

**INFORMATIONSDICHTUNG VON MODELLEN IN
DER AUSSAGENLOGIK UND DAS P – NP – PROBLEM**

ABHANDLUNG

zur Erlangung

des Titels eines Doktors der Mathematik

der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von

KARL LIEBERHERR

dipl. Math. ETH

geboren am 27. August 1948

von Nesslau/SG

angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. E. Engeler, Referent
Prof. Dr. E. Specker, Korreferent

1977

Abstract:

The thesis deals with the problem of deciding, whether a given formula of the propositional calculus is satisfiable. In the first part a deduction rule, called Superresolution, is introduced and compared with known proof-systems and decision procedures. In the second part probabilistic algorithms for NP-complete languages are investigated.

Keywords:

Superresolution, decision procedures for Satisfiability, polynomial reduction of proof-systems, length of proofs, lower bounds, probabilistic algorithms for NP-complete languages.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die Komplexitaet des Entscheidens, ob eine konjunktive Normalform (KNF) der Aussagenlogik erfuellbar ist, analysiert. Dieses Entscheidungsproblem hat eine zentrale Stellung in einer grossen Klasse von kombinatorischen Entscheidungs- resp. Optimierungsproblemen.

Die bisher untersuchten Beweissysteme fuer die unerfuellbaren KNF haben lokalen Charakter. In der Arbeit wird ein Beweissystem Superresolution eingefuehrt, das als global bezeichnet werden darf, d.h. ein Schluss kann von der ganzen bisherigen Formel abhaengen. Superresolution wird verglichen mit einem auf dem Gebiete des automatischen Beweisens haeufig verwendeten Beweissystem, naemlich mit Resolution und deren Abarten. Weil Resolution lokal ist, so ist es einleuchtend, dass eine globale Schlussregel wie Superresolution kuerzere Beweise erlaubt als Resolution. Dies wird in der Arbeit auch bewiesen. Dafuer ist der Aufwand fuer das Finden, resp. Ueberpruefen eines Beweisschrittes groesser als bei Resolution. Beide Aufgaben sind jedoch linear loesbar. Superresolution ist eine grosse Einschraenkung von Resolution, denn keine Input-Resolvente kann eine Superresolvente sein. Deshalb hat Superresolution gegenueber Resolution wesentliche Vorzuege, die in der Arbeit untersucht werden.

Um die Komplexitaet von Superresolution zu analysieren, fuehrt man einen Entscheidungsalgorithmus SR fuer KNF ein, der nur Superresolutionsbeweise in einer kurzen Normalform erzeugen kann. Es stellt sich dabei heraus, dass Superresolution und Resolution polynomial aequivalent sind. Ausserdem wird fuer eine spezielle Art von Superresolution eine exponentielle untere Schranke bewiesen. Neben anderen Vorzuegen hat SR die Tendenz, "einfache" Formeln effizient zu behandeln.

Im zweiten Teil der Arbeit werden probabilistische Entscheidungsalgorithmen fuer NP-vollstaendige Sprachen untersucht. Probabilistische Algorithmen sind keine Algorithmen im eigentlichen Sinn, denn sie verwenden bei ihren Berechnungen Zufallsprozesse und koennen deshalb falsche Entscheide liefern. Wenn die Fehlerwahrscheinlichkeit aber mit relativ wenig Rechenaufwand gegenueber den bekannten deterministischen Verfahren beliebig klein gemacht werden kann, sind probabilistische Algorithmen fuer praktische Anwendungen sehr interessant.

In der Arbeit wird der Begriff "Erfuelltheitsgrad" fuer KNF eingefuehrt und auf NP-vollstaendige Sprachen erweitert. Die Komplexitaet von probabilistischen Algorithmen fuer eine Sprache S haengt direkt mit dem Erfuelltheitsgrad von S zusammen. Die Relation wird durch eine Formel beschrieben, die ausdrueckt: Je groesser der Erfuelltheitsgrad ist, desto effi-

zientere Algorithmen resultieren. Deshalb wird in der Arbeit versucht, den Erfuelltheitsgrad moeglichst gross zu machen. Es wird behauptet und durch verschiedene Ueberlegungen und Hilfs-saetze begruendet, dass dies mit wenig Aufwand moeglich ist, beim Versuch, es zu beweisen, stoesst man aber auf erhebliche Schwierigkeiten.