VERALLGEMEINERUNGEN DES HERBRAND'SCHEN SATZES UND ANWENDUNGEN IM GEBIET DER ENTSCHEIDBARKEIT VON FORMELKLASSEN

A B H A N D L U N G

zur Erlangung

des Titels eines Doktors der Mathematik
der

E I D G E N O E S S I S C H E N T E C H N I S C H E N

H O C H S C H U L E Z U E R I C H

vorgelegt von

FRANÇOIS MARC BARRO
Dipl. Math. ETH Zürich
geboren am 13. September 1946
von Zürich und Carouge GE

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. E. Specker, Referent
Prof. Dr. H. Läuchli, Korreferent

1977

Zusammenfassung

Laut Herbrand gilt, dass für jede quantorenfreie Formel $G(x_1,\ldots,x_n)$ des Prädikatenkalküls $(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)G(x_1,\ldots,x_n)$ genau dann unerfüllbar ist, wenn es Terme t_j^i, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, gibt, für welche $\bigwedge_{1\leq i\leq m} G(t_1^i,\ldots,t_n^i)$ unerfüllbar ist.

Hingegegen braucht bei pränexer Formel ϕ mit Matrix $G(x_1,\ldots,x_n)$ die Existenz von Termen t_j^i mit unerfüllbarem $\bigwedge_{1\leq i\leq m} G(t_1^i,\ldots,t_n^i)$ noch nicht die Nichterfüllbarkeit von ϕ nach sich zu ziehen. Letzteres gilt erst, wenn die Folge $(t_j^i)_j$ bezüglich ϕ korrekt gebildet ist (sie heisst dann ϕ-zulässig). Das Kriterium der ϕ-Zulässigkeit arbeitet allein mit dem Präfix von ϕ.

Sei ϕ pränex mit Matrix $G(x_1,\ldots,x_n)$, sei P eine Menge von Term-n-Tupeln

Definiert man

$\phi_{II}(P) \;:\Leftrightarrow$ P lässt sich zu einer ϕ-zulässigen Folge ordnen

$\phi_{III}(P) :\Leftrightarrow \{G(t_1,\ldots,t_n)/(t_1,\ldots,t_n) \in P\}$ erfüllbar,

dann gilt der Satz:

ϕ erfüllbar $\Leftrightarrow$ Für alle P mit $\phi_{II}(P)$ gilt auch $\phi_{III}(P)$.

Nebst Uebertragung dieses Satzes auf pränexe präd. log. Formeln unendlicher Länge verallgemeinere ich das Kriterium der ϕ-Zulässigkeit zu einem Kriterium der Zulässigkeit einer Folge von aussagenlogischen Formeln bezüglich einer endlichen Menge von Regeln, der sog. Grossklauselquelle.

Grossklauseln stellen aussagenlogische Formeln in konjunktiver Normalform dar. Die Regeln der Grossklauselquellen bestehen aus einer endlichen oder leeren Menge Grossklauseln als Voraussetzung und einer Grossklausel als Folgerung. $\mathfrak{G}$-Zulässigkeit einer Folge heisst, dass jedes Glied der Folge aus den Vorhergehenden mit Hilfe einer Regel der Grossklauselquelle $\mathfrak{G}$ hergeleitet worden ist. Diese Herleitung besteht in der Fortsetzung einer Grossklauselmenge von demselben Aufbau, denselben Primformelgleichheiten und derselben Mächtigkeit wie die Regelvoraussetzung um eine wie die Regelfolgerung aufgebaute Grossklausel unter Erhaltung der zwischen Regelvoraussetzung und -folgerung bestehenden Primformelgleichheiten.

Eine Grossklauselquelle heisse erfüllbar, wenn aus ihr keine unerfüllbare Grossklauselmenge hergeleitet werden kann. Es sei P eine Menge von Grossklauseln. Es gelte $\mathfrak{G}_{II}(P)$ genau wenn P zu einer $\mathfrak{G}$-zulässigen Folge geordnet werden kann und $\mathfrak{G}_{III}(P)$ genau wenn P erfüllbar ist. Dann gilt auch hier der Satz:

$\mathfrak{G}$ erfüllbar <=> Für jedes P mit $\mathfrak{G}_{II}(P)$ gilt auch $\mathfrak{G}_{III}(P)$

Bezüglich Entscheidbarkeit (bzgl. Erfüllbarkeit) von Mengen von Grossklauselquellen liegen folgende Resultate vor:

Die Menge aller Grossklauselquellen ist unentscheidbar.

Mit der Definition

$V_n(\mathfrak{G})$: <=> Keine Voraussetzung der Grossklauselquelle $\mathfrak{G}$ hat mehr als n Elemente gilt ferner:

Die Mengen der Grossklauselquellen $\mathfrak{G}$ mit $V_1(\mathfrak{G})$ ist entscheidbar.

Die Menge der Grossklauselquellen $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}' \cup \{r\}$, $V_1(\mathfrak{G}')$, $V_2(\{r\})$ ist unentscheidbar.

Als Anwendung beweise ich die Entscheidbarkeit gewisser (als entscheidbar bekannter) Formelklassen des engeren Prädikatenkalküls.

Schliesslich zeige ich die Entscheidbarkeit der Teilklassen der Präfixklassen $\forall x \exists u \forall y$ (des engeren Prädikatenkalküls) mit folgenden Eigenschaften:

(1) alle Präd.zeichen sind zweistellig, die Matrix ist Konjunktion von Teilen, die entweder keine Primformeln $P(x,y)$, $Q(y,x)$ oder keine Primformeln $P(u,y)$, $Q(y,u)$ enthalten.

(2) alle Präd.zeichen sind zweistellig, hinter jedem Präd.zeichen stehen höchstens die Var.Komb. (x,y), (y,x) oder (u,y), (y,u).

Abstract

By Herbrand a universal prenex formula ϕ (of the predicate calculus) with Matrix $G(x_1,\ldots,x_n)$ is not satisfiable iff there are terms t_j^i, $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$, such that $\bigwedge_{1\leq i\leq m} G(t_1^i,\ldots,t_n^i)$ is not satisfiable.

If ϕ is prenex but not universal, the existence of terms t_j^i such that $\bigwedge_{1\leq i\leq m} G(t_1^i,\ldots,t_n^i)$ is not satisfiable implies that ϕ is not satisfiable only if the sequence $(t_j^i)_j$ is well formed relative to ϕ (call then the sequence ϕ-admissible)

Let P be a set of n-Tupels of terms, ϕ prenex with matrix $G(x_1,..,x_n)$. Define:

$\phi_{II}(P)$: <=> P is orderable with that the sequence is ϕ-admissible
$\phi_{III}(P)$: <=> $\{G(t_1,\ldots,t_n)/(t_1,\ldots,t_n)\varepsilon P\}$ is satisfiable.

Then the theorem 1

ϕ satisfiable <=> $(\forall P)(\phi_{II}(P) \Rightarrow \phi_{III}(P))$ holds.

This theorem can be generalised to prenex formulas of infinite length.

ϕ-admissibility is then generalised to $\mathfrak{G}$ -admissibility of sequences of propositional formulas relative to a finite set $\mathfrak{G}$ of rules (call this set a source of clauses).

For sources of clauses a theorem holds which is similar to theorem 1.

Results in decidability of sets of sources of clauses help to resolve uniformly some problems in decidability of classes of formulas.