N I C H T K O N S E R V A T I V E   T O R S I O N
V O N   D U E N N E N   S T A E B E N

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines
Doktors der Technischen Wissenschaften
der
EIDGENOESSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZUERICH

vorgelegt von
HANS RUDOLF WYSSMANN
Dipl. Masch. Ing. ETH
geboren am 13. März 1946
von Herzogenbuchsee BE

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. H. Brauchli, Referent
Prof. Dr. Ch. Wehrli, Korreferent

1979

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich im Teil I mit der Herleitung der Grundgleichungen für das dynamische Verhalten von dünnen Stäben aus viskoelastischem Material (Kelvin-Material). Dabei werden weder Geradheit noch Unverwundenheit des Stabes im unbelasteten Zustand vorausgesetzt. Für Momente, welche eine gerade Gleichgewichtslage des ursprünglich ebenfalls geraden Stabes zulassen, werden die Variationsgleichungen aus den allgemeinen Gleichungen abgeleitet und das zugehörige Eigenwertproblem dargestellt, das im allgemeinen nichtselbstadjungiert ist.

Der Teil II handelt von einer mehrparametrigen Familie von Momenten, von denen das axiale und das tangentiale Moment sowie die konservativen Momente Spezialfälle darstellen. Sie zerfällt für den ursprünglich geraden und unverwundenen, einseitig eingespannten elastischen Stab mit gleichen Biegesteifigkeiten in zwei Klassen: die eine mit dem Nikolaischen Paradoxon, i.e. Instabilität bei noch so kleinem Betrag des Torsionsmomentes, und eine zweite, welche Stabilitätsprobleme erzeugt, die als kritische Belastung Werte ungleich Null besitzen. Diese Resultate werden mit Hilfe der Störungsrechnung für nichtselbstadjungierte Operatoren gewonnen, deren Grundlagen kurz dargestellt werden. Nichttriviale Gleichgewichtslagen existieren nur für die zweite Klasse von Momenten, die zugehörigen Lastwerte können explizite bestimmt werden.

Der Teil III beschränkt sich auf den Fall des tangentialen Momentes und lässt verschiedene Biegesteifigkeiten sowie eine konstante Vorverwindung zu. Im Falle kleiner Differenzen ε der Biegesteifigkeiten lassen sich die Stabilitätsgrenzen für den Lastparameter in Funktion der Stabparameter mittels Anwendung der Störungsrechnung explizit angeben. Es zeigt sich, dass die Eigenwerte, die das Stabilitätsverhalten bestimmen, nicht analytisch von ε und dem Lastparameter abhängen. Für gewisse, unendlich viele Werte von ε fallen zwei Eigenfrequenzen des

unbelasteten Stabes zusammen, diese Fälle können ebenfalls explizite diskutiert werden. Die Resultate zeigen, dass kleine Werte von ε immer stabilisierende Wirkung haben, falls man sich auf nicht zu grosse Eigenwerte beschränkt. Dies gilt nicht mehr für grosse Werte von ε . Dann tritt das Nikolaische Paradoxon wieder auf, es beschränkt sich aber auf ganz bestimmte Werte von ε . Die Abhängigkeit der tieferen Eigenwerte vom Lastparameter für endliche Werte von ε wird mit einem numerischen Verfahren bestimmt. Die daraus ermittelten kritischen Lasten lassen erkennen, dass die Störungsrechnung im physikalisch interessanten Bereich der Stabparameter ein qualitativ gutes Resultat liefert. Schliesslich wird der Einfluss der inneren Dämpfung auf das Stabilitätsverhalten untersucht. Die innere Dämpfung kann hier auf zwei Seiten wirken. Sie reduziert für ε ungleich Null die kritischen Lasten, lässt aber das Nikolaische Paradoxon für den Stab mit gleichen Biegesteifigkeiten verschwinden. Dieses letztere Resultat wird auch durch noch nicht publizierte Versuche des Autors bestätigt.

Summary

The equations of motion of thin viscoelastic rods are derived in Part I without any assumptions about straightness or non-twistedness in the unloaded state. For moments allowing for equilibrium positions of pure twist of the initially straight rod the variational equations which describe the stability problem are presented.

Part II deals with a multiple parameter family of moments with the tangential, axial and the conservative moments as special cases. For the initially straight elastic rod with one side clamped it decomposes into two classes: a first one showing Nicolai's paradox, i.e. instability at arbitrary small absolute values of the load, and a second one having finite nonzero critical load. These results are obtained by application of perturbation theory for nonselfadjoint operators. Nontrivial equilibrium positions only exist for the second class of moments, the corresponding critical loads are calculated explicitly.

Part III covers the case of the tangential moment acting on a rod clamped one-sided with different bending stiffnesses. For the case of small differences ε of the bending stiffnesses perturbation theory allows the explicit calculation of the critical load in function of the parameter of the rod. The eigenvalues, which govern the stability behaviour, do generally not depend analytically on both ε and the load. For infinitely many values of ε the eigenfrequencies of the unloaded rod coincide. These cases are treated explicitly with perturbation techniques. The results show that small values of ε always have a stabilizing effect if only finitely many eigenvalues are considered. For large values Nicolai's paradox appears again for certain values of ε . The dependence of the lower eigenvalues on the load is calculated by a numerical procedure. The resulting critical values of the load show good coincidence with the values obtained by perturbation methods within the interesting range of the parameters. Finally, the influence of viscoelastic damping

on the stability is investigated. It is shown to work in two directions: reducing the critical load for ε nonzero or suppressing Nicolai's paradox in the case of equal bending stiffnesses. This latter result has been confirmed by as yet unpublished tests carried out by the author.