Diss. ETH Nr. 8608

Anwendungen des Maximumprinzips und der Methode von Ober- und Unterfunktionen bei semilinearen elliptischen Dirichletproblemen

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines
Doktors der Mathematik
der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von
JOST MAXIMILIAN MEYER
Dipl. Math. ETH
geboren am 21. September 1947
von Luzern

Angenommen auf Antrag von
PD Dr. René Sperb, Referent
Prof. Dr. Joseph Hersch, 1. Korreferent
Prof. Dr. Gérard Philippin, 2. Korreferent

René Sperb, 9.12

ADAG Administration & Druck AG

Zürich 1988

Zusammenfassung

Wir betrachten für eine Funktion u(x) ein semilineares elliptisches Dirichletproblem der Form

$$\bar{\Delta} u + r^k(x) u_{,k} + \lambda f(u) = 0 \quad \text{in } \Omega_R \subset R^N, \qquad \bar{\Delta} u := g^{ij} u_{,ij}$$
$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_R.$$

R^N ist ein Riemannscher Raum mit dem metrischen Tensor g_{ij}, und x ist ein Punkt in Ω_R. Wir nehmen an, die Nichtlinearität f sei eine wachsende und strikt konvexe ($f'' > 0$) C^2 - Funktion. Dann gibt es einen kritischen Wert $\lambda^* > 0$, so dass für $0 < \lambda \le \lambda^*$ eine minimale (klassische) positive Lösung $\underline{u}_\lambda$ existiert, und für $\lambda > \lambda^*$ gibt es keine Lösungen. In dieser Arbeit konstruieren wir eine untere Schranke μ^* für den kritischen Wert λ^*, d.h. $\mu^* \le \lambda^*(\Omega)$. Das Gleichheitszeichen gilt unter folgender Bedingung:

Ω_R ist ein Streifen, $\quad g_{ij} = \delta_{ij}$ (euklidische Metrik) und $\quad r^k(x) = 0$ (kein konvektiver Term).

Die Methode, welche hier verwendet wird, basiert auf Arbeiten von L. E. Payne und G. A. Philippin [SIAM J. Math. Anal. 14 (1983) no. 6 pp. 1154 - 1162] und R. P. Sperb [Internat. Schriftenreihe Numer. Math. (ISNM) 80 (1987) pp. 391 - 400]. Grob gesprochen formulieren wir ein Maximumprinzip für eine (verallgemeinerte) P - Funktion der Form

$$P := g(w)\,|\nabla w|^2 + 2\int_0^w g(y)\,dy\,; \quad g(w) := 1/(w+\beta)^2 \text{ falls } N>1 \text{ oder } g(w) := e^{-\beta w} \text{ falls } N=2.$$

w(x) ist die Lösung eines "Torsionsproblems", welche im Gebiet Ω_R definiert ist, und β ist ein geeignet gewählter reeller Parameter. Es wird eine Ober- oder Unterlösung konstruiert, indem wir das oben erwähnte Maximumprinzip mit einer minimalen positiven Lösung eines eindimensionalen semilinearen elliptischen Dirichletproblems mit der Nichtlinearität f kombinieren. Durch dieses eindimensionale Dirichletproblem wird auch die untere Schranke μ^* bestimmt.
Im letzten Teil der Arbeit sind verschiedene Beispiele aufgeführt. Im besonderen werden Probleme mit $f(u) = e^u$ betrachtet. Weiter wird auch das Beispiel $\lambda f(u) := -\Phi(1+u)^p$ studiert, d.h. ein Diffusions-Reaktions-Modell mit einer Reaktion p-ter Ordnung. Falls $-1 < p < 0$ gewählt ist, so erhalten wir eine untere Schranke für die kritische Grösse Φ^*. Φ^* ist der Wert, bei welchem eine Lösung eintritt, die in einem Teilgebiet von Ω_R identisch verschwindet. In allen Fällen wird eine Metrik,

$$g_{ij} = \rho(r)\,\delta_{ij} \quad \text{mit } \rho(r) := e^{-(\theta r)^2/2}, \quad 0 \le \theta \le 1; \quad r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2}\ ,$$

zugrunde gelegt, welche uns zu den folgenden Klassen von Problemen führt:

$$\Delta u + b^k(x) u_{,k} + \lambda\rho(r) f(u) = 0 \quad \text{in } \Omega_R$$
$$u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_R$$

mit $b^k = 0$ (inhomogener Fall), oder $b^k = \sigma_{,k}/\sigma$, $\sigma := 1/\rho$ (selbstadjungierter Fall). Für den Fall, dass Ω die Einheitskugel in R^N ist, werden untere Schranken μ^* numerisch berechnet. Es wird die Verbesserung der Schranken μ^* diskutiert, welche durch die Funktion g im Ansatz für die P - Funktion erreicht wird.

Abstract

For a function u = u(x) we consider a semilinear elliptic Dirichlet problem of the form

$$\bar{\Delta} u + r^k(x)u_{,k} + \lambda f(u) = 0 \quad \text{in } \Omega_R \subset R^N, \qquad \bar{\Delta} u := g^{ij}u_{,ij}$$
$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_R$$

where R^N is a Riemannian space with the metric tensor g_{ij} and x a generic point in Ω_R. Suppose the nonlinearity f is an increasing C^2 - function which is strictly convex ($f'' > 0$). Then there exists a critical value $\lambda^* > 0$ such that for $0 < \lambda \leq \lambda^*$ there is a minimum (classical) positive solution u_λ and for $\lambda > \lambda^*$ there are no positive solutions. In this work we construct a lower bound μ^* for the critical value λ^*, i.e. $\mu^* \leq \lambda^*(\Omega)$. μ^* is optimal in the following sense: the equality sign holds under the following conditions:

Ω is an infinite strip, $g_{ij} = \delta_{ij}$ (Euclidean case) and $r^k(x) = 0$ (no convectional term).

The method used is based on papers by L. E. Payne and G. A. Philippin [SIAM J. Math. Anal. 14 (1983) no. 6 pp. 1154 - 1162] and by R. P. Sperb [Internat. Schriftenreihe Numer. Math. (ISNM) 80 (1987) pp. 391 - 400]. Roughly speaking we use a maximum principle for a (generalized) P - function of the form

$$P := g(w)\,|\bar{\nabla} w|^2 + 2\int_0^w g(y)\,dy; \qquad g(w) := 1/(w+\beta)^2 \text{ if } N > 1 \text{ or } g(w) := e^{-\beta w} \text{ if } N = 2.$$

w(x) is the solution of a certain "torsion" problem defined in the given domain Ω_R and β is an appropriately chosen real parameter. An upper (or lower) solution is constructed by combining the maximum principle with a minimum positive solution of a one dimensional semilinear elliptic Dirichlet problem with the given nonlinearity f. This one dimensional Dirichlet problem determines also the lower bound μ^*.

Several examples are given, in particular problems with $f(u) = e^u$. Moreover the case $\lambda f(u) = -\Phi(1+u)^p$, i.e. a diffusion - reaction model with a reaction of p^{th} order is studied. If $-1 \leq p \leq 0$ we get a lower bound of a certain critical quantity Φ^* for which a dead core solution occurs. In all cases we have chosen the metric

$$g_{ij} = \rho(r)\,\delta_{ij} \quad \text{with } \rho(r) := e^{-(\theta r)^2/2}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2}$$

which leads to the following two classes of problems:

$$\Delta u + b^k(x)u_{,k} + \lambda\rho(r)\,f(u) = 0 \quad \text{in } \Omega_R$$
$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega_R,$$

with: $b^k := 0$ (inhomogeneous case) or $b^k := \sigma_{,k}/\sigma$, $\sigma := 1/\rho$ (selfadjoint case).

Lower bounds μ^* for Ω being the unit ball in R^N are calculated numerically. The improvement of the bounds μ^* due to the function g in P is discussed.