

Diss ETH 6485

UEBER DEN RESTTERM EINER HYPERBOLISCHEN
GITTERPUNKTFUNKTION

Abhandlung zur Erlangung
des Titels eines Doktors der Mathematik
der
Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich

vorgelegt von

Peter Thurnheer

Dipl. Math. ETH Zürich

geboren am 7. März 1946

von Zürich

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. K.Chandrasekharan, Referent

Prof. Dr. A. Pfluger, Korreferent

1979

I. Zusammenfassung.

Sei H der dreidimensionale hyperbolische Raum, Λ eine nicht notwendigerweise fixpunktfreie Bewegungsgruppe von H mit kompaktem Fundamentalbereich. Sei Λ diskontinuierlich in dem Sinne, dass das hyperbolische Gitter $\{Tp|T \text{ aus } \Lambda\}$ keine endlichen Häufungspunkte hat für alle Punkte p aus H . Bezeichnet $\rho(p,q)$ den hyperbolischen Abstand von p aus H , q aus H , so definiert man:

$$N^k(\Lambda, p, x) := \sum_{\substack{T \in \Lambda \\ \rho(Tp, p) \leq x}} \{x - \rho(Tp, p)\}^k, \quad k \geq 0, \quad p \text{ aus } H.$$

Für $N^k(\Lambda, p, x)$, $k \geq 0$, werden verschiedene Beziehungen bewiesen, die Auskunft geben über das Verhalten dieser Funktionen, wenn x gegen ∞ geht, und welche den Resultaten entsprechen, die man für die analog definierten euklidischen Gitterpunktfunctionen kennt. Die Funktion $N^0(\Lambda, p, x)$ zählt die Punkte des erwähnten Gitters - mit ihrer Vielfachheit - im Innern und auf der hyperbolischen Kugel vom Radius x um p . Sie wurde - in zwei Dimensionen - erstmals untersucht von H. Huber, der dabei gezeigt hat, dass ihr Verhalten eng zusammenhängt mit dem Laplace-Beltrami-Eigenwertproblem auf H/Λ .

Sei $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, $\lambda_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, die Spektralfolge des Laplace-Beltrami-Operators Δ auf H/Λ , $\{\phi_j | j=0, 1, \dots\}$ ein orthonormiertes System von auf H definierten, Λ -automorphen Eigenfunktionen, sodass gilt $\Delta \phi_j + \lambda_j \phi_j = 0$. Ist τ derjenige

Index, für den gilt $\lambda_{\tau-1} \leq 1 < \lambda_\tau$, so setzt man $\alpha_n := (1 - \lambda_n)^{1/2} \geq 0$, für $n < \tau$ und $\alpha_n := (1 - \lambda_n)^{1/2} := i\beta_n$, $\beta_n > 0$, falls $n \geq \tau$ ist.

Man definiert

$$\Omega^k(\Lambda, p, x) := \pi \Gamma(k+1) \sum_{\lambda_n < 1} \frac{|\phi_n(p)|^2}{\alpha_n (\alpha_n + 1)^{k+1}} e^{(\alpha_n + 1)x} + 2\pi \Gamma(k+1) \{x - k - 1\} e^x \sum_{\lambda_n = 1} |\phi_n|^2,$$

$$R^k(\Lambda, p, x) := N^k(\Lambda, p, x) - \Omega^k(\Lambda, p, x), \quad k \geq 0.$$

Für die Restterme $R^k(\Lambda, p, x)$ gilt

$$R^k(\Lambda, p, x) = \begin{cases} O(x^k e^{(3-k)x/2}), & 0 \leq k \leq 1. \\ O(e^x), & k > 1. \end{cases} \quad (A)$$

(B)

Um abzuklären, wie präzies die Abschätzungen (A) und (B) sind, beweist man:

$$R^k(\Lambda, p, x) = \Omega \pm (e^x), \quad k \geq 0. \quad (C)$$

$$R^k(\Lambda, p, x) \neq O(e^x), \quad 0 \leq k < 1. \quad (D)$$

Aussage (C) bedeutet $\limsup_{x \rightarrow \infty} R^k(\Lambda, p, x) / e^x \geq 0$, sodass $R^k(\Lambda, p, x)$ unendlich oft das Vorzeichen wechselt, wenn x gegen ∞ geht. Bezeichnet $w^k(\Lambda, p, x)$ die Anzahl Vorzeichenwechsel von $R^k(\Lambda, p, y)$ auf dem Intervall $0 \leq y \leq x$, so gilt:

$$w^k(\Lambda, p, x) \geq \frac{\beta}{\pi} x - d_k, \quad k \geq 0, \quad d_k \text{ unabhängig von } x. \quad (\text{E})$$

Die Beweise der Behauptungen (A) bis (E) beginnt man mit der Herleitung einer Reihendarstellung für $N^k(\Lambda, p, x)$, $k > 0$, welche gleichmässig konvergiert in x aus $M \subset (0, \infty)$, M beliebig kompakt:

$$N^k(\Lambda, p, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k(x) |\phi_n(p)|^2, \quad k > 0, \quad (\text{F})$$

$$\text{mit } a_n^k(x) = \begin{cases} \int_0^x (x-\rho)^k \rho \sinh \rho \, d\rho, & \lambda_n = 1. \\ \int_0^x \frac{4\pi}{\alpha_n} (x-\rho)^k \sinh \rho \sinh(\alpha_n \rho) \, d\rho, & \lambda_n \neq 1. \end{cases}$$

Für $k > 1$ konvergiert die Reihe unter (F) absolut und die Identität lässt sich herleiten durch Anwendung eines Resultates von F. Fricker. Betrachtet man ausserdem die Laplacetransformierten $G^k(\Lambda, p, s)$ der Funktionen $N^k(\Lambda, p, x)$, $k \geq 0$, so lassen sich die Behauptungen (A) bis (E) beweisen mit Hilfe der Methoden, die von K. Chandrasekharan und R. Narasimhan entwickelt wurden im Rahmen ihrer Theorie über arithmetische Funktionen und Funktionalgleichungen, sowie einer Idee, die von J. Steinig im selben Zusammenhang eingeführt wurde. So erhält man insbesondere einen neuen Beweis für das Resultat (A) im Falle $k=0$, in dem dieses schon von F. Fricker hergeleitet wurde. Dabei ergeben sich eine einfache Funktionalgleichung für $G^k(\Lambda, p, s)$ und zwei Identitäten, je gültig für alle $k \geq 0$ und alle komplexen s aus $\mathbb{C} - \{\pm i\alpha_n | n=0, 1, \dots\}$:

$$s^k G^k(\Lambda, p, s) = \Gamma(k+1) G^0(\Lambda, p, s), \quad G^k(\Lambda, p, s) = (-1)^k G^k(\Lambda, p, -s),$$

$$s^k G^k(\Lambda, p, s) = 8\pi \Gamma(k+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\phi_n(p)|^2}{(s^2 - (\alpha_n + 1)^2)(s^2 - (\alpha_n - 1)^2)}. \quad (\text{G})$$

Die Reihe auf der rechten Seite von (G) konvergiert absolut und gleichmässig in s aus einer beliebigen kompakten Teilmenge von $\mathbb{C} - \{\pm i\alpha_n | n=0, 1, \dots\}$, also ist $s^k G^k(\Lambda, p, s)$, $k \geq 0$, eine in ganz \mathbb{C} meromorphe Funktion von s .

Unabhängig von den Beweisen für (A) bis (E), lässt sich der Gültigkeitsbereich der Identität (F) ausdehnen auf $k > 0$ durch ein Verfahren von K. Chandrasekharan und R. Narasimhan, welches auf einem Aequikonvergenzsatz von A. Zygmund beruht.

Summary.

Let H be the three dimensional hyperbolic space and Λ a group of isometries on H with compact fundamental domain, which is not necessarily fixpointfree. Let Λ be discontinuous, in the sense that the hyperbolic lattice $\{Tp \mid T \in \Lambda\}$ does not contain any finite clusterpoint for every $p \in H$. If the hyperbolic distance of the points $p \in H$, $q \in H$, is denoted by $\rho(p, q)$, we define

$$N^k(\Lambda, p, x) := \sum_{\substack{T \in \Lambda \\ \rho(Tp, p) \leq x}} \{x - \rho(Tp, p)\}^k, \quad k \geq 0, \quad x \geq 0, \quad p \in H.$$

The function $N^0(\Lambda, p, x)$ counts the points of the lattice, with their multiplicity, inside and on the hyperbolic ball with radius x and centre p . It was studied for the first time, in two dimensions, by H. Huber, who showed, that its behaviour, as $x \rightarrow \infty$, is connected with the Laplace-Beltrami-eigenvalue problem on H/Λ .

Let $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, $\lambda_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, be the spectral sequence of the Laplace-Beltrami-operator Δ on H/Λ , and $\{\phi_j \mid j=0, 1, \dots\}$ an orthonormal system of Λ -automorphic eigenfunctions defined on H , such that $\Delta \phi_j + \lambda_j \phi_j = 0$. If τ is the subscript with $\lambda_{\tau-1} \leq 1 < \lambda_\tau$, set $\alpha_n := (1 - \lambda_n)^{1/2} \geq 0$, if $n < \tau$ and $\alpha_n := (1 - \lambda_n)^{1/2} := i\beta_n$, $\beta_n > 0$ for $n \geq \tau$.

If

$$Q^k(\Lambda, p, x) := \pi \Gamma(k+1) \sum_{\lambda_n < 1} \frac{|\phi_n(p)|^2}{\alpha_n (\alpha_n + 1)^{k+1}} e^{(\alpha_n + 1)x} + 2\pi \Gamma(k+1) \{x - k - 1\} e^x \sum_{\lambda_n = 1} |\phi_n(p)|^2,$$

then Q^k is the main term in N^k , while

$$R^k(\Lambda, p, x) := N^k(\Lambda, p, x) - Q^k(\Lambda, p, x), \quad k \geq 0,$$

is the remainder term. We prove

$$\text{Theorem 1.} \quad R^k(\Lambda, p, x) = \begin{cases} O(x^k e^{(3-k)x/2}), & 0 \leq k \leq 1. \\ O(e^x), & k > 1. \end{cases} \quad (A)$$

In the case $k=0$, this is due to F. Fricker (1968). Some idea of the precision of these estimates is given by our proof of the following

$$R^k(\Lambda, p, x) = O(e^x), \quad k \geq 0. \quad (C)$$

Theorem 2.

$$R^k(\Lambda, p, x) \neq O(e^x), \quad 0 \leq k < 1. \quad (D)$$

Result (C) implies that $\limsup_{x \rightarrow \infty} R^k(\Lambda, p, x) / e^x \geq 0$. So $R^k(\Lambda, p, x)$ changes sign infinitely often, when x tends to ∞ . Let $W^k(\Lambda, p, x)$ be the number of changes of sign of the function $R^k(\Lambda, p, y)$ in the interval $0 \leq y \leq x$. Then we prove

$$\text{Theorem 3. } W^k(\Lambda, p, x) \geq \frac{\beta}{\pi} x - d_k, \quad k \geq 0, \quad d_k \text{ independent of } x. \quad (\text{E})$$

The proofs of (A) to (E) depend basically on the development of $N^k(\Lambda, p, x)$, $k > 0$, into a series, which is uniformly convergent in $x \in M \subset (0, \infty)$, where M is an arbitrary compact set, namely:

$$N^k(\Lambda, p, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^k(x) |\phi_n(p)|^2, \quad k > 0, \quad x$$

$$\text{with } a_n^k(x) = \begin{cases} \int_0^{4\pi} (x-p)^k \rho \sin \rho d\rho, & \lambda_n = 1. \\ \int_x^{\frac{4\pi}{\alpha_n}} (x-p)^k \sin \rho \sin(\alpha_n \rho) d\rho, & \lambda_n \neq 1. \end{cases} \quad (\text{F})$$

For $k > 1$ the series in (F) converges absolutely and the identity is obtained by means of a result of F. Fricker. If in addition, we consider the Laplace-transform $G^k(\Lambda, p, s)$ of the function $N^k(\Lambda, p, x)$, $k \geq 0$, the results (A) to (E) can be proved with the methods developed by K. Chandrasekharan and R. Narasimhan in their theory on arithmetical functions and functional equations, together with an idea introduced by J. Steinig in the same context. This yields, in particular, a new proof for the result (A) in the case $k=0$. Two identities and a simple functional equation for $G^k(\Lambda, p, s)$ are also obtained, each of which is valid for every $k \geq 0$ and every complex $s \in \mathbb{C} - \{\pm i\alpha_n | n=0, 1, \dots\}$:

$$s^k G^k(\Lambda, p, s) = \Gamma(k+1) G^0(\Lambda, p, s), \quad G^k(\Lambda, p, s) = (-1)^k G^k(\Lambda, p, -s),$$

$$s^k G^k(\Lambda, p, s) = 8\pi \Gamma(k+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\phi_n(p)|^2}{(s^2 - (\alpha_n + 1)^2)(s^2 - (\alpha_n - 1)^2)}. \quad (\text{G})$$

The series in (G) converges absolutely and uniformly with respect to s in any compact subset of $\mathbb{C} - \{\pm i\alpha_n | n=0, 1, \dots\}$. Hence $s^k G^k(\Lambda, p, s)$, $k \geq 0$, is a meromorphic function all over the complex s -plane.

Independent of the proofs for (A) to (E), the domain of validity of the identity (F) can be extended to $k > 0$ by a procedure of K. Chandrasekharan and R. Narasimhan, which is based on an equiconvergence-theorem of A. Zygmund.