Diss. ETH No. 8656

A TOROIDAL COMPACTIFICATION OF THE TWO DIMENSIONAL BLOCH-MANIFOLD

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
Daniel Bättig
Dipl. Math. ETH
born september 3, 1958
citizen of Lucerne

accepted on the recommendation of

Prof. Dr. E. Trubowitz, examiner
Prof. Dr. H. Knörrer, co-examiner

Zurich, 1988

Kurzfassung

Wir betrachten den zweidimensionalen Laplace Differenzen Operator mit einem Potential V, periodisch auf einem ebenen Gitter. Zu diesem Spektralproblem lässt sich eine nichtkompakte Fläche, die sogenannte Bloch - Mannigfaltig - keit, zuordnen.
Im analogen eindimensionalen Fall lässt sich eine algebraische Kurve zuordnen. Diese kann man kompaktifizieren (siehe [MM]), indem man zwei glatte Punkte für die Energie unendlich zufügt. Man erhält eine hyperelliptische Kurve.
In dieser Dissertation wird gezeigt, wie man mit Hilfe einer toroidalen Einbettung die Bloch-Mannigfaltigkeit kompakti - fizieren kann. Man hat acht algebraische Kurven zuzufügen, die alle von eindimensionalen Spektralproblemen stammen :

1.) Vier rationale Kurven mit einer von der Grösse des Gitters abhängigen Anzahl von gewöhnlichen Doppelpunkten. Diese Kurven hängen nicht vom Potential V ab.
2.) Vier hyperelliptische Kurven, je herrührend von eindimensionalen Laplace Differenzen Operator mit über eine Richtung des Gitters gemittelten Potentials V.

Wir beweisen dies auf zwei Arten : Erstens mit Hilfe eines Vektorbündels von unendlichem Rang auf der toroidalen Einbettung, zweitens durch explizites Ausrechnen der Pole des die Bloch-Mannigfaltigkeit definierenden Polynoms.

Abstract

We study the spectral problem for the two-dimensional laplace-difference operator with a potential V, periodic on a lattice. Associated to this problem is a non-compact surface, the so called Bloch-manifold.

In this thesis we show, that by methods of toroidal embedding one can compactify the surface by adding eight curves, due to eight one-dimensional spectral problems , namely

1.) four rational curves with a certain number of ordinary double points, depending only on the size of the lattice. These curves are independent of the potential.
2.) four hyperelliptic curves, each due to the following spectral problem : the one-dimensional laplace difference operator with potential, comeing from averaging the potential V over one of the two directions of the lattice.

The proof is done in two different ways . First by construction of an infinite vectorbundle on the torus embedding. Second by computing the poles of the defining polynomial of the Bloch-manifold with combinatorial methods.