Pfeleiderer eine neue Kurve aufstellen.

Bei einem Rad mit 20 Schaufeln wird nach Spannhake

$$\frac{H_{th}}{H_{th\infty}} = 0,87,$$

welcher Wert, eingesetzt in die Gleichung von Pfeleiderer

$$0,87 = \frac{1}{1 + \frac{x}{20}},$$

daraus

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ x &= \tau \pi \frac{R_2^2}{S} & \tau &= \frac{S x}{\pi R_2^2} \\ \tau &= 0,358 \end{aligned}$$

ergibt, also kleiner ist als das von Pfeleiderer angegebene Minimum. Setzen wir das errechnete τ in die Kurvengleichung von Pfeleiderer, so erhalten wir:

$$\frac{H_{th}}{H_{th\infty}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{z_2}} = y \quad (29)$$

und daraus folgende Werte:

Schaufelzahl z_2	1	2	4	6	10	15	20
Pfeleiderer (Glg. 29) $y =$	0,25	0,4	0,572	0,666	0,77	0,83	0,87
Spannhake (Glg. 25) $y =$	0,219	0,375	0,57	0,68	0,77	0,83	0,87

Dieser Vergleich zeigt eine ziemlich gute Übereinstimmung. Ob der Wert von τ sich in Wirklichkeit nicht verändert bei wachsender Schaufelzahl, muß durch Versuche festgestellt werden. Der Vergleich wurde in einer Tabelle dargestellt, da die Differenzen so gering sind, daß die Punkte der Kurven zu nahe beieinander liegen, also schwer zu unterscheiden wären.

III. Einfluß der Schaufelzahl auf den Wirkungsgrad bei Kreisradmaschinen bei Reibungsströmung

Allgemeines.

Zur Berechnung der Verlustleistung bei Reibungsströmung wird folgender Rechnungsgang angewandt:

Widerstand der Schaufel:

$$P_w = \frac{\zeta_w w^2}{2 \cdot g} \cdot \gamma \cdot F_s$$

wobei

F_s = die Schaufelfläche einer Schaufel in m^2

w = Relativgeschwindigkeit in m/sec

ζ_w = der Reibungskoeffizient

bedeutet.

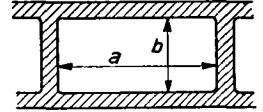


Abb. 12.

Berechnung der Verlusthöhe H_v .

Verlustleistung: $dL_v = w \cdot dP_w = w \cdot \zeta_w \cdot \frac{w^2}{2g} \cdot \gamma \cdot dF_s$

andererseits: $dL_v = \gamma \cdot dH_v \cdot Q$ und $Q = w \cdot F_q$

F_q ist die Fläche des Kanalquerschnittes senkrecht zur Strömung.

$$dL_v = \gamma \cdot dH_v \cdot w \cdot F_q$$

Die beiden Gleichungen für dL_v gleichgesetzt ergeben:

$$\gamma \cdot dH_v \cdot w \cdot F_q = w \cdot \zeta_w \cdot \frac{w^2}{2g} \cdot \gamma \cdot dF_s$$

$$dH_v = \zeta_w \cdot \frac{w^2}{2g} \cdot \frac{dF_s}{F_q}$$

Für diese qualitative Betrachtung nehmen wir ζ_w als konstant an, dabei halten wir die Winkelgeschwindigkeit des Rades und den Eintrittsdrall vom Wasser (also die Anströmrichtung) konstant. Diese Annahme wird durch die Messungen von E. Bauer ⁶⁾ bestätigt.

⁶⁾ E. Bauer: „Kräfte messung an einem Kreisgitter aus zylindrischen Schaufeln bei radialer Zuströmung“. Mitt. d. Inst. f. Strömungsmaschinen d. Techn. Hochschule Karlsruhe, Heft 1, S. 84, 1930.

Messungen an einem stillstehenden Kreisgitter. Aus den Diagrammen 3 und 11 kann man $c_R = \zeta_w$ in Funktion der Schaufelzahl entnehmen. — In nebenstehender Abbildung ist der Verlauf von c_R für die Anströmwinkel

$\alpha = 30^\circ$ (Kurve a) und $\alpha = 20^\circ$ (Kurve b) aufgezeichnet.

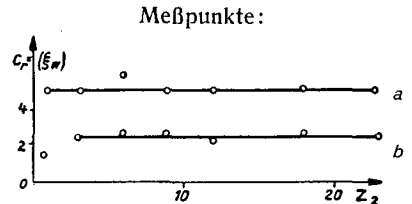


Abb. 13.

Die Verlusthöhe H_v wird dann:

$$H_v = \zeta_w \cdot \frac{1}{2g} \int \frac{w^2 \cdot dF_s}{F_q}$$

Berechnung der Verlusthöhe H_v nach der Formel für den Druckverlust in Rohrleitungen.

$$dH_v = \zeta_w \cdot dL \cdot \frac{u}{F_q} \cdot \frac{w^2}{2g}$$

In obiger Formel bedeutet das u den Innumfang des Rohres. Da wir bei dieser qualitativen Betrachtung die Verlusthöhe bei variabler Schaufelzahl untersuchen, ersetzen wir das Produkt ($u \cdot dL$) durch das Differential der Schaufelfläche dF_s , welche für diese Verlusthöhe maßgebend ist:

$$dH_v = \zeta_w \cdot \frac{w^2}{2g} \cdot \frac{dF_s}{F_q}$$

$$H_v = \zeta_w \cdot \frac{1}{2g} \cdot \int \frac{w^2 \cdot dF_s}{F_q} \quad (30)$$

Die beiden Berechnungsarten zeigen eine vollkommene Übereinstimmung. Das Integral kann erst aufgelöst werden, wenn eine bestimmte Radform angenommen wird. Um an die Berechnungen mit Potentialströmung anknüpfen zu können, nehmen wir die in Abb. 1, S. 8 dargestellte Radform an und berechnen das Integral.

Bei diesem Rad ist:

$$R_1 = 2R_2$$

$$w = w_1 \cdot \frac{R_1}{R}$$

$$dF_s = b dR$$

$$F_q = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot b \cdot \frac{1}{z_2}$$

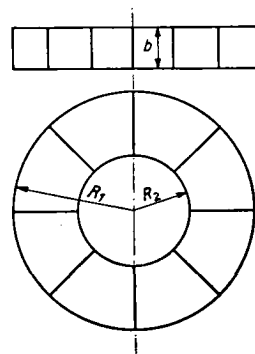


Abb. 14.

Dann wird die Verlusthöhe

$$H_v = \zeta_w \cdot \frac{1}{2g} \int_{R_2}^{R_1} \frac{w_1^2 \cdot \left(\frac{R_1}{R}\right)^2 b dR}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot b \cdot \frac{1}{z_2}} = \zeta_w \cdot \frac{w_1^2}{2g} \cdot \frac{z_2}{2\pi} \cdot R_1^2 \int_{R_2}^{R_1} \frac{dR}{R^3}$$

$$= \zeta_w \cdot \frac{w_1^2}{2g} \cdot \frac{z_2}{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1\right) \parallel \frac{R_1^2}{R_2^2} = 4$$

$$H_v = 1,5 \cdot \zeta_w \cdot \frac{w_1^2}{2g} \cdot \frac{z_2}{2\pi} \quad (31)$$

Zur Berechnung der Relativgeschwindigkeit w_1 bestimmt man die in einem Schaufelrad fließende Wassermenge:

$$q = \frac{Q}{z_2} \quad (32)$$

$$w_1 = \frac{q}{a \cdot b} \quad (\text{siehe Abb. 12}) \quad (33)$$

w_1 bedeutet dabei nur eine Vergleichsgeschwindigkeit an der gleichen Stelle im Laufrad, da ja längs der Schaufel (vom Eintritt bis zum Austritt) die Relativgeschwindigkeit w variiert.

Wenn man in dem gegebenen Rad nur die Schaufelzahl ändert, also die Höhe des Schaufelkanals (b) konstant bleibt, so ändert sich die Breite (a) mit der Schaufelzahl,

$$a = \frac{\pi D}{z_2} - \delta$$

wobei D den Raddurchmesser bedeutet und δ die Schaufeldicke.

Eingesetzt in die Gleichung (33) wird

$$w = \frac{q}{\left(\frac{\pi D}{z_2} - \delta\right) b}$$

also

$$w = \frac{Q}{(D \pi - \delta z_2) b} \quad (34)$$

A. Berechnung des Wirkungsgrades in Funktion der Schaufelzahl für Turbinen

Unter dem hydraulischen Wirkungsgrad η_H versteht man das Verhältnis der vom Wasser an das Rad abgegebenen Leistung zur disponiblen Leistung.

Folgende Berechnungen werden durchgeführt mit Hilfe der Hauptgleichung der Turbinentheorie, worin

- c_1 und c_2 die Absolutgeschwindigkeiten vor und nach dem Laufrad,
- w_1 und w_2 die Relativgeschwindigkeiten beim Ein- und Austritt im Laufrad,
- u_1 und u_2 die Umfangsgeschwindigkeiten,
- $\Sigma(H_v)$ die Summe der Verlusthöhen,
- c_3 die Absolutgeschwindigkeit beim Austritt aus dem Saugrohr,
- c_e die Wassergeschwindigkeit vor dem Leitrad.

$$H^* + \frac{c_e^2}{2g} = H \quad \text{das totale Gefälle}$$

(H^* = der Druck des Wassers vor dem Leitrad)

bedeutet.

$$\frac{c_1^2}{2g} - \frac{c_2^2}{2g} + \frac{w_2^2}{2g} - \frac{w_1^2}{2g} + \frac{u_1^2}{2g} - \frac{u_2^2}{2g} = \left(H^* + \frac{c_e^2}{2g} \right) - \left(\Sigma(H_v) + \frac{c_3^2}{2g} \right) \quad (35)$$

Es ist ferner:

$$\eta_H = \frac{\left(H^* + \frac{c_e^2}{2g} \right) - \left(\Sigma(H_v) + \frac{c_3^2}{2g} \right)}{H^* + \frac{c_e^2}{2g}} \quad (36)$$

Dividiert man Gleichung (36) aus, so erhält man

$$\eta_H = 1 - \frac{\Sigma(H_v)}{H} - \frac{c_3^2}{2gH}$$

Setzen wir den Wert

$$K_{c_3} = \frac{c_3}{\sqrt{2gH}}$$

in diese Gleichung, so erhalten wir

$$\eta_H = 1 - K_{c_3}^2 - \frac{\Sigma(H_v)}{H} \quad (37)$$

Da in Gleichung (37) das letzte Glied bei der unter II A behandelten Potentialströmung gleich Null ist, $\Sigma(H_v) = 0$, so wird der theoretische Wirkungsgrad für Potentialströmung

$$\eta_P = 1 - K_{c_3}^2$$

Wie wir auf S. 15 gesehen haben, ist $\eta_P = \varepsilon$.

In Gleichung (37) eingesetzt

$$\eta_H = \varepsilon - \frac{\Sigma(H_v)}{H} \quad (38)$$

Das $\Sigma(H_v)$ enthält die Verluste vor der Turbine, im Gehäuse und Leitrad, im Laufrad und im Saugrohr:

$$\eta_H = \varepsilon - \frac{H_{v_{e-1}}}{H} - \frac{H_{v_{La}}}{H} - \frac{H_{v_{2-3}}}{H}$$

$H_{v_{e-1}}$ sind die Verluste vor der Turbine, im Gehäuse und Leitrad,

$H_{v_{La}}$ sind die Verluste im Laufrad,

$H_{v_{2-3}}$ sind die Verluste im Saugrohr

$$H_v^* = H_{v_{e-1}} + H_{v_{2-3}}$$

Da die Verluste vor der Turbine und im Saugrohr von der Schaufelzahl unabhängig sind, wird in Folgendem nur der Verlust im Rad untersucht. Nach Gleichung (31) ist:

$$H_{v_{La}} = \zeta_w \cdot \frac{w_1^2}{2g} \cdot z_2 \cdot \frac{1,5}{2\pi}$$

und w aus Gleichung (34) eingesetzt ergibt:

$$H_{vLa} = \frac{1,5}{2\pi} \cdot \zeta_w \cdot \frac{Q^2 \cdot z_2}{2g(\pi D - z_2 \delta)^2 \cdot b^2} \quad (39)$$

und durch H dividiert:

$$\frac{H_{vLa}}{H} = \frac{1,5}{2\pi} \cdot \frac{Q^2 \cdot z_2 \cdot \zeta_w}{2gH(\pi D - z_2 \delta)^2 \cdot b^2} \quad (40)$$

Sind Verlusthöhe und ε bekannt (siehe IIA, Abb. 7), so läßt sich der gesuchte hydraulische Wirkungsgrad berechnen:

$$\eta_H = \varepsilon - \frac{1,5}{2\pi} \cdot \zeta_w \cdot \frac{Q^2 \cdot z_2}{2gH(\pi D - z_2 \delta)^2 \cdot b^2} - \frac{H_v^*}{H} \quad (41)$$

Wie man aus Abb. 8 sehen kann, nimmt ε asymptotisch gegen eins zu mit wachsender Schaufelzahl. Im zweiten Glied von Gleichung (41) nimmt — wenn Q, H und ζ_w konstant bleiben — der Zähler mit wachsender Schaufelzahl zu und der Nenner ab, da $\pi D - z_2 \delta$ immer kleiner wird. Bei $z_2 = \frac{\pi D}{\delta}$ wird der Nenner null, das zweite Glied also unendlich.

Daraus sieht man, daß der hydraulische Wirkungsgrad (im Gegensatz zum Verhältnis ε bei Potentialströmung und unendlich dünnen Schaufeln) mit zunehmender Schaufelzahl nicht asymptotisch gegen eins geht, sondern bei einer noch zu berechnenden Schaufelzahl ein Optimum erreicht und dann auf Null abnimmt.

Um Gleichung (41) numerisch ausrechnen zu können, nehmen wir nebenstehende Turbine an (Abb. 15) mit den Werten:

- $D_a = 0,5 \text{ m}$
- $D_i = 0,25 \text{ m}$
- $b = 0,045 \text{ m}$
- $\delta = 0,005 \text{ m}$
- $H = 8 \text{ m}$
- $Q = 0,5 \text{ m}^3/\text{sec}$
- $\zeta_w = 0,092$ ⁷⁾
- $n = 340 / \text{Min.}$

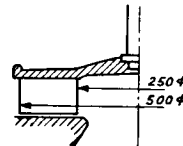


Abb. 15.

Nun können wir den relativen Reibungsverlust berechnen aus Gleichung (40), welcher bei wachsender Schaufelzahl sich folgendermaßen verhält:

Schaufelzahl	2	5	8	10	15	20
$\frac{H_{vLa}}{H} =$	0,00915	0,036	0,0593	0,076	0,118	0,165

⁷⁾ Siehe Hahn, K.: „Die Untersuchung der Strömung durch eine Flügelradturbine bei wechselnden Schaufelzahlen“. Mitt. d. Inst. f. Strömungsmaschinen d. Techn. Hochschule Karlsruhe, Heft IV, 1939, S. 1.

Es fehlt uns zur weiteren Berechnung nach Gleichung (41) noch der Wert von ε . Aus dem Gefälle $H = 8$ m läßt sich ω_{Γ} berechnen:

$$\omega_{\Gamma} = \sqrt{\frac{gH}{R_1^2}} = 35,4$$

Aus der Drehzahl $n = 340$ kann man die Winkelgeschwindigkeit des Rades berechnen, $\omega = 35,6$.

Daraus ergibt sich

$$\frac{\omega}{\omega_{\Gamma}} = 1,002 \approx 1$$

In Abb. 7 kann ε bei diesem Wert von $\frac{\omega}{\omega_{\Gamma}}$ in Funktion der Schaufelzahl abgelesen werden.

Subtrahiert man die aus Gleichung (40) berechneten $\frac{H_v L_a}{H}$ -Werte von ε , so erhalten wir den gesuchten hydraulischen Wirkungsgrad und weiter in Funktion der Schaufelzahl bei konstanter Winkelgeschwindigkeit die Kurve a in Abb. 16.

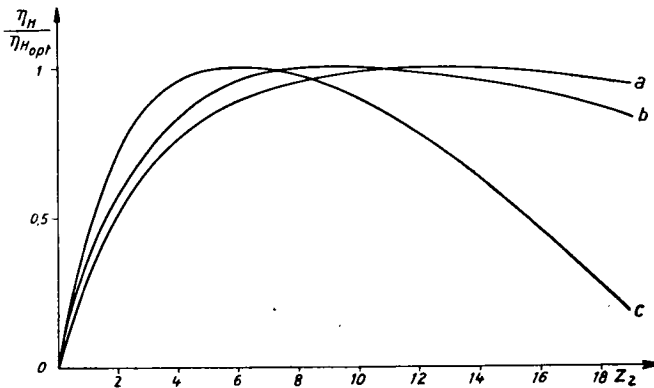


Abb. 16.

Da sich diese Rechnung auf die Lage und nicht auf den absoluten Wert des Wirkungsgradoptimums bezieht, so wurde in Abb. 16 das Verhältnis

$$\frac{\eta_H}{\eta_{H_{opt}}} = f(z_2) \text{ gezeichnet.}$$

Betrachten wir die Gleichung (41)

$$\eta_H = \varepsilon - \frac{1,5}{2\pi} \cdot \frac{Q^2 \cdot z_2 \cdot \zeta_w}{2gH(\pi D - z_2 \delta)^2 \cdot b^2} - \frac{H_v^*}{H} \quad (41)$$

so sehen wir, daß bei konstanter disponibler Leistung $L_d = \gamma \cdot Q \cdot H$ bei abnehmender Höhe und zunehmender Wassermenge das zweite Glied größer

wird, also die Lage des Optimums sich mit der Schaufelzahl verändert. Unter dieser Voraussetzung wurden in Abb. 16 die Kurven

$$\left. \begin{array}{l} a \text{ mit } H = 8 \text{ m}; \quad Q = 0,5 \text{ m}^3/\text{sec} \\ b \text{ mit } H = 6,4 \text{ m}; \quad Q = 0,625 \text{ m}^3/\text{sec} \\ c \text{ mit } H = 5 \text{ m}; \quad Q = 0,8 \text{ m}^3/\text{sec} \end{array} \right\} L_d = 4000 \text{ mkg/sec}$$

aufgetragen.

Mit den auf S. 24 angegebenen Abmessungen der Turbine und den Werten a, b, c berechnet man die spezifische Drehzahl der Turbinen n_s .

$$n_s = \frac{n \sqrt{N_t}}{H \sqrt[4]{H}}, \text{ wobei } N_t \text{ die totale Leistung in PS bedeutet.}$$

Abb. 16 zeigt, daß für die Kurven

- a bei 12 Schaufeln: $n_s = 164$
- b bei 9 Schaufeln: $n_s = 197$
- c bei 6 Schaufeln: $n_s = 246$

das Optimum erreicht wird.

Es zeigt sich also, daß bei Turbinen die günstigste Schaufelzahl bei zunehmender Wassermenge bei konstanter disponibler Leistung abnimmt.

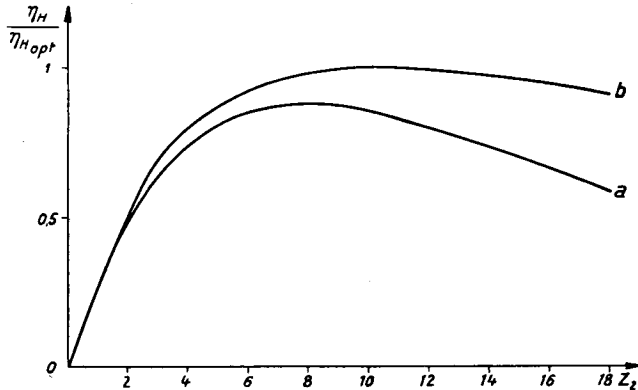


Abb. 17.

Mit Bezug auf Gleichung (41) sind die Kurven a und b (Abb. 17) als Vergleich der Verluste in Funktion der Schaufelzahl aufgezeichnet. Kurve a zeigt den Wirkungsgrad bei konstanter Wassermenge, Kurve b bei konstanter Relativgeschwindigkeit.

Im zweiten Fall ist die Verlusthöhe H_v proportional mit der Schaufelzahl (31), im ersten Fall ist die Zunahme größer; die Verlusthöhe wächst also schneller als die Schaufelzahl.

B. Berechnung der Förderhöhe in Funktion der Schaufelzahl für Pumpen

Bei Pumpen vereinfacht sich die Berechnung der Förderhöhe H_f in Funktion der Schaufelzahl, weil H_f als Differenz der in II B, S. 16, schon berechneten theoretischen Förderhöhe H_{th} und der Verlusthöhe H_v direkt angegeben werden kann:

$$H_f = H_{th} - H_{v_{La}} - H_v^* \quad (42)$$

oder

$$\frac{H_f}{H_{th_\infty}} = \frac{H_{th}}{H_{th_\infty}} - \frac{H_{v_{La}}}{H_{th_\infty}} - \frac{H_v^*}{H_{th_\infty}} \quad (43)$$

Für die Berechnung von $\frac{H_{th}}{H_{th_\infty}}$ in Funktion der Schaufelzahl setzen wir den aus Gleichung (39) errechneten Wert von H_v in Gleichung (43) ein und bekommen:

$$\frac{H_f}{H_{th_\infty}} = \frac{H_{th}}{H_{th_\infty}} - \frac{1,5}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{Q_f^2 \cdot z_2 \cdot \zeta_w}{2g H_{th_\infty} (\pi \cdot D - z_2 \delta)^2 b^2} - \frac{H_v^*}{H_{th_\infty}} \quad (44)$$

Diese Gleichung ist im Aufbau genau wie Gleichung (41): das erste Glied strebt mit wachsender Schaufelzahl gegen eins, und das zweite Glied wächst, bis es bei $z_2 = \frac{\pi D}{\delta}$ unendlich wird. Wenn man die Rechnung nach W. Spannake weiterführen will, so ist $\frac{H_{th}}{H_{th_\infty}}$ schon berechnet und in Abb. 11 aufgetragen. Nach der Berechnung von C. Pfeleiderer wird die Gleichung

$$\frac{H_f}{H_{th_\infty}} = \frac{1}{1 + \psi \frac{R_2^2}{z_2 \cdot S}} - \frac{1,5}{2 \pi} \cdot \frac{Q_f^2 \cdot z_2 \cdot \zeta_w}{2g H_{th_\infty} (\pi \cdot D - z_2 \delta)^2 b^2} - \frac{H_v^*}{H_{th_\infty}} \quad (45)$$

Im folgenden wurde die Berechnung nach W. Spannake durchgeführt.

Als Beispiel wurde das in Abb. 15 dargestellte Rad und eine Drehzahl $n = 340$ gewählt. Damit wird aus der Gleichung (25a)

$$H_{th_\infty} = \frac{(35,6)^2 \cdot 0,0625}{g} = 8,08 \text{ m}$$

Es fehlt uns zur weiteren Berechnung noch die theoretische Förderhöhe, die aus der Abb. 11, Kurve *a*, bei konstanter Winkelgeschwindigkeit bei wachsender Schaufelzahl abgelesen werden kann.

Subtrahiert man die aus Gleichung (44) berechnete Verlusthöhe von der theoretischen Förderhöhe, so erhalten wir die gesuchte Förderhöhe H_f .

Betrachten wir die Gleichung (44)

$$\frac{H_f}{H_{th_\infty}} = \frac{H_{th}}{H_{th_\infty}} - \frac{1,5}{2 \pi} \cdot \frac{Q_f^2 \cdot z_2 \cdot \zeta_w}{2g H_{th_\infty} (\pi D - z_2 d)^2 b^2} - \frac{H_v^*}{H_{th_\infty}} \quad (44)$$

so sehen wir, daß bei konstanter Drehzahl und zunehmender Wassermenge das zweite Glied größer wird, also das Optimum der Schaufelzahl sich ver-

ändert. Unter dieser Voraussetzung wurden in Abb. 18 die Kurven

- a mit $Q_f = 0,5 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$
- b mit $Q_f = 0,7 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$
- c mit $Q_f = 0,85 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$

aufgetragen.

Die Kurven zeigen, daß für

- a bei 15 Schaufeln
- b bei 11 Schaufeln
- c bei 8 Schaufeln

das Optimum erreicht wird.

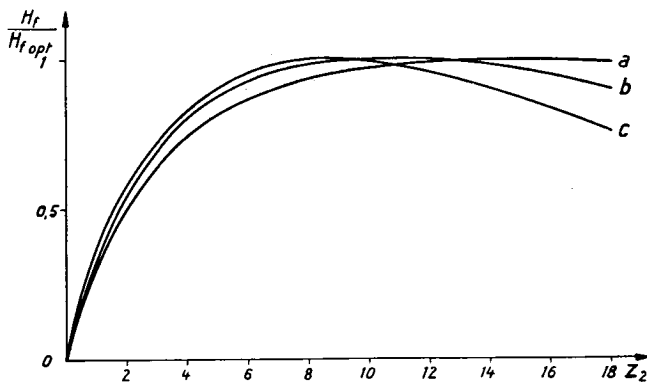


Abb. 18.

Es erweist sich also, daß ähnlich wie bei Turbinen bei Pumpen die günstigste Schaufelzahl bei zunehmender Wassermenge und konstanter Förderhöhe abnimmt.

Zusammenfassung

Bei Potentialströmung und unendlich dünnen Schaufeln nimmt die Leistung mit der Schaufelzahl asymptotisch gegen einen Höchstwert bei $z_2 = \infty$ zu, und zwar bei Pumpen und Turbinen.

Bei Reibungsströmung und endlicher Schaufeldicke nimmt die Leistung mit wachsender Schaufelzahl auf einen Höchstwert zu und fällt dann wieder ab. Das ersieht man aus den unter Abschnitt III berechneten Kurven und auch aus den aus den Messungen von K. Hahn⁸⁾ berechneten Kurven

⁸⁾ K. Hahn: „Die Untersuchung der Strömung durch eine Flügelradturbine bei verschiedenen Schaufelzahlen“. Mitt. d. Inst. f. Strömungsmaschinen d. Techn. Hochschule Karlsruhe, Heft IV, S. 1.

(Abb. 19). Ein numerischer Vergleich zwischen der theoretischen Berechnung und den Versuchen ist für diesen Fall nicht möglich, da die Theorien von Spannake und Pfeleiderer für radiale Räder abgeleitet, die Versuche aber mit einer Axialturbine durchgeführt wurden.

Aus Abb. 18 für Pumpen und Abb. 16 für Turbinen sehen wir, daß unter Voraussetzung gleicher Schaufelform die günstigste Schaufelzahl bei konstanter Drehzahl, abnehmender Höhe und zunehmender Wassermenge (also zunehmendem n_s) immer kleiner wird, d. h. bei kleinem Gefälle und großer Wassermenge wäre ein Rad mit wenig Schaufeln, dagegen bei großem Gefälle und kleiner Wassermenge ein solches mit vielen Schaufeln zu wählen.

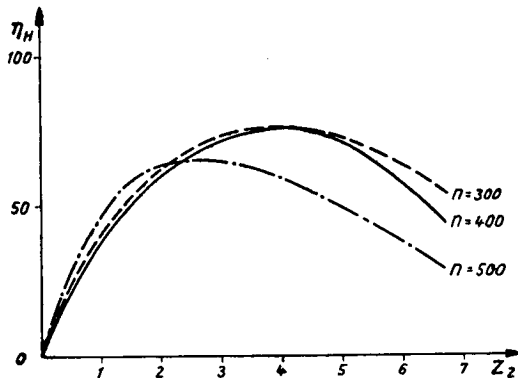


Abb. 19.

Nach den Gleichungen (41) und (45) sind die wichtigsten Faktoren zur Errechnung der günstigsten Schaufelzahl das Gefälle, die Wassermenge und die Drehzahl. Auch die Schaufelform kann eine Rolle spielen, da sie für die Größe von ζ_w maßgebend ist.

Um zu bestimmen, ob die obigen Berechnungen eine praktische Bedeutung gewinnen können, müssen numerische Vergleiche zwischen Theorie und Versuch durchgeführt werden. Bis heute sind nur theoretische Berechnungen für Radialräder und experimentelle Versuche für Axialräder bekannt, was einen Vergleich ausschließt. Im zweiten Teil dieser Arbeit wird eine Radialturbine experimentell untersucht und die Ergebnisse mit der Theorie verglichen.

EXPERIMENTELLER TEIL

I. Beschreibung der Versuchsturbine und der Meßmethoden

a) Beschreibung der Versuchsturbine

Die für die Messungen benützte Turbine ist eine Francis Spiralturbine (siehe Abb. 20 und 21) mit horizontaler Welle und folgenden Konstruktionsdaten:

$$H = 20 \text{ m}$$

$$Q = 200 \text{ l/sec}$$

$$n = 1000 \text{ T/min.}$$

$$N_e = 43 \text{ PS}$$

$$n_s = \frac{n \cdot \sqrt{N_t}}{H \sqrt[4]{H}} = 155$$

$$K_s = \frac{Q \cdot n^2}{c^3} = 26$$

$$(c = \sqrt{2gH})$$

Die Versuche wurden mit vier verschiedenen Laufrädern (siehe Abb. 22, 23 und 24, S. 31 ff.) mit 7, 11, 15, 19 Schaufeln durchgeführt. Gemessen wurden:

Wassermenge } bei verschiedene-
Gefälle } nen Leitradöff-
Leistung } nungen a_0

$$a_0 = 25,9; 22,25; 20,8; 18,15; \\ 15,5; 12,95; 10,35; 7,8 \text{ mm}$$

oder in Prozent der größten Öffnung:

$$\beta = \begin{array}{cccc} 100 & 90 & 80 & 70 & 60 \\ & 50 & 40 & 30 & \% \end{array}$$

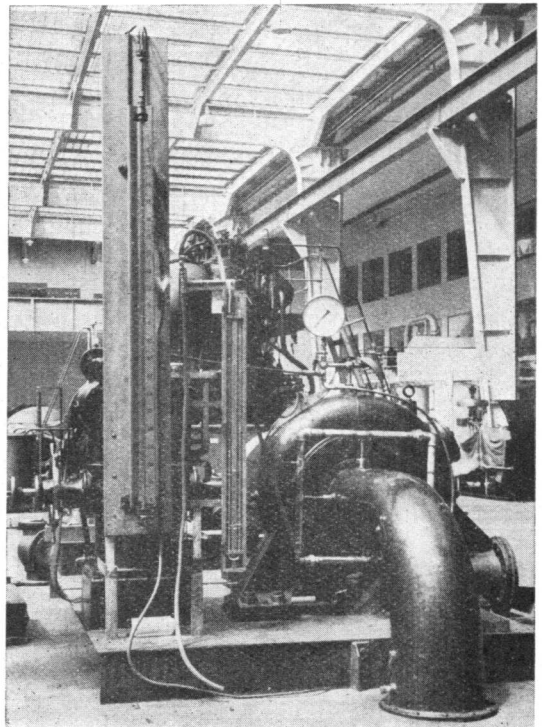


Abb. 20.

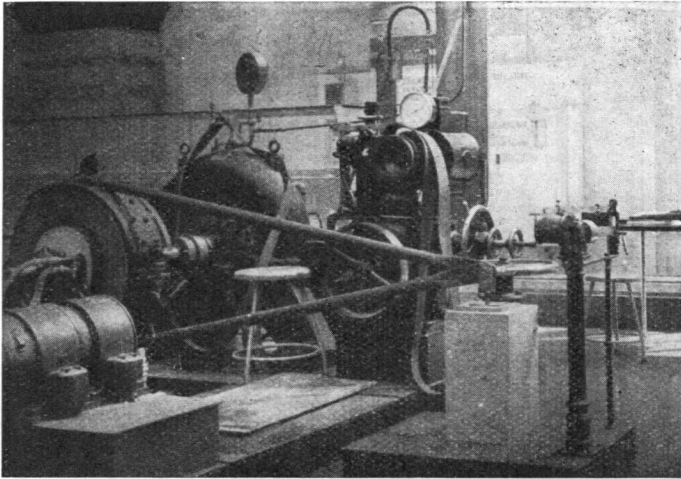


Abb. 21.

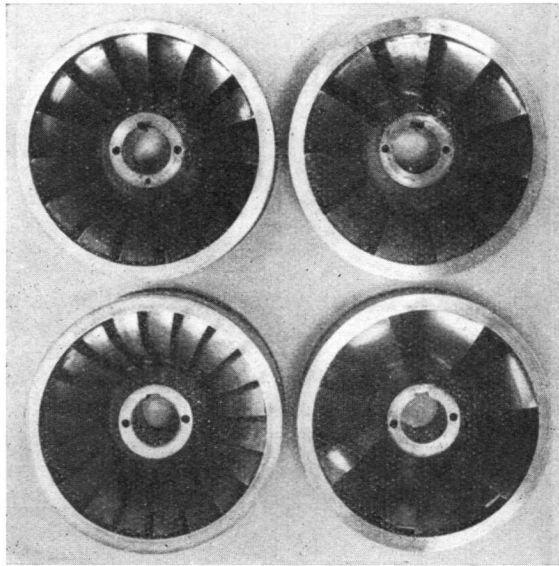


Abb. 22.

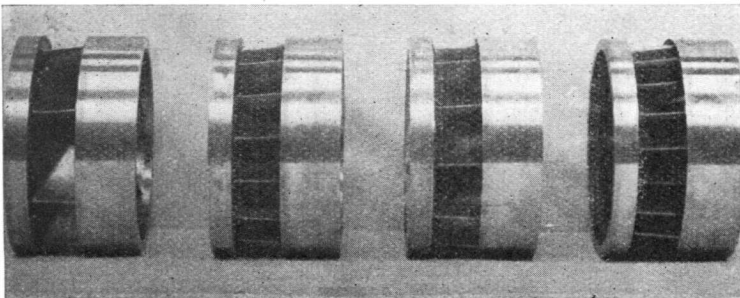


Abb. 23.

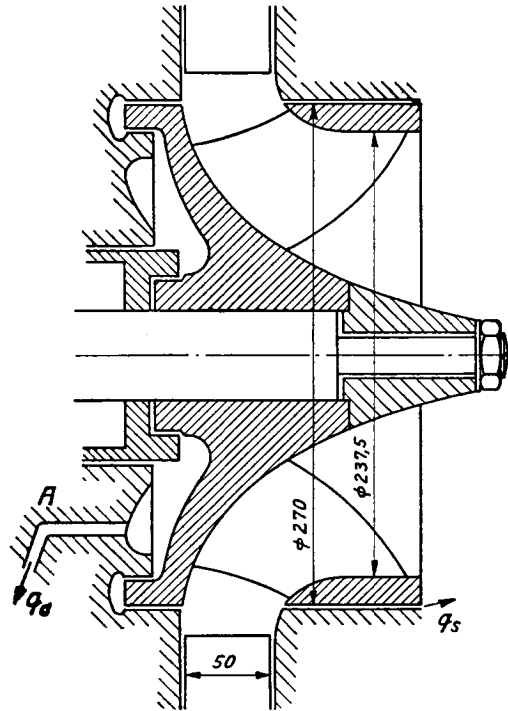


Abb. 24. Querschnitt der gemessenen Laufblätter.

b) Beschreibung der Meßmethoden

Wassermessung.

1. Messung mit Überfall.

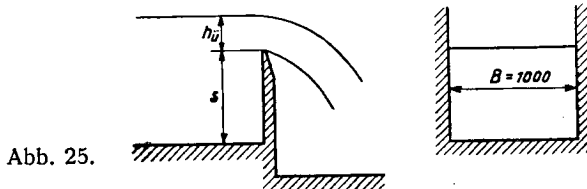


Abb. 25.

Die Höhe des Wasserspiegels $h_{\bar{u}}$ wurde mit einem Stechpegel gemessen und aus dem jeweiligen Wert von $h_{\bar{u}}$ die Wassermenge nach folgender Formel berechnet.

$$Q_{\bar{u}} = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot B \cdot h_{\bar{u}} \cdot \sqrt{2g h_{\bar{u}}} \quad (1a)$$

$$\mu = 0,615 \left(1 + \frac{1}{1,6 + h_{\bar{u}}} \right) \cdot \left[1 + 0,5 \left(\frac{h_{\bar{u}}}{h_{\bar{u}} + s} \right)^2 \right]^{1)} \quad (1b)$$

¹⁾ Nach der Formel des S. I. A.

2. Messung mit dem Schirm.

$$Q_{\bar{u}} = c \cdot B(s + h_{\bar{u}})$$

Für alle Messungen wurde der Überfall benützt, nur bei den ersten Messungen ohne Rad wurde außer dem Überfall noch der Schirm verwendet.

Die so gemessene Wassermenge war die Summe des durch das Laufrad fließenden Wassers und des Spaltwassers beim Saugrohr (q_s), während das Spaltwasser beim Deckel q_d durch ein Rohr abfloß, getrennt gemessen und zur Bestimmung der totalen Wassermenge addiert wurde ($Q_t = Q_{\bar{u}} + q_d$).

3. Spaltwasser beim Deckel q_d .

Das Spaltwasser beim Deckel q_d floß durch das Rohr A und wurde mit Behältermessung bestimmt.

4. Spaltwasser beim Saugrohr q_s .

Um q_s zu bestimmen, wurde — nachdem alle andern Messungen beendet waren — das Rad mit 19 Schaufeln zugelötet, so daß das Wasser nur noch durch die zwei Spalte fließen konnte (siehe Abb. 26).

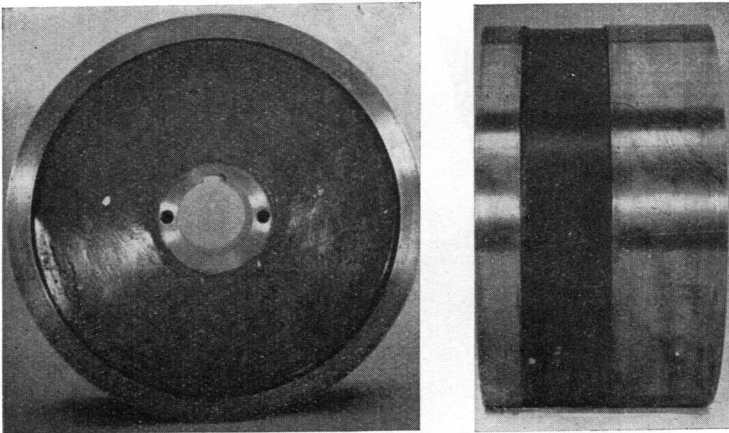


Abb. 26.

Da die Wassermenge q_s zu klein war, um mit dem Überfall gemessen werden zu können, mußte das Saugrohr um 90° gedreht werden (siehe Abb. 27, S. 34), so daß q_s in einen Kännel floß und wie q_d mit Behältermessung bestimmt werden konnte. Die Welle der Turbine wurde dann mit einem Gleichstrom-Motor angetrieben. Die Wassermengen q_s und q_d , bei verschiedenen Drehzahlen und verschiedenen Gefällen gemessen, bildeten das Verhältnis $\frac{q_s}{q_d}$.

Dieses Verhältnis war interessanterweise konstant und von Drehzahl und Gefälle unabhängig.

$$\frac{q_s}{q_d} = 1,46$$

Aus der Konstanten 1,46 und den gemessenen Spaltwassermengen am Deckel q_d konnten dann die entsprechenden Werte der Spaltwassermengen am Saugrohr q_s für jeden Zustand berechnet werden.

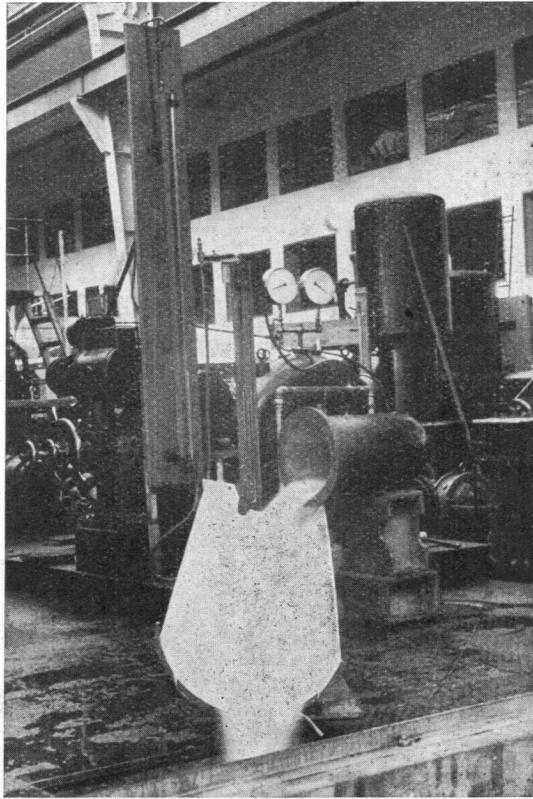


Abb. 27.

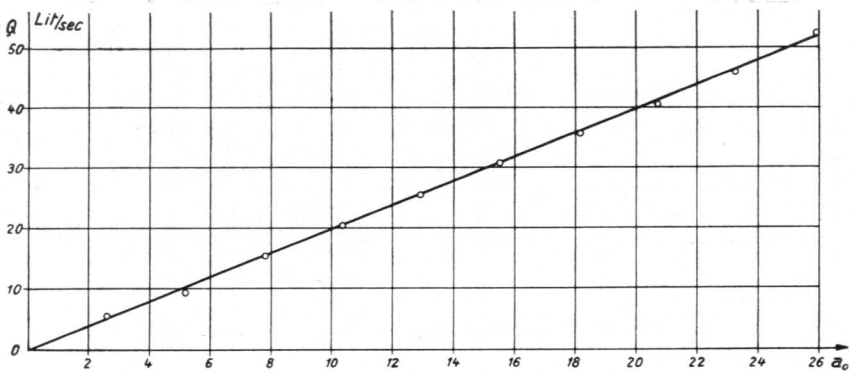


Abb. 28.

5. Bestimmung der Wassermenge ohne Laufrad in Funktion der Leitradstellung.

Diese Messung wurde durchgeführt, um später bei der Berechnung der Wassermenge in Funktion der Schaufelzahl die Kurven bis zur Schaufelzahl $z_2 = 0$ zeichnen zu können. Dafür wurde an Stelle des Laufrades ein Einbau aus Holz (siehe Abb. 29) hergestellt, der dem Meridianschnitt eines Laufrades ohne Schaufeln entsprach. Dann wurde die Wassermenge in Funktion der Leitradstellung gemessen und auf das Gefälle $H = 1$ m umgerechnet (Abb. 28, S. 34).

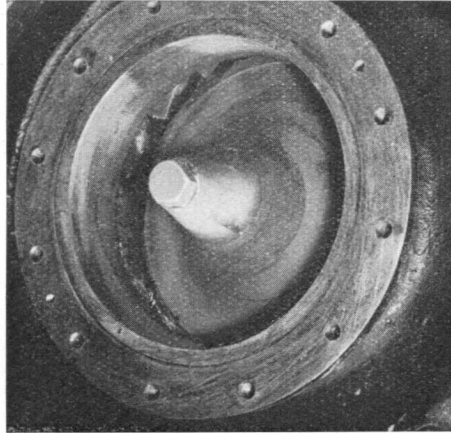


Abb. 29.

Gefällsmessung.

Bei den Gefällsmessungen wurde nur das Quecksilbermanometer benützt (*B*) (siehe Abb. 30, S. 36). Das Federmanometer *A* wurde nur zum Einstellen vor den Messungen verwendet.

$$H = H_d + H_s + \frac{c_e^2}{2g} \cdot \alpha \quad \alpha = 1$$

$$H_d = H_{Hg} \cdot \gamma_{Hg}$$

$$H_s = h_s + a \quad (\text{siehe Abb. 30}).$$

$$a = 0,56 \text{ m}$$

$$\frac{c_e^2}{2g} = \frac{Q^2}{2g \cdot F_e^2} \quad D_e = 0,273 \text{ m} \\ F_e = 0,0586 \text{ m}^2$$

$$\frac{c_e^2}{2g} = \frac{Q^2}{0,0674}$$

somit

$$H = H_{Hg} \cdot \gamma_{Hg} + h_s + a + \frac{Q^2}{0,0674}$$

$$a = 0,560$$

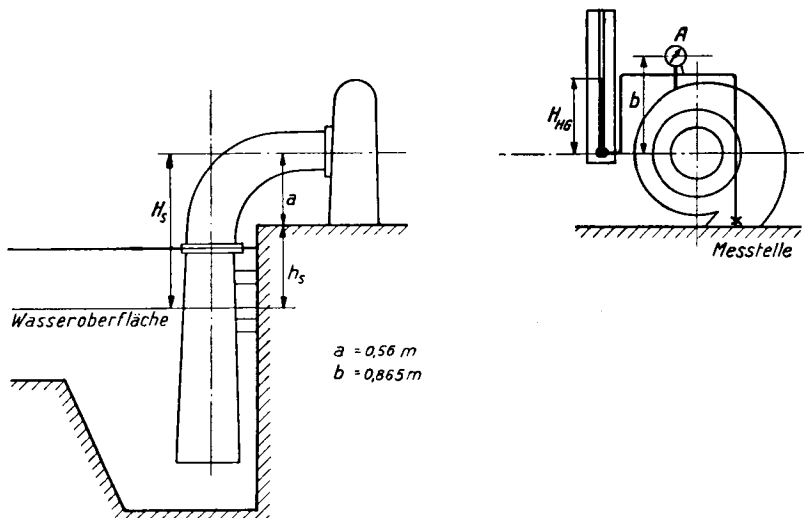


Abb. 30.

Leistung.

Die Bremskraft P (Kraft am Hebelarm).

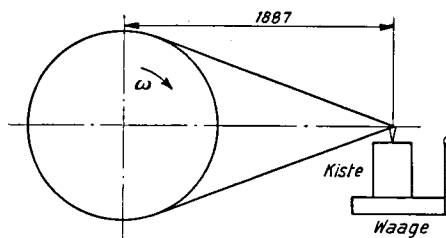


Abb. 31.

G ist das totale Gewicht auf der Waage. T ist die Tara, also Gewicht der Kiste und Druck des Bremszauns, die vor der Messung jeder Kurve kontrolliert wurde.

$P = G - T$ ist die Bremskraft am Hebelarm.

Die Drehzahl n

wurde bei größeren Drehzahlen mit einem Haslerzähler, bei kleinen Drehzahlen mit einem Handtachometer gemessen; die Genauigkeit beider Instrumente war vorher kontrolliert worden.

Die Bremsleistung L_t^ .*

Aus Bremskraft P und Drehzahl n kann die Bremsleistung L_t^* nach Formel

$$L_t^* = P \cdot n \cdot K$$

berechnet werden, wobei — weil $L = 1,887 \text{ m}$ —

$$K = \frac{2 \cdot \pi \cdot L}{60 \cdot 75} = \frac{1}{379}$$

(siehe Abb. 31, S. 36) also

$$L_t^* = \frac{P \cdot n}{379} \text{ PS}$$

Prüfung der Meßgenauigkeit.

Um die Genauigkeit der Messungen zu kontrollieren, wurde ein willkürlich gewählter Meßpunkt 15mal gemessen, wobei nach je drei Messungen die Turbine abgestellt und das Leitrad geschlossen wurde. Die Streuung der aus diesen Messungen berechneten totalen Wirkungsgrade η_t lag zwischen $79 \leq \eta_t \leq 80 \%$. Der Mittelwert war

$$\eta_t = 79,49 \%$$

II. Messungen

1. Messung der Verluste

Bei den Messungen entstanden verschiedene Verluste. Das in die Bremsstrommel radial eingespritzte Kühlwasser mußte von der Bremsstrommel mitgeführt werden und bewirkte einen Leistungsverlust.

Weiter entstanden Verluste durch die Lagerreibung und durch die Ventilation der rotierenden Turbinenwelle und Bremsstrommel.

Die Verluste wurden getrennt gemessen:

- a) Kühlwasser
- b) Lagerreibung und Ventilation.

In beiden Fällen wurde der Ablaufversuch angewandt. Die Turbine wurde mit einem Elektromotor angetrieben und bei 1800 T/min der Treibriemen abgeworfen, wonach die Umdrehungszahlen in Funktion der Zeit bis zum Stillstand gemessen und in Kurven aufgezeichnet werden konnten.

Aus den so erhaltenen Kurven ergaben sich die Werte für die Winkelgeschwindigkeit ω auch in Funktion der Zeit

$$\omega = f(t),$$

daraus mittels der Tangenten die Beschleunigung

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$$

Für die Berechnung der Verlustleistung braucht man noch das Massenträgheitsmoment Θ , das für die Laufräder gemessen, für die Welle berechnet, und für die Bremstrommel auf beide Arten bestimmt, und das Resultat verglichen wurde; es ergab sich eine gute Übereinstimmung.

	Laufräder	Bremstrommel	Welle
Gemessen $\Theta =$	0,0227	0,633	—
Gerechnet $\Theta =$	—	0,63857	0,011

Das ganze Massenträgheitsmoment Θ ist die Summe der drei Momente und kann in die Verlustleistungsberechnung eingesetzt werden:

$$\text{totale } \Theta = 0,6667 \text{ kg m sec}^2$$

Aus Beschleunigung, Winkelgeschwindigkeit und Massenträgheitsmoment läßt sich die Verlustleistung für Kühlwasser und Lagerreibung berechnen, nämlich

$$L_v = \varepsilon \cdot \Theta \cdot \omega$$

a) *Verluste durch Kühlwasserzirkulation in der Bremstrommel L_{v_1} .*

Der Versuch wurde ohne Wasser in der Turbine mit eingebautem Laufrad und bei geschlossenem Leitapparat durchgeführt.

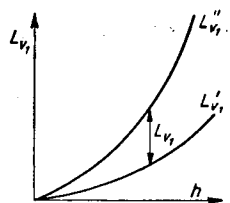


Abb. 32.

Zuerst wurde eine Messung ohne Kühlwasser in der Bremstrommel gemacht, sie ergab die Kurve L_{v_1}' .

Nachher wurde eine zweite Messung mit zirkulierendem Kühlwasser durchgeführt, sie ergab die Kurve L_{v_1}'' .

Die Differenz der beiden Messungen ist die gesuchte Verlustleistung L_{v_1} .

Bei diesen und allen folgenden Versuchen wurde das Kühlwasser genau gleich eingestellt, so daß die Verlustwerte bei wechselnder Drehzahl auf der Kurve abgelesen und in die Berechnungen eingesetzt werden konnten.

b) *Verluste durch Lagerreibung und Ventilation L_{v_2} .*

Der Versuch wurde ohne Wasser in der Turbine, bei geschlossenem Leitapparat, aber — im Gegensatz zum ersten Ablaufversuch — ohne Laufrad durchgeführt, um zu vermeiden, daß das Rad als Ventilator wirkt und dadurch zusätzliche Verlustleistungen entstehen.

2. Messung der Leistung

a) Bezeichnungen:

Totale Leistung L_t $L_t = L_t^* + L_{v_1}$

Gefällsleistung L_H $L_H = L_t^* + L_{v_1} + L_{v_2}$

Wassermengenwirkungsgrad η_Q

Q_t = Wassermenge, die durch das Leitrad fließt,

q_d = Spaltwassermenge beim Deckel,

q_s = Spaltwassermenge beim Saugrohr $q_s = 1,46 q_d$

$$\Delta Q = q_s + q_d$$

$Q_{La} = Q_t - \Delta Q$ = Wassermenge, die durch das Laufrad fließt,

$$\eta_Q = \frac{Q_{La}}{Q_t} = \frac{Q_t - \Delta Q}{Q_t} = 1 - \frac{\Delta Q}{Q_t}$$

oder wenn man die Leistung einsetzt

$$\eta_Q = \frac{L_{dLa}}{L_d}$$

Disponible Leistung

$$L_d = \gamma \cdot Q_t \cdot H; \quad L_{dLa} = \gamma \cdot Q_{La} \cdot H$$

Gefällswirkungsgrad η_H $\eta_H = \frac{L_H}{L_{dLa}}$

Hydraulischer Wirkungsgrad η_h $\eta_h = \frac{L_H}{L_d}$

$$\eta_h = \eta_Q \cdot \eta_H = \frac{L_{dLa}}{L_d} \cdot \frac{L_H}{L_{dLa}} = \frac{L_H}{L_d}$$

Mechanischer Wirkungsgrad η_m $\eta_m = \frac{L_t}{L_H}$

Totaler Wirkungsgrad η_t $\eta_t = \frac{L_t}{L_d}$

$$\eta_t = \eta_H \cdot \eta_Q \cdot \eta_m$$

$$\eta_t = \frac{L_H}{L_{dLa}} \cdot \frac{L_{dLa}}{L_d} \cdot \frac{L_t}{L_H} = \frac{L_t}{L_d}$$

b) Versuchsergebnisse.

Um die durch die Messungen erhaltenen Werte miteinander vergleichen zu können, muß eine Umrechnung auf ein konstantes Gefälle $H = 1$ m vorgenommen werden:

Drehzahl n : $n_1 = \frac{n}{\sqrt{H}}$

Leistung L : $L_{H_1} = \frac{L_H}{H\sqrt{H}}; L_{t_1} = \frac{L_t}{H\sqrt{H}}$

Wassermenge Q : $Q_{La_1} = \frac{Q_{La}}{\sqrt{H}}; Q_{t_1} = \frac{Q_t}{\sqrt{H}}$

Aus den so erhaltenen Werten wurden für jedes Rad bei den Leitschaufelöffnungen

$\beta = 100\%, 90\%, 80\%, 70\%, 60\%, 50\%, 40\%, 30\%$

d. h.

$a_0 = 25,9; 22,25; 20,8; 18,15; 15,5; 12,95; 10,35; 7,8 \text{ mm}$

folgende Kurven gezeichnet:

Wirkungsgrade:

$$\left. \begin{aligned} \eta_H &= f(n_1) \\ \eta_t &= f(n_1) \\ \eta_Q &= f(n_1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{Abbildungen 33—36, S. 41—44})$$

Wassermenge Q :

$Q_{La_1} = f(n_1)$ (Abbildungen 37—40, S. 45)

Leistung L :

$L_{H_1} = f(n_1)$ (Abbildungen 41—44, S. 46)

Aus diesen Kurven ergeben sich für die Konstruktionsdrehzahl ($n_1=224$):

$L_{H_1} = f(Q_{La_1})$ (Abbildungen 45—48, S. 47)

und

$\eta_H = f(Q_{La_1})$ (Abbildungen 45—48, S. 47)

und in Funktion der Schaufelzahl z_2 :

Wirkungsgrade:

$$\left. \begin{aligned} \eta_H &= f(z_2) \\ \eta_t &= f(z_2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{Abbildung 49, S. 48})$$

Wassermenge Q :

$Q_{La_1} = f(z_2)$ (Abbildung 50, S. 49)

Leistung L :

$L_{H_1} = f(z_2)$ (Abbildung 51, S. 49)

Um das Maximum des Wirkungsgrades jeder einzelnen Schaufelzahl feststellen zu können, wurde der jeweilig optimale Punkt aufgezeichnet und die Werte für die verschiedenen Schaufelzahlen in einer Kurve verbunden, d. h.:

optimale Wirkungsgrade:

$$\left. \begin{aligned} \eta_{H_{max}} &= f(z_2) \\ \eta_{t_{max}} &= f(z_2) \end{aligned} \right\} \quad (\text{Abbildung 52, S. 50})$$

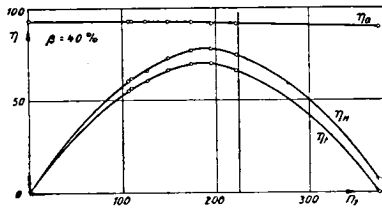
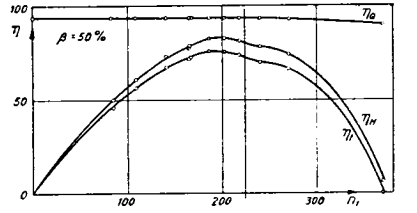
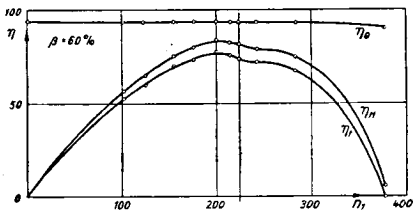
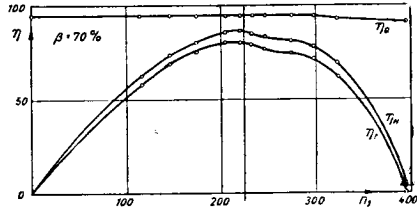
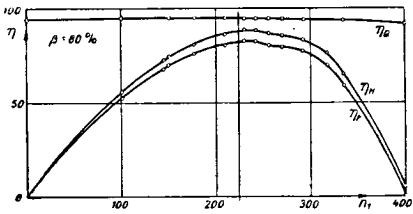
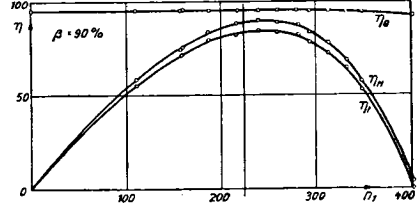
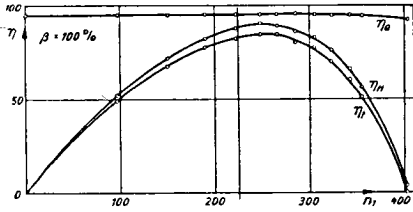


Abb. 33. $z_2 = 7$

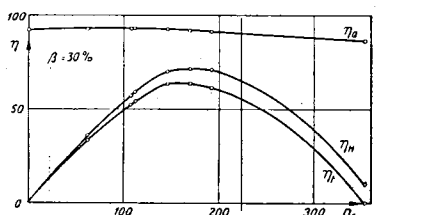
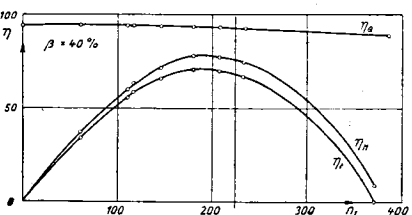
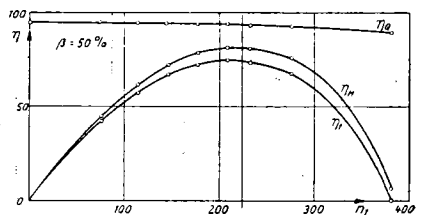
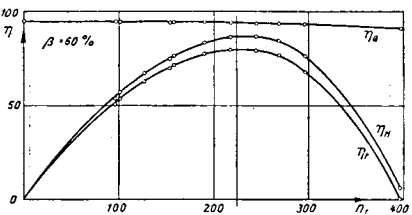
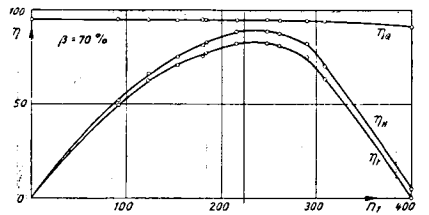
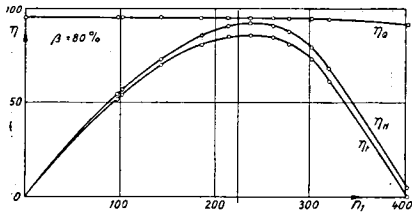
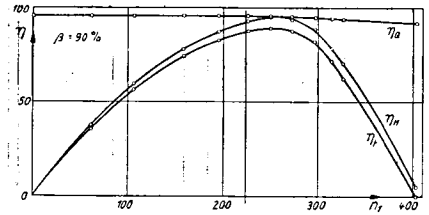
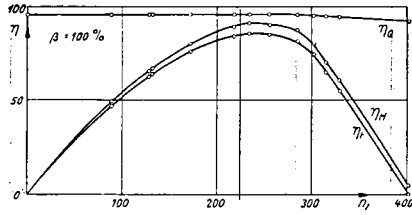


Abb. 34. $z_2 = 11$

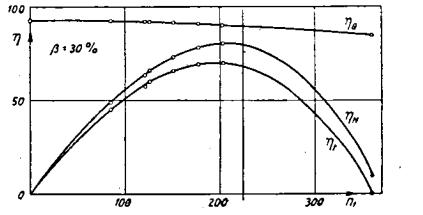
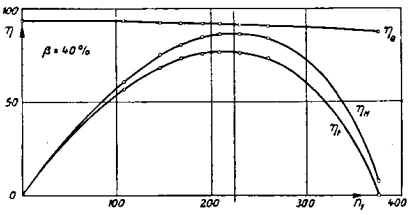
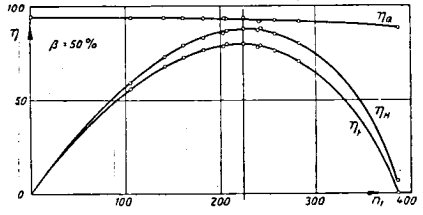
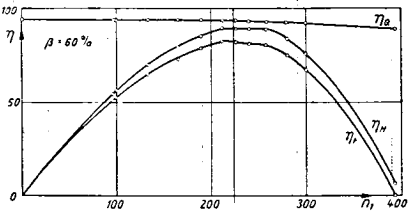
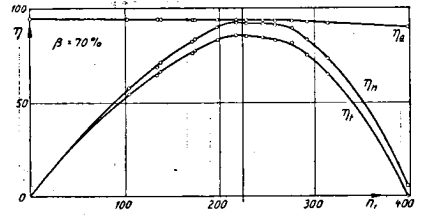
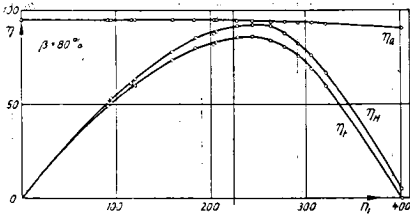
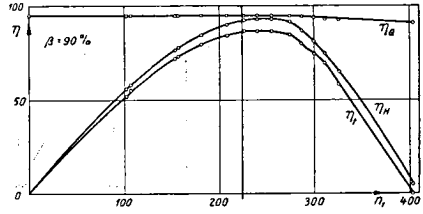
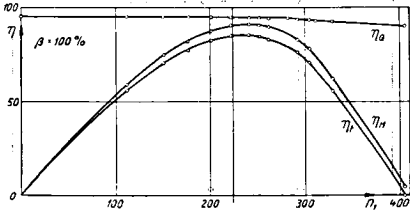


Abb. 35. $z_2 = 15$

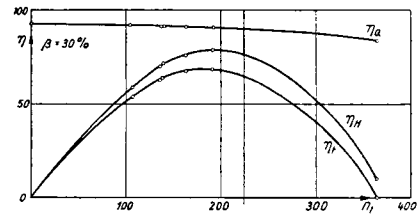
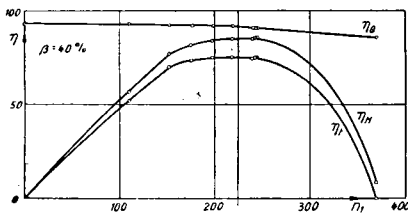
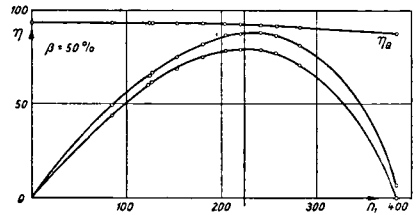
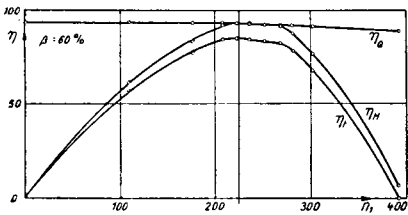
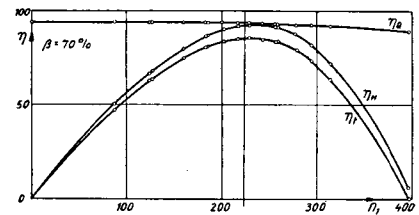
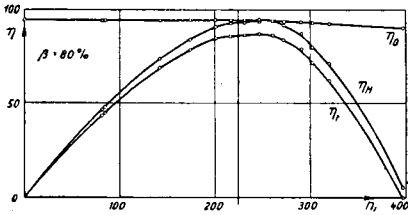
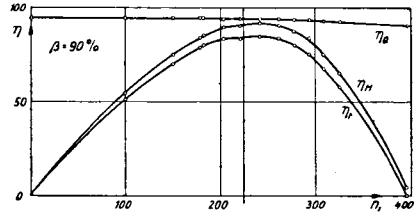
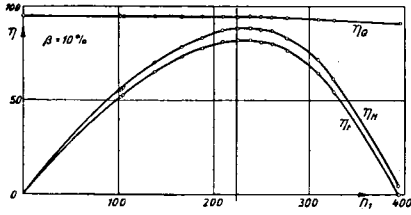


Abb. 36. $z_2 = 19$

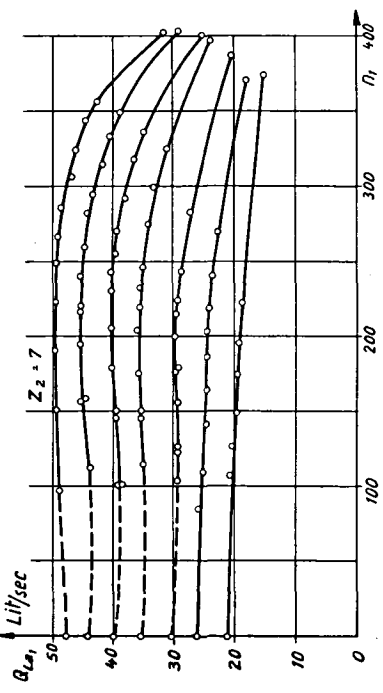


Abb. 37.

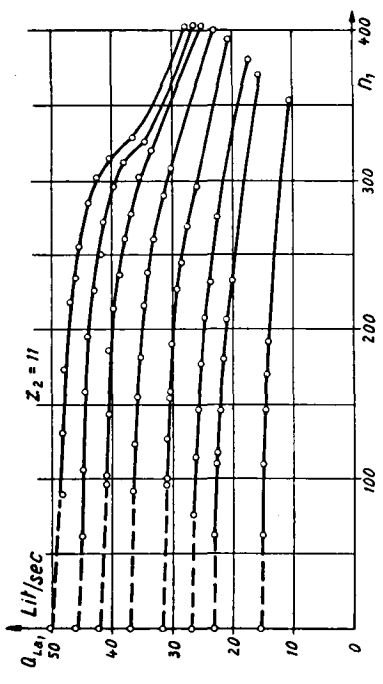


Abb. 38.

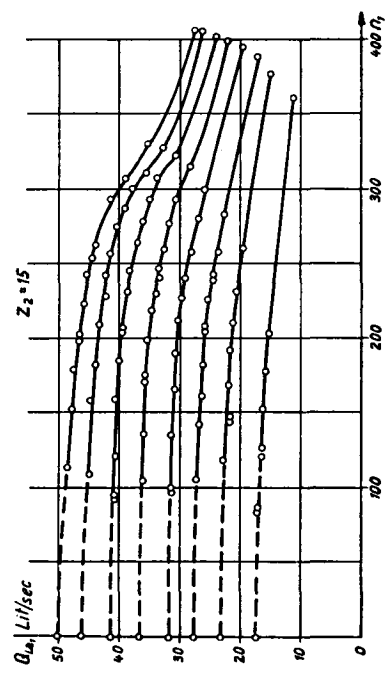


Abb. 39.

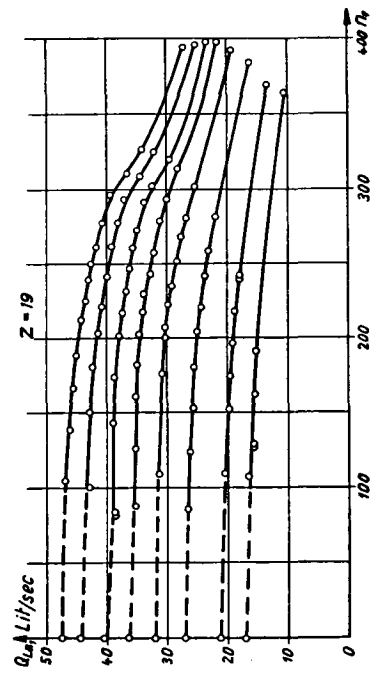


Abb. 40.

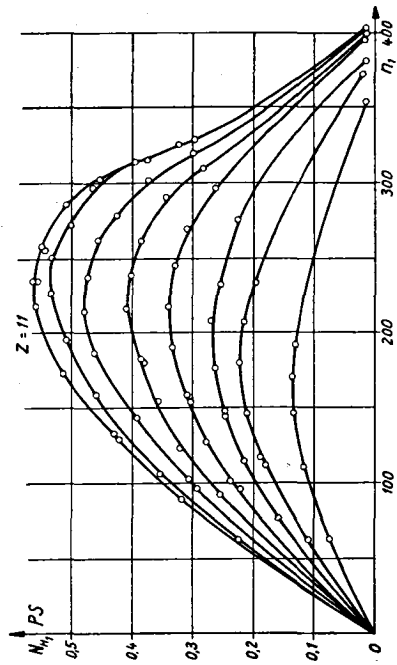


Abb. 42.

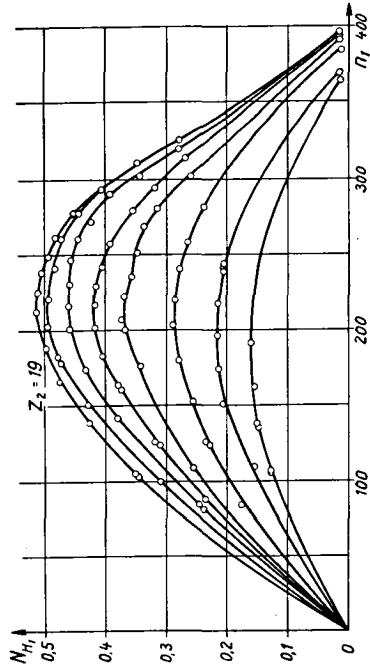


Abb. 44.

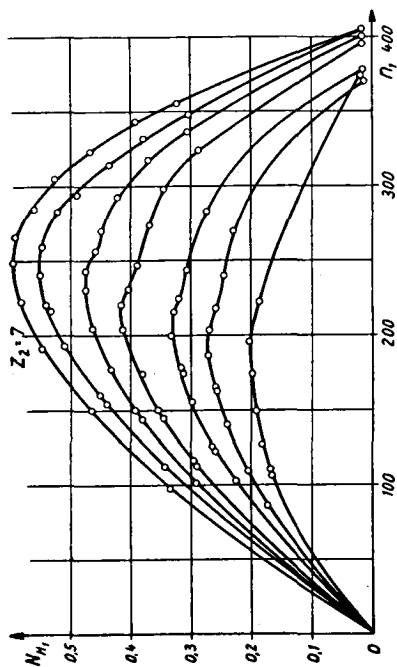


Abb. 41.

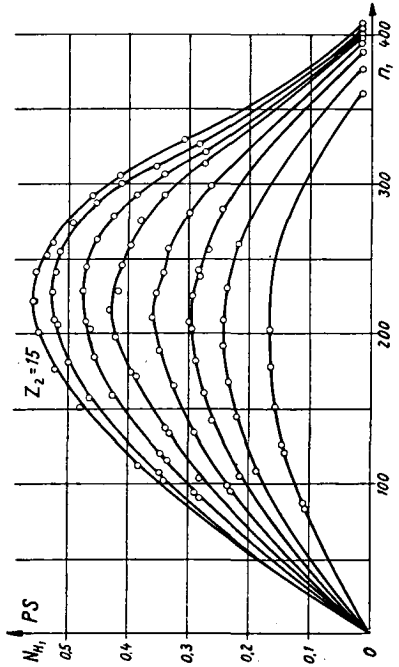


Abb. 43.

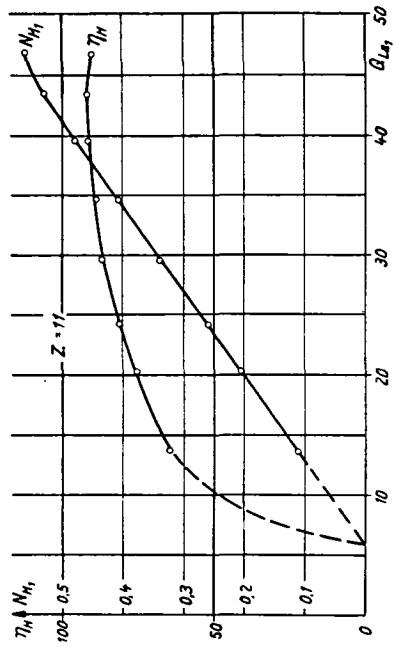


Abb. 46.

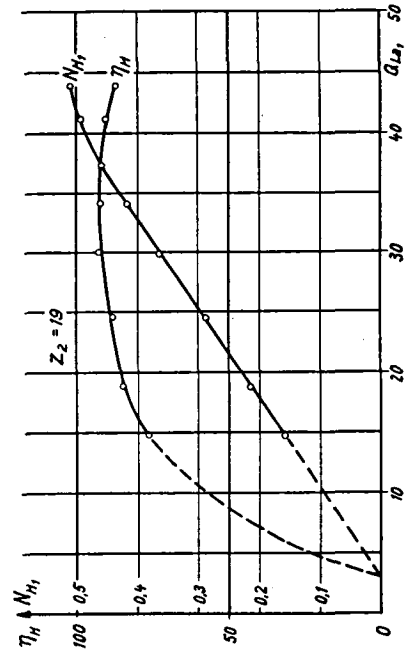


Abb. 48.

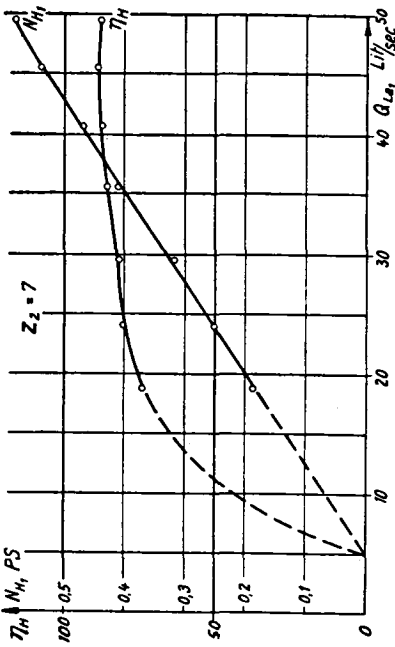


Abb. 45.

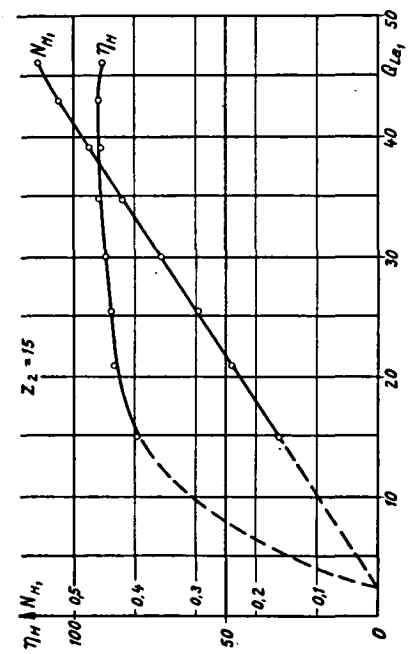


Abb. 47.

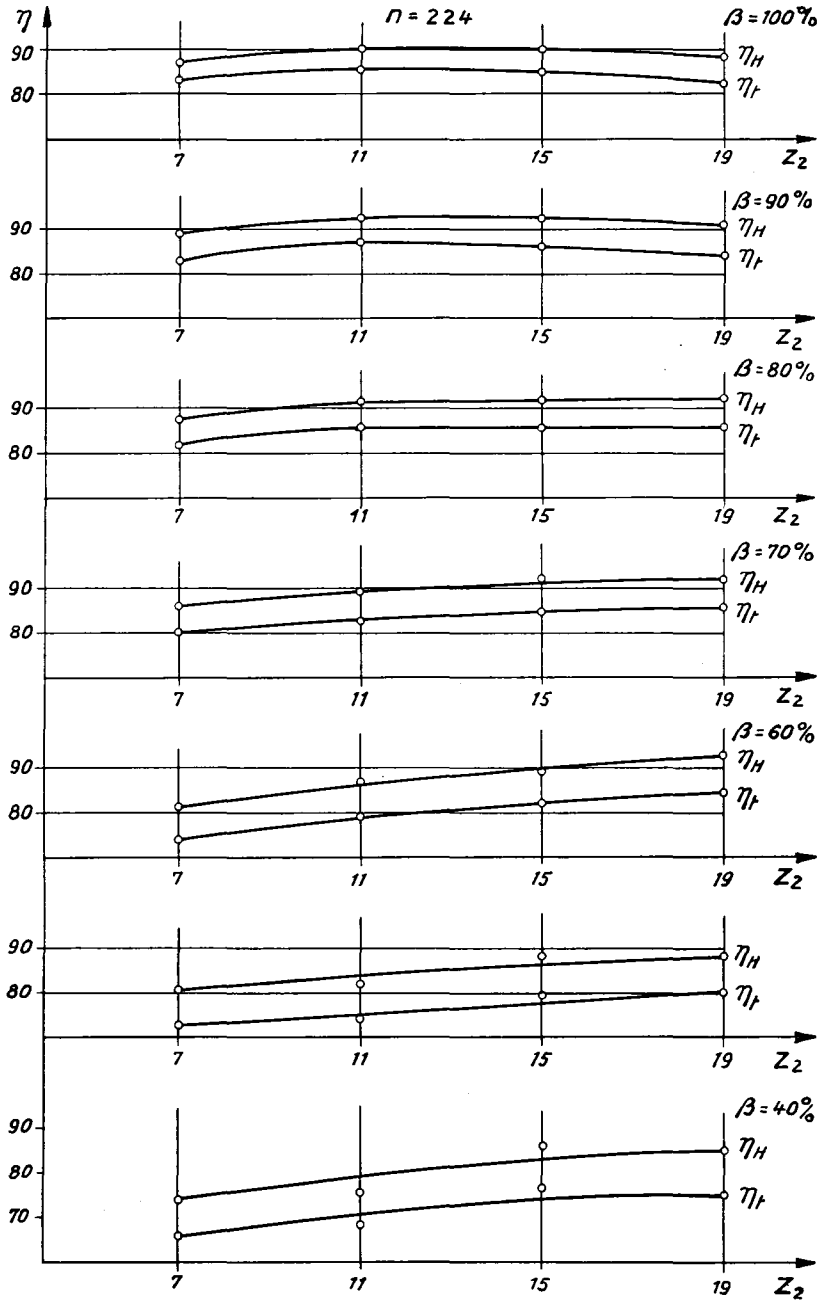


Abb. 49.

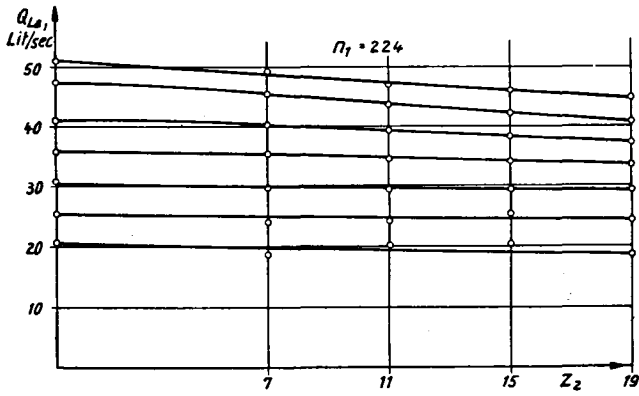


Abb. 50.

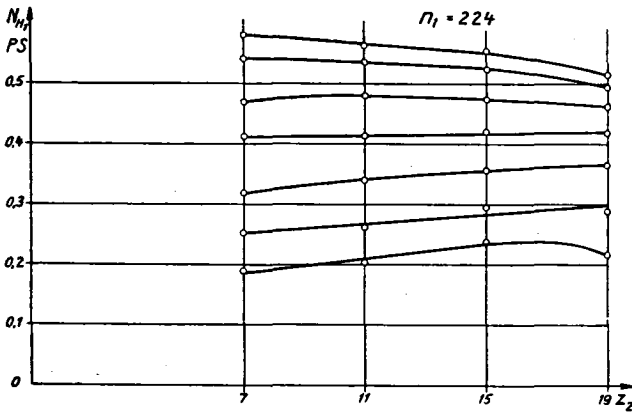


Abb. 51.

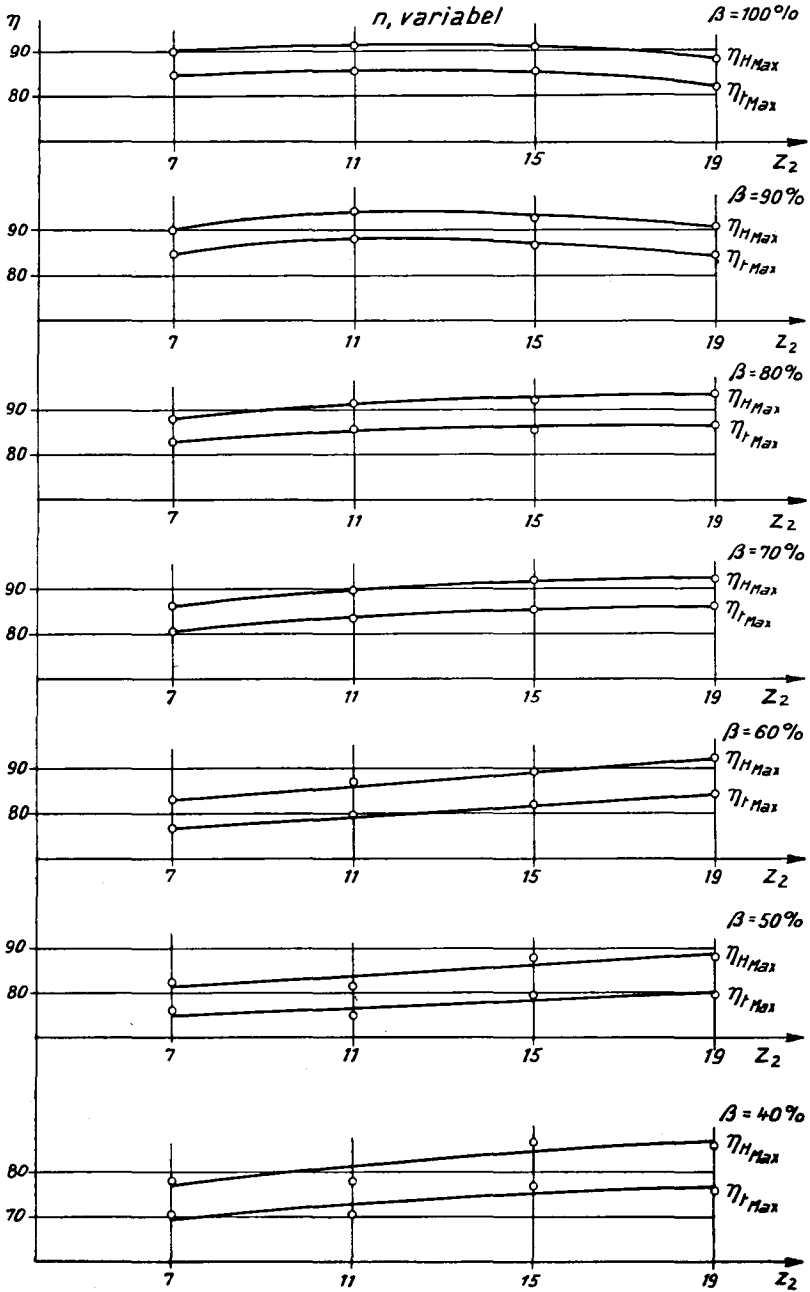


Abb. 52.

**Bremstabellen der vier Laufräder
bei voller Leitradöffnung $\beta = 100\%$**

$$z_2 = 7$$

P	n	N_t^*	H	Q_{ii}	q_d	Q_t	N_d	η_t^*
0	1810	0	20,16	150	4,8	154,8	41,5	0
	1800	0	20,13	150	4,8		41,5	
	1806	0	20,14	150	4,8		41,5	
5,8	1618	25,6	20,73	201,2	4,6	205,8	57	45
	1620	25,6	20,61	202,2	4,5	206,7	57	45
	1622	25,7	20,69	202,2	4,5	206,7	57,2	45
7,8	1550	31,9	20,44	208	4,4	212,4	57,7	55,3
	1550	31,9	20,48	207	4,4	211,4	58	55
	1516	31,2	20,45	207	4,4	211,4	57,7	54
10	1440	38	20,08	212,5	4,3	216,8	58,2	65,4
	1444	38,1	19,96	212,5	4,3		58	65,7
	1451	38,3	20,04	212,5	4,3		57,8	66,1
12	1358	43	19,87	216,3	4,3	220,6	58,4	73,6
	1359	43	19,97	216,3	4,3	220,6	58,7	73,3
	1360	43,1	19,85	216,3	4,2	220,5	58,4	73,9
14	1262	46,5	19,66	220	4,2	224,2	58,7	79,3
	1250	46,2	19,41	220	4,15	224,2	58,1	79,5
	1255	46,3	19,46	220	4,15	224,2	58,1	79,6
15,5	1175	48,1	19,47	223,7	4,2	227,9	59,1	81,4
	1174	48,1	19,48	223,7	4,2	227,9	59,1	81,4
	1174	48,1	19,51	223	4,2	227,2	59,1	81,4
17	1095	49,1	19,46	223,7	4,15	227,9	59,3	82,7
	1093	49,1	19,57	223,7	4,15	227,9	59,5	82,5
	1095	49,1	19,51	223,7	4,15	227,9	59,4	82,6
18,5	980	47,9	19,4	224,5	4,2	228,7	59,2	81
	979	47,8	19,4	224,5	4,2		59,2	81
	980	47,9	19,32	224,5	4,2		59,1	81
20,5	836	45,3	19,27	224,5	4,2	228,7	58,9	77
	840	45,4	19,27	224,5	4,2		58,9	76,9
	830	44,8	19,3	224,5	4,2		59	76,7
22,5	662	39,3	19,5	220	4,45	224,5	58,5	67,1
	660	39,2	19,45	220	4,45		58,3	67,2
	659	39,1	19,45	220	4,45		58,3	67,1
25	425	28,1	19,51	217	4,5	221,5	57,6	48,7
	428	28,3	19,44	217	4,5		57,5	49,2
	424	28	19,49	217	4,5		57,6	48,6
31,2	0	0	19,51	218	4,9	222,9	58	0
31,2	0	0	19,50	217,7	4,9	222,6	58	
31,2	0	0	19,37	217,3	4,9	222,2	57,5	

$$z_2 = 11$$

P	n	N_t^*	H	$Q_{\bar{u}}$	q_d	Q_t	N_d	η_t^*
6	1489	23,6	20,43	173	4,3	177,3	48,3	49,5
	1488	23,6	20,45	171,5	4,3	175,8	48	50,1
	1489	23,6	20,59	171,5	4,3	175,8	48,3	49,5
8	1395	29,5	19,73	184,5	4,1	188,6	49,6	59,5
	1397	29,5	19,72	184,5	4,1		49,6	59,5
	1398	29,5	19,64	184,5	4,1		49,5	59,6
10	1330	35,1	19,22	191,5	4,0	195,5	50,1	70
	1308	34,6	19,22	191,5	4,0		50,1	69,2
	1332	35,2	19,18	191,5	4,0		50,1	69,2
12	1236	39,1	18,82	196	3,9	199,6	50,2	78
	1236	39,1	18,87	196	3,9	199,6	50,3	79,9
	1233	39	18,87	196,7	3,9	200,3	50,3	77,6
14	1133	41,8	18,6	204,5	3,9	208,4	51,4	81,1
	1121	41,5	18,56	203	3,9	206,9	51,3	81
	1125	41,6	18,63	201,7	3,9	205,6	51,1	81,1
15,5	1035	42,3	18,49	202,3	3,9	206,2	51	82,9
	1029	42,2	18,44	202,3	3,9	206,2	50,9	82,9
	1037	42,3	18,29	203,5	3,9	207,4	50,5	83,7
17	930	41,7	18,25	205,2	3,9	209,1	51	82
	926	41,5	18,21	205,2	3,8	209	50,9	81,5
	932	41,8	18,23	206,2	3,9	210,1	50,9	82,2
18,5	859	41,9	18,12	207	3,6	210,6	51	82,3
	856	41,7	18,22	207	3,6		51,3	81,7
	859	41,9	18,09	207	3,6		50,8	82,5
20	731	38,5	18,01	209,3	3,6	212,9	51,3	75
	729	38,5	18,05	209,3	3,6		51,3	75
	730	38,5	18,07	209,3	3,6		51,3	75
22	549	31,9	18,03	209,7	3,6	213,3	51,4	62,1
	561	32,6	17,98	210	3,6	213,6	51,4	63,6
	551	32	18,03	210	3,6	213,6	51,4	62,3
18,5	772	37,7	18,07	208,8	3,5	212,3	51,3	73,5
	780	38,1	18,1	208,8	3,6	212,4	51,4	74,3
	776	37,9	18,3	208,8	3,6	212,4	51,2	73,5
24	377	23,9	17,92	209,8	3,9	213,7	51,2	46,7
	374	23,7	17,94	209,8	3,9		51,2	46,4
	378	23,9	17,99	209,8	3,9		51,3	46,6
29,6	0	0	17,49	216,5	4,0	220,5	51,3	0
29,7			17,45	216	4,0	220	51,2	
29,7			17,53	216	4,0	220	51,4	
0	1749	0	19,07	127,5	4,3	131,9	33,6	0
	1760		19,18	127,6	4,3		33,6	
	1760		19,18	127,6	4,3		33,6	

$$z_2 = 15$$

P	n	N_t^*	H	Q_{ii}	q_d	Q_t	N_d	η_t^*
0	1823	0	20,41	132,8	5,3	138,1	37,45	0
	1828	0	20,46	132,8	5,2	138,0	37,6	0
	1827	0	20,41	133,4	5,2	138,6	37,7	0
6	1516	24	21,34	168,4	5,2	173,6	49,4	48,6
	1521	24,1	21,33	166,4	5,3	171,7	48,8	49,4
	1525	24,1	21,37	166,4	5,3	171,7	48,9	49,4
8	1426	30,1	20,85	177,3	5,2	182,5	50,7	59,3
	1419	29,9	20,80	177,3	5,2	182,5	50,8	58,9
	1419	29,9	20,76	178	5,1	183,1	50,8	58,9
9,5	1371	34,3	20,18	186	4,8	190,8	51,5	66,6
	1366	34,2	20,11	186	4,8	190,8	51,2	66,6
	1365	34,3	20,22	186	4,8	190,8	51,5	66,6
11	1301	37,7	19,85	192	4,8	196,8	52,1	72,2
	1301	37,7	19,85	192	4,8	196,8	52,1	72,2
	1308	37,9	19,85	192	4,8	196,8	52,1	72,6
12,5	1249	41,3	19,58	197,5	4,7	202,2	52,7	78,4
	1249	41,3	19,61	197,5	4,7	202,2	52,8	78,3
	1249	41,3	19,64	197,5	4,7	202,2	52,9	78,1
14	1152	42,6	19,47	199,9	4,6	204,5	53,1	80,1
	1152	42,6	19,41	200,3	4,6	204,9	53,1	80,1
	1158	42,8	19,47	200,3	4,6	204,9	53,2	80,2
15	1111	43,9	19,33		4,6		53,5	82,1
	1105	43,7	19,35	202,5	4,6	207,1	53,5	81,8
	1105	43,7	19,36		4,6		53,5	81,8
16	1068	45,1	19,21		4,5		53,9	83,6
	1053	44,5	19,14	206	4,5	210,5	53,8	82,6
	1055	44,6	19,13		4,5		53,8	82,8
17,5	966	44,6	19,04	207,5	4,4	211,9	53,7	83,1
	969	44,7	19,04	207,8	4,4	212,2	53,8	83,1
	966	44,4	19,06	208	4,4	212,4	53,8	82,9
19	879	44,1	19,00	209,9	4,4	214,3	54,5	81
	861	43,2	18,94	210,4	4,4	214,8	54,45	79,3
	853	42,7	18,99	210,4	4,4	214,8	54,5	78,5
20,5	773	41,8	18,91		4,4		54,9	76,2
	768	41,5	18,76	213,5	4,4	217,9	54,5	76,2
	765	41,3	18,84		4,4		54,7	75,6
22	657	38,2	18,67	214,5	4,4	218,9	54,6	70
	654	38	18,67	214,5	4,4	218,9	54,6	69,5
	650	37,7	18,67	215	4,4	219,4	54,7	68,9
24	486	30,8	18,64		4,4		55	56
	484	30,4	18,61	216,9	4,4	221,3	54,9	55,4
	475	30,1	18,59		4,4		54,8	55
30,5	0	0	18,26		4,3		54,8	
30,5			18,23	221	4,3	225,3	54,7	0
30,3			18,22		4,3		54,7	

$$z_2 = 19$$

P	n	N_t^*	H	$Q_{\bar{u}}$	q_d	Q_t	N_d	η_t^*
0	1739	0	19,48	129	5,1	134,1	34,8	0
	1740	0	19,49	129	5,1	134,1	34,8	
	1739	0	19,45	129	5,1	134,1	34,8	
6	1510	23,9	21,56	166,5	5,3	171,8	49,3	48,5
	1512	23,9	21,51	166,5	5,3	171,8	49,2	48,7
	1510	23,9	21,47	166,5	5,3	171,8	49,1	48,7
8	1414	29,8	20,88	174,5	5,2	179,7	50,2	59,9
	1413	29,8	20,77	174,5	5,2	179,7	49,9	60,1
	1408	29,7	20,65	174,5	5,2	179,7	49,6	60
10	1326	35	20,09	184,2	5,1	189,3	50,7	69
	1322	34,9	20,05	184,2	5,1		50,6	69
	1319	34,8	19,97	184,2	5,1		50,4	69
11,5	1222	37,1	19,77	189,5	5	194,5	51,3	72,5
	1230	37,3	19,83		5		51,3	72,6
	1229	37,3	19,79		5		51,3	72,7
13	1156	39,6	19,58	193	5	198	51,6	76,7
	1160	39,8	19,56	193	5		51,6	77,1
	1153	39,5	19,57	193	5		51,6	76,5
14	1098	40,5	19,48	195,5	4,9	200,4	52	78,2
	1104	40,7	19,46	195,5	4,9		51,9	78,5
	1097	40,5	19,42	195,5	4,9		51,8	78,2
15	1042	41,2	19,33	197	4,8	203,8	52	79,9
	1048	41,5	19,34	197	4,8		52,05	79,8
	1049	41,5	19,36	197	4,8		52,1	79,7
16	985	41,6	19,26	199	4,75	205,8	52,3	79,5
	986	41,6	19,16	199	4,8	203,8	52	80,2
	984	41,5	19,22	199	4,75	203,8	52,2	79,5
17	919	41,2	19	200,6	4,9	205,5	52	79,2
	923	41,4	19,01	200,6	4,9		52	79,6
	929	41,6	19,04	200,6	4,9		52,1	80
18,5	819	40	18,9	203,2	4,9	208,1	52,4	76,4
	819	40	18,88	203,5	4,9	208,4	52,4	76,4
	817	39,9	18,91	203,5	4,9	208,4	52,5	76
20	719	37,9	18,77	205,5	4,9	210,4	52,5	72,1
	725	38,2	18,82	205,5	4,9		52,8	72,3
	720	37,9	18,73	205,5	4,9		52,6	72
21,5	599	34	18,56	207	4,9	211,9	52,4	64,9
	604	34,3	18,62	207	4,9		52,6	65,2
	597	33,9	18,62	207	4,9		52,6	64,4
23,5	455	28,2	18,72	210	4,9	214,9	53,7	52,5
	447	27,7	18,72	210	4,9		53,7	51,5
	448	27,7	18,69	210	4,9		53,8	51,4
29,2	0	0	18,57	212,2	4,9	217,1	53,7	0
	0	0	18,57	212,2	4,9		53,7	
	0	0	18,57	212,2	4,9		53,7	

Zusammenfassung und Vergleich mit der Theorie

Beim Vergleich der vier gemessenen Räder miteinander sieht man, daß der beste Wirkungsgrad mit dem Laufrad mit 11 Schaufeln erreicht wird, $\eta_H = 94,3\%$, und zwar bei der Leitschaufelstellung $\beta = 90\%$. Bei kleineren Leitschaufelöffnungen nimmt der optimale Wirkungsgrad ab und verschiebt sich auf größere Schaufelzahlen. Berechnet man zum Vergleich für das auf S. 24 angenommene Rad theoretisch nach Gleichung (41) (S. 24) das Ver-

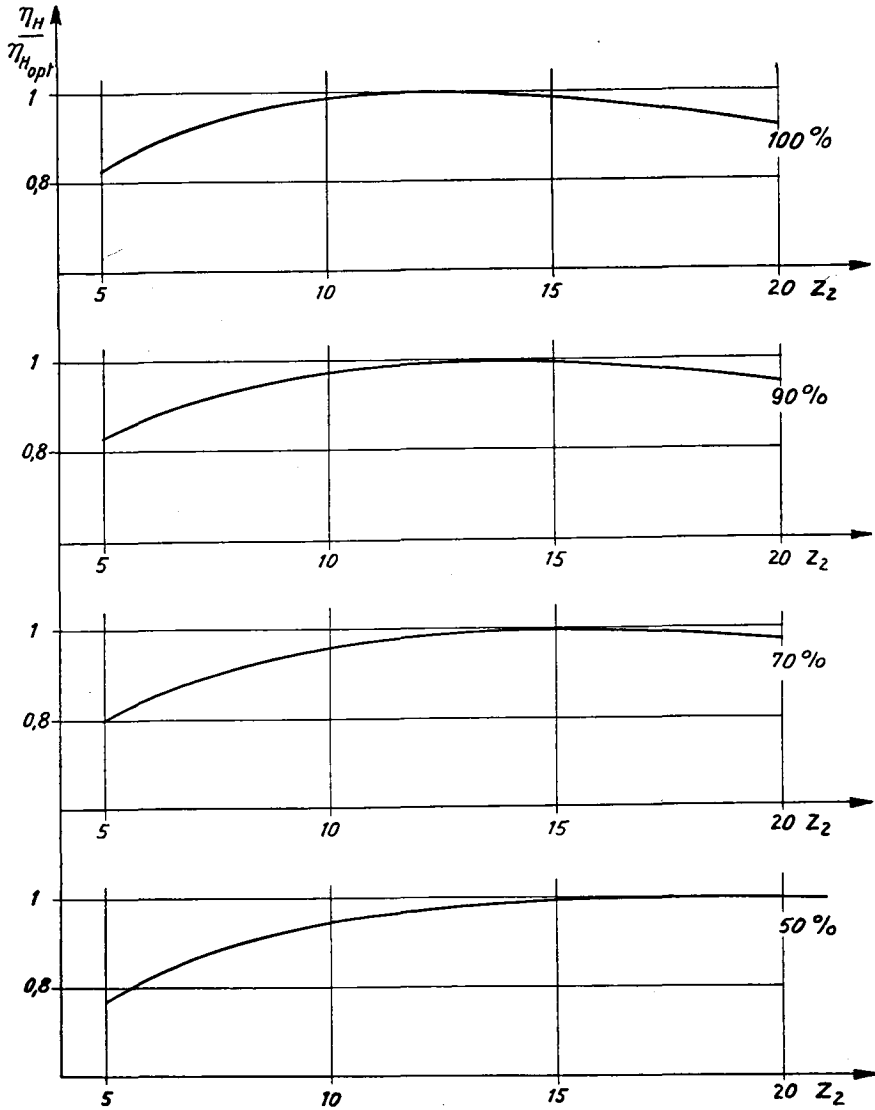


Abb. 53.

Verhältnis $\frac{\eta_H}{\eta_{Hopt}}$ in Funktion der Schaufelzahl bei konstantem Gefälle und für verschiedene Wassermengen (Abb. 53, S. 55), so sieht man, daß sich das Maximum der Kurven auch bei abnehmender Wassermenge auf größere Schaufelzahlen verschiebt.

Aus den Abb. 41—44, S. 46, können wir folgende Vergleichstabelle aufstellen:

Rad mit der Schaufelzahl z_2 :	7	11	15	19
Größte Leistung bei Drehzahl n_1 :	250	230	224	215

Daraus kann für jedes Rad mit dieser optimalen Drehzahl das n_s berechnet werden und man erhält:

Rad mit der Schaufelzahl z_2 :	7	11	15	19
n_s :	192	172	166	153

Aus der Vergleichstabelle ist ersichtlich, daß man bei sonst gleichen Bedingungen einzig durch Verminderung der Schaufelzahl z_2 schon eine größere Schnellläufigkeit erzielen kann. Wie unsere Messungen gezeigt haben, kann der beste Wirkungsgrad nur bei einer ganz bestimmten Schaufelzahl erreicht werden. Entfernt man sich von dieser, so hat man bei unveränderter Schaufelform eine Abnahme von η_H . In diesem Fall ist das Maximum bei 11 Schaufeln. Wie weit man durch Änderung der Schaufelform diese Abnahme kompensieren kann, ist wieder ein anderes Problem, das hier nicht untersucht werden soll.

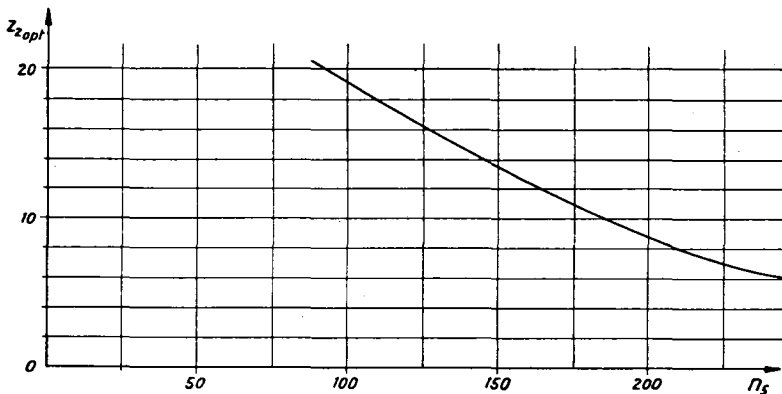


Abb. 54.

Man kann nun die Berechnungen auf S. 26 ergänzen und die günstigste Schaufelzahl z_{2opt} in Funktion von n_s als Kurve auftragen, Abb. 54. Aus dieser Kurve sieht man, wie z_{2opt} bei wachsendem n_s abnimmt. Abb. 54

kann noch nicht als definitives Ergebnis betrachtet werden, da die Kurve auf Grund der Annahmen auf S. 26 berechnet wurde, aber sie gibt das Verhalten der Funktion $z_{2,opt} = f(n_s)$ ungefähr an. Wenn wir die berechnete Kurve von Abb. 54 mit den Meßergebnissen der Räder vergleichen, so sehen wir, daß für den einzig möglichen Vergleichspunkt das Optimum von 11 Schaufeln und $n_s = 172$ auf der Kurve liegt. Diese Tatsache ist aber noch nicht ein genügender Beweis, daß man aus Abb. 54 für jedes n_s die günstigste Schaufelzahl ohne weiteres ablesen kann; zur Kontrolle der Kurve von Abb. 54 müßten Untersuchungen mit vielen Turbinen vorgenommen werden. Diese Kurve ist unter der Voraussetzung gleicher Schaufelform berechnet worden, läßt sich daher nicht für andere Turbinentypen verwenden.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß die günstigste Schaufelzahl in erster Linie von der Wassermenge Q , der Drehzahl n und vom Gefälle H (also von n_s) abhängt.

Die Frage, ob die Turbine oft bei Teillast laufen muß, spielt auch eine Rolle, da — wie man aus den Abb. 45—48, S. 47ff. sehen kann — bei dem Rad mit 15 Schaufeln sich der Wirkungsgrad am wenigsten mit der Leitschaufelöffnung ändert; während bei dem Rad mit 19 Schaufeln der beste Wirkungsgrad ganz deutlich bei Teillast liegt. Das stimmt auch mit den theoretisch berechneten Kurven auf Abb. 53, S. 55, überein.

Anhang

Nachrechnung der aus den Messungen erhaltenen Werte für das Drehmoment nach der Gleichung von E. Euler

Die allgemeine Gleichung von E. Euler für das Drehmoment ist:

$$M = \frac{\gamma \cdot Q_{La}}{g} (c_{u_1} \cdot R_1 - c_{u_2} \cdot R_2) \quad (\text{siehe Gl. 1, S. 8})$$

Q_{La} können wir aus den Messungen entnehmen¹⁾.

Im Raum zwischen Leitrad und Laufrad ist der Drall $c_u \cdot R$ konstant. Also ist

$$c_{u_1} \cdot R_1 = c_{u_0} \cdot R_0$$

R_0 kann man direkt an der Turbine messen, und

$$c_{u_0} = \sqrt{c_0^2 - c_{m_0}^2}$$

$$c_0 = \frac{Q_t}{F_0}$$

$$c_{m_0} = \frac{Q_t}{F_{m_0}}$$

Q_t kann ebenfalls aus den Messungen entnommen werden¹⁾

Mit diesen Werten ist das erste Glied der Eulerschen Gleichung bekannt.

Für die Berechnung des zweiten Gliedes der Eulerschen Gleichung, $c_{u_2} \cdot R_2$, muß man das Rad in Teilturbinen zerlegen, so daß durch jede Teilturbine gleich viel Wasser fließt (Abb. 55, S. 59). Für jede von diesen kann man c_{u_2} berechnen und R_2 messen.

Um nun c_{u_2} berechnen zu können, muß man die Austrittsdreiecke konstruieren. Der Austrittsradius jeder Teilturbine kann gemessen werden, und mit der Winkelgeschwindigkeit bekommt man die Umfangsgeschwindigkeit $u_2 = R_2 \cdot \omega$.

Die Relativgeschwindigkeit w_2 :

q ist die Wassermenge pro Teilturbine, also in diesem Falle $q = \frac{Q_{La}}{4}$

Δl_2 ist die Länge der Austrittskante einer Teilturbine

a_2 ist die lichte Weite der Teilturbine

$$w_2 = \frac{q}{z_2 \cdot \Delta l_2 \cdot a_2} \quad (46)$$

¹⁾ Diese symbolischen Werte sind unter Abschnitt „Bezeichnungen“, S. 39, erklärt.

$$K_{c_{u_1}} = \frac{c_{u_1}}{\sqrt{2gH}}; \quad K_{c_{u_2}} = \frac{c_{u_2}}{\sqrt{2gH}}$$

Für das Rad mit 7 Schaufeln wurde diese Berechnung nicht mehr durchgeführt, weil die Schaufeln schon so weit auseinander liegen, daß man es nicht mehr mit einer Strömung in Kanälen, sondern mit einzelnen Schaufeln im Wasser zu tun hat.

Laufrad:

Teilturbine	I $a_2 =$	II $a_2 =$	III $a_2 =$	IV $a_2 =$
$z_2 = 11$	14,8	18,1	21,9	23,9
$z_2 = 15$	10,3	12	14,9	16,2
$z_2 = 19$	7,1	8,8	11,3	12,4

$$\begin{aligned} \text{I} \quad \Delta l_2' &= 0,023 \text{ m} & R_2' &= 0,0643 \text{ m} & R_1' &= 0,1223 \\ \text{II} \quad \Delta l_2'' &= 0,0195 \text{ m} & R_2'' &= 0,0805 \text{ m} & R_1'' &= 0,1245 \\ \text{III} \quad \Delta l_2''' &= 0,0158 \text{ m} & R_2''' &= 0,097 \text{ m} & R_1''' &= 0,1267 \\ \text{IV} \quad \Delta l_2'''' &= 0,0143 \text{ m} & R_2'''' &= 0,112 \text{ m} & R_1'''' &= 0,1295 \end{aligned}$$

Laufschaufeldicke beim Austritt $\delta = 0,5 \text{ mm}$.

$$\begin{aligned} \text{Leitrad: } R_0 &= 0,1475 \text{ m} & 16 \text{ Leitschaufeln} \\ B_0 &= 0,05 \text{ m} & \text{Leitschaufeldicke beim Austritt } \delta = 3 \text{ mm} \\ F_0 &= 0,021 \text{ m}^2 \\ F_{m_0} &= 2 R_0 \cdot B_0 - 16 \cdot \delta \cdot B_0 = 0,044 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Mit obigen Werten berechnen wir nach der Eulerschen Gleichung das Drehmoment für die in den Messungen benützten Laufräder:

1. mit 11 Schaufeln
2. mit 15 Schaufeln
3. mit 19 Schaufeln

1. Berechnung für das Laufrad mit 11 Schaufeln (Messung Nr. 606):

$$\begin{aligned} Qt &= 0,2062 \text{ m}^3/\text{sec} & Q_{La} &= 0,1966 \text{ m}^3/\text{sec} \\ n &= 1034 \text{ T/min} & \omega &= 108,5 \text{ l/sec} \\ N_H &= 44,1 \text{ PS} & M_h &= 30,5 \text{ mkg} \end{aligned}$$

$$c_0 = \frac{0,2062}{0,021} = 9,82 \text{ m/sec}$$

$$c_{m_0} = \frac{0,2062}{0,044} = 4,68 \text{ m/sec}$$

$$c_{u_0} = \sqrt{96,5 - 22} = 8,62 \text{ m/sec}$$

$$R_0 \cdot c_{u_0} = 1,272$$

Eintrittsdreiecke:

$$\begin{aligned}
 c'_{u_1} &= 10,4 \text{ m/sec}, & c_1' &= 11,83 \text{ m/sec}, & u_1' &= 13,28 \text{ m/sec} \\
 c''_{u_1} &= 10,2 \text{ m/sec}, & c_1'' &= 11,63 \text{ m/sec}, & u_1'' &= 13,5 \text{ m/sec} \\
 c'''_{u_1} &= 10,05 \text{ m/sec}, & c_1''' &= 11,43 \text{ m/sec}, & u_1''' &= 13,73 \text{ m/sec} \\
 c''''_{u_1} &= 9,82 \text{ m/sec}, & c_1'''' &= 11,18 \text{ m/sec}, & u_1'''' &= 14,05 \text{ m/sec}
 \end{aligned}$$

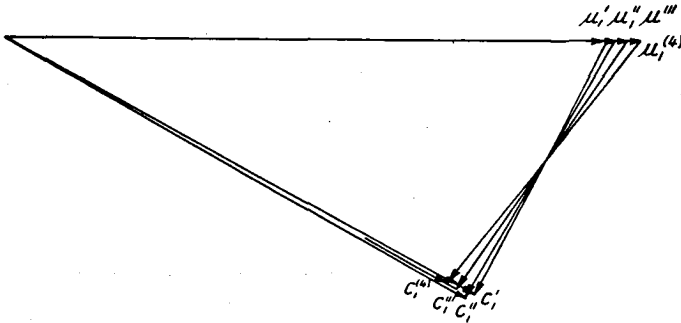


Abb. 56. Eintrittsdreiecke. Rad mit 11 Schaufeln. $\beta = 100\%$. Messung Nr. 606.

Austritt: $q = \frac{Q_{La}}{4} = 0,0491 \text{ m}^3/\text{sec}$

$w_2' = 13,1 \text{ m/sec}$ (w_2 aus Gleichung 47)

$w_2'' = 12,7 \text{ m/sec}$

$w_2''' = 12,9 \text{ m/sec}$

$w_2'''' = 13,05 \text{ m/sec}$

$c'_{m_2} = 5,37 \text{ m/sec}$ (c_{m_2} aus Gleichung 48)

$c''_{m_2} = 5,04 \text{ m/sec}$

$c'''_{m_2} = 5,14 \text{ m/sec}$

$c''''_{m_2} = 4,93 \text{ m/sec}$

$u_2' = 6,96 \text{ m/sec}; \quad u_2'' = 8,74 \text{ m/sec}$

$u_2''' = 10,52 \text{ m/sec}; \quad u_2'''' = 12,13 \text{ m/sec}$

$c'_{u_2} = -5 \text{ m/sec}; \quad c'_{u_2} \cdot R_2' = -0,321 \text{ m}^2/\text{sec}$

$c''_{u_2} = -2,9 \text{ m/sec}; \quad c''_{u_2} \cdot R_2'' = -0,234 \text{ m}^2/\text{sec}$

$c'''_{u_2} = -1,3 \text{ m/sec}; \quad c'''_{u_2} \cdot R_2''' = -0,126 \text{ m}^2/\text{sec}$

$c''''_{u_2} = +0,1 \text{ m/sec}; \quad c''''_{u_2} \cdot R_2'''' = +0,011 \text{ m}^2/\text{sec}$

$$M_h = \frac{\gamma \cdot q}{g} \cdot (c_{u_1} \cdot R_1 - c_{u_2} \cdot R_2)$$

$$M'_h = 8 \text{ mkg}$$

$$M''_h = 7,55 \text{ mkg}$$

$$M'''_h = 7,02 \text{ mkg}$$

$$M''''_h = \underline{6,33 \text{ mkg}} \qquad \underline{28,90 \text{ mkg}}$$

nach der Euler'schen Gleichung

$$M_h = \Sigma (M_h) = 28,9 \text{ mkg}$$

nach unseren Messungen

$$M_h = 30,5 \text{ mkg}$$

Differenz ohne Berücksichtigung der auf S. 59
erwähnten notwendigen Korrekturen

$$M_h = -1,6 \text{ mkg}$$

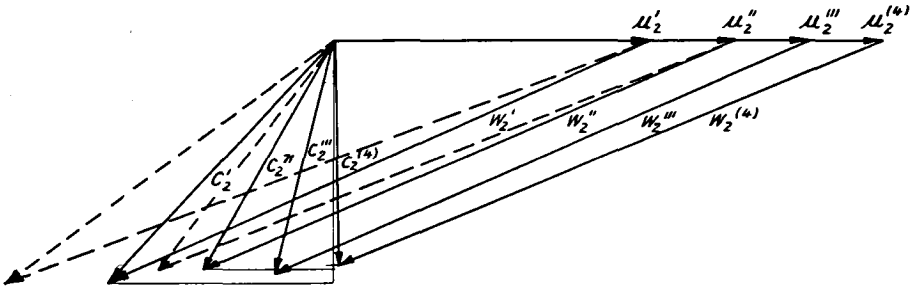


Abb. 57. Austrittsdreiecke. Rad mit 11 Schaufeln. $\beta = 100\%$. Messung Nr. 606. Die gestrichelten Dreiecke wurden mit den korrigierten lichten Weiten konstruiert.

Um eine genauere Berechnung für das Laufrad mit 11 Schaufeln durchführen zu können, müssen wir die Korrektur der lichten Weite vornehmen²⁾. Wir konstruieren die Kegelschnitte der ersten und zweiten Teilturbine (siehe S. 63, Abb. 58—60).

Erste Teilturbine: $t_2' = 37 \text{ mm}$

Zweite Teilturbine: $t_2'' = 46 \text{ mm}$

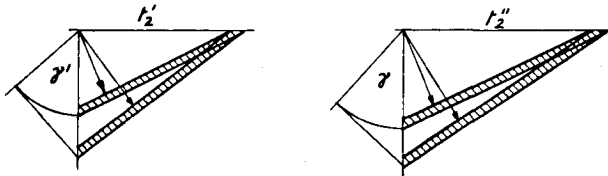


Abb. 58. Konstruktion der lichten Weite a_2 .

²⁾ Siehe S. 59.

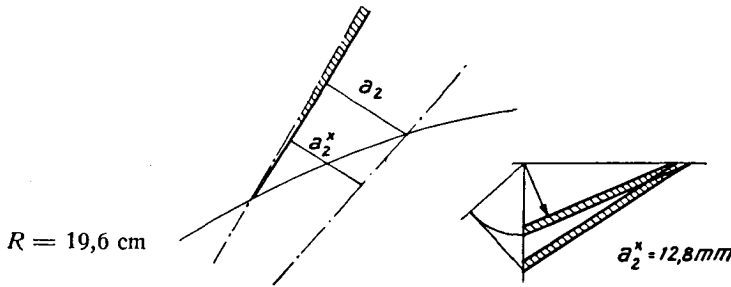


Abb. 59. Kegelschnitt der ersten Teilturbine.

$R = 83,8 \text{ cm} \quad \zeta = 3^\circ 30'$

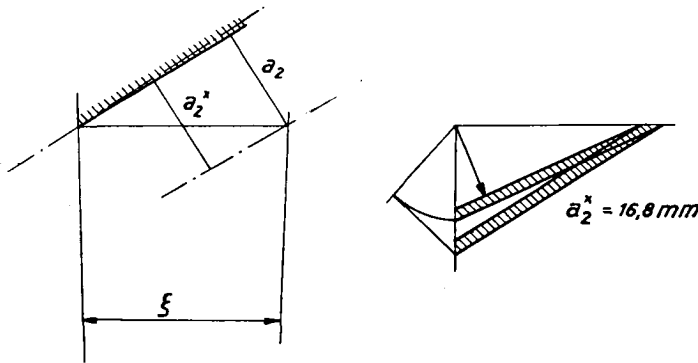


Abb. 60. Kegelschnitt der zweiten Teilturbine.

Mit den aus den Kegelschnitten erhaltenen Werten der lichten Weiten wiederholen wir die Berechnung des Drehmomentes:

$w'_2 = 15,2 \text{ m/sec};$	$w''_2 = 13,6 \text{ m/sec}$
$c'_{u_2} = -7,25 \text{ m/sec};$	$c''_{u_2} = -3,83 \text{ m/sec}$
$c'_{u_2} \cdot R'_2 = -0,466 \text{ m}^2/\text{sec};$	$c''_{u_2} \cdot R''_2 = -0,306 \text{ m}^2/\text{sec}$
$M'_h = 8,73 \text{ mkg};$	$M''_h = 7,92 \text{ mkg}$

nach der Euler'schen Gleichung
nach unseren Messungen

$M_h = \Sigma (M_h) = 29,99 \text{ mkg}$
$M_h = 30,5 \text{ mkg}$

Differenz unter Berücksichtigung
der Korrektur der lichten Weiten

$- 0,51 \text{ mkg}$

Die Differenz hat sich von 1,6 mkg auf 0,51 mkg vermindert und beweist so die Notwendigkeit der Korrektur der lichten Weiten.

Es folgt nach Gleichung (49) die

Berechnung des Gefällswirkungsgrades η_H :

$H = 18,41 \text{ m};$	$\sqrt{2gH} = 19 \text{ m/sec}$	
$\eta'_H = 1,046;$	$\eta''_H = 0,99$	
$\eta'''_H = 0,852;$	$\eta''''_H = 0,76$	total 3,658

nach der Euler'schen Gleichung	$\eta_H = \frac{\sum r_i^{(n)}}{n} = 0,912$
nach unseren Messungen	$\eta_H = 0,911$

2. Berechnung für das Laufrad mit 15 Schaufeln (Messung Nr. 252):

$Q_t = 0,2105 \text{ m}^3/\text{sec}$	$Q_{La} = 0,1994 \text{ m}^3/\text{sec}$
$n = 1059 \text{ T/min}$	$\omega = 111 \text{ l/sec}$
$N_H = 46,7 \text{ PS}$	$M_h = 31,6 \text{ mkg}$

$$c_0 = \frac{0,2105}{0,021} = 10 \text{ m/sec}$$

$$c_{m_0} = \frac{0,2105}{0,044} = 4,77 \text{ m/sec}$$

$$c_{u_0} = \sqrt{100 - 22,8} = 8,79 \text{ m/sec}$$

$$R_0 \cdot c_{u_0} = 1,295 \text{ m}^2/\text{sec}$$

Eintrittsdreiecke:

$c'_{u_1} = 10,6 \text{ m/sec}$	$c'_1 = 12,05 \text{ m/sec}$	$u'_1 = 13,58 \text{ m/sec}$
$c''_{u_1} = 10,4 \text{ m/sec}$	$c''_1 = 11,85 \text{ m/sec}$	$u''_1 = 13,8 \text{ m/sec}$
$c'''_{u_1} = 10,22 \text{ m/sec}$	$c'''_1 = 11,63 \text{ m/sec}$	$u'''_1 = 14,05 \text{ m/sec}$
$c''''_{u_1} = 10 \text{ m/sec}$	$c''''_1 = 11,4 \text{ m/sec}$	$u''''_1 = 14,37 \text{ m/sec}$

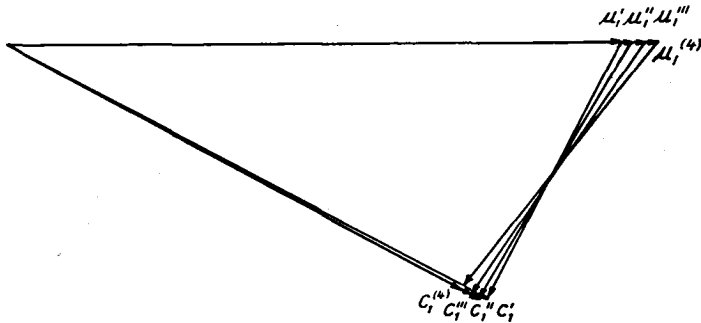


Abb. 61. Eintrittsdreiecke. Rad mit 15 Schaufeln. $\beta = 100\%$. Messung Nr. 252.

Austritt: $q = \frac{Q_{La}}{4} = 0,0499 \text{ m}^3/\text{sec}$

w_2 aus Gleichung (47)

$$w_2' = 14 \text{ m/sec}; \quad w_2'' = 14,2 \text{ m/sec}$$

$$w_2''' = 14,1 \text{ m/sec}; \quad w_2'''' = 14,3 \text{ m/sec}$$

c_m aus Gleichung (48)

$$c'_{m_2} = 5,48 \text{ m/sec}; \quad c''_{m_2} = 5,14 \text{ m/sec}$$

$$c'''_{m_2} = 5,24 \text{ m/sec}; \quad c''''_{m_2} = 5 \text{ m/sec}$$

$$u_2' = 7,13 \text{ m/sec}; \quad u_2'' = 8,95 \text{ m/sec}$$

$$u_2''' = 10,78 \text{ m/sec}; \quad u_2'''' = 12,43 \text{ m/sec}$$

$$c'_{u_2} = -5,75 \text{ m/sec}; \quad c'_{u_2} \cdot R_2' = -0,37 \text{ m}^2/\text{sec}$$

$$c''_{u_2} = -4,25 \text{ m/sec}; \quad c''_{u_2} \cdot R_2'' = -0,342 \text{ m}^2/\text{sec}$$

$$c'''_{u_2} = -2,27 \text{ m/sec}; \quad c'''_{u_2} \cdot R_2''' = -0,22 \text{ m}^2/\text{sec}$$

$$c''''_{u_2} = -0,95 \text{ m/sec}; \quad c''''_{u_2} \cdot R_2'''' = -0,106 \text{ m}^2/\text{sec}$$

$$M_h = \frac{\gamma q}{g} (c_{u_1} \cdot R_1 - c_{u_2} \cdot R_2)$$

$$M'_h = 8,46 \text{ mkg}; \quad M''_h = 8,32 \text{ mkg}$$

$$M'''_h = 7,7 \text{ mkg}; \quad M''''_h = 7,12 \text{ mkg}$$

total 31,60 mkg

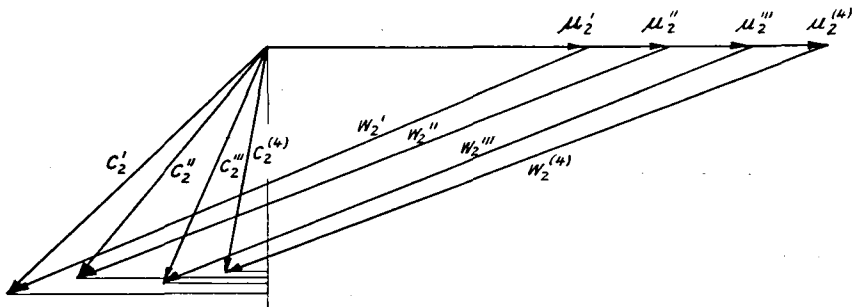


Abb. 62. Austrittsdreiecke. Rad mit 15 Schaufeln. $\beta = 100\%$. Messung Nr. 252.

nach der Euler'schen Gleichung $M_h = 31,6 \text{ mkg}$

nach unseren Messungen $M_h = 31,6 \text{ mkg}$

Berechnung des Gefällswirkungsgrades η_H :
(siehe Gleichung (49))

$$H = 19,24 \text{ m}; \quad \sqrt{2gH} = 19,4 \text{ m/sec}$$

$$\eta'_H = 0,98; \quad \eta''_H = 0,966$$

$$\eta'''_H = 0,894; \quad \eta''''_H = 0,826 \quad \text{total } 3,666$$

nach der Euler'schen Gleichung $\eta_H = 0,916$

nach unseren Messungen $\eta_H = 0,915$

3. Berechnung für das Laufrad mit 19 Schaufeln (Messung Nr. 349):

$$\begin{aligned} Q_t &= 0,2038 \text{ m}^3/\text{sec} & Q_{La} &= 0,192 \text{ m}^3/\text{sec} \\ n &= 985 \text{ T/min} & \omega &= 103,2 \text{ l/sec} \\ N_h &= 43,3 \text{ PS} & M_h &= 31,4 \text{ mkg} \end{aligned}$$

$$c_0 = \frac{0,2038}{0,021} = 9,71 \text{ m/sec}$$

$$c_{m_0} = \frac{0,2038}{0,044} = 4,64 \text{ m/sec}$$

$$c_{u_0} = \sqrt{94,5 - 21,5} = 8,54 \text{ m/sec}$$

$$c_{u_0} \cdot R_0 = 1,26 \text{ m}^2/\text{sec}$$

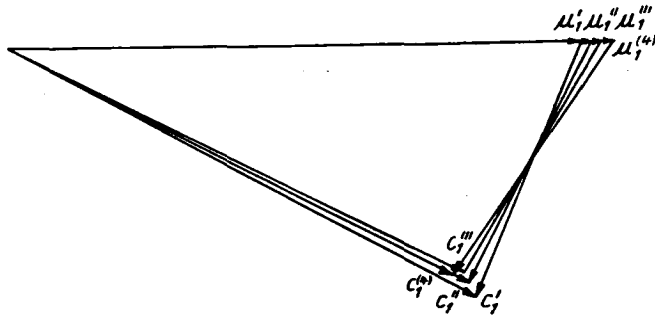


Abb. 65. Eintrittsdreiecke. Rad mit 19 Schaufeln. $\beta = 100\%$. Messung Nr. 349.

Eintrittsdreiecke:

$$\begin{aligned} c'_{u_1} &= 10,28 \text{ m/sec}; & c_1' &= 11,7 \text{ m/sec}; & u_1' &= 12,63 \text{ m/sec} \\ c''_{u_1} &= 10,12 \text{ m/sec}; & c_1'' &= 11,42 \text{ m/sec}; & u_1'' &= 12,85 \text{ m/sec} \\ c'''_{u_1} &= 9,95 \text{ m/sec}; & c_1''' &= 11,23 \text{ m/sec}; & u_1''' &= 13,07 \text{ m/sec} \\ c''''_{u_1} &= 9,73 \text{ m/sec}; & c_1'''' &= 11 \text{ m/sec}; & u_1'''' &= 13,37 \text{ m/sec} \end{aligned}$$

Austritt: $q = \frac{Q_{La}}{4} = 0,048 \text{ m}^3/\text{sec}$

w_2 aus Gleichung (47)

$$w_2' = 15,45 \text{ m/sec}; \quad w_2'' = 14,8 \text{ m/sec}$$

$$w_2''' = 14,15 \text{ m/sec}; \quad w_2'''' = 14,2 \text{ m/sec}$$

c_{m_2} aus Gleichung (48)

$$c'_{m_2} = 5,29 \text{ m/sec}; \quad c''_{m_2} = 4,96 \text{ m/sec}$$

$$c'''_{m_2} = 5,06 \text{ m/sec}; \quad c''''_{m_2} = 4,85 \text{ m/sec}$$

$$u_2' = 6,64 \text{ m/sec}; \quad u_2'' = 8,31 \text{ m/sec}$$

$$u_2''' = 10,1 \text{ m/sec}; \quad u_2'''' = 11,57 \text{ m/sec}$$

$$c'_{u_2} = -7,85 \text{ m/sec}; \quad c'_{u_2} \cdot R_2' = -0,505 \text{ m}^2/\text{sec}$$

$$c''_{u_2} = -5,62 \text{ m/sec}; \quad c''_{u_2} \cdot R_2'' = -0,452 \text{ m}^2/\text{sec}$$

$$c'''_{u_2} = -3,12 \text{ m/sec}; \quad c'''_{u_2} \cdot R_2''' = -0,303 \text{ m}^2/\text{sec}$$

$$c''''_{u_2} = -1,78 \text{ m/sec}; \quad c''''_{u_2} \cdot R_2'''' = -0,200 \text{ m}^2/\text{sec}$$

$$M_h = \frac{\gamma q}{g} (c_{u_1} \cdot R_1 - c_{u_2} \cdot R_2)$$

$$M'_h = 8,64 \text{ mkg}; \quad M''_h = 8,38 \text{ mkg} \quad \text{total } 31,80 \text{ mkg}$$

$$M'''_h = 7,64 \text{ mkg}; \quad M''''_h = 7,14 \text{ mkg}$$

nach der Euler'schen Gleichung $M_h = 31,8 \text{ mkg}$

nach unseren Messungen $M_h = 31,4 \text{ mkg}$

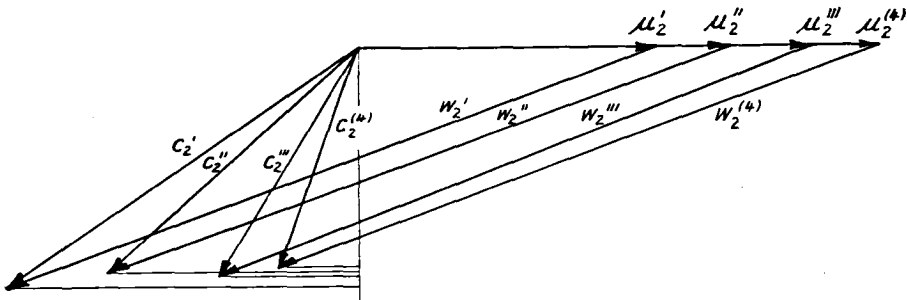


Abb. 66. Austrittsdreiecke. Rad mit 19 Schaufeln. $\beta = 100\%$. Messung Nr. 349.

Berechnung des Gefällswirkungsgrades η_H :

$$H = 19,21 \text{ m}; \quad \sqrt{2gH} = 19,37 \text{ m/sec}$$

$$\eta'_H = 0,97; \quad \eta''_H = 0,954 \quad \text{total } 3,590$$

$$\eta'''_H = 0,86; \quad \eta''''_H = 0,806$$

nach der Euler'schen Gleichung $\eta_H = 0,897$

nach unseren Messungen $\eta_H = 0,881$

Vergleichstabelle:

Laufrad mit:	Euler'sche Gleichung	unsere Messung
11 Schaufeln: Drehmoment Wirkungsgrad	29,99 mkg 0,912	30,5 mkg 0,911
15 Schaufeln: Drehmoment Wirkungsgrad	31,6 mkg 0,916	31,6 mkg 0,915
19 Schaufeln: Drehmoment Wirkungsgrad	31,8 mkg 0,897	31,4 mkg 0,881

Die Berechnungen der Laufräder mit 11, 15 und 19 Schaufeln weisen ebensowohl für das Drehmoment, als auch für den Gefällswirkungsgrad eine sehr gute Übereinstimmung der von uns gemessenen Werte mit den nach der Eulerschen Gleichung erhaltenen Werten auf.

Daraus bestätigt sich, daß aus der Eulerschen Gleichung mit sehr guter Annäherung die Leistung einer Turbine vorausberechnet werden kann.

Literaturverzeichnis

- Bauer, W.:* „Kräftemessung an einem Kreisgitter aus zylindrischen Schaufeln bei radialer Zuströmung“. Mitt. d. Inst. f. Strömungsmaschinen d. Techn. Hochschule Karlsruhe, Heft I, S. 84, 1930.
- Barth, W.:* „Verdrängungsströmung bei Rotation zylindrischer Schaufeln in einer Flüssigkeit mit freier Oberfläche“. Mitt. d. Inst. f. Strömungsmaschinen d. Techn. Hochschule Karlsruhe, Heft I, 1930.
- Braun, W.:* „Zur Gittertheorie der Propeller-Räder“. Escher-Wyss Mitt. 1932, Mai/Juni.
- Dziallas, R.:* „Untersuchung einer Radialturbine“. Dissertation an d. Techn. Hochschule Hannover, 1935.
- Frietsch, E.:* „Wirbelbildung und Kräftewirkung an umlaufenden Kreiselradschaufeln“. VDI Forschungsheft 384 TH: 42060/384.
- Hahn, K.:* „Die Untersuchung der Strömung durch eine Flügelradturbine bei wechselnden Schaufelzahlen“. Mitt. d. Inst. f. Strömungsmaschinen d. Techn. Hochschule Karlsruhe, Heft IV, S. 1, 1939.
- Hansen, O.:* „Untersuchungen über den Einfluß des endlichen Schaufelabstandes in radialen Kreiselrädern“. Verlag Konrad Triltsch, Würzburg, 1937.
- Kucharski, W.:* „Eine Integralgleichung für den rotierenden Schaufelstern und ihre Lösung“. Zeitschr. f. angew. Mathematik und Mechanik, Band 21, Heft 2, April 1941.
- Pfleiderer, W.:* „Die endliche Schaufelzahl und das unmögliche Betriebsgebiet bei Kreiselradmaschinen“. Hydraulische Probleme, VDI Verlag, 1926.
- Rütschi, K.:* „Über die Gestaltung stabiler Drosselkurven bei Kreiselpumpen“. Schweizer Archiv, Heft 8, August 1941.
- Spannhake, W.:* „Eine strömungstechnische Aufgabe der Kreiselradforschung und ein Ansatz zu ihrer Lösung“. Mitt. d. Inst. f. Strömungsmaschinen d. Techn. Hochschule Karlsruhe, Heft I, S. 4, 1930.
- Walter, E.:* „Die Messung der Drücke auf dem Laufrad einer Flügelradturbine bei verschiedenen Schaufelzahlen“. Mitt. d. Inst. f. Strömungsmaschinen d. Techn. Hochschule Karlsruhe, Heft IV, S. 41, 1939.

Lebenslauf

Ich Mohamed Izzedin Hassan, Bürger von Kairo, Aegypten, wurde am 21. Januar 1914 in Kairo geboren als Sohn des Prinzen Mohamed Ali Hassan und der Aicha Aziza geborene Izzet Pacha.

Bis 1931 hatte ich Privatunterricht. Vom September 1931 bis 1933 war ich im Maturitäts-Vorbereitungs-Institut von Professor Dr. S. Tschulok in Zürich. Im Herbst 1933 machte ich die Aufnahmeprüfung der Eidgenössischen Technischen Hochschule. Ich studierte an der Abteilung für Maschineningenieurwesen und bestand dort im Herbst 1935 die erste, im Herbst 1937 die zweite Vordiplomprüfung und im Herbst 1939 die Schlußdiplomprüfung.