

Anwendungen des Maximumprinzips und der Methode von Ober- und Unterfunktionen bei semilinearen elliptischen Dirichletproblemen

ABHANDLUNG

zur Erlangung des Titels eines
Doktors der Mathematik
der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE
ZÜRICH

vorgelegt von

JOST MAXIMILIAN MEYER

Dipl. Math. ETH

geboren am 21. September 1947

von Luzern

Angenommen auf Antrag von

PD Dr. René Sperb, Referent

Prof. Dr. Joseph Hersch, 1. Korreferent

Prof. Dr. Gérard Philippin, 2. Korreferent

René Sperb, 9.12.88

ADAG Administration & Druck AG

Zürich 1988

Diss ETH 2608



Für Erika

Anwendungen des Maximumprinzips und der Methode von Ober- und Unterfunktionen bei semilinearen elliptischen Dirichletproblemen

Zusammenfassung

Abstract

Einleitung 1

1 Maximumprinzip 8

- 1.1 Bezeichnungen 8
- 1.2 Maximumprinzipien 11
- 1.3 Differentialgeometrische Interpretation eines semilinearen elliptischen Randwertproblems 17
- 1.4 Elliptische Gleichung / Ungleichung für eine allgemeine Form der P-Funktion 21
- 1.5 Normalableitung für eine allgemeine Form der P-Funktion 29
- 1.6 Folgerungen aus dem Maximumprinzip 35
 - 1.6.1 Maximum einer P-Funktion in einem Punkt, wo $\bar{\nabla}u=0$ ist 35
 - 1.6.2 Obere Schranken für u_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$ 51

2 Maximumprinzip und die Methode von Ober- und Unterfunktionen 55

- 2.1 Existenz von stabilen Lösungen 55
- 2.2 Maximumprinzip für eine P-Funktion und Konstruktion von Ober- und Unterfunktionen 66
- 2.3 Einige Anwendungen und Folgerungen 93
 - 2.3.1 Untere Schranken für den kritischen Wert λ^* der inhomogenen Gelfand-Gleichung 93
 - 2.3.2 Untere Schranken für den "Dead-Core" Wert Φ^* der inhomogenen Reaktionsgleichung p-ter Ordnung 106

3	Numerische Beispiele	118
3.1	Numerische Werte für w_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$ eines Hilfsproblems	120
3.2	Numerische Resultate zur inhomogenen Gelfand-Gleichung	129
3.2.1	Berechnung des kritischen Wertes λ^* für eine (Hyper-) Kugel mit Radius 1	129
3.2.2	Numerische Werte für untere Schranken μ^*	142
3.3	Numerische Resultate zur inhomogenen Reaktionsgleichung p-ter Ordnung	150
	Anhang	158
	Zusammenstellung der benützten Begriffe und Formeln aus der Differentialgeometrie	158
	Zusammenstellung einiger Fortranroutinen mit kurzen Erläuterungen	174
	Literaturangaben	194
	Lebenslauf	

Zusammenfassung

Wir betrachten für eine Funktion $u(x)$ ein semilineares elliptisches Dirichletproblem der Form

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} u + r^k(x)u_{,k} + \lambda f(u) &= 0 & \text{in } \Omega_R \subset \mathbb{R}^N, & \quad \bar{\Delta} u := g^{ij}u_{,ij} \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega_R. \end{aligned}$$

\mathbb{R}^N ist ein Riemannscher Raum mit dem metrischen Tensor g_{ij} , und x ist ein Punkt in Ω_R . Wir nehmen an, die Nichtlinearität f sei eine wachsende und strikt konvexe ($f'' > 0$) C^2 -Funktion. Dann gibt es einen kritischen Wert $\lambda^* > 0$, so dass für $0 < \lambda \leq \lambda^*$ eine minimale (klassische) positive Lösung u_λ existiert, und für $\lambda > \lambda^*$ gibt es keine Lösungen. In dieser Arbeit konstruieren wir eine untere Schranke μ^* für den kritischen Wert λ^* , d.h. $\mu^* \leq \lambda^*(\Omega)$. Das Gleichheitszeichen gilt unter folgender Bedingung:

Ω_R ist ein Streifen, $g_{ij} = \delta_{ij}$ (euklidische Metrik) und $r^k(x) = 0$ (kein konvektiver Term).

Die Methode, welche hier verwendet wird, basiert auf Arbeiten von L. E. Payne und G. A. Philippin [SIAM J. Math. Anal. 14 (1983) no. 6 pp. 1154 - 1162] und R. P. Sperb [Internat. Schriftenreihe Numer. Math. (ISNM) 80 (1987) pp. 391 - 400]. Grob gesprochen formulieren wir ein Maximumprinzip für eine (verallgemeinerte) P - Funktion der Form

$$P := g(w) |\nabla w|^2 + 2 \int_0^w g(y) dy; \quad g(w) := 1/(w + \beta)^2 \text{ falls } N > 1 \text{ oder } g(w) := e^{-\beta w} \text{ falls } N = 2.$$

$w(x)$ ist die Lösung eines "Torsionsproblems", welche im Gebiet Ω_R definiert ist, und β ist ein geeignet gewählter reeller Parameter. Es wird eine Ober- oder Unterlösung konstruiert, indem wir das oben erwähnte Maximumprinzip mit einer minimalen positiven Lösung eines eindimensionalen semilinearen elliptischen Dirichletproblems mit der Nichtlinearität f kombinieren. Durch dieses eindimensionale Dirichletproblem wird auch die untere Schranke μ^* bestimmt.

Im letzten Teil der Arbeit sind verschiedene Beispiele aufgeführt. Im besonderen werden Probleme mit $f(u) = e^u$ betrachtet. Weiter wird auch das Beispiel $\lambda f(u) := -\Phi(1 + u)^p$ studiert, d.h. ein Diffusions-Reaktions-Modell mit einer Reaktion p -ter Ordnung. Falls $-1 < p < 0$ gewählt ist, so erhalten wir eine untere Schranke für die kritische Grösse Φ^* . Φ^* ist der Wert, bei welchem eine Lösung eintritt, die in einem Teilgebiet von Ω_R identisch verschwindet. In allen Fällen wird eine Metrik,

$$g_{ij} = \rho(r) \delta_{ij} \quad \text{mit } \rho(r) := e^{-(\theta r)^2/2}, \quad 0 \leq \theta \leq 1; \quad r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2},$$

zugrunde gelegt, welche uns zu den folgenden Klassen von Problemen führt:

$$\begin{aligned} \Delta u + b^k(x)u_{,k} + \lambda \rho(r) f(u) &= 0 & \text{in } \Omega_R \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega_R \end{aligned}$$

mit $b^k = 0$ (inhomogener Fall), oder $b^k = \sigma_{,k}/\sigma$, $\sigma := 1/\rho$ (selbstadjungierter Fall). Für den Fall, dass Ω die Einheitskugel in \mathbb{R}^N ist, werden untere Schranken μ^* numerisch berechnet. Es wird die Verbesserung der Schranken μ^* diskutiert, welche durch die Funktion g im Ansatz für die P - Funktion erreicht wird.

Abstract

For a function $u = u(x)$ we consider a semilinear elliptic Dirichlet problem of the form

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} u + r^k(x)u_{,k} + \lambda f(u) &= 0 & \text{in } \Omega_R \subset \mathbb{R}^N, & \quad \bar{\Delta} u := g^{ij}u_{,ij} \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega_R \end{aligned}$$

where \mathbb{R}^N is a Riemannian space with the metric tensor g_{ij} and x a generic point in Ω_R . Suppose the nonlinearity f is an increasing C^2 -function which is strictly convex ($f'' > 0$). Then there exists a critical value $\lambda^* > 0$ such that for $0 < \lambda \leq \lambda^*$ there is a minimum (classical) positive solution u_λ and for $\lambda > \lambda^*$ there are no positive solutions. In this work we construct a lower bound μ^* for the critical value λ^* , i.e. $\mu^* \leq \lambda^*(\Omega)$. μ^* is optimal in the following sense: the equality sign holds under the following conditions:

Ω is an infinite strip, $g_{ij} = \delta_{ij}$ (Euclidean case) and $r^k(x) = 0$ (no convectional term).

The method used is based on papers by L. E. Payne and G. A. Philippin [SIAM J. Math. Anal. 14 (1983) no. 6 pp. 1154 - 1162] and by R. P. Sperb [Internat. Schriftenreihe Numer. Math. (ISNM) 80 (1987) pp. 391 - 400]. Roughly speaking we use a maximum principle for a (generalized) P - function of the form

$$P := g(w) |\bar{\nabla} w|^2 + 2 \int_0^w g(y) dy; \quad g(w) := 1/(w + \beta)^2 \text{ if } N > 1 \text{ or } g(w) := e^{-\beta w} \text{ if } N = 2.$$

$w(x)$ is the solution of a certain "torsion" problem defined in the given domain Ω_R and β is an appropriately chosen real parameter. An upper (or lower) solution is constructed by combining the maximum principle with a minimum positive solution of a one dimensional semilinear elliptic Dirichlet problem with the given nonlinearity f . This one dimensional Dirichlet problem determines also the lower bound μ^* .

Several examples are given, in particular problems with $f(u) = e^u$. Moreover the case $\lambda f(u) = -\Phi(1+u)^p$, i.e. a diffusion - reaction model with a reaction of p^{th} order is studied. If $-1 \leq p \leq 0$ we get a lower bound of a certain critical quantity Φ^* for which a dead core solution occurs. In all cases we have chosen the metric

$$g_{ij} = \rho(r) \delta_{ij} \quad \text{with } \rho(r) := e^{-\theta r^2/2}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$$

which leads to the following two classes of problems:

$$\begin{aligned} \Delta u + b^k(x)u_{,k} + \lambda \rho(r) f(u) &= 0 & \text{in } \Omega_R \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega_R, \end{aligned}$$

with: $b^k := 0$ (inhomogeneous case) or $b^k := \sigma_{,k}/\sigma$, $\sigma := 1/\rho$ (selfadjoint case).

Lower bounds μ^* for Ω being the unit ball in \mathbb{R}^N are calculated numerically. The improvement of the bounds μ^* due to the function g in P is discussed.

Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit semilinearen elliptischen Dirichletproblemen. Für eine Funktion $u(x)$, $x \in E^N$, sei das folgende Problem gegeben:

$$\begin{aligned} L[u] + \lambda \rho(x) f(u) &= 0 && \text{in } \Omega \subset E^N \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{D}$$

L ist ein uniform elliptischer Differentialausdruck zweiter Ordnung der Form:

$$L[u] := a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i},$$

und Ω ist ein beschränktes Gebiet des euklidischen Raumes E^N , $N > 1$. Wir nehmen an, dass ρ eine positive Funktion in $\Omega \cup \partial\Omega$ ist. Dem Vorgehen von R. P. Sperb in [27] entsprechend, lässt sich das obige Problem (D) als eine Gleichung der Form

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} u + r^k u_{,k} + \lambda f(u) &= 0 && \text{in } \Omega_R \subset R^N \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_R, \end{aligned} \tag{D_R}$$

interpretieren, wobei $\bar{\Delta} u$ als Laplace-Beltrami Ausdruck bezüglich der Metrik

$$g_{ij} := \left[\frac{a^{ij}}{\rho} \right]^{-1}, \tag{M}$$

definiert wird und für r^k

$$r^k := \frac{b^k}{\rho} - (N-2) \frac{a^{ik}}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^i} (\ln \sqrt{\rho}) - \frac{1}{\rho \sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{a} a^{ik}), \quad a := \det [a_{ik}]$$

gesetzt wird. Ω kann auch als Gebiet Ω_R in einem Riemannschen Raum R^N mit Metrik (M) interpretiert werden. $x \in E^N$ sind dann die lokalen Koordinaten von R^N . Der nach aussen gerichtete Normaleneinheitsvektor von $\partial\Omega_R$ ist definiert durch

$$v_k := g_{kj} n^j$$

In einer Arbeit von P. L. Lions (siehe SIAM Review, [13]) finden wir einen Überblick über die Existenz von klassischen positiven Lösungen bei verschiedenen Nichtlinearitäten f . Wir interessieren uns für den Fall $f(0) > 0$ (forced case) und nehmen an, dass f eine strikt konvexe

Funktion ist. Falls z.B. zusätzlich $f' > 0$ gilt, gibt es einen kritischen Wert $\lambda^* = \lambda^*(\Omega)$, so dass für $0 < \lambda \leq \lambda^*$ das Problem (D) (bzw. (D_R)) eine minimale Lösung u_λ besitzt und für $\lambda > \lambda^*$ keine Lösungen existieren. Es geht in dieser Arbeit im wesentlichen um eine Konstruktion einer unteren Schranke μ^* für den kritischen Wert λ^* , die scharf ist, falls für (D) die folgenden Bedingungen (Eq) gelten:

$$\begin{aligned} \Omega &\text{ ein (Hyper-) Streifen in } E^N, \\ L[u] &:= \Delta u, \\ \rho &:= 1. \end{aligned} \tag{Eq}$$

Dabei spielt das Maximumprinzip von E. Hopf (siehe [7]), welches wir auf eine "Energiedichtefunktion" $P(x)$ für ein elliptisches Hilfsproblem der Form (H_1) anwenden, eine wesentliche Rolle (siehe unten). Grob gesprochen besagt das Maximumprinzip folgendes: Das Maximum einer nichtkonstanten Lösung $P(x)$ einer Differentialgleichung der Form $L[P] \geq 0$ in Ω kann nicht im Innern des Gebietes Ω angenommen werden. Weiter lässt sich unabhängig vom Maximumprinzip ein Randpunktlema beweisen, d.h. falls das Maximum in einem Punkt $x_M \in \partial\Omega$ angenommen wird und in diesem Punkt die sogenannte innere Kugeleigenschaft erfüllt ist, so gilt für die Normalableitung: $\partial P / \partial \nu > 0$. ν kann hier ein beliebiger nach aussen gerichteter Vektor von $\partial\Omega$ sein. In einem weiteren Schritt soll das Maximumprinzip mit einer Lösung eines eindimensionalen Hilfsdirichletproblems der Form (H_2) kombiniert werden, damit wir Ober- bzw. Unterfunktionen erhalten. Eine untere Schranke für den kritischen Wert λ^* ergibt sich als kritischer Wert μ^* des eindimensionalen Hilfsdirichletproblems (H_2) . Wir geben eine kurze Zusammenfassung der drei Kapitel.

Das erste Kapitel beginnt mit einer kurzen Zusammenstellung von Maximumprinzip und Randpunktlema. In M. Protter & H. Weinberger [7] wird dieses Thema ausführlich behandelt. Als Nächstes formulieren wir für unsere Zwecke ein spezielles kombiniertes Maximumprinzip. Wir betrachten für eine Funktion $P(x)$ eine Differentialgleichung mit singulären Koeffizienten

$$\bar{\Delta} P + W^k(P, x) P_{,k} \geq 0 \quad \text{in } \Omega^*,$$

L^k ist definiert in $\Omega^* := \Omega \setminus \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$.

Weiter sei:

$$\frac{\partial P}{\partial \nu} \leq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Dann folgt aus Maximumprinzip und Randpunktlema, dass das Maximum von P nur in den

singulären Punkten $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ der Koeffizientenfunktionen L^k liegen kann. In R. P. Sperb [8] wird ein allgemeiner Ansatz für eine P-Funktion der Form

$$P = g(u) |\bar{\nabla} u|^2 + h(u) \tag{P}$$

vorgeschlagen. Hierbei ist u eine Lösung eines Problems der Form (D_R) . Im Hinblick auf die Anwendung des kombinierten Maximumprinzips leiten wir eine elliptische Ungleichung her, die für $N > 1$ gilt. Sie hat die Form:

$$\bar{\Delta} P - \frac{L^k P_{,k}}{g(u) |\bar{\nabla} u|^2} \geq A |\bar{\nabla} u|^4 + B |\bar{\nabla} u|^2 + C - 2g \left(R^{nj} + r^{nj} \right) u_{,n} u_{,j},$$

mit den Koeffizienten:

$$L^k := \frac{P_{,k}}{2} - \left(h' - g' |\bar{\nabla} u|^2 \right) u^{,k} - g |\bar{\nabla} u|^2 r^k, \quad ' = \frac{d}{du}$$

$$A := -2g^{3/2} \left(g^{-1/2} \right)'' ,$$

$$B := \left(h' - 2\lambda fg \right)' - \frac{g'}{g} \left(h' - \lambda fg \right) ,$$

$$C := \frac{h'}{2g} \left(h' - 2\lambda fg \right) .$$

R^{nj} ist der kontravariante Riccitenor des Riemannschen Raumes R^N , und $r^{k,j}$ ist die kontravariante Ableitung von r^k . Für den Spezialfall $N = 2$ erhalten wir durch Verwendung einer Identität eine elliptische Gleichung für P , die im Gegensatz zu [8] auch für $r^k \neq 0$ gilt (siehe Lemma 1.4.1). Im weiteren berechnen wir einen allgemeinen Ausdruck für die Normalableitung $\partial P / \partial v$

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial v} \left(g'(0) \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)^2 - 2 g(0) \kappa \frac{\partial u}{\partial v} - 2 g(0) r^k v_k \frac{\partial u}{\partial v} + h'(0) - 2\lambda f(0)g(0) \right) .$$

κ ist die mittlere Krümmung von $\partial\Omega_R$ in der von (M) induzierten Metrik. Um später untere Schranken μ^* konstruieren zu können, die insbesondere optimal sind, falls Ω ein Streifen ist, wählen wir für h

$$h' := 2 \lambda fg .$$

Damit verschwindet der Koeffizient C in der obigen elliptischen Ungleichung für P . Die Funk-

tion $g = g(u)$ wird so gewählt, dass der Koeffizient A von $|\nabla u|^4$ identisch null wird, d.h.

$$g(u) := \frac{1}{(u + \beta)^2} .$$

β ist ein reeller Parameter. Diese Definition von g erfolgt im Hinblick auf eine Verschärfung der untenstehenden Ungleichung (U). Falls $f \geq 0$ gilt, der Tensor

$$-\left(R^{nj} + r^{nj} \right) \text{ positiv semidefinit in } \Omega_R \tag{B_1}$$

ist, und der Vektor

$$r^k + \kappa v^k \text{ auf } \partial\Omega_R \text{ nicht nach innen gerichtet ist,} \tag{B_2}$$

folgt aus dem kombinierten Maximumprinzip die Ungleichung:

$$|\nabla u|^2 \leq s^2(u) := \frac{2\lambda}{g(u)} \int_u^{u_{\max}} f(y)g(y) dy , \tag{U}$$

für $N > 1$. Im Fall $N = 2$ ist gemäss Lemma 1.4.1 $g := e^{-\beta u}$ zu wählen. Mit einer geeigneten Wahl des Parameters β in der Hilfsfunktion $g(u)$, die bewirkt dass $\partial P / \partial v \leq 0$ auf $\partial\Omega_R$ wird, erreichen wir eine Verschärfung der Ungleichung (U) (siehe z.B. Korollar 1.6.1). Wir schränken in unserer Arbeit die allgemeine Problemklasse (D) etwas ein und betrachten nur Probleme mit $a^{ij}(x) = \delta^{ij}$ (δ^{ij} ist das Kroneckersymbol). Damit wird durch die Beziehung (M) eine Metrik definiert, die konform zur euklidischen Metrik ist. Für diese eingeschränkte Problemklasse werden explizite Bedingungen angegeben, aus denen die Ungleichung (U) folgt. Zum Schluss des 1. Kapitels betrachten wir für eine Funktion $w(x)$ ein verallgemeinertes "Torsionsproblem" ($\lambda f(u) := 1$ und $a^{ij} = \delta^{ij}$ in (D_R)) und bestimmen mit Hilfe des kombinierten Maximumprinzips obere Schranken \hat{w} für

$$w_{\max} := \max_{\Omega} w(x)$$

und obere Schranken \hat{t} für

$$\bar{t}_{\max} := \max_{\partial\Omega} |\nabla w| .$$

\hat{w} lässt sich aus der Ungleichung (U) bestimmen, indem wir in (U) die Variablen separieren und eine Falllinienintegration durchführen. Setzen wir \hat{w} in der Ungleichung (U) ein und spezialisieren diese auf den Rand $\partial\Omega_R$, so ergibt sich eine obere Schranke \hat{t}

Das zweite Kapitel wird eingeleitet mit einer kurzen Charakterisierung der Existenz von stabilen Lösungen. Wir folgen im wesentlichen einer Arbeit von D. H. Sattinger (siehe [25]). Grob gesprochen sind genau diejenigen Lösungen die stabilen, welche durch eine strikte Unterfunktion und eine strikte Oberfunktion eingeschlossen werden können. In einem weiteren Abschnitt konstruieren wir eine Oberfunktion für das Problem (D_R) nach einer Anregung von L. E. Payne & G. A. Philippin in [24]. Zum Ausgangsproblem (D_R) wird ein lineares Hilfsproblem der Form:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} w + r^k w_{,k} + q(w) &= 0 \quad \text{in } \Omega_R, & q(w) &:= 1 + \alpha w, \quad \alpha \text{ ein reeller Parameter} \\ w &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_R \end{aligned} \tag{H_1}$$

betrachtet. r^k und $\partial\Omega_R$ werden aus (D_R) übernommen. Mit der Lösung $w(x)$ definieren wir eine P-Funktion der Form (P) mit $h' = 2 qg$, $g := (w + \beta)^{-2}$. Falls die Bedingungen (B_1) und (B_2) erfüllt sind, gilt für die Lösung w die Ungleichung (U), welche scharf ist, falls die Bedingungen (Eq) gelten. Als zweites Hilfsproblem definieren wir ein eindimensionales Dirichletproblem der Form:

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{s}) \left(\psi(\bar{s}) X' \right)' + \mu f(X) &= 0, \quad 0 \leq \bar{s} \leq s(0) \\ X'(0) = X(s(0)) &= 0 \quad (s(0) \text{ siehe Ungleichung (U)}). \end{aligned} \tag{H_2}$$

Die Funktionen φ und ψ sind durch das System

$$\begin{aligned} \varphi(s)\psi(s) &= (s s_{,w})^2 \quad (s(w) \text{ ist in Ungleichung (U) definiert}) \\ \varphi(s)\psi'(s) &= s^2 s_{,ww} - q(w) s_{,w} \end{aligned}$$

bestimmt. Durch eine einfache Rechnung und unter Verwendung von Gleichung (H_2) erhalten wir für die Lösung $X(\bar{s})$ mit $\bar{s} := s(w(x))$ das folgende elliptische System:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} X + r^k X_{,k} + \mu f(X) &= \left\{ 1 - \frac{|\nabla w|^2}{s^2} \right\} \{ \mu f(X) - X' s_{,w} q(w) \} \quad \text{in } \Omega_R \\ X &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_R. \end{aligned} \tag{D^*}$$

Der erste Klammerausdruck auf der rechten Seite der obigen Gleichung (D^*) ist infolge der Ungleichung (U) nicht negativ (Maximumprinzip). Das Vorzeichen des zweiten Klammerausdrucks erhalten wir, indem wir mit einer noch zu bestimmenden Hilfsfunktion $\gamma(s) \geq 0$ mit $\gamma(0) = 0$ den folgenden Ausdruck

$$k(s) := \gamma(s) \{ \mu f(X) - X' s_{,w} q(w) \}$$

bilden (siehe Proposition 2.2.1). Es wird die Ableitung k' berechnet und daraus ergibt sich, wieder unter Verwendung von Gleichung (H_2) , der Ausdruck:

$$k'(s) = \gamma(s) X' \left\{ \mu f_X - q_w \right\}.$$

Falls z.B. $k'(s) \leq 0$ ist, so folgt, dass $X = X\{s(w(x))\}$ eine Oberfunktion in Ω_R für das Ausgangsproblem (D_R) ist. Das eindimensionale Hilfsproblem (H_2) enthält die beiden Parameter w_{\max} und \bar{r}_{\max} , welche durch das erste Hilfsproblem (H_1) bestimmt sind. Sie sind im allgemeinen nicht explizit bekannt. Wir können uns aber mit oberen Schranken \hat{w} und \hat{r} begnügen, welche wir für den Fall $\alpha = 0$ in (H_1) am Ende des ersten Kapitels bestimmt haben ("Torsionsproblem"). Zum Schluss des zweiten Kapitels wenden wir die oben skizzierte Konstruktion auf die Problemklasse (D) mit $a^{ij}(x) := \delta^{ij}$ und der Gelfand-Nichtlinearität $\lambda f(u) := \lambda e^u$ an (inhomogene Gelfand-Gleichung). Im oben erwähnten Hilfsproblem (H_1) wählen wir $\alpha := 0$. Falls für die Anwendung des kombinierten Maximumprinzips die Bedingungen (B_1) und (B_2) erfüllt sind, gilt für die Lösung w des "Torsionsproblems" (H_1) die Ungleichung (U) . Damit ist die oben konstruierte Funktion $X = X\{s(w(x))\}$ eine Oberfunktion. $X = 0$ ist eine triviale Unterfunktion. Es folgt, dass der kritische Wert μ^* des eindimensionalen Hilfsproblems (H_2) eine untere Schranke für den kritischen Wert $\lambda^*(\Omega)$ der Gelfand-Gleichung ist. Analog konstruieren wir eine untere Schranke μ^* für den kritischen Wert $\Phi^* = \Phi^*(\Omega)$ einer Diffusions-Reaktionsgleichung mit der Dirichlet-Randbedingung $u = 1$ auf $\partial\Omega$. Φ^* ist definiert als der Wert, wo eine einpunktige Dead-Core Lösung auftritt, d. h. die Lösung u verschwindet nur in einem Punkt des Gebietes Ω . Wir führen zuerst eine Transformation $U := u - 1$ durch. Das transformierte Problem besitzt dann homogene Randbedingungen $U = 0$ auf $\partial\Omega$, d. h. die Nichtlinearität in (D) ist ein Ausdruck der Form $\lambda f(U) := -\Phi^2 (1 + U)^p$. Falls $-1 < p < 0$ gewählt wird, so ist der Dead-Core Wert μ^* des zugehörigen eindimensionalen Hilfsproblems (H_2) eine untere Schranke für Φ^* . Für $0 < p < 1$ erhalten wir obere Schranken. Alle Schranken ergeben scharfe Werte, falls die Bedingungen (Eq) gelten. Im weiteren wird für $p > 1$ die Nichtexistenz eines Dead-Cores bewiesen.

Im letzten und dritten Kapitel der Arbeit wollen wir einige untere Schranken μ^* numerisch bestimmen. Aus der Konstruktion wissen wir, dass μ^* scharf ist, falls die Bedingungen (Eq) gelten. Wir wollen μ^* für die oben erwähnten Beispiele (Gelfand-Nichtlinearität und Nichtlinearität der Reaktions-Gleichung) etwas näher untersuchen und betrachten dazu die Problemklasse

$$\begin{aligned} \Delta u + b^k(x) u_{,k} + \lambda \rho(r) f(u) &= 0 & \text{in } B \subset E^N, & \quad B = (\text{Hyper-}) \text{ Kugel mit Radius } r = 1 \\ u &= 0 & \text{auf } \partial B. \end{aligned}$$

Als "Inhomogenität" wählen wir folgende Funktionen:

$$\rho(r) := e^{-(\theta r)^2/2}, \quad b^k := 0 \quad (\text{kein konvektiver Term}) \quad \text{oder}$$

$$\rho(r) := e^{-(\theta r)^2/2}, \quad b^k := \theta^2 r_k = \theta^2 x^k \quad (\text{selbstadjungierter Diff.- Operator}).$$

θ ist ein reeller Parameter, welcher noch zwei Bedingungen für Maximumprinzip und Randpunktlema genügen muss. Die kritischen Werte $\lambda^*(B)$ für die Gelfand-Gleichung bzw. $\Phi^*(B)$ für die Reaktionsgleichung lassen sich für die Einheitskugel B über ein System von gewöhnlichen Variationsgleichungen und einem Newtoniterationsschema numerisch berechnen. Somit können wir die Güte der berechneten unteren Schranken μ^* diskutieren, indem wir sie mit den kritischen Werten $\lambda^*(B)$ bzw. $\Phi^*(B)$ vergleichen. Die Verbesserung der unteren Schranke μ^* als Folge der Funktion g in der Ungleichung (U) wird diskutiert. Im speziellen Fall $N = 2$ lassen sich die unteren Schranken μ^* nochmals etwas verbessern, da wir statt einer Ungleichung eine elliptische Gleichung für unsere gewählte P-Funktion erhalten (siehe Lemma 1.4.1).

Um die Arbeit in sich abgeschlossen zu halten, werden im Anhang die entsprechenden Formeln, welche im Zusammenhang mit dem Thema stehen aus [5] übernommen und ergänzt. Es werden auch einige Fortran-Routinen aufgeführt, welche für die Berechnung von Lösungen, Bifurkationsdiagrammen und der kritischen Werte benützt wurden.

Ich möchte an dieser Stelle meinem Referenten, Herrn PD Dr. R. Sperb, herzlich danken. Diese Arbeit ist unter seiner Aufsicht entstanden, und ich hatte immer wieder die Gelegenheit, Anregungen von ihm entgegenzunehmen. Auch möchte ich meinen beiden Korreferenten, Herrn Prof. Dr. J. Hersch und Herrn Prof. Dr. G. Philippin, danken, dass sie diese Arbeit durch ihre Korreferate unterstützt haben. Für die Hinweise zur Berechnung der Bifurkationsdiagramme und der kritischen Werte danke ich Herrn Prof. Dr. J. Waldvogel. Besonders danken möchte ich schliesslich noch Herrn Prof. Dr. U. Kirchgraber für sein grosses Engagement, das wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat.

1 Maximumprinzip

1.1 Bezeichnungen

E^N bezeichne den N -dimensionalen euklidischen Raum. Punkte in E^N bezeichnen wir mit x, y, z, \dots , (im Anhang zur Verdeutlichung auch fett gedruckt $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \dots$) die Koordinaten mit x^i, y^i, z^i, \dots , $i = 1, \dots, N$. Die lokalen Koordinaten in einer N Dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit (oder auch riemannscher Raum genannt) mit der Metrik g_{ik} bezeichnen wir ebenfalls mit x^i, y^i, z^i, \dots , $i = 1, \dots, N$. $u(x) = u(x^i)$, $v(x)$, $\varphi(x), \dots$ seien skalarwertige Funktionen in den Variablen x^1, x^2, \dots, x^N . Für die gewöhnlichen partiellen Ableitungen schreiben wir oft eine abgekürzte Form

$$u_{,i} = \frac{\partial u}{\partial x^i}.$$

Bei Summenbildungen, z. B. $|\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^N u_{,i}^2$, halten wir uns an die Summationskonvention.

Summationskonvention:

"Objekte", bei denen der gleiche Index einmal unten und einmal oben vorkommt, sind zu summieren. Das gleiche gilt auch, wenn ein Index zweimal oben oder zweimal unten steht.

Weitere Beispiele: Skalarprodukt

$$\nabla u \cdot \nabla v = u_{,i} v_{,i}$$

Lineare Differentialoperatoren

$$L[u] = a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i}$$

Linienelement

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

Ausdrücke mit Christoffelsymbolen

$$\bar{\Delta} u = g^{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} - g^{ik} \Gamma_{ik}^s \frac{\partial u}{\partial x^s}$$

Bei Tensoren benützen wir die übliche Notation. Wir schreiben z.B. für die kovariante Ableitung eines 1-fach kontravarianten Tensors bezüglich Γ_{si}^k

$$t^k_{,i} = \frac{\partial t^k}{\partial x^i} + \Gamma_{si}^k t^s$$

oder für die kovariante Ableitung eines 1-fach kovarianten Tensors bezüglich Γ_{ki}^s

$$t_{k;i} = \frac{\partial t_k}{\partial x^i} - \Gamma_{ki}^s t_s.$$

Eine 1-fach kovariante Ableitung einer skalarwertigen Funktion $u_{,i}$ ist gleich der normalen partiellen Ableitung nach der Variablen x^i . $u_{,ik}$ bedeutet die 2-fach kovariante Ableitung der skalarwertigen Funktion $u(x)$. Weitere Definitionen und Formeln zur Differentialgeometrie sind im Anhang aufgeführt.

Wir sagen, eine Funktion heisst von der Klasse $C^k(\Omega)$, falls alle partiellen Ableitungen bis und mit k -ter Ordnung existieren und in Ω stetig sind. Mit Ω bezeichnen wir ein beschränktes Gebiet (offen und zusammenhängend) des N -dim euklidischen Raumes E^N . Der Rand von Ω wird mit $\partial\Omega$ bezeichnet. Wir nehmen an, dass sich eine Hyperfläche $\partial\Omega$ lokal durch ein genügend reguläres Funktionensystem

$$\partial\Omega: x^i = x^i(\xi^\alpha), \quad i = 1, \dots, N, \quad \alpha = 1, \dots, N-1, \quad \xi \in E^{N-1}$$

darstellen lässt, mit einer Funktionalmatrix

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^k} \end{bmatrix},$$

die den Maximalrang $N-1$ hat. Wir sagen $\partial\Omega$ sei von der Klasse C^k , falls das obige Funktionensystem k mal stetig differenzierbar ist. n bezeichnet den nach aussen gerichteten Normaleneinheitsvektor von $\partial\Omega$.

Im folgenden werden wir uns mit semilinearen elliptischen Problemen der Form

$$L[u] + \lambda \rho(x) f(u) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

mit Dirichletrandbedingungen beschäftigen, wobei L ein linearer Differentialoperator zweiter Ordnung ist. Wir interessieren uns für klassische Lösungen. Das sind Lösungen, welche erstens in Ω mindestens so viele stetige Ableitungen besitzen, wie vom entsprechenden Differentialoperator der Differentialgleichung verlangt werden. Zweitens konvergieren sie im Falle von Dirichletrandbedingungen gegen die vorgegebenen Randwerte, wenn das Argument x gegen den Rand $\partial\Omega$ geht.

Semilineare elliptische Randwertprobleme beschreiben zum Beispiel Diffusions-Reaktionsprozesse in der Chemie, oder sie kommen in der Verbrennungstheorie vor, siehe z.B. [2] und [12]. In der Elastizitätstheorie beschreibt z.B. das sogenannte Torsionsproblem

$$\begin{aligned}\Delta u + 1 &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\end{aligned}$$

das Torsionsspannungspotential eines Stabes mit beliebigen Querschnitt Ω . Der Gradient der Lösung ergibt dann die Torsionsspannung in einem Punkt $x \in \Omega$ an. Weitere Anwendungen semilinearer elliptischen Randwertproblemen finden wir in der Halbleiterphysik (siehe [6]). Bei all diesen Anwendungen soll die Lösungsfunktion u eine physikalische Grösse sein, wie z.B. eine Konzentration oder eine Temperatur. Es liegt in der Natur der Sache, dass wir in allen Teilen dieser Arbeit immer von **positiven** Lösungen ausgehen werden.

1.2 Maximumprinzipien

In diesem Kapitel werden wir ein Maximumprinzip formulieren, das wir in den folgenden Teilen dieser Arbeit gebrauchen werden. Wir betrachten einen quasilinearen Operator L der Form

$$L[P] := a^{ij}(x) \frac{\partial^2 P}{\partial x^i \partial x^j} + W^i(P_k, x) \frac{\partial P}{\partial x^i}$$

für eine zweimal differenzierbare Funktion P . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ ist. Sonst setze man

$$\bar{a}^{ij}(x) := \frac{1}{2} \left(a^{ij}(x) + a^{ji}(x) \right) \quad (\text{symmetrischer Teil}).$$

Der Hauptteil L_H von L lautet

$$L_H[P] := a^{ij}(x) \frac{\partial^2 P}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Definition 1.2.1 (elliptischer Operator)

Der Operator L heisst elliptisch in Ω , falls für den Hauptteil L_H von L folgendes gilt: In jedem Punkt $x \in \Omega$ existiert eine positive Grösse $m(x)$ sodass

$$a^{ij}(x) \xi^i \xi^j \geq m(x) \xi^i \xi^i = m(x) |\xi|^2 \quad \text{für alle } \xi \in E^N \quad (1.2.1)$$

L heisst uniform elliptisch in Ω , falls für L_H obige Ungleichung (1.2.1) gilt und eine positive Konstante m_0 existiert, sodass gilt: $m(x) \geq m_0$ für alle $x \in \Omega$.

Wir zitieren zwei Sätze aus [7]. Es handelt sich um ein Maximumprinzip und ein Randpunktlema, mit denen wir im folgenden ein kombiniertes Maximumprinzip (Lemma 1.2.5) beweisen werden.

Satz 1.2.2 (Maximumprinzip)

Sei $P(x)$ eine Lösung der Differentialungleichung $L[P] \geq 0$ in einem beschränkten Gebiet Ω . Der Operator L sei uniform elliptisch in Ω , und die Koeffizientenfunktion $a^{ij}(x)$ und $W^i(\eta^j, x)$ seien für $-\infty < \eta^j < \infty$ und $1 \leq i, j \leq N$ in Ω uniform beschränkt. Falls P ein Maximum M in einem inneren Punkt von Ω annimmt, dann ist $P = M$ in Ω .

Für das folgende Randpunktlema ist die sogenannte innere Kugeleigenschaft wichtig.

Definition 1.2.3 (innere Kugeleigenschaft)

Sei Ω ein beschränktes Gebiet des E^N . Der Rand $\partial\Omega$ erfüllt die innere Kugeleigenschaft, falls in jedem Punkt $x_M \in \partial\Omega$ eine Kugel K_r mit Radius $r > 0$ existiert, sodass $\Omega \supset K_r$ und $K_r \cap \partial\Omega = \{x_M\}$ ist.

Satz 1.2.4 (Randpunktlema)

Sei $P(x)$ eine nichtkonstante Lösung der Differentialungleichung $L[P] \geq 0$ in einem beschränkten Gebiet Ω . Der Operator L sei uniform elliptisch in Ω . Wir nehmen an, dass die Lösung P ihr Maximum M in einem Punkt $x_M \in \partial\Omega$ annimmt und $\partial\Omega$ in diesem Punkt die innere Kugeleigenschaft besitzt. Falls P stetig ist in $\Omega \cup \{x_M\}$ und $\partial P/\partial n$ in x_M existiert, dann gilt dort:

$$\frac{\partial P}{\partial \mu} > 0 \quad \text{in } P$$

für alle μ mit $\mu \cdot n > 0$, wobei n ein nach aussen gerichteter Normalenvektor von $\partial\Omega$ ist.

Bemerkungen:

1. In der Beweisführung des Maximumprinzipes, wie sie in [7] dargestellt ist, können über die Koeffizientenfunktionen $a^{ij}(x)$ und $W^i(\eta^j, x)$ schwächere Annahmen getroffen werden. Die folgenden Voraussetzungen genügen schon:

$$\frac{\sum_{i=1}^N a^{ii}(x)}{m(x)} \quad \text{und} \quad \frac{\sum_{i=1}^N |W^i(\eta^j, x)|}{m(x)}$$

sind beschränkt in jeder abgeschlossenen Kugel, die ganz in Ω liegt, für $-\infty < \eta^j < \infty$, $1 \leq j \leq N$.

2. Ebenfalls gilt auch die Randpunkteigenschaft unter ähnlich schwächeren Voraussetzungen. Es genügt über die Koeffizientenfunktionen $a^{ij}(x)$ und $W^i(\eta^j, x)$ folgendes zu verlangen:

$$\frac{a^{ij}(x)}{\sum_{k,l=1}^N a^{kl}(x) n^k n^l} \quad \text{und} \quad \frac{W^i(\eta^j, x)}{\sum_{k,l=1}^N a^{kl}(x) n^k n^l}$$

beschränkt in einer Umgebung U von $x_M \in \partial\Omega$, für $-\infty < \eta^j < \infty$, $1 \leq j \leq N$. Die Umgebung U muss ganz in Ω liegen und n^i sind die Komponenten des Normaleneinheitsvektors n von $\partial\Omega$. Die Behauptung in Satz (1.2.4) gilt immer noch, falls der Operator L nicht mehr elliptisch ist auf dem Rand $\partial\Omega$ und der Rand nicht zugleich eine charakteristische Fläche von L ist.

3. Wenn der Rand des Gebietes lokal von der Klasse C^2 ist, so ist dies eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit der inneren Kugeleigenschaft. Im Satz (1.2.4) (Randpunkteigenschaft) ist die innere Kugeleigenschaft eine notwendige Voraussetzung, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt. Definieren wir ein Quadratgebiet der Seitenlänge 2, d.h.

$$\Omega := \left\{ (x,y) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1 \right\}.$$

Für die Funktion $u(x,y) = -(1-x^2)(1-y^2)$ gilt dann folgende Ungleichung

$$\Delta u \geq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Das Maximum von u liegt auf dem Rand $\partial\Omega$ und es gilt $u \equiv 0$ auf $\partial\Omega$. In den vier Eckpunkten des Quadrates, wo die innere Kugeleigenschaft verletzt ist, gilt $\nabla u = 0$. Somit gilt dort für irgend eine nach aussen gerichtete Ableitung

$$\frac{\partial P}{\partial \mu} = 0.$$

4. Maximumprinzip und Randpunkteigenschaft können unabhängig voneinander bewiesen werden. Sie lassen sich auch auf allgemeinere Operatoren erweitern. Setzt man P durch $-P$ in Satz (1.2.2) und (1.2.4), so sind die entsprechenden Ungleichheitszeichen umzukehren (Minimumprinzip).

Die Beweise der Sätze (1.2.2) und 1.2.4) und weiteren Ergänzungen finden wir in [7]. Das folgende Lemma stellt eine Kombination von Maximumprinzip und Randpunktlemma dar.

Lemma 1.2.5 (Kombination von Maximumprinzip und Randpunktlemma)

Sei Ω ein beschränktes Gebiet des E^N . Der Rand $\partial\Omega$ erfülle die sogenannte innere Kugeleigenschaft. L sei ein uniform elliptischer Operator mit den Koeffizientenfunktionen $a^{ij}(x)$ und $W^i(\eta, x)$. $a^{ij}(x)$ sei uniform beschränkt in Ω . $W^i(\eta, x)$ sei für $-\infty < \eta < \infty$ in $\Omega^* := \Omega \setminus \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$, $s_i \in \Omega$ definiert und in jeder abgeschlossenen Kugel beschränkt, welche in Ω

liegt und keine der Punkte s_j enthält. Falls für eine nichtkonstante Funktion P folgendes gilt:

(i) P ist eine $C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \partial\Omega)$ Lösung von

$$L[P] = a^{ij}(x)P_{,ij} + W^i(P_{,k}, x)P_{,i} \geq 0 \quad \text{in } \Omega^*$$

(ii) Auf dem Rand $\partial\Omega$ ist $\frac{\partial P}{\partial \mu} \leq 0$ für einen Vektor μ mit $\mu \cdot n > 0$.

Dann gilt $P = P_{\max}$ in mindestens einem der Punkte $s_j \in \Omega$.

Beweis:

Als erstes legen wir um jeden Punkt $s_j \in \Omega$ eine Kugel K_j^ε mit Radius ε und definieren ein "Restgebiet"

$$\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^m K_i^\varepsilon.$$

Dieses "Restgebiet" hat den Rand

$$\partial\Omega_\varepsilon := \bigcup_{i=1}^m \partial K_i^\varepsilon \cup \partial\Omega.$$

Aus Voraussetzung (i) folgt nach dem Maximumprinzip, dass $P = P_{\max}$ auf $\partial\Omega_\varepsilon$ sein muss, d.h. das Maximum von P kann auf dem Rand $\partial\Omega$ oder auf den Rändern der Kugeln ∂K_i^ε liegen. Angenommen das Maximum von P liege auf $\partial\Omega$, dann folgt aus dem Randpunktlemma, dass gelten muss

$$\frac{\partial P}{\partial \mu} > 0 \quad \text{für alle } \mu, \text{ mit } \mu \cdot n > 0.$$

Dies widerspricht aber der Voraussetzung (ii). Also liegt das Maximum von P auf $\bigcup_{i=1}^m K_i^\varepsilon$.

Wir lassen jetzt ε gegen 0 laufen und erhalten damit die Behauptung.

◇

Wir wollen diesen Abschnitt abschliessen, indem wir ein Maximumprinzip für eine durch eine Funktion $h(x)$ erweiterte elliptische Ungleichung und ein Maximumprinzip für uniform parabolische Ungleichungen ohne Beweis aus [7] zitieren.

Satz 1.2.6 (Maximumprinzip für erweiterte elliptische Ungleichungen)

Sei $P(x)$ eine Lösung der folgenden elliptischen Differentialungleichung in einem beschränkten Gebiet Ω des E^N , d.h.

$$(L + h)[P] \geq 0 \quad \text{in } \Omega .$$

Für den Operator L gelten die Voraussetzungen gemäss Satz 1.2.2 und $h(x)$ ist eine Funktion, für die gilt

$$h(x) \leq 0 \quad \text{in } \Omega .$$

Dann gilt:

(i) **Maximumprinzip:**

Falls P ein nicht negatives Maximum M in einem inneren Punkt von Ω annimmt, dann ist $u = M$ in Ω .

(ii) **Randpunktlema:**

Falls ein nicht negatives Maximum M in einem Randpunkt $x_M \in \partial\Omega$ angenommen wird und der Rand $\partial\Omega$ in x_M die innere Kugeleigenschaft besitzt, dann gilt dort

$$\frac{\partial P}{\partial \mu} > 0 \quad \text{für alle } \mu \text{ mit } \mu \cdot n > 0, \quad n \text{ ist der äussere Normalenvektor von } \partial\Omega,$$

falls die Normalableitung existiert, $P \neq \text{const}$ und stetig in $\Omega \cup \{x_M\}$ ist.

Satz 1.2.7 (Maximumprinzip für uniform parabolische Ungleichungen)

Sei $P(x,t)$ eine Lösung der folgenden uniform parabolischen Differentialgleichung

$$L[P] - \frac{\partial P}{\partial t} := a^{ij}(x) \frac{\partial^2 P}{\partial x^i \partial x^j} + b^i(x) \frac{\partial P}{\partial x^i} - \frac{\partial P}{\partial t} \geq 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,T) .$$

Ω ist ein beschränktes Gebiet des E^N , $T < \infty$ und L ist uniform elliptisch in Ω , d.h. für den Hauptteil $L_H[\cdot] = a^{ij}(x) \cdot$ von L gilt die Bedingung (1.2.1). Die Koeffizienten von L sind beschränkt. Dann gilt:

(i) **Maximumprinzip:**

Falls $P(x,t)$ ein Maximum M in einem inneren Punkt $(x_1, t_1) \in (\Omega \times (0,T))$ annimmt, dann ist $u = M$ in $\Omega \times (0, t_1]$; d.h. das Maximum kann nur auf dem "Zylinderboden" $\Omega \times \{0\}$ oder auf der "Zylinderwand" $\partial\Omega \times [0, t_1]$ angenommen werden.

(ii) **Randpunktlemma:**

Falls P ein isoliertes Maximum M (d.h. $P < M$ im Inneren von $\Omega \times (0, T)$) in einem Randpunkt $(x_M, t_M) \in \partial\Omega \times (0, T)$ annimmt und in $x_M \in \partial\Omega$ die innere Kugeleigenschaft erfüllt ist, dann gilt dort

$$\frac{\partial P}{\partial \mu} > 0 \quad \text{für alle } \mu \cdot n > 0, \quad n \text{ ist der äussere Normalenvektor von } \partial\Omega,$$

falls $P \neq \text{const}$ und die Normalableitung existiert.

Bemerkungen:

1. Das Maximumprinzip für parabolische Probleme unterscheidet sich wesentlich von demjenigen für elliptische Probleme. Angenommen die Lösung $P(x, t)$ nehme zum Zeitpunkt t_1 ein Maximum M in einem Punkt $A \in \Omega$ an ($P(A, t_1) = M$). Falls Q ein Punkt in $\Omega \times (0, t_1)$ ist, welcher mit A nur durch horizontale und nach "oben" gerichteten vertikalen Segmenten verbunden werden kann, dann ist $P(Q) = M$. (Die Lösung $P(x, t)$ muss "nur" in einem Teilbereich von $\Omega \times (0, t_1]$ konstant sein.

2. Die Aussage von Satz 1.2.7 gilt immer noch, falls P eine Lösung von

$$(L + h)[P] - \frac{\partial P}{\partial t} \geq 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

mit $h \leq 0$ und $M \geq 0$.

3. Falls $M = 0$ ist, so kann die Einschränkung $h \leq 0$ in Ω fallen gelassen werden. Das Maximumprinzip lautet dann wie folgt:

Falls P eine Lösung von

$$(L + h)[P] - \frac{\partial P}{\partial t} \geq 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \text{ ist,}$$

mit $u(x, 0) \leq 0$ in Ω und $u(x, t) \leq 0$ auf $\partial\Omega$, $0 \leq t \leq T$ dann ist $u(x, t) \leq 0$ in $\Omega \times (0, T]$.

4. Der Satz 1.2.7 lässt sich auf quasilineare parabolische Ungleichungen mit zeitabhängigen Koeffizienten verallgemeinern, d.h. die Funktion h und die Koeffizienten von L hängen nicht nur von x , sondern auch von der Funktion P und deren Ableitung $P_{,k}$, sowie der "Zeit" t ab. Die entsprechenden Voraussetzungen wie z.B. Beschränktheit usw. müssen erfüllt bleiben.

1.3 Differentialgeometrische Interpretation eines semilinearen elliptischen Randwertproblems

Als Ausgangspunkt sei das folgende Dirichletproblem gegeben:

$$\begin{aligned} L[u] + \lambda \rho(x) f(u) &= 0 && \text{in } \Omega \subset E^N \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

$\rho(x)$ ist eine positive Funktion in Ω und $L[u] := a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i}$ ist eine allgemeine Form eines uniform elliptischen Operators in Ω .

Wir wollen obiges Problem in eine differentialgeometrische Form bringen, wie dies in [8] gemacht wurde. Vorerst dividieren wir obige Gleichung durch $\rho(x)$ und erhalten eine Gleichung der Form

$$L_\rho[u] + \lambda f(u) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

mit dem Operator

$$L_\rho[u] = \rho^{-1}(x) a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + \rho^{-1}(x) b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i}.$$

$\rho^{-1} a^{ij}$ ist ein symmetrischer positiv definitiver Tensor (2 fach kontravariant), mit dem wir auf natürliche Art in Ω , statt der euklidischen Metrik, eine neue Metrik mit dem Tensor

$$g_{ij} := \left[\frac{a^{ij}}{\rho} \right]^{-1} = \rho a_{ij} \tag{1.3.1}$$

definieren. Damit erhalten wir einen riemannschen Raum R^N , dessen Linienelement die Form

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

besitzt. Das Linienelement ist unter orthogonalen Koordinatentransformationen invariant. Ebenfalls sind die folgenden zwei Differentialausdrücke unter orthogonalen Koordinatentransformationen in der Variablen $x \in E^N$ invariant:

Der Betrag des Gradienten (oder 1. Beltramische Invariante)

$$|\nabla u|^2 := u^i u_{,i} = g^{ij} u_{,i} u_{,j} = \rho^{-1} a^{ij} u_{,i} u_{,j}$$

und der Laplace-Beltrami-Operator (oder 2. Beltramische Invariante)

$$\bar{\Delta} u := g^{ij} u_{,ij} = \frac{a^{ik}}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} + (N-2) \frac{a^{ik}}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^i} (\ln \sqrt{\rho}) \frac{\partial u}{\partial x^k} + \frac{1}{\rho \sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{a} a^{ik}) \frac{\partial u}{\partial x^k},$$

wobei $a := \det [a_{ij}]$ ist.

Mit dem Laplace-Beltrami-Operator lässt sich der Ausdruck

$$L_\rho [u] + \lambda f(u)$$

wie folgt umformulieren:

$$L_\rho [u] + \lambda f(u) = \bar{\Delta} u + r^k u_{,k} + \lambda f(u)$$

mit
$$r^k := \frac{b^k}{\rho} - (N-2) \frac{a^{ik}}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^i} (\ln \sqrt{\rho}) - \frac{1}{\rho \sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{a} a^{ik}).$$

Das Gebiet Ω ($E^N \supset \Omega$) kann auch als Gebiet Ω_R des R^N interpretiert werden. Den nach aussen gerichteten Normaleneinheitsvektor der Hyperfläche $\partial\Omega$ bezeichnen wir mit n ("euklidische Einbettung"), den entsprechenden Normaleneinheitsvektor von $\partial\Omega_R$ mit v . Wir können diese beiden Normaleneinheitsvektoren durch einen Ausdruck darstellen. Sei die Hyperfläche $\partial\Omega$ in E^N lokal implizit durch eine Relation $\Psi(x) = 0$ gegeben. Diese Relation definiert eine Punktmenge, die auch als Hyperfläche des R^N aufgefasst werden kann. Die Normaleneinheitsvektoren n und v lassen sich wie folgt ausdrücken:

euklidischer Fall: $n = \pm \frac{\nabla \Psi}{|\nabla \Psi|}$ oder in Komponentenschreibweise $n^i = \pm \frac{\Psi_{,i}}{\sqrt{\Psi_{,k} \Psi_{,k}}}$,

riemannscher Fall: $v = \pm \frac{\bar{\nabla} \Psi}{|\bar{\nabla} \Psi|}$ oder in Komponentenschreibweise $v^i = \pm \frac{g^{ik} \Psi_{,k}}{\sqrt{g^{lm} \Psi_{,l} \Psi_{,m}}}$.

Die Vorzeichen werden so gewählt, dass die Normaleneinheitsvektoren auf $\partial\Omega$ nach "ausen gerichtet" sind, d. h. wir denken hier an orientierbare Flächen. Zum Beispiel ist das

Möbius-Band im 3-dimensionalen Raum eine nichtorientierbare Fläche. Es gilt der Satz, dass ein hinreichend kleines Stück einer Fläche stets orientierbar ist.

Zusammenfassend können wir sagen, dass die folgenden Probleme zueinander äquivalent sind:

$$\begin{aligned} L[u] + \lambda \rho(x) f(u) &= 0 & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega, \quad \partial\Omega \text{ mit Normaleneinheitsvektor } n \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

und

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} u + r^k u_{,k} + \lambda f(u) &= 0 & \text{in } \Omega_R \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega_R, \quad \partial\Omega_R \text{ mit Normaleneinheitsvektor } \nu, \end{aligned} \quad (1.3.2')$$

$$\text{mit } r^k := \frac{b^k}{\rho} - (N-2) \frac{a^{ik}}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^i} (\ln \sqrt{\rho}) - \frac{1}{\rho \sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{a} a^{ik}), \quad a = \det [a_{ij}].$$

Bemerkungen:

Wir wollen folgende zwei Spezialfälle noch erwähnen:

1. Im zweidimensionalen Fall $N = 2$ ist

$$r^k = \frac{b^k}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{a} a^{ik}).$$

Gilt zusätzlich $a^{ij}(x) := \delta^{ij}$, so ist

$$r^k = \frac{b^k}{\rho} \quad \text{und} \quad \bar{\Delta} u = \frac{\Delta u}{\rho}.$$

Das transformierte Problem (1.3.2') erhält man lediglich durch eine Division der Gleichung (1.3.2) mit $\rho(x)$.

2. Für den Fall $N > 2$ wollen wir noch ein Problem der folgenden Form betrachten:

$$\begin{aligned} L[u] + \lambda a(x)^{1/(2-N)} f(u) &= 0 & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

mit $L[u] := \frac{\partial}{\partial x^i} \left(a^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j} \right)$ (selbstadjungierte Form) und $a := \det [a_{ij}]$.

Dann ist das obige Problem (1.3.3) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} u + \lambda f(u) &= 0 && \text{in } \Omega_{\mathbb{R}} \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_{\mathbb{R}}. \end{aligned} \tag{1.3.3'}$$

(Der konvektive Term $\frac{\partial a^{ij}}{\partial x^i} u_j$ wird "wegtransformiert".)

- Die Rechnungen in den folgenden Abschnitten 1.4, 1.5 und 2.2 können eleganter und allgemeiner durchgeführt werden, wenn wir differentialgeometrische Hilfsmittel einführen. Deshalb wurde das Problem (1.3.2) als ein Problem in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit interpretiert. Die hergeleiteten Formeln in den folgenden Abschnitten gelten aber auch für den euklidischen Fall, d.h. falls der Laplace-Beltrami-Operator durch den gewöhnlichen Laplace-Operator in (1.3.2') ersetzt wird.
- In den Ungleichungen, welche in den folgenden Abschnitten im Zentrum des Interesses liegen, gilt Gleichheit, falls wir von einem homogenen Problem in einem (Hyper-) Streifen Ω ausgehen; d.h. wir betrachten ein Ausgangsproblem der Form:

$$\begin{aligned} u''(x) + \lambda f(u) &= 0, && 0 \leq |x| < \delta \\ u'(0) = u(\delta) &= 0 \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Definition 1.3.1 (Hyper-) Streifen:

Unter einem (Hyper-) Streifen Ω in E^N mit Breite 2δ verstehen wir ein unbeschränktes Gebiet, das durch 2 (Hyper-) Ebenen mit Abstand 2δ begrenzt ist.

(Die (Hyper-) Ebenen denken wir uns symmetrisch zu einer Koordinatenachse.)

1.4 Elliptische Gleichung / Ungleichung für eine allgemeine Form der P-Funktion

In [8] wird zur Differentialgleichung (1.3.2') eine verallgemeinerte Form der "Energiedichtefunktion" E,

$$E = |\nabla u|^2 + 2\lambda \int_0^u f(s) ds$$

betrachtet, welche die Form

$$P := g(u) |\nabla u|^2 + h(u) \tag{1.4.1}$$

besitzt. g und h sollen später so gewählt werden, dass P ein Maximumprinzip erfüllt. Wir wollen vorerst die Randbedingungen ausser acht lassen. In einer Rechnung wird in [8] gezeigt, dass die obige P-Funktion (1.4.1) für $N > 1$ eine elliptische Ungleichung der folgenden Form erfüllt:

$$\bar{\Delta} P - \frac{L^k P_{,k}}{g |\nabla u|^2} \geq A |\nabla u|^4 + B |\nabla u|^2 + C - 2g T_{nj} u^{,n} u^{,j}, \tag{1.4.2}$$

mit $L^k := \frac{P^{,k}}{2} - \left(h' - g' |\nabla u|^2 \right) u^{,k} - g |\nabla u|^2 r^k, \quad ' = \frac{d}{du}$

$$A := -2g^{3/2} \left(g^{-1/2} \right)'' ,$$

$$B := \left(h' - 2\lambda fg \right)' - \frac{g'}{g} \left(h' - \lambda fg \right) ,$$

$$C := \frac{h'}{2g} \left(h' - 2\lambda fg \right) ,$$

$$T_{nj} u^{,n} u^{,j} := R_{nj} u^{,n} u^{,j} + r^k_{,p} u^{,k} u^{,p} ,$$

R_{nj} ist der Riccitenor des Riemannschen Raumes R^N .

Der Fall $N = 2$ wird in [8] separat behandelt. Als Resultat ergibt sich für P, statt einer Ungleichung vom Typ (1.4.2), eine elliptische Gleichung mit etwas anderen Koeffizienten L^k , A, B und C. Dieses Resultat ist aber nur für den Spezialfall $r^k = 0$ gültig. Im folgenden werden wir eine analoge Rechnung, wie sie in [8] für obige Ungleichung (1.4.2) hergeleitet wird, für $N = 2$ und $r^k \neq 0$ durchführen.

Lemma 1.4.1 (ebener Fall $N = 2$)

Sei u eine $C^3(\Omega)$ Lösung der Differentialgleichung (1.3.2'). Dann gilt für

$$P = g(u) |\nabla u|^2 + h(u) = g(u) u^j u_{,j} + h(u)$$

folgende Gleichung:

$$\bar{\Delta} P - \frac{L^k P_{,k}}{g |\nabla u|^2} = A |\nabla u|^4 + B |\nabla u|^2 + C - 2g T_{nj} u^n u^j, \quad (1.4.3)$$

mit $L^k := P^k - 2(h' - \lambda fg) u^k + 2g r^m u_{,m} u^k - g |\nabla u|^2 r^k,$

$$A := g (\ln(g))'',$$

$$B := (h' - 2\lambda fg)' - g' (2r^k u_{,k} + \lambda f),$$

$$C := 2g (r^k u_{,k})^2 - 2 (r^k u_{,k}) (h' - 2\lambda fg) + \frac{1}{g} (h' - 2\lambda fg) (h' - \lambda fg),$$

$$T_{nj} u^n u^j := -K_G |\nabla u|^2 + r^k r_p u_{,k} u^{,p},$$

K_G ist die Gausssche Krümmung des Riemannschen Raumes R^2 .

Beweis:

Wir berechnen die kovariante Ableitung $P_{,i}$ und daraus den Laplace-Beltrami Operator von P .

$$P_{,i} = g' u_{,i} |\nabla u|^2 + g u^j u_{,i} u_{,j} + g u^j u_{,ji} + h' u_{,i} = 2g u^j u_{,i} u_{,j} + (g' |\nabla u|^2 + h') u_{,i} \quad (1.4.4)$$

$$\bar{\Delta} P = P^i_{,i} = 4g' u^j u_{,i} u_{,j} u^i + 2g u^j_{,i} u_{,j} + 2g u^j u_{,i} u_{,j} + g'' |\nabla u|^4 + (g' \bar{\Delta} u + h'') |\nabla u|^2 + h' \bar{\Delta} u \quad (1.4.5)$$

Um eine elliptische Gleichung für P der Form (1.4.3) zu erhalten, müssen wir alle Terme in (1.4.5) mit zweiten und dritten Ableitungen von u mit Hilfe der Differentialgleichung (1.3.2') und der kovarianten Ableitung (1.4.4) von P eliminieren. Den Ausdruck $u^j_{,i} u_{,j}$ eliminieren wir unter Benützung der Ricci-Identität (A.43) und der Differentialgleichung (1.3.2').

Es gilt:

$$\left(u_{,i}^{j,k} - u_{,i}^{,kj} \right) u_{,j} = \left(u_{,ji}^{,k} - u_{,i}^{,kj} \right) u^j = g^{ks} \left(u_{,jis} - u_{,isj} \right) u^j$$

und

$$g^{ks} \left(u_{,jis} - u_{,isj} \right) u^j = g^{ks} R_{ijs}^n u_n u^j = -g^{ks} R_{injs} u^n u^j.$$

Setzt man $i=k$ so folgt (beachte: $u_{,ijs} = u_{,jis}$)

$$\left(u_{,ji}^{,i} - (\bar{\Delta} u)_{,j} \right) u^j = -g^{is} R_{injs} u^n u^j = -R_{nj} u^n u^j.$$

Der Ricci-Tensor R_{nj} ist durch Verjüngung über den 1. und 4. Index des Riemann-Christoffel-tensors R_{injs} definiert. Differenzieren wir die Differentialgleichung (1.3.2'), so erhalten wir für $(\bar{\Delta} u)_{,j}$ die Gleichung

$$(\bar{\Delta} u)_{,j} = - \left(r^k u_{,k} \right)_{,j} - \lambda f' u_{,j} = -r^k_{,j} u_{,k} - r^k u_{,kj} - \lambda f' u_{,j}.$$

Daraus ergibt sich für den Ausdruck $2g u^{j,i} u_{,j}$ folgendes:

$$2g u^{j,i} u_{,j} = -2g T_{nj} u^n u^j - 2g r^k u_{,kj} u^j - 2g \lambda f' |\bar{\nabla} u|^2, \quad (1.4.6)$$

mit $T_{nj} := R_{nj} + g_{sn} r^s_{,j}$.

Indem wir entsprechende Indizes hoch bzw. herunterziehen, Ausdruck (1.4.6) einsetzen und umordnen, lässt sich (1.4.5) schreiben als

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} P = & 2g u_{,ij} u^{ij} + 4g' u_{,ij} u^i u^j - 2g r^k u_{,kj} u^j - 2g T_{nj} u^n u^j + \\ & g'' |\bar{\nabla} u|^4 + \left((h' - 2\lambda f g)' + g' (\lambda f - r^k u_{,k}) \right) |\bar{\nabla} u|^2 - h' (r^k u_{,k} + \lambda f). \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Die Terme $4g' u_{,ij} u^i u^j$ und $2g r^k u_{,kj} u^j$ können wir über die erste Ableitung von P eliminieren. Man beachte, dass die Dimension N des Riemannschen Raumes R^N bis jetzt keine Rolle spielt. Benützen wir zur Elimination von $u_{,ij} u^{ij}$ die Schwarzsche Ungleichung

$$|\bar{\nabla} u|^2 u_{,ij} u^{ij} \geq u_{,ik} u^{jk} u^i u_{,j}$$

und die erste Ableitung von P , um den Term $u_{,ik} u^{jk} u^i u_{,j}$ zu eliminieren, so erhalten wir das

Eingangs dieses Kapitels erwähnte Resultat (1.4.2) aus [8] für den allgemeinen Fall $N > 1$. Wir wollen für den Spezialfall $N = 2$ die Identität (A.83) verwenden, um den Ausdruck $u_{,ij}u^{,ij}$ zu eliminieren,

$$|\bar{\nabla}u|^2 u_{,ij}u^{,ij} = |\bar{\nabla}u|^2 (\bar{\Delta}u)^2 + 2 u_{,ik}u^{,jk}u^{,i}u_{,j} - 2 \bar{\Delta}u u^{,ij}u_{,i}u_{,j} .$$

Eingesetzt in (1.4.7) ergibt

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}P = & 2g (\bar{\Delta}u)^2 + \left(\frac{2g'}{g} - \frac{2\bar{\Delta}u}{|\bar{\nabla}u|^2} \right) 2g u^{,ij}u_{,i}u_{,j} + \frac{1}{g|\bar{\nabla}u|^2} 4g^2 u_{,ik}u^{,jk}u^{,i}u_{,j} - 2g u_{,kj}r^k u^{,j} + \\ & g' |\bar{\nabla}u|^4 + \left((h' - 2\lambda fg)' - g' (r^k u_{,k} - \lambda f) \right) |\bar{\nabla}u|^2 - 2g T_{nj} u^{,n} u^{,j} - h' (r^k u_{,k} + \lambda f) . \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

Die drei Terme $2gu^{,ij}u_{,i}u_{,j}$, $4g^2 u_{,ik}u^{,jk}u^{,i}u_{,j}$ und $2g u_{,kj}r^k u^{,j}$ eliminieren wir wie folgt über die erste kovariante Ableitung von P:

$$\begin{aligned} 2g u^{,ij}u_{,i}u_{,j} &= P_{,i} u^{,i} - g' |\bar{\nabla}u|^4 - h' |\bar{\nabla}u|^2 , \\ 4g^2 u_{,ik}u^{,jk}u^{,i}u_{,j} &= P_{,k} \left(P^{,k} - 2 \left(g' |\bar{\nabla}u|^2 + h' \right) u^{,k} \right) + \left(g' |\bar{\nabla}u|^2 + h' \right)^2 |\bar{\nabla}u|^2 , \\ 2g u_{,kj} r^k u^{,j} &= P_{,k} r^k - \left(g' |\bar{\nabla}u|^2 + h' \right) r^k u_{,k} . \end{aligned}$$

Setzen wir die obigen Eliminationsgleichungen ein und benützen wir dazu die Differentialgleichung (1.3.2'), so erhalten wir die Beziehung (1.4.3). Im Detail sieht dies unter Berücksichtigung der Reihenfolge der entsprechenden Terme wie folgt aus:

(i) Berechnung von L^k :

$$\left(\frac{2g'}{g} + \frac{2(r^k u_{,k} + \lambda f)}{|\bar{\nabla}u|^2} \right) P_{,i} u^{,i} + \frac{1}{g|\bar{\nabla}u|^2} P_{,k} \left(P^{,k} - 2 \left(g' |\bar{\nabla}u|^2 + h' \right) u^{,k} \right) - P_{,k} r^k =: \frac{L^k P_{,k}}{g|\bar{\nabla}u|^2} ,$$

mit $L^k := P^{,k} - 2(h' - \lambda fg) u^{,k} + 2g r^m u_{,m} u^{,k} - g |\bar{\nabla}u|^2 r^k .$

(ii) Berechnung von A:

$$-2 \frac{g'^2}{g} + \frac{g''^2}{g} + g'' = g (\ln(g))'' =: A.$$

(iii) Berechnung von B:

$$\begin{aligned} -2g' \left(r^k u_{,k} + \lambda f \right) - 2 \frac{g' h'}{g} + 2 \frac{g'' h'}{g} + g' r^k u_{,k} + (h' - 2\lambda f g)' - g' \left(r^k u_{,k} - \lambda f \right) = \\ (h' - 2\lambda f g)' - g' \left(2r^k u_{,k} + \lambda f \right) =: B. \end{aligned}$$

(iv) Berechnung von C:

$$\begin{aligned} 2g \left(r^k u_{,k} + \lambda f \right)^2 - 2 \left(r^k u_{,k} + \lambda f \right) h' + \frac{(h')^2}{g} + h' r^k u_{,k} - h' \left(r^k u_{,k} + \lambda f \right) = \\ 2g \left(r^k u_{,k} \right)^2 - 2 \left(h' - 2\lambda f g \right) r^k u_{,k} + \frac{1}{g} \left(h' - \lambda f g \right) \left(h' - 2\lambda f g \right) =: C. \end{aligned}$$

(v) Berechnung von $T_{nj} u^n u^j$:

Im 2-dimensionalen Riemannschen Raum R^2 degeneriert der Ricci-Tensor R_{nj} zu $-K_G g_{nj}$, wobei K_G die Gausssche Krümmung des R^2 ist (siehe Gleichung (A.34), Anhang). Daraus ergibt sich für den Ausdruck $T_{nj} u^n u^j$:

$$T_{nj} u^n u^j = -K_G |\bar{\nabla} u|^2 + r^k{}_{,p} u_{,k} u^p.$$

◇

Spezialfälle:

Eine direkte Folge aus den Formeln (1.4.2) und (1.4.3) sind die folgenden Spezialfälle, welche wir kurz festhalten wollen.

Lemma 1.4.2 ($g = 1, h' = 2\lambda f$)

Sei u eine $C^3(\Omega)$ Lösung der Differentialgleichung (1.3.2'). Dann gelten für

$$P = g(u) |\nabla u|^2 + 2\lambda \int_0^u f(s)g(s) ds$$

die folgende Relationen:

(i) Für eine allgemeine Dimension $N > 1$ gilt:

$$\bar{\Delta} P - \frac{L^k P_{,k}}{|\nabla u|^2} \geq -2 \left(r^{k,l} + R^{kl} \right) u_{,k} u_{,l} \quad (1.4.9)$$

$$L^k := 0.5 P^k - 2\lambda f u^{,k} - |\nabla u|^2 r^k.$$

(ii) Für den Spezialfall $N = 2$ gilt:

$$\bar{\Delta} P - \frac{L^k P_{,k}}{|\nabla u|^2} = -2 \left(r^{k,l} - r^k r^l - K_G g^{kl} \right) u_{,k} u_{,l}, \quad (1.4.10)$$

$$L^k := P^k - 2 \left(\lambda f - r^m u_{,m} \right) u^{,k} - |\nabla u|^2 r^k.$$

Beweis:

Setze in den Formeln (1.4.2) und (1.4.3) $g := 1$ und $h' := 2\lambda f$ und benütze die Regeln über "Hinauf- und Herunterziehen" von Indizes des Riemannschen Kalküls.

◇

Lemma 1.4.3 ($g \neq 1, h' = 2\lambda fg$)

Sei u eine $C^3(\Omega)$ Lösung der Differentialgleichung (1.3.2'). Dann gelten für

$$P = g(u) |\nabla u|^2 + 2\lambda \int_0^u f(s)g(s) ds$$

die folgenden Relationen:

(i) Für eine allgemeine Dimension $N > 1$ gilt:

$$\bar{\Delta} P - \frac{L^k P_{,k}}{g |\bar{\nabla} u|^2} \geq -2g^{3/2} (g^{-1/2})'' |\bar{\nabla} u|^4 - 2g \left(r^{k,l} + R^{kl} + 0.5 \lambda f g' g^{-1} g^{kl} \right) u_{,k} u_{,l}, \quad (1.4.11)$$

$$L^k := 0.5 P^{,k} - \left(2\lambda f g - g' |\bar{\nabla} u|^2 \right) u^{,k} - g |\bar{\nabla} u|^2 r^k.$$

(ii) Für den Spezialfall $N = 2$ gilt:

$$\bar{\Delta} P - \frac{L^k P_{,k}}{g |\bar{\nabla} u|^2} = g (\ln(g))'' |\bar{\nabla} u|^4 - 2g \left(r^{kl} - r^{k,l} - K_G g^{kl} + (0.5\lambda f + r^m u_{,m}) g' g^{-1} g^{kl} \right) u_{,k} u_{,l}, \quad (1.4.12)$$

$$L^k := P^{,k} - 2g (\lambda f - r^m u_{,m}) u^{,k} - g |\bar{\nabla} u|^2 r^k.$$

Beweis:

Setze in den Formeln (1.4.2) und (1.4.3) $h' := 2\lambda f g$.

◇

Der euklidische Fall, welcher häufig anzutreffen ist, wollen wir speziell im folgenden Lemma 1.4.4 noch erwähnen.

Lemma 1.4.4 ($h' = 2\lambda f g$ und euklidischer Fall, d.h. $g_{ij} = \delta_{ij}$)

Sei u eine $C^3(\Omega)$ Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \Delta u + b^k(x) u_{,k} + \lambda f(u) &= 0 & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Dann gelten für die P-Funktion:

$$P = g(u) |\nabla u|^2 + 2\lambda \int_0^u f(s)g(s) ds$$

die folgenden Relationen:

(i) Für eine allgemeine Dimension $N > 1$ gilt:

$$\Delta P - \frac{L_k P_{,k}}{g |\nabla u|^2} \geq -2 g^{3/2} (g^{-1/2})'' |\nabla u|^4 - 2g \left(\frac{\partial b^k}{\partial x^1} + 0.5 \lambda f g' g^{-1} \delta^{kl} \right) u_{,k} u_{,l}, \quad (1.4.13)$$

$$L_k := 0.5 P_{,k} - \left(2\lambda f g - g' |\nabla u|^2 \right) u_{,k} - g |\nabla u|^2 b^k.$$

(ii) Für den Spezialfall $N = 2$ gilt:

$$\Delta P - \frac{L_k P_{,k}}{g |\nabla u|^2} = g (\ln(g))'' |\nabla u|^4 - 2g \left(\frac{\partial b^k}{\partial x^1} - b^k b^1 + (0.5 \lambda f + b^s u_{,s}) g' g^{-1} \delta^{kl} \right) u_{,k} u_{,l}, \quad (1.4.14)$$

$$L_k := P_{,k} - 2g (\lambda f - b^s u_{,s}) u_{,k} - g |\nabla u|^2 b^k.$$

Beweis:

Im euklidischen Fall ist der Riccitenor $R_{nj} \equiv 0$ (bzw. $K_G = 0$ im Fall $N = 2$) und alle kovarianten bzw. kontravarianten Ableitungen werden zu gewöhnlichen partiellen Ableitungen. Setze in (1.4.2) und (1.4.3) $h' = 2\lambda f g$ und $r^k = b^k$.

◇

1.5 Normalableitung für eine allgemeine Form der P-Funktion

Im Hinblick für die Anwendung von Lemma (1.2.5) in den folgenden Abschnitten benötigen wir die Normalableitung $\partial P/\partial v$ auf dem Rand $\partial\Omega_R$. Wir berechnen diese Normalableitung für eine allgemeine Form der P-Funktion

$$P = g(u) |\nabla u|^2 + h(u) . \quad (1.5.1)$$

v sei der (nach aussen gerichtete) Normaleneinheitsvektor von $\partial\Omega_R$. Die Normalableitung hängt im wesentlichen unter anderem von der Geometrie des Randes $\partial\Omega_R$ und der eingeführten Randbedingungen ab. Nehmen wir an, dass sich eine Hyperfläche $\partial\Omega_R$ in \mathbb{R}^N lokal durch ein reguläres Funktionensystem

$$x^j = x^j(\xi^1, \dots, \xi^{N-1}) = x^j(\xi^\alpha) \quad j = 1, \dots, N \quad \alpha = 1, \dots, N-1$$

darstellen lässt. Dann induziert die Metrik g_{ik} des \mathbb{R}^N eine Metrik $g_{\alpha\beta}$ in der Hyperfläche $\partial\Omega_R$ durch

$$g_{\alpha\beta} := g_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial \xi^\beta} . \quad (1.5.2)$$

Summationskonvention:

Summenbildungen, die mit lateinischen Indizes gekennzeichnet sind, laufen von 1 bis N , griechische Summationsbuchstaben laufen von 1 bis $N-1$.

Besitzen Tensoren lateinische und griechische Indizes, so stehen im Tensorenkalkül die lateinischen Indizes im Zusammenhang mit dem metrischen Tensor g_{ik} und griechische Indizes mit dem metrischen Tensor $g_{\alpha\beta}$.

Wir können für die gewöhnlichen partiellen Ableitungen $\partial x^i/\partial \xi^\alpha$ auch $x^i_{,\alpha}$ schreiben. Damit schreibt sich (1.5.2) in Kurzform

$$g_{\alpha\beta} = g_{ik} x^i_{,\alpha} x^k_{,\beta} . \quad (1.5.2')$$

Das Symbol $x^i_{,\alpha}$ gibt kein Anlass zu Verwechslungen mit einer kovarianten Ableitung, da x^i hinsichtlich Koordinatentransformationen in $\partial\Omega_R$ als Skalare zu betrachten sind. Der kontravariante (konjugierte) Tensor $g^{\alpha\beta}$ ist implizit über die Relation

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} := \delta_\gamma^\alpha$$

definiert. Daraus lässt sich ein Tensor \bar{g}^{ik} definieren durch

$$\bar{g}^{ik} := g^{\alpha\beta} x_{,\alpha}^i x_{,\beta}^k. \quad (1.5.3)$$

\bar{g}^{ik} lässt sich als "Orthogonalprojektion" von g^{ik} in den Tangentialraum von $\partial\Omega_R$ interpretieren. Sei $w(x)$ eine beliebige Funktion, die differenzierbar ist. Auf $\partial\Omega_R$ lässt sich die 1. Beltramische Invariante $|\bar{\nabla}w|^2 = g^{ik} w_{,i} w_{,k}$ als Summe eines Ausdruckes für die Tangentialableitung $|\bar{\nabla}_S w|^2$ und eines Ausdruckes für die Normalableitung $\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2$ darstellen.

$$|\bar{\nabla}w|^2 = |\bar{\nabla}_S w|^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 \quad (1.5.4)$$

$|\bar{\nabla}_S w|^2$ ist die 1. Beltramische Invariante bezüglich der induzierten Metrik $g^{\alpha\beta}$. Sie lässt sich mit dem Tensor (1.5.3) darstellen, indem wir die Kettenregel auf $w = w(x(\xi))$ anwenden. Es folgt

$$|\bar{\nabla}_S w|^2 = g^{\alpha\beta} w_{,\alpha} w_{,\beta} = g^{\alpha\beta} x_{,\alpha}^i x_{,\beta}^k w_{,i} w_{,k} = \bar{g}^{ik} w_{,i} w_{,k}.$$

Das Quadrat der Normalableitung hat die Form $\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = (w_{,k} v^k)^2 = v^i v^k w_{,i} w_{,k}$. Somit lässt sich Beziehung (1.5.4) auch in der Form

$$g^{ik} w_{,i} w_{,k} = \bar{g}^{ik} w_{,i} w_{,k} + v^i v^k w_{,i} w_{,k} \quad (1.5.5)$$

schreiben. Äquivalent zu (1.5.5) ist die folgende Gleichung in Tensorkomponentenschreibweise

$$g^{ik} = \bar{g}^{ik} + v^i v^k, \quad (1.5.5')$$

d.h. den kontravarianten metrischen Tensor g^{ik} des \mathbb{R}^N können wir zerlegen in einen Orthogonalteil $v^i v^k$ und einen Tangentialteil \bar{g}^{ik} .

Als nächstes berechnen wir die Normalableitung für eine P-Funktion der Form (1.5.1). $u(x)$ ist eine Lösung von Problem (1.3.2') mit konstanten Dirichletrandbedingungen. Daraus folgt, dass der Gradient $\bar{\nabla}_S$ auf der (Hyper-) Fläche $\partial\Omega_R$ identisch verschwindet. Somit lässt sich die P-

Funktion (1.5.1), welche auf $\partial\Omega_R$ spezialisiert wird, schreiben als

$$P = g(0) \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)^2 + h(0) .$$

Wir bilden auf $\partial\Omega_R$ die Normalableitung von P und erhalten

$$\frac{\partial P}{\partial v} = g'(0) \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)^3 + 2g(0) \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + h'(0) \frac{\partial u}{\partial v} , \quad (1.5.6)$$

$$\text{mit } \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} := u_{,ik} v^i v^k .$$

Die 2. Beltramische Invariante $\bar{\Delta}u$ bezüglich der Metrik g^{ik} lässt sich auf $\partial\Omega_R$ ähnlich zerlegen wie die 1. Beltramische Invariante $|\bar{\nabla}u|^2$. Gemäss Formel (A.82) gilt die Beziehung

$$\bar{\Delta}u = \bar{\Delta}_{N-1}u + \kappa \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2} . \quad (1.5.7)$$

Die skalare Grösse κ ist die mittlere Krümmung der Hyperfläche $\partial\Omega_R$ bezüglich der induzierten Metrik $g^{\alpha\beta}$. κ ist definiert durch die Spur des 2. Fundamentaltensors b^α_β von $\partial\Omega_R$.

$$\kappa := -g^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = -b^\beta_\beta$$

Das Vorzeichen von κ wird so definiert, dass obige Definition für eine Hypersphäre S_{N-1} einen positiven Wert liefert ($\kappa = (N-1)/R$). Man kann zeigen, dass die Summe der Normalkrümmungen im Falle einer Hyperfläche $\partial\Omega$ in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M_N für $N-1$ orthogonale Richtungen in einem Punkt konstant und gleich dem oben definierten κ ist. Aus der Dirichletrandbedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega_R$ folgt

$$\bar{\Delta}_{N-1}u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_R .$$

Mit der Beziehung (1.5.7) kann die Differentialgleichung (1.3.2') auf $\partial\Omega_R$ geschrieben werden als

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2} + \kappa \frac{\partial u}{\partial v} + r^k u_{,k} + \lambda f(0) = 0 , \quad (1.5.8)$$

$$\text{mit } r^k = \frac{b^k}{\rho} - (N-2) \frac{a^{ik}}{\rho} \frac{\partial}{\partial x^i} (\ln \sqrt{\rho}) - \frac{1}{\rho \sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{a} a^{ik}) \Big|_{\partial\Omega_R}, \quad a := \det [a_{ij}].$$

(1.5.8) in (1.5.6) eingesetzt ergibt die Normalableitung von P auf dem Rand $\partial\Omega_R$

$$\frac{\partial P}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \left(g'(0) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 - 2g(0) \kappa \frac{\partial u}{\partial \nu} - 2g(0) r^k u_{,k} + h'(0) - 2\lambda f(0)g(0) \right). \quad (1.5.9)$$

Wir wollen in obiger Formel (1.5.9) noch die Dirichletrandbedingungen für die Lösung u mit einbeziehen, um den Term $r^k u_{,k}$ anders zu schreiben. Zu diesem Zweck können wir die Hyperfläche $\partial\Omega_R$ auffassen als Niveauläche von $u(x) = 0$. Dann gilt für die k-te Komponente v^k des (nach aussen gerichteten) Normaleneinheitsvektors ν (siehe Abschnitt 1.3)

$$v^k = - \frac{g^{ks} u_{,s}}{|\nabla u|}. \quad (1.5.10)$$

Es muss in obiger Beziehung (1.5.10) das negative Vorzeichen gesetzt werden, damit ν ein nach aussen gerichteter Vektor von $\partial\Omega$ ist ($u \geq 0$ in Ω). Wir lösen (1.5.10) nach $u_{,m}$ auf und erhalten für $r^k u_{,k}$ den Ausdruck

$$r^k u_{,k} = - |\nabla u| r^k v_k = \frac{\partial u}{\partial \nu} r^k v_k. \quad (1.5.11)$$

Setzen wir (1.5.11) in (1.5.9) ein, so erhalten wir folgender Ausdruck für die Normalableitung,

$$\frac{\partial P}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu} \left(g'(0) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 - 2g(0) \kappa \frac{\partial u}{\partial \nu} - 2g(0) r^k v_k \frac{\partial u}{\partial \nu} + h'(0) - 2\lambda f(0)g(0) \right).$$

Wir fassen obige Rechnung im folgenden Lemma 1.5.1 zusammen:

Lemma 1.5.1 (Normalableitung von P auf $\partial\Omega$)

Sei u eine $C^2(\Omega \cup \partial\Omega)$ Lösung des Dirichletproblems (1.3.2'), dann gilt für

$$P = g(u) |\nabla u|^2 + h(u)$$

auf dem Rand $\partial\Omega_R$ die Gleichung

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial v} \left(g'(0) \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)^2 - 2g(0) \kappa \frac{\partial u}{\partial v} - 2g(0) r^k v_k \frac{\partial u}{\partial v} + h'(0) - 2\lambda f(0)g(0) \right). \quad (1.5.12)$$

v ist der (nach aussen) gerichtete Normaleneinheitsvektor von $\partial\Omega_R$ mit $g_{ik} v^i v^k = 1$. κ ist die mittlere Krümmung von $\partial\Omega_R$ bezüglich der induzierten Metrik $g_{\alpha\beta}$ und ist die Spur des 2. Fundamentaltensors b^α_β von $\partial\Omega_R$. κ ist so definiert, dass für eine Hypersphäre in E^N vom Radius R die Beziehung $\kappa = (N-1)/R$ gilt. r^k ist beim Problem (1.3.2') definiert.

Bemerkungen:

1. Falls die Hyperfläche $\partial\Omega_R$ implizit durch eine Funktion $\Psi(x^1, \dots, x^N) = 0$ gegeben ist, dann berechnet sich κ nach der bekannten Formel von Bonnet (siehe Formel (A.78) im Anhang).

$$\kappa = -\overline{\text{div}} v = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ik} v_k \right), \quad \text{mit } v = \pm \frac{\nabla \Psi}{|\nabla \Psi|}, \quad g = \det(g_{ij}).$$

Im ebenen Fall $N=2$ ist $\kappa = k_g$ (geodätische Krümmung einer Linie in R^2)

2. Falls gilt: $h'(u) = 2\lambda f(u)g(u)$, so reduziert sich (1.5.12) zu

$$\frac{\partial P}{\partial v} = 2g(0) \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)^2 \left(\frac{g'(0)}{2g(0)} \frac{\partial u}{\partial v} - (\kappa + r^k v_k) \right). \quad (1.5.13)$$

3. Im nächsten Abschnitt werden wir Randwertprobleme betrachten, die Anlass geben, eine konforme Metrik $g_{ij} := \rho(x) \delta_{ij}$ einzuführen. Für diesen Fall wollen wir die Normalableitung $\partial P / \partial v$ angeben. Zwischen $\partial P / \partial v$ im Riemannschen Sinn und $\partial P / \partial n$ im euklidischen Sinn besteht über die konforme Metrik der Zusammenhang

$$\frac{\partial u}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Ebenfalls besteht gemäss Formel (A.79) zwischen der mittleren Krümmung κ von $\partial\Omega_R$ ($\partial\Omega_R$ mit der von g_{ij} induzierten Metrik) und der mittleren Krümmung H von $\partial\Omega$ ($\partial\Omega$ mit der von δ_{ij} induzierten Metrik) der folgende Zusammenhang,

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(H + (N-1) \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\rho} \right).$$

Der Ausdruck r^k in (1.3.2') hat bezüglich der oben definierten konformen Metrik die Form

$$r^k = \frac{b^k}{\rho} - \frac{(N-2)}{\rho} (\ln \sqrt{\rho})_{,k}.$$

Setzen wir alle obigen Grössen in (1.5.13) ein, so erhalten wir

$$\frac{\partial P}{\partial v} = 2g(0) \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)^2 \left(\frac{g'(0)}{2g(0)} \frac{\partial u}{\partial v} - \frac{H + \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\rho} + b^k n_k}{\sqrt{\rho}} \right). \quad (1.5.14)$$

(1.5.14) würde man auch durch eine klassische Rechnung, d.h. ohne Zuhilfenahme von differentialgeometrischen Hilfsmitteln erhalten. Bei allgemeinen Randwertproblemen der Form (1.3.2) ist der "differentialgeometrische" Weg aber eleganter und weniger rechenaufwendig. Der Ausdruck für $\partial P / \partial v$ hängt nicht von N ab!

1.6 Folgerungen aus dem Maximumprinzip

1.6.1 Maximum einer P-Funktion in einem Punkt, wo $\bar{\nabla}u = 0$ ist

Nachdem wir in den vorangegangenen Abschnitten einige elliptische Gleichungen bzw. Ungleichungen für allgemeine Formen einer P-Funktion

$$P = g(u) |\bar{\nabla}u|^2 + h(u), \quad u \text{ eine Lösung von (1.3.2')} \quad (1.6.1)$$

hergeleitet haben, wollen wir in diesem Abschnitt das Maximumprinzip (siehe Abschnitt 1.2) für spezielle P-Funktionen anwenden. Die Funktion g wird später geeignet gewählt, und h soll die Beziehung

$$h'(u) = 2\lambda f(u)g(u)$$

erfüllen. Falls die Funktionen a^{ik} , b^i , ρ und das Gebiet Ω_R im Dirichletproblem (1.3.2') gewisse Voraussetzungen erfüllen, nimmt P sein Maximum in einem Punkt P an, wo $g^{ik}u_{,i}u_{,k} = 0$ ist. Daraus erhalten wir eine Ungleichung der Form

$$|\bar{\nabla}u|^2 \leq s^2(u) \quad \text{mit} \quad s^2(u) := \frac{h(u_{\max}) - h(u)}{g(u)}. \quad (1.6.2)$$

In Abschnitt 2.2 werden wir Ober- bzw. Unterfunktionen konstruieren. Dort werden Ungleichungen vom Typ (1.6.2) von Bedeutung sein. Aus Gründen der Einfachheit schränken wir uns aber bezüglich der allgemeinen Problemklasse (1.3.2) etwas ein und betrachten im folgenden Teil dieser Arbeit Probleme, die Anlass geben zur Einführung einer konformen Metrik,

$$\begin{aligned} \Delta u + b^k(x) u_{,k} + \lambda \rho(x) f(u) &= 0 && \text{in } \Omega \subset E^N \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \\ \rho &> 0 && \text{in } \Omega \cup \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

In [13] findet man eine Uebersicht über die Existenz von positiven Lösungen für verschiedene Nichtlinearitäten $f(u)$. In der obigen Problemklasse (1.6.3) sind insbesondere "euklidische" Fälle (d.h. setze im obigen System $\rho=1$ und $b^k(x)=0$, $k=1, \dots, N$), aber auch Probleme mit einem selbstadjungierten Differentialausdruck

$$\begin{aligned}
 (\sigma(x)u_{r^k})_{,k} + \lambda f(u) &= 0 && \text{in } \Omega \\
 u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \\
 \sigma &> 0 && \text{in } \Omega \cup \partial\Omega
 \end{aligned}
 \tag{1.6.4}$$

enthalten (setze in (1.6.3) $\rho=1/\sigma$ und $b^k=\sigma_{,k}/\sigma$). Semilineare elliptische Randwertprobleme kommen z.B. in der technischen Chemie oder bei chemisch - thermischen Problemen (z.B. Gleichung mit Gelfand-Nichtlinearität $f(u) = e^u$) vor. (siehe [2], [12] und [19]) In diesen Anwendungsgebieten wird mit dem Ausdruck $\rho(x)f(u)$ eine ganz bestimmte, vom Ort x abhängige Reaktionskinetik festgelegt. Den Ausdruck $b^k(x)u_{,k}$ bezeichnet man oft als konvektiven Term. Die Lösung $u(x)$ kann eine Temperatur oder eine Konzentration einer chemischen Substanz beschreiben. Wir nehmen an, dass sich Reaktionen im chemischen Gleichgewicht befinden (steady - state). Meistens sind nur chemische Gleichgewichte beobachtbar. Somit steht die Diskussion von stabilen Gleichgewichtslösungen, d.h. Lösungen, die nicht von der Zeit t abhängen, von semilinearen parabolischen Gleichungen (oder Systemen) im Vordergrund. Die Problemklasse (1.6.3) kommt aber noch in vielen anderen Gebieten der Naturwissenschaften vor (siehe z.B. [6]). Um die Formeln der letzten Abschnitte anwenden zu können, bringen wir (1.6.3), gemäss dem Vorgehen in Abschnitt 1.3, in die differentialgeometrische Form. Wir führen zu diesem Zweck den folgenden metrischen Tensor in Ω ein,

$$g_{ij} = \rho(x) \delta_{ij} \tag{1.6.5}$$

$$(\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta^i_j : \text{Kronecker-Symbol}).$$

Der konjugierte Tensor (inverse Tensor) g^{ij} wird über die Beziehung (A.2) (siehe Anhang) definiert und lautet

$$g^{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\rho(x)}. \tag{1.6.5'}$$

(1.6.5) definiert eine Metrik, die konform zur euklidischen Metrik δ_{ij} ist. Eine Bemerkung über die konforme Metrik findet man im Anhang (Beziehungen (A.9) und (A.10)). Somit können wir zu (1.6.3) ein äquivalentes Problem der folgenden Form,

$$\begin{aligned}
 \bar{\Delta} u + r^k u_{,k} + \lambda f(u) &= 0 && \text{in } \Omega_R \\
 u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_R
 \end{aligned}
 \tag{1.6.3'}$$

formulieren. Der Laplace - Beltrami Operator und der kontravariante Vektor r^k haben in der konformen Metrik (1.6.5) die Formen

$$\bar{\Delta} u := g^{ik} u_{,ik} = \frac{\Delta u}{\rho} + \frac{N-2}{\rho} (\ln \sqrt{\rho})_{,k} u_{,k}, \quad (1.6.6)$$

$$r^k := \frac{b^k}{\rho} - \frac{N-2}{\rho} (\ln \sqrt{\rho})_{,k}. \quad (1.6.7)$$

Zur obigen Problemklasse (1.6.3') treten im folgenden immer wiederkehrende Grössen auf, welche wir hier festlegen wollen:

$$u_{\max} := \max_{\Omega} u(x), \quad (1.6.8)$$

$$|\bar{\nabla} u|^2 := \frac{|\nabla u|^2}{\rho}, \quad (1.6.9)$$

$$\bar{\tau}_{\max} := \max_{\partial\Omega} |\bar{\nabla} u|^2, \quad (1.6.10)$$

$$k^b := \frac{H + \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + \frac{b^k n_k}{\sqrt{\rho}}, \quad (1.6.11)$$

$$k_{\min}^b := \min_{\partial\Omega} k^b, \quad (1.6.12)$$

$$R_g := \max_{P \in \Omega} \left\{ \min_{Q \in \partial\Omega} \int_P^Q \sqrt{\rho(r)} \, dr \right\}, \quad (1.6.13)$$

Integration von P nach Q entlang einer geodätischen Linie γ .

Mit n bezeichnen wir den nach aussen gerichteten Normalenvektor von $\partial\Omega$ im euklidischen Sinn, und ν ist der entsprechende Vektor von $\partial\Omega_R$. Es gilt der Zusammenhang

$$\nu_k = \sqrt{\rho} \, n_k, \quad \nu_k \nu^k = 1.$$

Im Fall $N = 2$ können wir die "geometrische" Grösse k^b als Summe der Form

$$k^b = \kappa_g + \frac{b^k n_k}{\sqrt{\rho}}$$

schreiben. κ_g ist die geodätische Krümmung der Randkurve $\partial\Omega_R$. (siehe Anhang Formel (A.79')) und R_g ist der Radius des grössten in Ω_R eingeschriebenen geodätischen Kreises (oder auch geodätische (Hyper-) Kugel im Fall $N \geq 3$).

Mit der Lösung u von Problem (1.6.3) definieren wir folgende P - Funktionen:

$$P := |\nabla u|^2 + 2\lambda \int_0^u f(y) dy, \quad (h' = 2\lambda f), \quad (1.6.14)$$

oder

$$P := g(u) |\nabla u|^2 + 2\lambda \int_0^u f(y) g(y) dy, \quad (h' = 2\lambda fg). \quad (1.6.15)$$

Wir wählen $g(u)$ so, dass der Koeffizient des führenden Terms $|\nabla u|^4$ in der Formel (1.4.11) bzw. (1.4.12) Null wird. Dies ist der Fall, wenn wir $g = 1$ wählen (Ansatz 1.6.14). Nichttriviale Wahlen von g sind durch die folgenden beiden Klassen von Funktionen gegeben:

$$\text{allgemeiner Fall } N > 1: (g^{-1/2})'' = 0; \quad \text{d.h. } g(u) = \frac{\alpha}{(u + \beta)^2}, \quad (1.6.16)$$

$$\text{ebener Fall } N = 2: (\ln g)'' = 0; \quad \text{d.h. } g(u) = \alpha e^{-\beta u}. \quad (1.6.17)$$

Mit dem Ansatz (1.6.15) für P und den obigen Wahlen von g ergeben sich für die Ungleichung (1.6.2) folgende Formen, für welche wir in den folgenden Korollaren Voraussetzungen angeben werden:

$$\text{Falls } N > 1: |\nabla u|^2 \leq s^2(u; u_{\max}, \beta) = 2\lambda \int_u^{u_{\max}} K_1(y) f(y) dy, \quad (1.6.18)$$

$$\text{mit } K_1(y) := \left(\frac{u + \beta}{y + \beta} \right)^2 \leq 1, \quad \text{für } u \leq y \leq u_{\max},$$

$$\text{Falls } N = 2: |\nabla u|^2 \leq s^2(u; u_{\max}, \beta) = 2\lambda \int_u^{u_{\max}} K_2(y) f(y) dy, \quad (1.6.19)$$

$$\text{mit } K_2(y) := e^{-\beta(y-u)} \leq 1, \quad \text{für } u \leq y \leq u_{\max}.$$

Mit einer geeigneten Wahl von β in den Funktionen g gemäss Beziehungen (1.6.16/17) erreichen wir eine Verschärfung der Ungleichungen (1.6.18/19). Der Wertebereich des reellen

Parameters β wird im folgenden durch eine Bedingung für die Normalableitung von P auf $\partial\Omega$ (Formel 1.5.14) eingeschränkt. Die Konstante α in (1.6.16/17) wählen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich 1 (kürzt sich weg in (1.6.18/19)).

Korollar 1.6.1 (konforme Metrik, $g(u) = (u + \beta)^{-2}$, $N > 1$)

Sei $u(x)$ eine (positive) $C^3(\Omega) \cap C^2(\Omega \cup \partial\Omega)$ - Lösung des Dirichletproblems (1.6.3) in einem beschränkten Gebiet Ω des euklidischen Raumes E^N . Wir setzen

$$P := \frac{|\nabla u|^2}{(u + \beta)^2} + 2\lambda \int_0^u \frac{f(y)}{(y + \beta)^2} dy, \quad \text{mit} \quad \frac{\bar{r}_{\max}}{k_{\min}^b} \leq \beta < \infty.$$

Für die gegebenen Funktionen $\rho, b^k, k = 1, \dots, N$ in (1.6.3) und k^b treffen wir folgende Annahmen:

$$(i) \quad M_N^{kl} + \frac{\lambda \rho f(u)}{u + \beta} \delta^{kl} \quad \text{positiv semidefinit in } \Omega, \quad (1.6.20)$$

mit

$$M_N^{kl} := -\frac{\partial b^k}{\partial x^l} + b^k (\ln \rho)_{,1} - (N-2) (\ln \sqrt{\rho})_{,k} (\ln \sqrt{\rho})_{,1} - \frac{1}{2} [\Delta \ln \rho + b^s (\ln \rho)_{,s}] \delta^{kl},$$

$$(ii) \quad k_{\min}^b \geq 0.$$

Behauptung: Es gilt die Ungleichung

$$|\nabla u|^2 \leq s^2(u) \quad (1.6.21)$$

$$\text{mit} \quad s^2(u) := 2\lambda \int_u^{u_{\max}} K_1(y) f(y) dy, \quad \text{und} \quad K_1(y) = \left(\frac{u + \beta}{y + \beta} \right)^2.$$

Gleichheit gilt, falls Ω ein (Hyper-) Streifen ist ($\beta \rightarrow \infty$) und $\rho = 1, b^k = 0, k = 1, \dots, N$ in (1.6.3) gewählt wird.

Beweis:

Wir benützen die elliptische Ungleichung (1.4.11) in Lemma 1.4.3 und stellen den "differentialgeometrischen" Ausdruck

$$-2g \left(r^{kl} + R^{kl} \right) u_{,k} u_{,l} \quad (1.6.22)$$

durch Terme mit gewöhnlichen partiellen Ableitungen dar. Der Ausdruck für die kontravariante Ableitung von r^k hat die Form

$$r^{kl} = \frac{r^k{}_{,l}}{\rho} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial r^k}{\partial x^l} + r^s \Gamma_{sl}^k \right\} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial r^k}{\partial x^l} + \frac{r^s}{2\rho} \left(\rho_{,s} \delta_{lk} + \rho_{,l} \delta_{sk} - \rho_{,k} \delta_{sl} \right) \right\}.$$

Wir berechnen die gewöhnliche partielle Ableitung von r^k und erhalten

$$\frac{\partial r^k}{\partial x^l} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial b^k}{\partial x^l} - b^k \frac{\rho_{,l}}{\rho^2} - \frac{N-2}{2\rho^2} \left(\rho_{,kl} - 2 \frac{\rho_{,k} \rho_{,l}}{\rho} \right).$$

Den Ausdruck für den kontravarianten Riccitenor R^{kl} in der konformen Metrik finden wir im Anhang (Formeln (A.32) und (A.33)). Wir setzen die entsprechenden Ausdrücke oben in (1.6.22) ein und erhalten

$$-2g \left(r^{kl} + R^{kl} \right) u_{,k} u_{,l} = \frac{2g}{\rho^2} \left\{ -\frac{\partial b^k}{\partial x^l} + \frac{b^k \rho_{,l}}{\rho} - \frac{N-2}{4} \frac{\rho_{,k} \rho_{,l}}{\rho^2} - \frac{1}{2\rho} \left(\Delta \rho - \frac{|\nabla \rho|^2}{\rho} + b^s \rho_{,s} \right) \delta^{kl} \right\} u_{,k} u_{,l}.$$

Der Tensor M_N^{kl} in Voraussetzung (1.6.20) ergibt sich aus obiger Gleichung, indem wir setzen:

$$\frac{\rho_{,l}}{\rho} = (\ln \rho)_{,l} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\rho} \left(\Delta \rho - \frac{|\nabla \rho|^2}{\rho} \right) = \Delta (\ln \rho).$$

Mit Lemma 1.4.3 und der Voraussetzung (i) erhalten wir folgende elliptische Ungleichung für P:

$$\bar{\Delta} P + \frac{L^k P_{,k}}{g(u) |\nabla u|^2} \geq \frac{2g(u)}{\rho^2} \left\{ M_N^{kl} + \frac{\lambda \rho f(u)}{u + \beta} \delta^{kl} \right\} u_{,k} u_{,l} \geq 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (1.6.23)$$

$$\text{mit } L^k := 0.5 P^{,k} - \left(2\lambda fg - g' |\nabla u|^2 \right) u^{,k} - g |\nabla u|^2 r^k, \quad g(u) := \frac{1}{(u + \beta)^2}.$$

Mit der Gleichung (1.5.14) und der Voraussetzung (ii) erhalten wir für die Normalableitung

von P auf dem Rand $\partial\Omega$ folgende Ungleichung

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{2}{\beta^2} \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)^2 \left(\frac{|\nabla u|}{\beta} - k^b \right) \leq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_R, \quad (1.6.24)$$

$$\text{falls } \frac{\bar{\tau}_{\max}}{k_{\min}^b} \leq \beta < \infty.$$

Aus obigen Ungleichungen (1.6.23) und (1.6.24) folgt, gemäss dem kombinierten Maximumprinzip (Lemma 1.2.5), $P = P_{\max}$ in einem Punkt, wo $g^{ik}u_{,i}u_{,k} = 0$ ist. Eine kleine Umformung ergibt die Ungleichung (1.6.21) der Behauptung.

◇

Bemerkungen zu Korollar 1.6.1

1. "Bestmögliche" Wahl von β :

Um eine "gute" Verschärfung von Ungleichung (1.6.21) zu erhalten, müssen wir β möglichst klein wählen. Die Wahl von β , welche die "bestmögliche" Verschärfung von Ungleichung (1.6.21) ergibt, ist durch die Definition

$$\beta := \frac{\bar{\tau}_{\max}}{k_{\min}^b} \quad (1.6.25)$$

gegeben.

2. Grenzfall $\beta \rightarrow \infty$:

Bilden wir in Korollar 1.6.1 den Limes $\beta \rightarrow \infty$, so erhalten wir das entsprechende Resultat, bei dem eine P-Funktion der Form (1.6.14) als Ausgangspunkt genommen wird. Die Voraussetzungen (i) und (ii) sind zu ersetzen durch:

(i') M_N^{kl} positiv semidefinit in Ω ,

(ii') $k_{\min}^b \geq 0$ (unveränderte Bedingung).

Daraus folgt die Ungleichung

$$|\nabla u|^2 \leq s^2 := 2\lambda \int_u^{u_{\max}} f(y) dy.$$

3. **Andere hinreichende Bedingungen:**

M_N^{kl} hängt nur von den gegebenen Funktionen $\rho(x)$ und $b^k(x)$ $k=1, \dots, N$ und der Dimension N ab! Falls $\beta < \infty$ und $f(u) \geq 0$ für $u \geq 0$ ist, dann ist die obige Bedingung (i') hinreichend für die Voraussetzung (i) des Korollars. Häufig ist $f(u)$ eine wachsende Funktion (z.B. $f(u) = \exp(u)$). Dann genügt die folgende Bedingung

$$f(0) \geq 0 \quad \text{und} \quad M_N^{kl} \text{ positiv semidefinit in } \Omega.$$

4. **"euklidische" oder "differentialgeometrische" Herleitung von Ungleichung (1.6.23):**

Die "euklidische" Herleitung (d.h. ohne Verwendung von differentialgeometrischen Ausdrücken) einer elliptischen Ungleichung für P , analog dem Vorgehen in Kapitel 1.4, führt zu anderen Resultaten als die "differentialgeometrische" Rechnung. Die "euklidische" Rechnung ergibt folgende Ungleichung für den Ansatz (1.6.14) (ohne Zwischenrechnungen),

$$\Delta P - \frac{L_k P_{,k}}{\rho^{-1} |\nabla u|^2} \geq \frac{2}{\rho} \left\{ -\frac{\partial b^k}{\partial x^1} - \left(\frac{\Delta \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + b^s (\ln \sqrt{\rho})_{,s} \right) \delta^{kl} \right\} u_{,k} u_{,l}, \quad (1.6.26)$$

$$\text{mit } L_k := 0.5 P_{,k} - 2\lambda f u_{,k} - \rho^{-1} |\nabla u|^2 \left(b^k + (\ln \rho)_{,k} \right).$$

Für die Normalableitung von P ergibt sich

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{2}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 \left(H + \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\rho} + b^k n_k \right).$$

Um das kombinierte Maximumprinzip (Lemma 1.2.5) für P anwenden zu können, muss folgendes vorausgesetzt werden:

$$(i') \quad M^{kl} := -\frac{\partial b^k}{\partial x^1} - \left(\frac{\Delta \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + b^s (\ln \sqrt{\rho})_{,s} \right) \delta^{kl} \text{ positiv semidefinit in } \Omega, \quad (1.6.27)$$

$$(ii') \quad H + \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\rho} + b^k n_k \geq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \text{ (unveränderte Bedingung).}$$

Man vergleiche den obigen Tensor (1.6.27) mit dem Tensor (1.6.20) der Voraussetzung (i) des Korollars. Die "euklidische" Rechnung führt hier zu einer andern hinreichenden Bedingung für die Anwendung des Maximumprinzips. Insbesondere hängt die obige

Bedingung (1.6.27) nicht von der Dimension N ab! Die Unterschiede rühren daher, dass bei der Elimination des Terms

$$2g_{ij}u^{,ij}$$

in (1.4.7) die Schwarzsche Ungleichung einmal im "differentialgeometrischen" Sinn:

$$|\nabla u|^2 u_{,ij}u^{,ij} \geq u_{,ik}u^{,jk}u^{,i}u_{,j} \quad (1.6.28)$$

und ein zweites Mal im "euklidischen" Sinn

$$|\nabla u|^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} \geq \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k} \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial u}{\partial x^j} \quad (1.6.29)$$

benützt wurde. Für den Fall $N = 2$ könnte man zur Elimination des Terms $2g_{ij}u^{,ij}$ die Identität (A.83) benützen. Damit ergäben sich keine Unterschiede zwischen der "euklidischen" und der "differentialgeometrischen" Rechnung. Schreiben wir jedoch Ungleichung (1.6.28) mit Hilfe der konformen Metrik (1.6.5) in Terme mit gewöhnlichen partiellen Ableitungen um, so werden die Unterschiede zwischen (1.6.28) und (1.6.29) aus den folgenden beiden Gleichungen ersichtlich:

$$\rho^2 u_{,ij}u^{,ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} u_{,j} \frac{\rho_{,i}}{\rho} + \frac{N-2}{4} \frac{(u_{,s}\rho_{,s})^2}{\rho^2} + \Delta u \frac{u_{,s}\rho_{,s}}{\rho} + \frac{|\nabla u|^2 |\nabla \rho|^2}{2\rho^2}$$

und

$$\rho^2 u_{,ik}u^{,jk}u^{,i}u_{,j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k} u_{,i}u_{,j} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^k} u_{,i} \frac{\rho_{,k}}{\rho} |\nabla u|^2 + \frac{|\nabla \rho|^2 |\nabla u|^4}{4\rho^2}.$$

Es stellt sich die Frage, ob die Bedingung (i) in Korollar 1.6.1 schwächer ist, als die obige Bedingung (i') der "euklidischen" Herleitung. Wir wollen diese Frage für den Spezialfall $b^k(x) = 0$, $k = 1, \dots, N$ in (1.6.3) beantworten (kein konvektiver Term). Die Menge von nicht negativen Funktionen ρ in Ω , welche die Bedingung (i) in Korollar 1.6.1 erfüllen, lässt sich wie folgt beschreiben,

$$A := \left\{ \rho > 0 \text{ in } \bar{\Omega} \mid \left(\Delta \rho - \frac{|\nabla \rho|^2}{\rho} \right) \delta^{kl} + \frac{N-2}{2\rho} \rho_{,k}\rho_{,l} \text{ negativ semidefinit in } \Omega \right\}.$$

Die Bedingung (1.6.27) in Voraussetzung (i') hat im obigen Fall die Form

$$\frac{\Delta\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \leq 0 \quad \text{in } \Omega .$$

Daraus lässt sich die Menge A' definieren durch

$$A' := \left\{ \rho > 0 \text{ in } \bar{\Omega} \mid \Delta\rho - \frac{|\nabla\rho|^2}{2\rho} \leq 0 \text{ in } \Omega \right\} .$$

Im Fall $N = 2$ folgt direkt $A \supset A'$, da in diesem Fall aus der Bedingung, welche die Menge A' beschreibt, die Bedingung für die Menge A folgt. Somit ist die Bedingung (i) des Korollars 1.6.1 schwächer als die obige Bedingung (i'). Im Fall $N > 2$ ist der (symmetrische) Tensor M_N^{kl} in Korollar 1.6.1 nicht mehr diagonal. Wir können jedoch für jeden festen Punkt $x \in \Omega$ eine orthogonale Transformation der Koordinaten in E^N einführen, so dass M_N^{kl} diagonal wird. Es sei

$$y := T x \quad \text{mit } T^T T = T T^T = I ,$$

eine orthogonale Transformation, mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial\rho}{\partial y^1} \neq 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial y^2} = \dots = \frac{\partial\rho}{\partial y^N} = 0 .$$

Der Tensor M_N^{kl} wird punktweise auf Diagonalform transformiert, wobei die Ausdrücke

$$\Delta\rho - \frac{|\nabla\rho|^2}{\rho} \quad \text{und} \quad \Delta\rho - \frac{|\nabla\rho|^2}{2\rho}$$

unter der obigen Koordinatentransformation invariant bleiben. Somit erhalten wir für den Fall $N = 3$ die Beziehung

$$A = A' .$$

d.h. die Bedingung (i) des Korollars 1.6.2 und die obige Bedingung (1.6.27) in (i') sind zueinander äquivalent. Im Fall $N > 3$ ist aber (i') die schwächere Bedingung.

Bei Problemen der Form (1.6.4) mit einem selbstadjungierten Differentialausdruck sind ähnliche Aussagen zu erwarten.

5. Spezialfälle:

Wir wollen für einige Spezialfälle die Formen der Bedingungen (i) und (ii) in Korollar 1.6.1 festhalten.

a) "euklidische Fälle" ($\rho=1$ in 1.6.3):

(i) $M_N^{kl} = -\frac{\partial b^k}{\partial x^l}$ positiv semidefinit in Ω ,

(ii) $k^b = H + b^i n_i \geq 0$ auf $\partial\Omega$.

b) Probleme der Form (1.6.4) mit einem selbstadjungierten Differentialausdruck:
Setze in (1.6.20)

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \quad \text{und} \quad b^k = \frac{\sigma_{,k}}{\sigma}.$$

Daraus folgt

(i) $M_N^{kl} = -\frac{1}{\sigma} \left(\sigma_{,kl} + \frac{N-2}{4} \frac{\sigma_{,k} \sigma_{,l}}{\sigma} \right) + \frac{\Delta \sigma}{2\sigma} \delta^{kl} = -\frac{4}{N+2} \frac{(\sigma^{(N+2)/4})_{,kl}}{\sigma^{(N+2)/4}} + \frac{\Delta \sigma}{2\sigma} \delta^{kl}$

positiv semidefinit in Ω ,

(ii) $\bar{\kappa} := \sqrt{\sigma} \left(H + \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\sigma} \right) \geq 0$ auf $\partial\Omega$.

c) Probleme, welche keinen konvektiven Term besitzen ($b^k = 0, k = 1, \dots, N$):

(i) $M_N^{kl} = -(N-2) (\ln \sqrt{\rho})_{,k} (\ln \sqrt{\rho})_{,l} - \Delta (\ln \sqrt{\rho}) \delta^{kl}$ positiv semidefinit in Ω ,

(ii) $\bar{\kappa} := \frac{H + \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \geq 0$ auf $\partial\Omega$.

Man beachte, dass die Bedingung (ii) zwischen Fall b) und c) nicht ändert.

Für den 2-dimensionalen Fall wollen wir die analogen Ergebnisse in einem speziellen Korollar 1.6.2 festhalten.

Korollar 1.6.2 (konforme Metrik, $g(u) = e^{-\beta u}$, ebener Fall $N = 2$)

Sei $u(x)$ eine (positive) $C^3(\Omega) \cap C^2(\Omega \cup \partial\Omega)$ - Lösung des Dirichletproblems (1.6.3) in einem ebenen, beschränkten Gebiet Ω des euklidischen Raumes E^2 . Wir setzen

$$P := e^{-\beta u} |\nabla u|^2 + 2\lambda \int_0^u f(y) e^{-\beta y} dy, \quad \text{mit } 0 \leq \beta \leq \frac{2k_{\min}^b}{\bar{r}_{\max}}.$$

Für die gegebenen Funktionen $\rho, b^k(x)$ $k = 1, 2$ und k^b treffen wir folgende Annahmen:

$$(i) \quad M_2^{kl} + \beta \rho \left(0.5\lambda f(u) + \frac{b^s}{\rho} u_s \right) \delta^{kl} \quad \text{positiv semidefinit in } \Omega, \quad (1.6.30)$$

$$\text{mit } M_2^{kl} := b^k b^{k1} - \frac{\partial b^k}{\partial x^1} + b^k (\ln \rho)_{,1} - \frac{1}{2} \left\{ \Delta (\ln \rho) + b^s (\ln \rho)_{,s} \right\} \delta^{kl}, \quad (1.6.31)$$

$$(ii) \quad k_{\min}^b \geq 0.$$

Behauptung: Es gilt die Ungleichung

$$|\nabla u|^2 \leq s^2(u) \quad (1.6.32)$$

$$\text{mit } s^2(u) := 2\lambda \int_u^{u_{\max}} f(y) e^{-\beta(y-u)} dy.$$

Gleichheit gilt, falls das Gebiet Ω ein Streifen ist ($k_{\min}^b = 0, \beta = 0$), und $\rho=1, b^k=0, k=1, 2$ in (1.6.3) gewählt wird.

Beweis:

Wir wenden Gleichung (1.4.12) in Lemma 1.4.3 an. Die kontravariante Ableitung von r^k ist im Beweis von Korollar 1.6.1 berechnet worden. Sie lautet für den Fall $N = 2$,

$$r^{kl} = \frac{1}{\rho^2} \left\{ \frac{\partial b^k}{\partial x^1} - \frac{b^k \rho_{,1}}{\rho} + \frac{b^s}{2\rho} (\rho_{,s} \delta_{1k} + \rho_{,1} \delta_{sk} - \rho_{,k} \delta_{s1}) \right\}.$$

Der Ausdruck für die Gaußsche Krümmung K_G einer Riemannschen Mannigfaltigkeit mit einer konformen Metrik der Form (1.6.5) finden wir in Formel (A.27) des Anhangs. $\rho_{,j}/\rho$ ersetzen wir durch die logarithmische Ableitung. Wir erhalten mit Bedingung (i) folgende elliptische Gleichung bzw. Ungleichung für P :

$$\bar{\Delta} P - \frac{L^k P_{,k}}{g(u) |\nabla u|^2} = \frac{2g}{\rho^2} \left\{ M_2^{kl} + \beta \rho \left(0.5\lambda f(u) + \frac{b^s}{\rho} u_s \right) \delta^{kl} \right\} u_{,k} u_{,l} \geq 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (1.6.33)$$

$$\text{mit } L^k := P^{,k} - 2\rho^{-1} g (\lambda \rho f - b^s u_{,s}) u^{,k} - \rho^{-1} g |\nabla u|^2 b^k, \quad g(u) := e^{-\beta u}.$$

Mit der Voraussetzung (ii) und Gleichung (1.5.14) erhalten wir für die Normalableitung von P auf $\partial\Omega_R$

$$\frac{\partial P}{\partial \nu} = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 \left(\frac{\beta}{2} |\nabla u| - k^b \right) \leq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_R, \quad (1.6.34)$$

$$\text{falls } 0 \leq \beta \leq \frac{2 k_{\min}^b}{\bar{\tau}_{\max}}.$$

Aus obigen Ungleichungen (1.6.33) und (1.6.34) und mit Lemma 1.2.5 folgt $P = P_{\max}$ in einem Punkt, wo $g^{ik_{u,i,u,k}} = 0$ ist. Ueber eine kleine Umformung erhält man die Ungleichung (1.6.32) der Behauptung. \diamond

Bemerkungen zu Korollar 1.6.2

1. "Bestmögliche" Wahl von β

Wir können Ungleichung (1.6.32) verschärfen, indem wir β möglichst gross wählen. Andererseits wird β durch die Bedingung (1.6.34) eingeschränkt. Eine "bestmögliche" Wahl von β ist durch folgende Definition

$$\beta := \frac{2 k_{\min}^b}{\bar{\tau}_{\max}} \quad (1.6.35)$$

gegeben.

2. Grenzfall $\beta = 0$

Wir erhalten das entsprechende Resultat für den Ansatz (1.6.14) für P , indem wir im Korollar $\beta = 0$ setzen. Die Voraussetzungen (i) und (ii) sind zu ersetzen durch:

(i') M_2^{kl} positiv semidefinit in Ω , (Definition von M_2^{kl} siehe (1.6.31)),

(ii') $k_{\min}^b \geq 0$ (Bedingung bleibt unverändert).

Daraus folgt die Ungleichung

$$|\bar{\nabla}u|^2 \leq s^2 := 2\lambda \int_u^{u_{\max}} f(y) dy .$$

3. Aequivalente Formulierung von Bedingung (i)

In der Bedingung (i) wird die positive Semidefinitheit eines zweifachen (kontravarianten) Tensors verlangt. Wir wollen die Definition der positiven Semidefinitheit für Tensoren in Erinnerung rufen, indem wir den entsprechenden Begriff aus der Matrixalgebra auf Tensoren übertragen.

Definition 1.6.3 (positive (Semidefinitheit))

Ein symmetrischer $n \times n$ Tensor $M^{kl}(x)$ heisst positiv semidefinit in Ω , falls in jedem Punkt $x \in \Omega$ die zugehörige quadratische Form

$$Q_x(\xi) := M^{kl}(x) \xi_k \xi_l$$

die folgende Eigenschaft besitzt:

$$Q_x(\xi) \geq 0, \quad \text{für alle } \xi \in E^N \setminus \{0\} .$$

Falls in der obigen Bedingung das strikte Ungleichheitszeichen gilt, so spricht man von positiver Definitheit in Ω . Eine äquivalente Charakterisierung der positiven Semidefinitheit ist die folgende:

Ein symmetrischer $n \times n$ Tensor $M^{kl}(x)$ ist genau dann in Ω positiv semidefinit, wenn in jedem festen Punkt $x \in \Omega$ die Matrix M^{kl} keine negativen Eigenwerte besitzt.

Mit Hilfe des Wurzelsatzes von Vieta lässt sich die Bedingung (i) von Korollar 1.6.2 wie folgt äquivalent formulieren:

$$(i^*) \quad \text{Für den Tensor } A^{kl} := M_2^{kl} + \beta \rho^2 (0.5 \lambda \rho f(u) + b^s u_s) \delta^{kl}$$

$$\text{gilt: } \det(A^{kl}) = A^{11}A^{22} - (A^{12})^2 \geq 0 \quad \text{und}$$

$$\text{Spur}(A^{kl}) = A^{11} + A^{22} \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \Omega .$$

Diese einfache Aequivalenz gilt nur für 2×2 Tensoren. Für $n \times n$ Tensoren mit $n > 2$, sind die entsprechenden Bedingungen der positiven Semidefinitheit für A^{kl} etwas komplizierter.

4. Spezialfälle

a) "Euklidische Fälle" ($\rho = 1$ in (1.6.3)):

(i) $M_2^{kl} = b^k b^l - \frac{\partial b^k}{\partial x^l}$ positiv semidefinit in Ω ,

(ii) $k^b = k + b^i n_i$ auf $\partial\Omega$.

Zusatzbemerkung: Wählen wir für $b^1(x)$, $b^2(x)$ die folgenden Funktionen:

$$b^1(x) := \frac{1}{x^2 - x^1}, \quad b^2(x) := \frac{1}{x^1 - x^2}$$

dann gilt $M_2^{kl} \equiv 0$ in Ω . Wir erhalten für die P-Funktion (1.6.14) (setze $\beta=0$ in Korollar 1.6.2) die elliptische Gleichung

$$\bar{\Delta} P - \frac{L^k P_{,k}}{g(u) |\bar{\nabla} u|^2} = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Aus dieser Bedingung allein folgt

$$P = P_{\max} \text{ und } P = P_{\min} \text{ in Punkten, wo } |\bar{\nabla} u| = 0 \text{ ist oder auf } \partial\Omega.$$

b) Probleme mit einem selbstadjungierten Differentialausdruck (siehe 1.6.4)

Setze in (i) $\rho := \frac{1}{\sigma}$ und $b^k := \frac{\sigma_{,k}}{\sigma}$. Wir erhalten folgende Bedingungen:

(i) $M_2^{kl} + \frac{\beta}{\sigma} (0.5\lambda f(u) + \sigma_{,s} u_{,s}) \delta^{kl}$ positiv semidefinit in Ω ,

mit $M_2^{kl} := -(\ln \sigma)_{,kl} + \frac{1}{2} \frac{\Delta \sigma}{\sigma} \delta^{kl}$,

(ii) $\bar{\kappa} = \sqrt{\sigma} \left(k + \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\sigma} \right) \geq 0$ auf $\partial\Omega$.

Falls $\beta = 0$ ist, können wir die obige Bedingung (i), gemäss der vorangehenden Bemerkung 3, etwas umformulieren:

$$\det [M_2^{kl}] = \left\{ -(\ln \sigma)_{,11} + \frac{\Delta \sigma}{2\sigma} \right\} \left\{ -(\ln \sigma)_{,22} + \frac{\Delta \sigma}{2\sigma} \right\} - (\ln \sigma)_{,12} (\ln \sigma)_{,21} =$$

$$\det [\text{hess } q] - \frac{1}{4} \left\{ (\Delta q)^2 - |\nabla q|^4 \right\} \geq 0 \quad \text{in } \Omega$$

und $\text{Spur} [M_2^{kl}] = -\Delta \ln \sigma + \frac{\Delta \sigma}{\sigma} = \frac{|\nabla \sigma|^2}{\sigma^2} \geq 0 \quad \text{in } \Omega$ (automatisch erfüllt).

Dabei wurde gesetzt,

$$q := \ln \sigma \quad \text{und} \quad \det [\text{hess } q] := \det \begin{bmatrix} q_{,11} & q_{,12} \\ q_{,21} & q_{,22} \end{bmatrix} \quad (\text{Determinante der Hesseschen Matrix von } q).$$

c) Probleme, welche keinen konvektiven Term besitzen ($b^k = 0$, $k = 1, 2$ in 1.6.3):

(i) $M_2^{kl} + 0.5 \beta \lambda \rho f(u) \delta^{kl}$ positiv semidefinit in Ω , mit $M_2^{kl} := -\Delta (\ln \sqrt{\rho}) \delta^{kl}$

(ii) $\bar{\kappa} := \kappa_g = \frac{k + \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \geq 0$ auf $\partial\Omega$.

Wir finden diesen Fall in [8] oder [27]. Man beachte, dass die Tensoren M_N^{kl} in Korollar 1.6.1 und M_2^{kl} in Korollar 1.6.2 identisch sind, falls $N = 2$ ist. Der Ausdruck für κ_g in der obigen Bedingung (ii) ist hier die geodätische Krümmung der Randkurve $\partial\Omega$.

1.6.2 Obere Schranken für u_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$

Wir gehen von der Problemklasse (1.6.3) aus und schliessen für das Folgende die linearen Probleme aus ($f(u) \neq \lambda u$). Weiter nehmen wir an, dass für eine (positive) Lösung $u(x)$ von (1.6.3) eine Ungleichung der Form (1.6.18) in Ω gilt, falls $N > 1$ ist (bzw. Ungl. (1.6.19) für den Spezialfall $N = 2$). Wir erhalten eine obere Schranke für $\bar{\tau}_{\max}$, indem wir die Ungleichungen (1.6.18/19) auf dem Rand $\partial\Omega$ spezialisieren (Dirichletrandbedingungen einsetzen) und das Maximum, $\max_{\partial\Omega} |\bar{\nabla}u|$, auf der linken Seite bilden. Dabei setzen wir voraus, dass die Integralausdrücke in (1.6.18/19) endlich sind. Wir erhalten somit eine obere Schranke für $\bar{\tau}_{\max}$ der Form

$$\bar{\tau}_{\max} \leq s(0; u_{\max}, \beta), \quad \text{Definition von } s \text{ siehe (1.6.18/19)}. \quad (1.6.36)$$

Um eine obere Schranke für u_{\max} zu erhalten, führen wir eine Falllinienintegration der Ungleichung (1.6.18) (bzw. (1.6.19)) durch. Es sei $P \in \Omega$ ein Punkt, wo $u = u_{\max}$ ist und $Q \in \partial\Omega$ ein Randpunkt, $d\gamma$ das Bogenelement entlang einer geodätischen Linie γ von P nach Q . Dann gilt entlang γ die Ungleichung

$$-\frac{du}{d\gamma} \leq |\bar{\nabla}u|$$

und aus (1.6.18) bzw. (1.6.19) folgt

$$\int_0^{u_{\max}} \frac{dx}{s(x; u_{\max}, \beta)} \leq \int_P^Q d\gamma. \quad (1.6.37)$$

Das Integral auf der rechten Seite der obigen Gleichung (1.6.37) können wir mit Hilfe des geodätischen Radius R_g der grössten inbeschriebenen (Hyper-) Kugel von Ω_R abschätzen. Daraus erhalten wir folgende (implizite) obere Schranke für u_{\max} ,

$$\int_0^{u_{\max}} \frac{dx}{s(x; u_{\max}, \beta)} \leq R_g \quad (\text{Def. von } R_g \text{ siehe (1.6.13)}). \quad (1.6.38)$$

Lösungen des Ungleichungssystems (1.6.36) und (1.6.38) ergeben obere Schranken für u_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$.

In verschiedenen Situationen der folgenden Abschnitte benötigen wir obere Schranken für w_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$ des folgenden Hilfsproblems,

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} w + r^k w_{,k} + 1 &= 0 && \text{in } \Omega_R \\ w &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_R \end{aligned} \quad (1.6.39)$$

Der Laplace - Beltrami Operator bezüglich der konformen Metrik (1.6.5) ist in (1.6.6) definiert, und r^k definieren wir gemäss der Gleichung (1.6.7). Wir behandeln zuerst den Fall $N > 1$ und nehmen an, es gelte die Ungleichung (1.6.21) in der Behauptung von Korollar 1.6.1. Wir setzen in (1.6.21) für $\lambda f(u) := 1$ und erhalten die Beziehung

$$|\bar{\nabla} w| \leq s(w; w_{\max}, \beta) = \sqrt{2 \int_w^{w_{\max}} K_1(y) dy} = \sqrt{2 \frac{(w + \beta)(w_{\max} - w)}{w_{\max} + \beta}}.$$

β wird gemäss der Definition (1.6.25) in Bemerkung 1. zu Korollar 1.6.1 gewählt. Das System der Ungleichungen (1.6.36) und (1.6.38) besitzt nun folgende Form:

$$\bar{\tau}_{\max} \leq \sqrt{2 \frac{w_{\max} \beta}{w_{\max} + \beta}},$$

$$\sqrt{\frac{w_{\max} + \beta}{2}} \arctan \sqrt{\frac{w_{\max}}{\beta}} \leq \frac{R_g}{2}.$$

Lösungen des obigen Ungleichungssystems liefern obere Schranken für w_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$. Eine nähere Untersuchung zeigt, dass wir das Minimum aller möglichen Lösungen des obigen Systems erhalten, indem wir das folgende Gleichungssystem lösen (setze das Gleichheitszeichen):

$$k_{\min}^b \beta = \sqrt{2 \frac{w_{\max} \beta}{w_{\max} + \beta}}, \quad (1.6.40)$$

$$\sqrt{\frac{w_{\max} + \beta}{2}} \arctan \sqrt{\frac{w_{\max}}{\beta}} = \frac{R_g}{2}. \quad (1.6.41)$$

Wir führen die Hilfsvariable z ein,

$$z := \sqrt{\frac{w_{\max}}{\beta}}$$

und eliminieren in (1.6.41) den Term $\sqrt{\frac{w_{\max} + \beta}{2}}$ mit Hilfe von Gleichung (1.6.40). Wir erhal-

ten daraus die transzendente Gleichung

$$z \arctan(z) = 0.5 k_{\min}^b R_g . \quad (1.6.42)$$

Mit dem Newton-Raphson Iterationsverfahren bestimmen wir die Lösung \hat{z} . Daraus lassen sich die restlichen Größen wie folgt berechnen:

$$\hat{t} = \frac{2}{k_{\min}^b} \frac{\hat{z}^2}{1 + \hat{z}^2}, \quad (1.6.43)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{t}}{k_{\min}^b}, \quad (1.6.44)$$

$$\hat{w} = \hat{\beta} \hat{z}^2. \quad (1.6.45)$$

\hat{w} und \hat{t} sind "die bestmöglichen" oberen Schranken für w_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$. Falls Ω ein (Hyper-) Streifen mit Breite 2δ ist ($\beta \rightarrow \infty$) und die Inhomogenität ρ in (1.6.3) symmetrisch ist [$\rho(x) = \rho(-x)$], so erhalten wir die Lösung

$$\hat{t} = \sqrt{2 \hat{w}} = R_g = \int_0^{\delta} \sqrt{\rho(x)} dx . \quad (1.6.46)$$

Analog behandeln wir den Spezialfall $N = 2$. Wir nehmen an, es gelte die Ungleichung (1.6.32) in Korollar 1.6.2. Sie hat für das Hilfsproblem (1.6.39) die Form

$$|\bar{\nabla} w| \leq s(w; w_{\max}, \beta) = \sqrt{2 \frac{1 - e^{-\beta(w_{\max} - w)}}{\beta}},$$

mit $\beta = \frac{2 k_{\min}^b}{\bar{\tau}_{\max}}$, (setze in Ungleichung (1.6.32) $\lambda f(u) = 1$; Def. von β siehe (1.6.35)).

Mit der Definition

$$z := \sqrt{1 - e^{-\beta w_{\max}}}$$

erhalten wir analog zum vorangehenden Fall ($N > 1$) das folgende System, welches dem System der Ungleichungen (1.6.36) und (1.6.38) entspricht:

$$\bar{\tau}_{\max} \leq \sqrt{\frac{2}{\beta}} z ,$$

$$\sqrt{\frac{2}{\beta}} \operatorname{artanh}(z) \leq R_g .$$

"Bestmögliche" obere Schranken \hat{w} und \hat{t} für w_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$ erhalten wir als Lösung des obigen Ungleichungssystems, indem wir das Gleichheitszeichen setzen.

$$\sqrt{\frac{\beta}{2}} z = k_{\min}^b , \quad (1.6.47)$$

$$\sqrt{\frac{2}{\beta}} \operatorname{artanh}(z) = R_g . \quad (1.6.48)$$

Wir eliminieren in der Gleichung (1.6.48) $\sqrt{2/\beta}$ und erhalten eine transzendente Gleichung, welche ähnlich zu (1.6.42) ist.

$$z \operatorname{artanh}(z) = k_{\min}^b R_g . \quad (1.6.49)$$

Mittels dem Newton-Raphson Iterationsverfahren bestimmen wir die Lösung \hat{z} der obigen Gleichung (1.6.49) und berechnen daraus die restlichen Grössen:

$$\hat{\beta} = 2 \left(\frac{k_{\min}^b}{\hat{z}} \right)^2 , \quad (1.6.50)$$

$$\hat{t} = \frac{\hat{z}^2}{k_{\min}^b} , \quad (1.6.51)$$

$$\hat{w} = - \frac{\ln(1 - \hat{z}^2)}{\hat{\beta}} . \quad (1.6.52)$$

Falls Ω ein Streifen mit Breite 2δ ist ($\beta = 0$), und für die Inhomogenität ρ in (1.6.3) die Symmetriebedingung $\rho(x) = \rho(-x)$ erfüllt ist, so ergeben sich die oberen Schranken für w_{\max} bzw. $\bar{\tau}_{\max}$ aus der Gleichung

$$\hat{t} = \sqrt{2 \hat{w}} = R_g = \int_0^{\delta} \sqrt{\rho(x)} \, dx . \quad (1.6.53)$$

2 Maximumprinzip und die Methode von Ober- und Unterfunktionen

2.1 Existenz von stabilen Lösungen

In diesem Abschnitt geben wir eine kurze Charakterisierung der stabilen Lösungen, die als Grenzwert spezieller Folgen von Unter- und Oberlösungen berechnet werden können. Diese Folgen, werden mittels einem monotonen Iterationsschema erzeugt. Wir betrachten in diesem Abschnitt ein allgemeines semilineares elliptisches Dirichletproblem der Form

$$\begin{aligned} L[u] + f(x,u) &= 0 && \text{in } \Omega, \quad \Omega \text{ beschränkt in } E^N, N > 1 \\ u &= g(x) && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

$$\text{mit } L[u] := a^{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i}.$$

Die Problemklasse (1.6.3), für welche wir im nächsten Abschnitt spezielle Unter- und Oberfunktionen konstruieren werden, ist in der obigen Klasse (2.1.1) enthalten.

Definition 2.1.1: (Funktionenraum $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, siehe [11])

$C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$ ist die Menge der differenzierbaren Funktionen, für welche alle gemischten partiellen Ableitungen $D^k u$ der Ordnung k mit $0 \leq |k| \leq m$ ($|k| := k_1 + k_2 + \dots + k_N$) in Ω existieren und die m -te gemischte Ableitung $D^m u$ eine Hölderbedingung mit Exponent α erfüllt, d.h. es existiert eine Konstante K , so dass gilt: $|D^m u(x) - D^m u(y)| \leq K |x - y|^\alpha$, für alle $x, y \in \bar{\Omega}$.

Jede Ableitung $D^m u$ besitzt eine eindeutige stetige Fortsetzung auf $\Omega \cup \partial\Omega$.

Falls $0 < \beta < \alpha < 1$ ist, so gelten die Inklusionen: $C^{m+1}(\bar{\Omega}) \subset C^{m,\alpha}(\bar{\Omega}) \subset C^{m,\beta}(\bar{\Omega}) \subset C^m(\bar{\Omega})$, d.h. $C^{m,\alpha}$ ist als Unterraum von C^m definiert. Falls $\alpha = 1$ ist, so nennt man $D^k u$ lokal lipschitzstetig. Für das Verständnis des folgenden Beweises seien die Definitionen der Funktionsräume $L^p(\Omega)$ und $W^{m,p}(\Omega)$ aus [1] zitiert.

Definition 2.1.2: (Funktionsräume $L^p(\Omega)$ und $W^{m,p}(\Omega)$, siehe [1])

$$L^p(\Omega) := \left\{ u \mid u \text{ messbar in } \Omega \text{ und } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\}$$

(Die Elemente von $L^p(\Omega)$ sind Äquivalenzklassen von messbaren Funktionen.)

$$W^{m,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für } 0 \leq |\alpha| \leq m \right\}$$

Die schwache oder distributionelle Ableitung $v_\alpha := D^\alpha$ ist durch die Funktionalgleichung

$$\int_{\Omega} u(x) D^\alpha \phi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\alpha(x) \phi(x) dx \quad \text{für alle } \phi \in \text{eines Testfunktionsraums}$$

definiert. Testfunktionsräume sind z.B. der Schwartzsche Funktionenraum \mathcal{S} oder die C^∞ -Funktionen mit kompaktem Träger. Um die Existenz von klassischen Lösungen ("mindestens" $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega \cup \partial\Omega)$ bei Dirichletrandbedingungen) garantieren zu können, treffen wir für Problem (2.1.1) folgende ("minimale") Regularitätsvoraussetzungen, siehe [11]:

- (I) L uniform elliptisch in $\bar{\Omega}$ mit Koeffizienten $a^{ik}, b^k \in C^\alpha(\bar{\Omega})$,
- (II) $f \in C^\alpha(\bar{\Omega} \times I)$ (I ein Intervall, in welchem die Lösung u liegt),
es existiert eine Konstante $\Lambda \geq 0$, so dass gilt:
$$f(x, u_1) - f(x, u_2) > -\Lambda(u_1 - u_2), \quad \text{für alle } u_1 > u_2, u_1, u_2 \in I, x \in \bar{\Omega},$$
- (III) Ω ist durch eine (Hyper-) Fläche $\partial\Omega$ begrenzt, welche sich lokal durch $C^{2,\alpha}$ -Funktionen darstellen lässt und für die Randwertfunktion g gilt $g \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, $\alpha \in (0,1)$.

Aus der Bedingung (II) (eine schwache Form der Lipschitzbedingung) folgt z.B. für $f \in C^1$, dass $f_{,u}$ uniform nach unten beschränkt ist, d.h. es existiert eine Konstante $\Lambda \geq 0$, so dass gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x,u) + \Lambda > 0 \quad \text{für } x \in \bar{\Omega} \text{ und } u \in I \quad (2.1.2)$$

Bemerkung:

Aus weiteren Regularitätssätzen (siehe Carlo Miranda, *Partial Differential Equations of Elliptic Type*, Springer-Verlag 1970, 2nd. Edition, S. 183, Theorem 40, III.) ist jede klassische Lösung auch von der Klasse $C^{2+n,\alpha}(\Omega)$ ($n \geq 0$), falls die obigen Regularitätsvoraussetzungen verschärft werden durch:

$$(I_n) \quad a^k, b^k \in C^{n,\alpha}(\bar{\Omega}),$$

$$(II_n) \quad f \in C^{n,\alpha}(\bar{\Omega} \times I),$$

$$(III_n) \quad \partial\Omega \in C^{2+n,\alpha} \text{ und } g \in C^{2+n,\alpha}(\partial\Omega).$$

Definition 2.1.3: (Ober- und Unterfunktionen, siehe [11])

Eine Funktion $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ heisst eine Unterlösung für Problem (2.1.1), falls gilt:

$$\begin{aligned} L[\varphi] + f(x, \varphi) &\geq 0 && \text{in } \Omega \\ \varphi &\leq g && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Umgekehrt heisst $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ Oberlösung für Problem (2.1.1), falls gilt:

$$\begin{aligned} L[\psi] + f(x, \psi) &\leq 0 && \text{in } \Omega \\ \psi &\geq g && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Eine Unterlösung, welche nicht zugleich auch Lösung ist, heisst "strikte Unterlösung". Das gleiche gilt auch für Oberlösungen.

Den folgenden Satz über die Existenz von klassischen Lösungen findet man z.B. bei Hudjaev, S. I. [21] & [22], Sattinger, D.H. [25], oder Amann, H. [11]. Wir zitieren dazu vollständigshalber einen kurzen Beweis aus [25], weil hier das Maximumprinzip zur Anwendung kommt.

Satz 2.1.4 (Monotones Iterationsschema und die Existenz von klassischen Lösungen)

Es gelten die zu Problem (2.1.1) gemachten Regularitätsvoraussetzungen (I) bis (III).

Sei φ eine Unterlösung und ψ eine Oberlösung von (2.1.1) mit

$$\varphi \leq \psi \quad \text{in } \Omega .$$

Dann existiert für das Randwertproblem (2.1.1) eine minimale (klassische) Lösung \underline{u} und eine maximale (klassische) Lösung \bar{u} mit

$$\varphi \leq \underline{u} \leq \bar{u} \leq \Psi \quad \text{in } \Omega .$$

Weiter lässt sich \underline{u} und \bar{u} mit Hilfe des untenstehenden monotonen Iterationsschemas berechnen.

$$\begin{aligned} (L - \Lambda)[u_{k+1}] &= -[f(x, u_k) + \Lambda u_k] && \text{in } \Omega \\ u_{k+1} &= g(x) && \text{auf } \partial\Omega, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Falls $u_0 = \varphi$, dann ist $\{u_k\}$ eine monoton aufsteigende Folge, die in $C^2(\Omega \cup \partial\Omega)$ gegen \underline{u} konvergiert. Analog ist $\{v_k\}$, welche durch (2.1.3) definiert ist und mit $v_0 = \psi$ beginnt, eine monoton fallende Folge, die in $C^2(\Omega \cup \partial\Omega)$ gegen \bar{u} konvergiert.

Beweis:

Problem (2.1.1) ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} (L - \Lambda)[u] &= -[f(x, u) + \Lambda u] && \text{in } \Omega \\ u &= g(x) && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.1.1')$$

wobei Λ durch Gleichung (2.1.2) für $u \in [\varphi_{\min}, \psi_{\max}]$ definiert wird. Der Differentialoperator $L - \Lambda$ hat die gleichen Eigenschaften wie L , und die Abbildung

$$u \rightarrow f(x, u) + \Lambda u$$

ist streng monoton wachsend in u . Das Iterationsschema (2.1.3) führt uns zur Definition einer Iterationsabbildung T . $T: u \rightarrow Tu$ wird (implizit) definiert durch

$$\begin{aligned} (L - \Lambda)[Tu] &= -[f(x, u) + \Lambda u] && \text{in } \Omega \\ Tu &= g(x) . \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Wir zeigen, dass T eine monotone Abbildung ist, d.h. falls $u \leq v$ ist, so folgt $Tu \leq Tv$ für $\varphi_{\min} \leq u, v \leq \psi_{\max}$. Die Gleichung für die Differenz $Tv - Tu$,

$$\begin{aligned} (L - \Lambda)[Tv - Tu] &= -[f(x, v) - f(x, u) + \Lambda(v - u)] && \text{in } \Omega \\ Tv - Tu &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

erhalten wir, indem wir das System (2.1.4) für Tu vom System für Tv subtrahieren. Λ ist so

definiert, dass die rechte Seite von (2.1.5) nicht positiv ist. (Definiere $F(x,u) := f(x,u) + \Lambda u \Rightarrow F_{,u} > 0$, d.h. F ist streng monoton wachsend in u .)

Falls $v - u \geq 0$ ist, so folgt

$$\begin{aligned} (L - \Lambda)[Tv - Tu] &\leq 0 && \text{in } \Omega \\ Tv - Tu &= 0 && \text{auf } \partial\Omega . \end{aligned}$$

Aus dem erweiterten Maximumprinzip (Satz 1.2.6) folgt $(\Lambda \geq 0)$

$$Tv - Tu \geq 0 \quad \text{in } \Omega .$$

T ist ein monoton wachsender Operator. Mit Induktion nach n zeigen wir jetzt, dass die durch (2.1.3) definierte Folge $\{u_k\}$ eine streng monoton wachsende Folge ist, falls wir für das nullte Folgenglied u_0 eine strikte Unterfunktion φ wählen. Sei u_1 definiert durch $u_1 = Tu_0 = T\varphi$. Für die Differenz $u_1 - u_0$ folgt

$$\begin{aligned} (L - \Lambda)[u_1 - u_0] &= -[f(x, u_0) + \Lambda u_0] - (L - \Lambda)[u_0] = -[L[u_0] + f(x, u_0)] < 0 && \text{in } \Omega, \\ u_1 - u_0 &\geq 0 && \text{auf } \partial\Omega . \end{aligned}$$

Mit dem erweiterten Maximumprinzip (Satz 1.2.6) schliessen wir

$$u_1 - u_0 > 0 \quad \text{in } \Omega .$$

Die Folge $\{u_k\}$ ist induktiv durch das Iterationsschema (2.1.3) implizit definiert. Da T ein (streng) monoton wachsender Operator ist, folgt durch Induktion nach n , dass $\{u_k\}$ eine streng monoton wachsende Folge ist. Analog beweist man, dass die Folge, definiert durch

$$\begin{aligned} v_0 &= \psi && \psi \text{ eine strikte Oberfunktion von (2.1.1)} \\ v_{n+1} &= Tv_n , \end{aligned}$$

eine streng monoton fallende Folge ist. Weiter folgt aus

$$\varphi < \psi \quad \text{in } \Omega$$

und der Monotonie von T , dass

$$u_n < v_n \quad \text{in } \Omega$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit haben wir mit Hilfe des Maximumprinzips die Ungleichungskette

$$\varphi = u_0 < u_1 < u_2 < \dots < v_2 < v_1 < v_0 = \psi$$

bewiesen. Die monotonen Folgen $\{u_k\}$ und $\{v_k\}$ sind durch die Oberfunktion ψ und die Unterfunktion φ beschränkt. Daraus folgt, dass der punktweise Limes existiert.

$$\underline{u}(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) \quad \text{und} \quad \bar{u}(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x)$$

Im zweiten (und abstrakten) Teil des Beweises zeigen wir, dass \underline{u} und \bar{u} klassische Lösungen der Fixpunktgleichung

$$u = Tu \quad \text{in } \Omega \tag{2.1.6}$$

sind. Das obige Fixpunktproblem (2.1.6) ist äquivalent zum Dirichletproblem (2.1.1). Der Operator T ist eine Zusammensetzung von einer nichtlinearen Abbildung $T_1: v \rightarrow F(x,v) := f(x,v) + \Lambda v$ und dem Lösungsoperator $T_2: h \rightarrow u$, wobei u Lösung des inhomogenen linearen elliptischen Randwertproblems

$$\begin{aligned} (L - \Lambda)[u] &= h \quad \text{in } \Omega \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

ist. $F(x,u)$ ist für $u \in [\varphi_{\min}, \psi_{\max}]$ eine beschränkte C^1 -Funktion in u , α -hölderstetig für $x \in \Omega \cup \partial\Omega$ und transformiert punktweise konvergente Folgen in punktweise konvergente Bildfolgen. Die zweite Abbildung T_2 bildet stetig $L^p(\Omega)$ in den Sobolew-Raum $W^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$ ab, da für eine Lösung von (2.1.7) die folgende a priori L^p Abschätzung gilt:

Es existiert eine von u unabhängige Konstante C , so dass gilt

$$\|u\|_{2,p} \leq C \left(\|h\|_p + \|\bar{g}\|_{2,p} \right),$$

wobei die $\|\cdot\|_{k,p}$ -Norm definiert wird durch

$$\|u\|_{k,p} := \left(\sum_{|l| \leq k} \int_{\Omega} |D^l u|^p dx \right)^{1/p}, \quad D^l u := \frac{\partial^{|l|} u}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}}, \quad |l| = l_1 + \dots + l_n, \quad l_i \in \mathbb{N}.$$

\bar{g} ist eine $C^{2,\alpha}$ -Erweiterung der auf $\partial\Omega$ definierten Funktion $g(x)$ in das Innere von Ω .

Nach den Sobolewschen Einbettungssätzen (siehe [1]) enthält die Äquivalenzklasse $W^{2,p}$ Repräsentanten aus $C^{1,\alpha}$, für welche die Sobolew-Ungleichung gilt, d.h. es existiert eine von u unabhängige Konstante $K = K(n,p,\Omega)$, so dass gilt:

$$|u|_{1,\alpha;\Omega} \leq K \|u\|_{2,p} \quad \text{für } p > n \text{ und } \alpha = 1 - n/p.$$

Die "Maximumnorm" $|u|_{k,\alpha;\Omega}$ ist definiert durch

$$|u|_{k,\alpha;\Omega} := \sum_{j=0}^k \left(\sup_{|\ell| \leq j} \sup_{\Omega} |D^\ell u| \right) + \sup_{|\ell| \leq k} \sup_{\substack{\Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^\ell u(x) - D^\ell u(y)|}{|x - y|^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Der Funktionenraum $C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\alpha \in (0,1)$, mit der "Maximumnorm" $|u|_{k,\alpha;\Omega}$ ist ein Banachraum.

Die obige Sobolew-Ungleichung bedeutet, dass der Funktionenraum $W^{2,p}(\Omega)$ stetig eingebettet werden kann in $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ für $p > n$ und $\alpha = 1 - n/p$ ($W^{2,p}(\Omega) \rightarrow C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, Ω mit strenger lokaler Lipschitz-eigenschaft, siehe [1] S.98). Daraus folgt, dass die in (2.1.3) definierten Folgen $\{u_k\}$ und $\{v_k\}$ in $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ konvergieren. Weiter gilt für lineare elliptische Randwertprobleme der Form (2.1.7) die klassische a priori Abschätzung von Schauder, d.h. es existiert eine von u unabhängige Konstante S , so dass gilt

$$|u|_{2,\alpha;\Omega} \leq S \left(|h|_{\alpha;\Omega} + |\bar{g}|_{2,\alpha;\Omega} \right).$$

Dies bedeutet, dass die Abbildung $T = T_2 \cdot T_1$ eine punktweise konvergente Folge in eine Folge abbildet, die in $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ konvergiert. T ist eine vollstetige (kompakte) Abbildung.

Wir können also schreiben: $\underline{u} = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} T u_{k-1} = T \lim_{k \rightarrow \infty} u_{k-1} = T \underline{u}$, d.h. \underline{u} ist ein Fixpunkt von

T und damit eine Lösung für das Randwertproblem (2.1.1), welche in $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ liegt. Analog beweist man, dass auch \bar{u} eine klassische Lösung ist.

Zu zeigen ist noch, dass \underline{u} eine minimale (klassische) Lösung ist. Sei w eine Lösung von $Tw = w$, mit $\varphi < w < \psi$. Dann folgt aus der Monotonie von T , $T\varphi = u_1 < w$, und mit Induktion nach n folgt $u_n < w$ für alle n . Daraus folgt $\underline{u} \leq w$, d.h. \underline{u} ist minimal. Analog zeigt man, dass \bar{u} maximal ist.

◇

Das monotone Iterationsschema (2.1.3) lässt sich auch auf parabolische Probleme anwenden, da für diese Probleme auch ein Maximumprinzip gilt (Satz 1.2.7). Das Konzept von Unter- und Oberfunktionen erlaubt uns, zwei verschiedene Dirichletprobleme miteinander zu vergleichen.

Satz 2.1.5 (Vergleichssatz für Dirichletprobleme, siehe [25])

Wir betrachten zwei Dirichletprobleme P_1 und P_2 :

$$\begin{aligned} P_1: \quad L[u] + f_1(x,u) &= 0 & \text{in } \Omega_1 & & \text{und } P_2: \quad L[u] + f_2(x,u) &= 0 & \text{in } \Omega_2 \\ u &= g_1 & \text{auf } \partial\Omega_1 & & u &= g_2 & \text{auf } \partial\Omega_2 \end{aligned}$$

und treffen folgende Annahmen:

- (i) $\Omega_2 \supset \Omega_1$,
- (ii) $f_2(x,u) \geq f_1(x,u)$ für alle $x \in \Omega_1$,
- (iii) $\inf_{\partial\Omega_2} g_2 \geq \sup_{\partial\Omega_1} g_1$.

Sei ψ eine Lösung von P_2 und $f_2(x,\psi) \geq 0$ in Ω_2 , dann ist ψ eine Oberlösung für Problem P_1 .

Beweis:

Obige Behauptung ist eine direkte Folge aus dem Maximumprinzip. Sei ψ eine Lösung von P_2 , dann gilt nach Annahme (ii)

$$L[\psi] + f_1(x,\psi) \leq 0 \quad \text{in } \Omega_1.$$

ψ ist eine Oberlösung gemäss Definition 2.1.1, falls wir weiter zeigen, dass $\psi \geq g_1$ auf $\partial\Omega_1$ ist. Aus der Annahme $f_2(x,\psi) \geq 0$ folgt

$$L[\psi] \leq 0 \quad \text{in } \Omega_2.$$

Setze $w(x) := \psi(x) - \inf_{\partial\Omega_2} g_2$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} L[w] &\leq 0 & \text{in } \Omega_2 \\ w &\geq 0 & \text{auf } \partial\Omega_2. \end{aligned}$$

Aus dem Maximumprinzip schliessen wir $w \geq 0$ in Ω_2 . Insbesondere ist $w \geq 0$ auf $\partial\Omega_1$ ($\Omega_2 \supset \Omega_1$). Mit der Bedingung (iii) folgt $\psi \geq g_1$ auf $\partial\Omega_1$.

◇

Zum obigen Vergleichssatz soll ein Beispiel erwähnt werden. Wir betrachten das Problem der eingespannten Membran in einem ebenen Gebiet Ω_k . $\lambda_1^k > 0$ sei der erste Eigenwert zu Ω_k und $u^k > 0$ die erste Eigenfunktion. Dann gilt:

$$\Omega_N \supset \dots \supset \Omega_2 \supset \Omega_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1^N \leq \dots \leq \lambda_1^2 \leq \lambda_1^1.$$

Wir betrachten dazu 2 erste Eigenfunktionen $u^i > 0$ in Ω_i und $u^k > 0$ in Ω_k , $\Omega_k \supset \Omega_i$ und wenden die 1. Greensche Identität auf den Ausdruck

$$u^i (\Delta u^k + \lambda_1^k u^k) - u^k (\Delta u^i + \lambda_1^i u^i)$$

an. Daraus folgt die Integralungleichung

$$0 = \int_{\Omega_i} [u^i (\Delta u^k + \lambda_1^k u^k) - u^k (\Delta u^i + \lambda_1^i u^i)] d^N x =$$

$$\int_{\Omega_i} u^i u^k (\lambda_1^k - \lambda_1^i) d^N x - \int_{\partial \Omega_i} u^k \frac{\partial u^i}{\partial n} ds \geq \int_{\Omega_i} u^i u^k (\lambda_1^k - \lambda_1^i) d^N x.$$

($u^k \geq 0$ in Ω_i , $\partial u^i / \partial n \leq 0$ auf $\partial \Omega_i$) Aus $u^i u^k \geq 0$ in Ω_i , folgt: $\lambda_1^k \leq \lambda_1^i$.

Eine ähnliche Situation gilt auch bei nichtlinearen Problemen. Sei z.B. λ_1^{*k} der (erste) kritische Wert der Gelfand-Gleichung $\Delta u + \lambda e^u = 0$ in Ω_k mit Dirichletrandbedingungen $u = 0$ auf $\partial \Omega_k$. Dann gilt:

$$\Omega_N \supset \dots \supset \Omega_2 \supset \Omega_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda^{*N} \leq \dots \leq \lambda^{*2} \leq \lambda^{*1}.$$

Die obigen Ungleichungen für λ^{*k} folgen aus der Tatsache, dass die kritische Lösung u^{*k} in Ω_k , mit $\Omega_k \supset \Omega_i$ eine Oberfunktion ist für die Gelfand-Gleichung in Ω_i mit Dirichletrandbedingungen.

Als nächstes wollen wir den Stabilitätsbegriff einer Lösung $U = U(x)$ für ein elliptisches Randwertproblem einführen. Zum Dirichletproblem (2.1.1) betrachten wir für eine Funktion $u(x,t)$ ein zugehöriges parabolisches Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} L[u] + f(x,u) &= u_{,t} && \text{in } \Omega \times (0,T) \\ u &= g(x) && \text{auf } \partial \Omega \times (0,T) \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{in } \Omega \quad (\text{Anfangsbedingungen}). \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

Lösungen $U(x)$ von (2.1.1) können als Gleichgewichtslösungen von (2.1.8) aufgefasst werden, welche der Anfangsbedingung $u_0(x) = U(x)$ genügen.

Definition 2.1.6 (Stabilität)

Eine Gleichgewichtslösung $U(x)$ des Randwertproblems (2.1.1) heisst stabil in der Maximumnorm, falls für eine Lösung $u(x,t)$ von (2.1.8) gilt: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\|u_0(x) - U(x)\|_\infty < \delta \Rightarrow \|u(x,t) - U(x)\|_\infty < \epsilon \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

U heisst asymptotisch stabil, falls zusätzlich gilt: $\|u(x,t) - U(x)\|_\infty \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

Stabilität heisst also, dass die zeitliche Lösung $u(x,t)$ von (2.1.8) für alle Zeiten $t \geq 0$ genügend nahe bei der Gleichgewichtslösung $U(x)$ von (2.1.1) liegt, falls wir nur die Anfangsbedingung $u_0(x)$ genügend nahe der Gleichgewichtslösung wählen. Lösungen von parabolischen Problemen geben z.B. die zeitliche Entwicklung eines chemischen Diffusions-Reaktionsprozesses an (dynamisches Verhalten einer Konzentration $u(x,t)$). Beobachtbar sind meistens nur Gleichgewichtslösungen. Deshalb ist die Frage der Stabilität einer Gleichgewichtslösung von erheblichem praktischem Wert. Wir zitieren zwei Sätze aus [25], aus denen eine Charakterisierung der stabilen Gleichgewichtslösungen folgt. Grob gesprochen ist diejenige Lösung die stabile, welche durch eine strikte Ober- und Unterfunktion eingeschlossen werden kann. Sie kann durch das monotone Iterationsschema (2.1.3) von "unten und oben berechnet" werden.

Satz 2.1.7 (Hinreichende Bedingung für asymptotische Stabilität, siehe[25])

Sei U eine Lösung von (2.1.1), φ und ψ Unter- und Oberlösungen, welche U einschliessen, d.h.

$$\varphi < U < \psi \quad \text{in } \bar{\Omega}.$$

$u(x,t)$ sei die Lösung des zugehörigen parabolischen Problems (2.1.8) mit einer Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0(x)$.

(i) Ober- und Unterfunktionen für (2.1.8):

Falls für die Anfangsbedingung $u_0(x)$ für (2.1.8) gilt:

$$\varphi < u_0 < \psi \quad \text{in } \Omega \cup \partial\Omega,$$

so folgt für die Lösung $u(x,t)$:

$$\Phi(x,t) < u(x,t) < \Psi(x,t) \quad \text{für } t \geq 0,$$

wobei $\Phi(x,t)$ und $\Psi(x,t)$ Lösungen von (2.1.8) sind, mit den Anfangsbedingungen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$.

(ii) **Hinreichende Bedingung für asymptotische Stabilität:**

Falls $T^n \varphi \nearrow U$ und $T^n \psi \searrow U$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, (T ist in 2.1.4 definiert), dann ist die Gleichgewichtslösung U asymptotisch stabil, d.h. insbesondere falls eine Anfangsbedingung u_0 im Intervall $\varphi < u_0 < \psi$ liegt, dann gilt für die zugehörige Lösung:

$$u(x,t) \rightarrow U(x) \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

Teil (ii) des obigen Satzes 2.1.7 hat auch eine Umkehrung. Falls U eine asymptotisch stabile Lösung ist, so lässt sie sich als Grenzwert einer Folge von Ober- und Unterfunktionen berechnen, die durch das monotone Iterationsschema (2.1.3) erzeugt wird.

Satz 2.1.8 (notwendige Bedingung für asymptotische Stabilität, siehe [25])

Sei λ_1 der erste Eigenwert des um eine Gleichgewichtslösung U linearisierten Operators von Problem (2.1.1):

$$L[\chi] + f_u(x,U) \chi, \quad \chi = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \quad (2.1.9)$$

(i) **Notwendige Bedingung für Stabilität:**

Damit U stabil ist, muss gelten $\lambda_1 < 0$.

Bemerkungen: (siehe [25])

Angenommen es existiere eine Unterlösung φ und eine Oberlösung ψ für Problem (2.1.1), so dass gilt

$$T^n \varphi \nearrow \underline{u} \text{ und } T^n \psi \searrow \bar{u} \text{ für } n \rightarrow \infty, \quad \underline{u} < \bar{u},$$

dann ist nur die minimale Lösung \underline{u} stabil im Sinne von Definition 2.1.6 (Amann, H.).

Zum Schluss sei die "einseitige" Stabilität noch erwähnt. Falls eine Gleichgewichtslösung $U(x)$ der Gleichung (2.1.8) Grenzwert von oben einer Folge von Oberlösungen ist,

$$T^n \psi \searrow U \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

dann ist U stabil bezüglich kleinen Störungen von oben her gesehen. Für den ersten Eigenwert λ_1 des zugehörigen, um die Gleichgewichtslösung U linearisierten Operators (2.1.9) muss gelten: $\lambda_1 \leq 0$.

2.2 Maximumprinzip für eine P-Funktion und Konstruktion von Ober- bzw. Unterfunktionen

R. Sperb hat in [29] das inhomogene Problem

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda \rho(x)f(u) &= 0 && \text{in } \Omega \subset E^2, \Omega \text{ beschränkt} \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega, \\ \rho &> 0 && \text{in } \Omega \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

betrachtet. Die Klasse von Nichtlinearitäten f , welche in [29] betrachtet werden, sind durch folgende Bedingungen charakterisiert:

(H) $f(0) > 0$, f wachsend und strikt konvex.

Es ist bekannt (siehe [13]), dass für ein Problem der Form (2.2.1) mit Nichtlinearitäten, welche die obige Bedingung (H) erfüllen, folgendes gilt:

Es existiert ein kritischer Wert λ^* mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Falls $0 < \lambda \leq \lambda^*$ ist, so existiert eine minimale positive Lösung u_λ , welche stabil ist.
- (ii) Falls $\lambda > \lambda^*$ ist, so existiert keine positive Lösung.
- (iii) Falls $0 < \lambda < \lambda^*$ ist, so existiert mindestens eine weitere (nicht stabile) positive Lösung u_λ , für die gilt: $u_\lambda < u_\lambda$ in Ω .

Die Gelfand-Nichtlinearität $f(u) = e^u$ ist ein typischer Vertreter einer Funktion, welche die Bedingung (H) erfüllt. Sei nun in Problem (2.2.1) eine Nichtlinearität gegeben, die nicht der Bedingung (H) genügt, z.B. $\lambda \rho(x)f(u) := \lambda(1 + \beta u)$. Dann existiert eine (positive) Lösung, falls $\lambda < \lambda^* = \lambda_1 \beta^{-1}$. λ_1 ist hier der erste Eigenwerte der eingespannten Membran. Die Lösung ist eindeutig. Die strikte Konvexität ist im wesentlichen eine notwendige Bedingung dafür, dass eine Lösung für $\lambda = \lambda^*$ existiert und dass mindestens zwei Lösungen existieren falls $0 < \lambda < \lambda^*$.

Wir wollen mit Hilfe der Methode von Unter- und Oberfunktionen untere Schranken für λ^* angeben, die scharf sind, falls wir von einem homogenen Problem ausgehen ($\rho=1$), welches in einem Streifen mit Breite 2δ gegeben ist. $u \equiv 0$ ist für das Problem (2.2.1) mit der Bedingung (H) eine triviale Unterfunktion. Oberfunktionen erhalten wir nach einer Idee von L. Payne (siehe [23]), welche auf obige Problemklasse (2.2.1) erweiterbar ist. In [23] wird gezeigt, dass

$$\bar{u}(x) := X \left(\sqrt{2(w_{\max} - w(x))} \right),$$

wobei $w(x)$ die Lösung des Torsionsproblems

$$\begin{aligned} \Delta w + 1 &= 0 & \text{in } \Omega \subset E^2 \\ w &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

bezeichnet, eine Oberfunktion für das homogene ($\rho=1$) Problem (2.2.1) ist. X wird durch ein eindimensionales elliptisches Randwertproblem der Form:

$$\begin{aligned} X''(s) + \mu f(X) &= 0 & 0 \leq s \leq s_0 := \sqrt{2w_{\max}} \\ X'(0) = X(s_0) &= 0 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

definiert. Eine einfache Rechnung ergibt folgende elliptische Gleichung für $X(s)$ mit

$$\begin{aligned} s &:= \sqrt{2(w_{\max} - w(x))}, \\ \Delta X + \mu f(X) &= \left\{ 1 - \frac{|\nabla w|^2}{s^2} \right\} \left\{ \mu f(X) + \frac{X'}{s} \right\} & \text{in } \Omega. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Um zu sehen, dass der erste Faktor auf der rechten Seite von (2.2.4) nicht negativ ist, benutzen wir die Tatsache (siehe z.B.[23]), dass

$$|\nabla w|^2 \leq 2(w_{\max} - w) = s^2, \tag{2.2.5}$$

falls $\partial\Omega$ konvex ist. Das Vorzeichen des zweiten Faktors auf der rechten Seite in (2.2.4) lässt sich ermitteln, indem die Hilfsfunktion

$$R(s) := s \left(\mu f(X) + \frac{X'}{s} \right) \tag{2.2.6}$$

betrachtet wird. Eine einfache Rechnung ergibt

$$R'(s) = \mu s X' \frac{d}{dX} f(X).$$

Mit der Bedingung (H) über die Nichtlinearität f folgt (man beachte, dass gilt $X' \leq 0$):

$$\begin{aligned} \Delta X + \mu f(X) &\leq 0 & \text{in } \Omega \\ X &= 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

d.h. X ist eine Oberfunktion für das Ausgangsproblem (2.2.1), falls $0 < \mu \leq \mu^*$ ist. μ^* ist der kritische Wert des Hilfsproblems (2.2.3). Aus der Existenz einer Ober- und Unterfunktion folgt mit Satz (2.1.4), dass eine Lösung u mit $0 = \underline{u} < u < \bar{u} = X$ für das Ausgangsproblem (2.2.1) existiert. Weiter folgt, dass μ^* eine untere Schranke für den kritischen Wert λ^* sein muss, d.h.

$$\mu^* \leq \lambda^* .$$

Die Lösung u ist im Sinne der Definition 2.1.6 asymptotisch stabil (siehe Satz 2.1.7), falls wir die Anfangsbedingungen $u_0(x)$ so wählen, dass gilt:

$$0 < u_0(x) < X\{s(x)\}$$

Wir wollen in diesem Abschnitt die Konstruktion von L. Payne (siehe [23]) erweitern. In [29] wurde eine Erweiterung gegeben, indem ein Maximumprinzip für folgende P - Funktion formuliert wurde:

$$P = g(w) |\nabla w|^2 + 2 \int_0^w g(y) dy, \quad g(w) := e^{2K_0 w} .$$

K_0 ist eine untere Schranke für die Gausssche Krümmung K_g einer Riemannschen Mannigfaltigkeit R^2 , in welcher das Problem (2.2.1) interpretiert wurde. In diesem Abschnitt soll insbesondere auch eine Erweiterung auf den höher dimensionalen Fall $N > 1$ gegeben werden, für eine P - Funktion der Form:

$$P = g(w) |\nabla w|^2 + 2 \int_0^w g(y) dy, \quad g(y) := \frac{1}{(y + \beta)^2}$$

$$\text{mit } \frac{\bar{k}_{\max}}{k_{\min}^b} \leq \beta < \infty \quad (\text{Def. von } k_{\min}^b \text{ siehe (1.6.11/12)}).$$

Als Vorbereitung wollen wir die obige Konstruktion in eine allgemeine Form bringen. Als Ausgangspunkt betrachten wir ein allgemeines semilineares elliptisches Randwertproblem in einem beschränkten Gebiet Ω_R einer Riemannschen Mannigfaltigkeit R^N ,

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} u + r^k u_{,k} + \lambda f(u) &= 0 & \text{in } \Omega_R \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega_R . \end{aligned} \tag{2.2.A}$$

Zum obigen Problem betrachten wir 2 Hilfsprobleme. Als erstes definieren wir (entsprechend dem Hilfsproblem (2.2.2)) eine Klasse von Hilfsproblemen der Form

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} w + r^k w_{,k} + q(w) &= 0 && \text{in } \Omega_R \\ w &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_R, \end{aligned} \tag{2.2.H1}$$

mit $q(w) := 1 + \alpha w$, α ein noch freier reeller Parameter.

Der Laplace-Beltrami Operator, r^k und das Gebiet Ω_R sind durch das Ausgangsproblem (2.2.A) gegeben. In der obigen Klasse der Hilfsprobleme (2.2.H1) ist auch das "Torsionsproblem" (in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit) enthalten ($\alpha=0$), welches im folgenden von Bedeutung sein wird. Es ist bekannt, dass für (2.2.H1) im "euklidischen" Fall und mit $r^k = 0$ genau eine positive Lösung existiert, falls

$$-\infty < \alpha < \lambda_1.$$

λ_1 ist der erste Eigenwert des (linearen) Dirichletproblems für die eingespannte Membran. Dieses Ergebnis lässt sich auf den "nichteuklidischen" Fall übertragen. Somit existiert ein $\hat{\alpha}$, so dass das Hilfsproblem (2.2.H1) genau eine positive Lösung w besitzt, falls gilt

$$-\infty < \alpha < \hat{\alpha}.$$

Für den Fall eines eindimensionalen Hilfsproblems der Form

$$\begin{aligned} w'' + a w' + 1 + \alpha w &= 0 \\ w'(0) = w(\delta) &= 0, \quad \delta > 0 \end{aligned}$$

lässt sich der Wert $\hat{\alpha}$ als Lösung einer transzendenten Gleichung angeben. Wir betrachten dazu die "oszillierende" Lösung, welche gegeben ist durch

$$w(x) = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{e^{-xa/2}}{C} \left(\cos(\sqrt{|\omega|} x) + \frac{a/2}{\sqrt{|\omega|}} \sin(\sqrt{|\omega|} x) \right) - 1 \right],$$

$$\text{mit } C := e^{-\delta a/2} \left(\cos(\sqrt{|\omega|} \delta) + \frac{a/2}{\sqrt{|\omega|}} \sin(\sqrt{|\omega|} \delta) \right),$$

falls $\omega := a^2/4 - \alpha < 0$ ist. Es gilt

$$\|w\|_{\infty} \rightarrow \infty \text{ für } C \rightarrow 0.$$

Danach lässt sich der Wert $\hat{\alpha}$,

$$\hat{\alpha} := a^2/4 - \hat{\omega}$$

mittels der kleinsten positiven Lösung \hat{y} der (goniometrischen) Gleichung

$$y = -a/2 \tan(y\delta)$$

berechnen. Daraus erhält man

$$\hat{\omega} = -\hat{y}^2$$

Falls $a^2/4 - \alpha \geq 0$ ist, so bleibt die Lösung beschränkt (nicht oszillierender Lösung). Für den Spezialfall $a = 0$ (keine Dämpfung) erhalten wir

$$\hat{\alpha} = \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\delta^2}.$$

Dieser Wert entspricht dem 1. Eigenwert der eingespannten Saite der Länge 2δ .

Wir nehmen an, wir hätten für die Lösung des Hilfsproblems (2.2.H1) eine Ungleichung der Form

$$|\bar{\nabla} w| \leq s(w). \tag{2.2.7}$$

Die Funktion $s(w)$ wird später gemäss (1.6.18) für $N > 1$, bzw. (1.6.19) für $N = 2$ definiert. Als zweites Hilfsproblem definieren wir analog zu (2.2.3) ein eindimensionales Randwertproblem in einer selbstadjungierten Form:

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{s}) \left(\psi(\bar{s}) X'(\bar{s}) \right)' + \mu f(X) &= 0, \quad 0 \leq \bar{s} \leq s_0 := s(0) \\ X'(0) = X(s_0) &= 0, \end{aligned} \tag{2.2.H2}$$

$$f(.) \text{ aus Ausgangsproblem (2.2.A), } ' = \frac{d}{d\bar{s}}.$$

Die Ansatzfunktionen φ und ψ seien Lösungen des folgenden Systems für $\bar{s} := s(w)$ (siehe 2.2.7)

$$\begin{aligned} \varphi(s) \psi(s) &= (s s_{,w})^2 \\ \varphi(s) \psi'(s) &= s^2 s_{,ww} - q(w) s_{,w}. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Die Hilfsfunktion $s(w)$ soll eine im Intervall $(0, w_{\max})$ invertierbare Funktion sein (w_{\max} ist das Maximum der Lösung in Ω). Wir denken uns die Umkehrfunktion $w(s)$ in die Ableitungen $s_{,w}$ und $s_{,ww}$ eingesetzt, und erhalten ein Gleichungssystem mit s als unabhängiger Variablen.

Die folgende Proposition 2.2.1 gibt einen formelmässigen Zusammenhang zwischen dem Ausgangsproblem (2.2.A) und den Hilfsproblemen (2.2.H1) und (2.2.H2).

Proposition 2.2.1 ("Vorbereitungsformeln")

Sei $w(x)$ eine (positive) Lösung in Ω von (2.2.H1), $s(w) \neq 0$ sei eine in $(0, w_{\max})$ invertierbare C^2 -Funktion. $X(\bar{s})$ sei eine Lösung des eindimensionalen Hilfsproblems (2.2.H2) mit den Ansatzfunktionen φ und ψ , welche durch das Gleichungssystem (2.2.8) bestimmt sind.

Behauptungen:

Für die Lösung $X(\bar{s})$ mit $\bar{s} := s(w(x))$ gelten folgende Gleichungen:

$$(i) \quad \bar{\Delta} X + r^k X_{,k} + \mu f(X) = \left\{ 1 - \frac{|\bar{\nabla} w|^2}{s^2} \right\} \{ \mu f(X) - X' s_{,w} q(w) \}, \quad \text{in } \Omega_{\mathbb{R}} \quad (2.2.9)$$

$$(ii) \quad \text{Sei } \gamma(s) := \exp \left\{ - \int \frac{q(y)}{s^2(y)} dy \right\}, \quad (2.2.10)$$

dann folgt für die Funktion

$$k(s) := \gamma(s) \{ \mu f(X) - X' s_{,w} q(w) \} \quad (2.2.11)$$

die Beziehung

$$k'(s) = \gamma(s) X'(s) \{ \mu f_{,X} - q_{,w} \}. \quad (2.2.12)$$

Beweis:

Wir berechnen den Laplace-Beltrami Ausdruck für $X = X \{ s(w(x)) \}$:

$$X_{,k} = X' s_{,w} w_{,k},$$

$$\bar{\Delta} X = X'_{,k} = X'' (s_{,w})^2 |\bar{\nabla} w|^2 + X' s_{,ww} |\bar{\nabla} w|^2 + X' s_{,w} \bar{\Delta} w.$$

Daraus ergibt sich die Beziehung

$$\bar{\Delta} X + r^k X_{,k} + \mu f(X) = X''(s,w)^2 |\nabla w|^2 + X' s_{,ww} |\nabla w|^2 + X' s_{,w} (\bar{\Delta} w + r^k w_{,k}) + \mu f(X).$$

Wir eliminieren $\bar{\Delta} w + r^k w_{,k}$ über die Hilfsgleichung (2.2.H1) und klammern den Ausdruck

$$\frac{|\nabla w|^2}{s^2}$$

aus. Die Rechnung ergibt die Gleichung

$$\bar{\Delta} X + r^k X_{,k} + \mu f(X) = \left((s s_{,w})^2 X'' + s^2 s_{,ww} X' \right) \frac{|\nabla w|^2}{s^2} + \mu f(X) - X' s_{,w} q(w).$$

Den Ausdruck

$$(s s_{,w})^2 X'' + s^2 s_{,ww} X'$$

eliminieren wir über das eindimensionale Hilfsproblem (2.2.H2) mit den entsprechenden Definitionen der Ansatzfunktionen φ und ψ des Systems (2.2.8). Wir erhalten

$$(s s_{,w})^2 X'' + s^2 s_{,ww} X' = -(\mu f(X) - X' s_{,w} q(w)).$$

Obige Gleichung eingesetzt ergibt

$$\bar{\Delta} X + r^k X_{,k} + \mu f(X) = \left\{ 1 - \frac{|\nabla w|^2}{s^2} \right\} \{ \mu f(X) - X' s_{,w} q(w) \} \quad \text{in } \Omega_{\mathbb{R}}.$$

Damit ist Formel (2.2.9) bewiesen. Um die Beziehung (2.2.12) zu verifizieren, betrachten wir die Funktion

$$k(w) := k(s(w)) \quad (\text{Def. von } k(s) \text{ siehe 2.2.11})$$

und berechnen die Ableitung $k_{,w} = k' s_{,w}$,

$$k' s_{,w} = \gamma' s_{,w} (\mu f(X) - X' s_{,w} q(w)) + \gamma \left(\mu f_{,X} X' s_{,w} - (X''(s,w)^2 + X' s_{,ww}) q(w) - X' s_{,w} q_{,w} \right).$$

Den Ausdruck $X''(s,w)^2 + X' s_{,ww}$ eliminieren wir wieder wie zuvor mit Hilfe des eindimensionalen Hilfsproblems (2.2.H2) und den entsprechenden Lösungen für die

Ansatzfunktionen φ und ψ des Systems (2.2.8). Durch weitere Umformungen erhalten wir

$$k' s_{,w} = (\mu f(X) - X' s_{,w} q(w)) \left(\gamma' s_{,w} + \gamma \frac{q}{s^2} \right) + \gamma X' s_{,w} (\mu f_{,X} - q_{,w}).$$

Gemäss Definition (2.2.10) von γ folgt

$$\gamma' s_{,w} + \gamma \frac{q}{s^2} = 0.$$

Daraus erhalten wir für $k' s_{,w}$ die Beziehung

$$k' s_{,w} = \gamma X' s_{,w} (\mu f_{,X} - q_{,w}).$$

Wir dividieren noch obige Gleichung durch $s_{,w} \neq 0$ und erhalten damit die Beziehung (2.2.12).

◇

Falls wir für die Lösung w des ersten Hilfsproblems (2.2.H1) eine Ungleichung der Form

$$|\bar{\nabla} w|^2 \leq s^2(w) \quad \text{in } \Omega \tag{2.2.13}$$

beweisen können, dann gilt für den ersten Faktor der rechten Seite in Gleichung (2.2.9)

$$\left\{ 1 - \frac{|\bar{\nabla} w|^2}{s^2} \right\} \geq 0 \quad \text{in } \Omega_{\mathbb{R}}.$$

Mit Hilfe der Beziehungen (2.2.11) und (2.2.12) lassen sich Bedingungen formulieren, die das Vorzeichen des zweiten Faktors

$$\{ \mu f(X) - X' s_{,w} q(w) \}$$

auf der rechten Seite von (2.2.9) bestimmen. Dann ist $X = X\{s(w(x))\}$ eine Ober- oder Unterfunktion, je nach Vorzeichen der Grösse

$$X' \{ \mu f_{,X} - q_{,w} \}.$$

Gilt z.B. in (2.2.13) Gleichheit in Ω , so ist X eine Lösung. $\bar{s} := s(w(x))$ wirkt als "Transformationsfunktion" in der Lösung $X(\bar{s})$ von (2.2.H2).

Wir wollen jetzt die Maximumprinzipien, wie sie in den Korollaren 1.6.1 und 1.6.2 formuliert sind, mit Proposition 2.2.1 kombinieren. Dazu gehen wir von der Problemklasse (1.6.3') aus, welche in einem beschränkten Gebiet Ω_R eines Riemannschen Raumes mit einer konformen Metrik $g_{ik} = \rho(x) \delta_{ik}$ gegeben ist. Als Hilfsproblem (2.2.H1) wählen wir das lineare inhomogene Randwertproblem

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} w + r^k w_{,k} + 1 &= 0 && \text{in } \Omega_R \\ w &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_R. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

$\bar{\Delta}$ und r^k sind in (1.6.6) und (1.6.7) definiert.

Mit der Lösung $w(x)$ des obigen Randwertproblems definieren wir eine P-Funktion der Form (1.6.18) und wenden Korollar 1.6.1 an. (setze an den entsprechenden Stellen $\lambda f(u) := 1$.) Wir fassen das Ergebnis im folgenden Satz zusammen.

Satz 2.2.2 (Oberfunktion für Problem (1.6.3'), allgemeine Dimension $N > 1$)

Voraussetzungen:

(i) Sei $X(\bar{s})$ eine Lösung des folgenden eindimensionalen Randwertproblems:

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{s}) \left(\psi(\bar{s}) X' \right)' + \mu f(X) &= 0, \quad 0 \leq \bar{s} \leq s_0 := \sqrt{\frac{2\beta w_{\max}}{a}} \\ X'(0) = X(s_0) &= 0, \quad (f \text{ aus Problem (1.6.3')}), \quad a := w_{\max} + \beta, \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \varphi(\bar{s}) &:= \sqrt{1 - \frac{2\bar{s}^2}{a}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2\bar{s}^2}{a}} \right), \quad \psi(\bar{s}) := \frac{\sqrt{1 - \frac{2\bar{s}^2}{a}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2\bar{s}^2}{a}}} \\ \text{und } \max \left\{ w_{\max}, \frac{\bar{r}_{\max}}{k_{\min}^b} \right\} &\leq \beta < \infty. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

(ii) Bedingungen für das Maximumprinzip (Ungleichung (1.6.18) für Hilfsprob. (2.2.14)):

$$M_N^{kl} + \frac{\rho}{w + \beta} \delta^{kl} \quad \text{positiv semidefinit in } \Omega \quad (2.2.17)$$

(M_N^{kl} ist in (1.6.20), Korollar 1.6.1 definiert),

$$k_{\min}^b \geq 0 \quad (\text{Def. siehe (1.6.11/12)})$$

(iii) Bedingungen an die Nichtlinearität $f(u)$:

$$f(0) \geq 0 \quad \text{und} \quad f'(u) \geq 0 \quad \text{für } u \geq 0$$

Behauptung: $X(\bar{s})$ mit

$$\bar{s} := s(w(x)) := \sqrt{2 \frac{(w(x) + \beta)(w_{\max} - w(x))}{a}}, \quad (2.2.18)$$

($w(x)$ Lösung von (2.2.14))

ist eine Oberfunktion in Ω_R für das Problem (1.6.3') mit $\lambda = \mu$.

Beweis:

Die in (2.2.18) der Behauptung definierte Funktion $s(w)$, $0 \leq w \leq w_{\max}$, mit der Bedingung (2.2.16) an β besitzt eine Inverse $w(s)$, welche wir in der Form

$$x := w + \beta = \frac{a}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2s^2}{a}} \right) \quad (2.2.19)$$

benützen werden. Wir bestimmen die Ansatzfunktionen ϕ und ψ der Voraussetzung (i), indem wir die Ausdrücke auf der rechten Seite im System (2.2.8) berechnen. Dazu leiten wir die Beziehung (2.2.18) in der Form (1.6.18) ab,

$$s s_{,w} = 2(w + \beta) \int_w^{w_{\max}} \frac{dy}{(y + \beta)^2} - 1 = \frac{s^2}{x} - 1 \quad (2.2.20)$$

und setzen (2.2.19) ein. Es ergibt sich

$$s s_{,w} = \frac{s^2 - x}{x} = \frac{s^2 - \frac{a}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2s^2}{a}} \right)}{\frac{a}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2s^2}{a}} \right)} = -\sqrt{1 - \frac{2s^2}{a}}.$$

Obige Beziehung (2.2.20) nochmals abgeleitet mit einer nachfolgenden Umformung ergibt

$$s^2 s_{,ww} = \frac{s^3}{x^2} - \frac{2s}{x} - \frac{1}{s} \left(\frac{s^2}{x} - 1 \right)^2 = -\frac{1}{s}.$$

Somit erhalten wir für $s^2 s_{,ww} - q(w) s_{,w}$ mit $q(w) = 1$ den Term

$$s^2 s_{,ww} - s_{,w} = -\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2s^2}{a}}}{s}.$$

Das System (2.2.8) für die Funktionen φ und ψ lautet somit

$$\begin{aligned} \varphi(s) \psi(s) &= 1 - \frac{2s^2}{a} \\ \varphi(s) \psi'(s) &= -\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2s^2}{a}}}{s}. \end{aligned}$$

Die Funktionen φ und ψ , die in Voraussetzung (i) definiert wurden, sind Lösungen des obigen Systems. Mit Hilfe der Proposition (2.2.1) und den Hilfsproblemen (2.2.14) und (2.2.15) erhalten wir eine elliptische Gleichung in Ω_R der Form

$$\bar{\Delta} X + r^k X_{,k} + \mu f(X) = \left\{ 1 - \frac{|\nabla w|^2}{s^2} \right\} \left\{ \mu f(X) + X' \frac{1}{s} \sqrt{1 - \frac{2s^2}{a}} \right\}. \quad (2.2.21)$$

Der erste Klammerausdruck auf der rechten Seite von (2.2.21) ist gemäss Voraussetzung (ii) nicht negativ. (Korollar 1.6.1, Maximumprinzip). Um das Vorzeichen des zweiten Klammerausdruckes bestimmen zu können, definieren wir eine Hilfsfunktion $\gamma(s)$ gemäss (2.2.10) durch

$$\gamma(s) := \exp \left\{ -\frac{a}{2} \int \frac{w(s)}{(y + \beta)(w_{\max} - y)} dy \right\} = \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{1}{s} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2s^2}{a}} \right).$$

Wieder mit Proposition (2.2.1) erhalten wir für die Funktion

$$k(s) := \gamma(s) \left\{ \mu f(X) + X' \frac{1}{s} \sqrt{1 - \frac{2s^2}{a}} \right\}$$

die Beziehung

$$k'(s) = \gamma(s) X'(s) \mu f_{,X}.$$

Mit der Voraussetzung (iii) an $f(u)$ folgt

$$k'(s) \leq 0, \text{ für } 0 \leq s \leq s_0 \text{ und}$$

$$k(0) = 0.$$

Man beachte, dass die Lösung $X(\bar{s})$ des Randwertproblems (2.2.15) die Symmetrie $X(-\bar{s}) = X(\bar{s})$ besitzt. Gemäss dem Maximumprinzip muss das Maximum von X bei $\bar{s} = 0$ liegen. Das Minimum wird im Punkt $\bar{s} = s_0$ angenommen. Daraus folgt

$$X'(\bar{s}) \leq 0 \text{ in } 0 \leq \bar{s} \leq s_0.$$

Somit erfüllt die Funktion $X(\bar{s})$ mit $\bar{s} = s(w(x))$ das System

$$\bar{\Delta} X + r^k X_{,k} + \mu f(X) \leq 0 \quad \text{in } \Omega_R$$

$$X = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_R,$$

d.h. X ist eine Oberfunktion in Ω_R für (1.6.3') mit $\lambda = \mu$.

◇

Bemerkungen zu Satz 2.2.2:

1. Unterfunktionen:

Aus der Bedingung (iii) an die Nichtlinearität $f(u)$ folgt, dass $X \equiv 0$ eine (triviale) Unterfunktion für (1.6.3') ist. Ersetzt man die Bedingung (iii) z.B. durch

$$(iii') \quad f(u) \leq 0 \text{ und } f'(u) \geq 0 \text{ für } u \geq 0,$$

dann liefert die Konstruktion eine Unterfunktion. Es wird auf Abschnitt 2.3.2 verwiesen, wo für $f(u)$ folgendes gewählt wird

$$f(u) := -(1+u)^p \quad -1 < p < 0.$$

2. Grenzfall $\beta \rightarrow \infty$ und "Konsistenz"

Wir bilden an den entsprechenden Orten in Satz 2.2.2 den Limes $\beta \rightarrow \infty$ und erhalten den entsprechenden Satz für den Grenzfall.

Voraussetzungen:

$$(i') \quad \text{Sei } X(\bar{s}) \text{ eine Lösung des eindimensionalen Randwertproblems}$$

$$\begin{aligned} X''(\bar{s}) + \mu f(X) &= 0, \quad 0 \leq \bar{s} \leq s_0 := \sqrt{2w_{\max}} \\ X'(0) = X(s_0) &= 0, \quad f \text{ aus Problem (1.6.3')} \end{aligned} \quad (2.2.15')$$

(ii') M_N^{kl} positiv semidefinit in Ω_R (Definition von M_N^{kl} siehe (1.6.20))

$$k_{\min}^b \geq 0 \quad (\text{Bedingung unverändert})$$

(iii') $f(0) \geq 0$ und $f'(u) \geq 0$ für $u \geq 0$ (Bedingung unverändert)

Behauptung: $X(\bar{s})$ mit

$$\bar{s} := s(w(x)) = \sqrt{2(w_{\max} - w(x))}, \quad w(x) \text{ Lösung von (2.2.14)}$$

ist eine Oberfunktion in Ω_R für (1.6.3') mit $\lambda = \mu$. (entspricht dem Ansatz (1.6.14) für P)

Um die Frage der "Konsistenz" zu beantworten, setzen wir im Ausgangsproblem (1.6.3') $\rho = 1$ und $b^k = 0$, $k=1, \dots, N$ ("euklidischer" Fall) und betrachten (1.6.3') in einem (Hyper-) Streifen mit Breite 2δ . In dieser Situation erhalten wir aus dem Hilfsproblem (2.2.14) für w_{\max} die Grösse

$$w_{\max} = \frac{\delta^2}{2}.$$

Obiger Wert in (2.2.15') als Intervallendpunkt eingesetzt ergibt $s_0 = \delta$. Somit fällt das eindimensionale Hilfsproblem (2.2.15') mit dem Ausgangsproblem zusammen. Für die zur Konstruktion von $X = X\{s(w(x))\}$ benutzte Funktion $s(w)$ gilt die Identität:

$$s(w(x)) = \sqrt{2(w_{\max} - w(x))} = x.$$

Die Funktion

$$g(w) = \frac{1}{(w + \beta)^2}$$

im Ansatz (1.6.15) bringt eine Verbesserung der konstruierten Oberfunktion X . Eine "bestmögliche" Wahl von β ist durch die Definition (1.6.25) gegeben. Der Verbesserungseinfluss, welcher durch g erzielt wird, diskutieren wir in den numerischen Beispielen des nachfolgenden dritten Kapitels.

3. Obere Schranken für w_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$

Die Parameter w_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$, welche im Randwertproblem (2.2.15) der Voraussetzung (i) eingesetzt werden müssen, lassen sich nur in ganz speziellen Situationen (euklidische Fälle, Ω ein Streifen, Kreis oder gleichseitiges Dreieck) durch explizite Formeln angeben. Wir können aber im Randwertproblem (2.2.15) obere Schranken \hat{w} , $\hat{\tau}$ für w_{\max} , $\bar{\tau}_{\max}$ einsetzen, und erhalten eine etwas schlechtere Oberfunktion. \hat{w} und $\hat{\tau}$ bestimmen wir wieder über das Maximumprinzip für die gleiche P-Funktion der Form (1.6.18), wie sie für Satz (2.2.2) benützt wurde. (siehe Beziehungen (1.6.42) bis (1.6.45) in Abschnitt 1.6.2).

4. Transformation des Hilfsproblems

Aus numerischen Gründen transformieren wir das Randwertproblem (2.2.15) der Voraussetzung (i) mittels der Transformation

$$\bar{s} := \sqrt{\frac{a}{2}} \sin\left(\sqrt{\frac{2}{a}} \vartheta\right)$$

auf das äquivalente Problem

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\vartheta) \left(\bar{\psi}(\vartheta) \dot{X} \right)' + \mu f(X) &= 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0 := \sqrt{a/2} \arcsin\left(\frac{2}{a} \sqrt{\beta w_{\max}}\right) \\ \dot{X}(0) = X(\vartheta_0) &= 0, \quad \cdot = \frac{d}{d\vartheta} \end{aligned} \quad (2.2.15T)$$

$$\text{mit } \bar{\varphi}(\vartheta) := 1 + \cos\left(\sqrt{\frac{2}{a}} \vartheta\right), \quad \bar{\psi}(\vartheta) := \frac{1}{\bar{\varphi}(\vartheta)}.$$

Ueber die Rücktransformation

$$\vartheta = \sqrt{a/2} \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{a}} \bar{s}\right)$$

erhält man eine Lösung für (2.2.15).

5. Oberfunktionen, die optimal sind, falls Ω eine (Hyper-) Kugel ist.

Es ist klar, dass die Konstruktion gemäss Satz 2.2.2 gute Oberfunktionen liefert, falls wir Probleme in "streifenähnlichen" Gebieten betrachten. Für Probleme in (hyper-) kugelähnlichen Gebieten müsste man eine andere P-Funktion zum Hilfsproblem (2.2.14) definieren. Wir setzen

$$P := |\nabla w|^2 + \frac{2}{N} w, \quad w(x) \text{ Lösung von (2.2.14),}$$

bzw.

$$P := g(w) |\nabla w|^2 + \frac{2}{N} \int_0^w g(y) dy, \quad g(w) := \frac{1}{w + \beta} \quad (\text{siehe [8]})$$

falls man eine Verbesserung der konstruierten Oberfunktion erreichen möchte. Ein Maximumprinzip für obige P-Funktion mit $g = 1$ liefert uns eine Ungleichung der Form

$$|\nabla w|^2 \leq s^2(w) := \bar{\tau}_{\max}^2 - \frac{2}{N} w(x). \quad (2.2.22)$$

Im euklidischen Fall ($\rho = 1$ und $b^k = 0$, $k = 1, \dots, N$ in (2.2.14)) gilt in obiger Ungleichung Gleichheit, falls wir eine Lösung in einem (Hyper-) Kugelgebiet einsetzen. Setzen wir die obige Funktion $s(w)$ im System (2.2.8) mit $q(w) = 1$ ein, so erhalten wir für das Randwertproblem der Form (2.2.H2) bzw. (2.2.15) die Ansatzfunktionen

$$\varphi(s) = \frac{1}{N^2} \frac{1}{s^{N-1}}, \quad \psi(s) = s^{N-1}.$$

(vergleiche mit [23]) Das Hilfsproblem nimmt somit die Form

$$\frac{1}{\bar{s}^{N-1}} \left(\bar{s}^{N-1} X' \right)' + N^2 \mu f(X) = 0, \quad 0 \leq \bar{s} \leq s_0 := \bar{\tau}_{\max} \quad (2.2.23)$$

$$X'(0) = X(s_0) = 0$$

an (f aus Problem (1.6.3')). Sei $X(\bar{s})$ eine Lösung des obigen Systems. Dann ist

$$X(\bar{s}) \quad \text{mit} \quad \bar{s} := \sqrt{\bar{\tau}_{\max}^2 - \frac{2}{N} w(x)}, \quad w(x) = \text{Lösung von (2.2.14)}$$

eine Oberfunktion, falls die Nichtlinearität $f(u)$ die Bedingung (iii) von Satz 2.2.2 erfüllt und der Tensor M_N^{kl} (siehe (2.2.17)) positiv semidefinit ist. Diese Oberfunktion ist eine Lösung für Problem (1.6.3) mit $\rho = 1$ und alle $b^k = 0$, falls das Gebiet Ω eine (Hyper-) Kugel mit Radius R ist. Man beachte, dass in diesem Fall das obige System (2.2.23) ein Randwertproblem für die N -Kugel mit $s_0 := \bar{\tau}_{\max} = R/N$ und $\lambda = N^2 \mu$ ist.

6. **Obere Schranken für w_{\max} , welche optimal sind für eine (Hyper-) Kugel.**
 In [14] findet man andere obere Schranken für w_{\max} , welche wir als Parameter im Randwertproblem (2.2.15) einsetzen können. Für ein Torsionsproblem der Form (2.2.14) mit ($\rho = 1$ und alle $b^k = 0$, d.h. euklidischer Fall) wurde in [14] die Ungleichung

$$w_{\max} \leq \frac{1}{2N} \left(\frac{V_N}{S_N} \right)^{\frac{2}{N}} \quad (2.2.24)$$

bewiesen. Dabei ist V_N das Volumen von Ω und S_N das Volumen der N -dimensionalen Einheitskugel. Gleichheit gilt, falls Ω eine (Hyper-) Kugel ist mit Radius 1. Diese Schranke ist nicht mehr "konsistent" mit der Oberfunktionenkonstruktion von Satz 2.2.2. Sie kann aber trotzdem als obere Schranke z.B. im Randwertproblem (2.2.15') (Grenzfall $\beta \rightarrow \infty$) verwendet werden. Man erhält damit gute Oberfunktionen, falls das Ausgangsproblem (1.6.3') in einem "(hyper-) kugelähnlichen Gebiet" gegeben ist. Falls das Randwertproblem (2.2.15) zur Bestimmung von Oberfunktionen herangezogen wird, so müsste man noch zusätzlich eine obere Schranke für $\bar{\tau}_{\max}$ einsetzen, welche ebenfalls optimal wäre, falls Ω eine (Hyper-) Kugel ist.

Wir behandeln den Spezialfall $N = 2$ wieder gesondert. Der folgende Satz ist ähnlich zu einem Resultat in [29], welches eingangs dieses Abschnittes erwähnt wurde.

Satz 2.2.3 (Oberfunktionen für (1.6.3'), Spezialfall $N = 2$)

Voraussetzungen:

(i) Sei $X(\bar{s})$ eine Lösung des folgenden eindimensionalen Randwertproblems:

$$\varphi(\bar{s}) \left(\psi(\bar{s}) X' \right)' + \mu f(X) = 0, \quad 0 \leq \bar{s} \leq s_0 := \sqrt{\frac{2}{\beta} \left(1 - e^{-\beta w_{\max}} \right)} \quad (2.2.25)$$

$$X'(0) = X(s_0) = 0, \quad (f \text{ aus Problem (1.6.3')}),$$

$$\text{mit } \varphi(\bar{s}) := \psi^3(\bar{s}), \quad \psi(\bar{s}) := \sqrt{1 - \frac{\beta s^2}{2}}$$

$$\text{und } 0 \leq \beta \leq \frac{2 k_{\min}^b}{\bar{\tau}_{\max}}$$

(ii) Bedingungen für Maximumprinzip: (Ungleichung (1.6.19) für Hilfsproblem (2.2.14))

$$M_2^{k1} + \beta \rho \left(0.5 + \frac{b^s}{\rho} w_{,s} \right) \delta^{k1} \text{ positiv semidefinit in } \Omega, \quad (2.2.26)$$

(M_2^{k1} ist in (1.6.31), Korollar 1.6.2 definiert),

$$k_{\min}^b \geq 0 \quad (\text{Def. siehe 1.6.11/12})$$

(iii) Bedingungen an die Nichtlinearität $f(u)$:

$$f(0) \geq 0 \quad \text{und} \quad f'(u) \geq 0 \quad \text{für } u \geq 0$$

Behauptung: $X(\bar{s})$ mit

$$\bar{s} := s(w(x)) := \sqrt{\frac{2}{\beta} \left(1 - e^{-\beta(w_{\max} - w(x))}\right)} \quad (2.2.27)$$

($w(x)$ Lösung von (2.2.14))

ist eine Oberfunktion in Ω_R für Problem (1.6.3') mit $\lambda = \mu$.

Beweis:

Der Beweis verläuft analog zum vorangehenden Satz. Die Funktion $s(w)$ in der Behauptung (2.2.27) hat die Inverse

$$w(s) = w_{\max} + \frac{1}{\beta} \ln \left(1 - \frac{\beta s^2}{2} \right).$$

Wir berechnen aus (2.2.27) die Ableitungen $s_{,w}$ und $s_{,w,w}$ und erhalten gemäss (2.2.8) das folgende Gleichungssystem für die Ansatzfunktionen φ und ψ :

$$\varphi(s) \psi(s) = \left(1 - \frac{\beta s^2}{2} \right)^2$$

$$\varphi(s) \psi'(s) = -\frac{\beta s}{2} \left(1 - \frac{\beta s^2}{2} \right).$$

Eliminieren wir φ im obigen System, so erhalten wir einen Ausdruck für die logarithmische Ableitung von ψ der Form

$$(\ln \psi)' = \frac{\psi'}{\psi} = \frac{-\frac{\beta s}{2}}{1 - \frac{\beta s^2}{2}} = \left(\ln \sqrt{1 - \frac{\beta s^2}{2}} \right)'$$

Als Lösungen des obigen Systems finden wir die Funktionen φ und ψ der Voraussetzung (i). Mit Proposition (2.2.1) und den Hilfsproblemen (2.2.25) und (2.2.14) ergibt sich eine ellip-

tische Gleichung für $X(\bar{s})$ mit $\bar{s} = s(w(x))$ der Form

$$\bar{\Delta} X + r^k X_{,k} + \mu f(X) = \left\{ 1 - \frac{|\nabla w|^2}{s^2} \right\} \left\{ \mu f(X) + X' \frac{\psi^2}{s} \right\}. \quad (2.2.28)$$

Der erste Klammerausdruck auf der rechten Seite der obigen Gleichung ist gemäss Voraussetzung (ii) (Maximumprinzip, Korollar 1.6.2) nicht negativ. Für den zweiten Klammerausdruck definieren wir gemäss (2.2.11) die Hilfsfunktion γ durch

$$\gamma(s) := \sqrt{\frac{\beta}{2}} \frac{s}{\psi(s)}.$$

Wieder mit Proposition (2.2.1) erhalten wir für $k(s)$,

$$k(s) := \gamma(s) \left\{ \mu f(X) + X' \frac{\psi^2}{s} \right\}$$

die Beziehungen:

$$k'(s) = \gamma(s) X'(s) \mu f_{,X},$$

$$k(0) = 0.$$

Für die Lösung $X(\bar{s})$ von (2.2.25) gilt (siehe Beweis Satz 2.2.2): $X'(\bar{s}) \leq 0$, $0 \leq \bar{s} \leq s_0$.

Daraus erhalten wir mit der Voraussetzung (iii) über die Nichtlinearität f das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} X + r^k X_{,k} + \mu f(X) &\leq 0 && \text{in } \Omega_R \\ X &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_R. \end{aligned}$$

d.h. $X = x\{s(w(x))\}$ ist eine Oberfunktion für (1.6.3') mit $\lambda = \mu$.

◇

Bemerkungen zu Satz 2.2.3:

1. Unterfunktionen

Es gelten die gleichen Bemerkungen wie in (1.) des vorangehenden Satzes 2.2.2 ($X \equiv 0$ ist eine triviale Unterfunktion).

2. Grenzfall $\beta = 0$ und "Konsistenz"

Wir bilden an den entsprechenden Stellen in Satz 2.2.3 den Limes $\beta \rightarrow 0$ und erhalten folgenden Satz:

Voraussetzungen:

$$(i') \quad X'' + \mu f(X) = 0, \quad 0 \leq \bar{s} \leq s_0 := \sqrt{2w_{\max}} \quad (2.2.25')$$

$$X'(0) = X(s_0) = 0, \quad (f \text{ aus Problem (1.6.3')})$$

$$(ii') \quad M_2^{kl} \text{ positiv semidefinit in } \Omega_R \quad (\text{Def. von } M_2^{kl} \text{ siehe 1.6.31})$$

$$k_{\min}^b \geq 0 \quad (\text{unveränderte Bedingung})$$

$$(iii') \quad f(0) \geq 0 \text{ und } f'(u) \geq 0 \text{ für } u \geq 0 \quad (\text{unveränderte Bedingung})$$

Behauptung:

Sei $X(\bar{s})$ eine Lösung von (2.2.25') mit Parameter μ . Dann ist $X(\bar{s})$ mit

$$\bar{s} := s(w(x)) := \sqrt{2(w_{\max} - w(x))}, \quad w(x) \text{ Lösung von (2.2.14)}$$

eine Oberfunktion in Ω_R für (1.6.3') mit $\lambda = \mu$.

Analog zur Bemerkung 2. des vorangehenden Satzes bringt die Funktion

$$g(w) := e^{-\beta w}$$

im Ansatz (1.6.15) eine Verbesserung der im Satz konstruierten Oberfunktion. Wir werden anhand numerischer Rechnungen in Kapitel 3 den Verbesserungseinfluss von $g(w)$ diskutieren. Eine "bestmögliche" Wahl von β ist durch die Definition

$$\beta := \frac{2k_{\min}^b}{\bar{r}_{\max}} \quad (\text{siehe (1.6.35)})$$

gegeben. Um die Frage der "Konsistenz" zu beantworten, betrachten wir ein Problem, welches in einem Steifen Ω mit Breite 2δ der euklidischen Ebene gegeben ist (setze in (1.6.3') $\rho = 1$, und $b^k = 0$, $k = 1, 2$.) In diesem Spezialfall gilt für (2.2.14)

$$w_{\max} = \frac{\delta^2}{2} \quad (\text{bzw. } s_0 = \delta).$$

Damit fällt das eindimensionale Hilfsproblem (2.2.25) in der Voraussetzung (i) mit dem Problem (1.6.3') zusammen. Die konstruierte Oberfunktion der Behauptung ist Lösung.

3. **Obere Schranken für w_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$**

Der Bemerkung 3. des vorangehenden Satzes entsprechend müssen wir uns mit oberen Schranken für w_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$ begnügen. Wir können im Hilfsproblem (2.2.25) obere Schranken \hat{w} und $\hat{\tau}$ für w_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$ einsetzen. Wir bestimmen sie über das Maximumprinzip für die P-Funktion, die schon im Beweis des Satzes benützt wurde (siehe Beziehungen (1.6.49) bis (1.6.52)). Die konstruierte Funktion $X = X\{s(w(x))\}$ in der Behauptung bleibt Oberfunktion.

4. **Transformation des Randwertproblems in der Voraussetzung (i):**

Für numerische Berechnungen transformieren wir das eindimensionale Randwertproblem (2.2.25) mittels

$$s := \sqrt{\frac{2}{\beta}} \sin\left(\sqrt{\frac{\beta}{2}} \vartheta\right) \quad (2.2.29)$$

auf die Form

$$\ddot{X} + \frac{\mu}{\cos^2\left(\sqrt{\frac{\beta}{2}} \vartheta\right)} f(X) = 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0 := \sqrt{2/\beta} \arcsin\left(\sqrt{1 - e^{-\beta w_{\max}}}\right) \quad (2.2.25T)$$

$$\dot{X}(0) = X(\vartheta_0) = 0, \quad \dot{\vartheta} = \frac{d}{d\vartheta}, \quad f \text{ aus Problem (1.6.3')}.$$

Setzen wir in der Lösung $X(\vartheta)$ die Rücktransformation

$$\vartheta = \sqrt{\frac{2}{\beta}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{\beta}{2}} \bar{s}\right)$$

ein, so erhalten wir eine Lösung für das Hilfsproblem (2.2.25).

Zum Schluss dieses Abschnittes betrachten wir ein allgemeines semilineares elliptisches Dirichletproblem der Form (1.3.2') mit $\lambda = 1$ (siehe Abschnitt 1.3). Ω_R sei ein beschränktes Gebiet des Riemannschen Raumes R^N . Zu diesem Problem definieren wir eine Klasse von Hilfsproblemen der Art

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} v + r^k v_{,k} + 1 + \alpha v &= 0 & \text{in } \Omega_R, & \text{ mit } \alpha < \hat{\alpha} \text{ (siehe Problem (2.2.H1) ff.)} \\ v &= 0 & \text{auf } \partial\Omega_R & \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

und eine P - Funktion der Form

$$P = |\nabla v|^2 + 2 \int_0^v (1 + \alpha y) dy = |\nabla v|^2 + 2v + \alpha v^2. \quad (2.2.31)$$

($\bar{\Delta}$, r^k und das Gebiet Ω_R sind identisch mit den entsprechenden Grössen im Ausgangsproblem (1.3.2').) Das Maximum der Lösung $v(x)$ in Ω_R bezeichnen wir mit v_{\max} .

Satz 2.2.4 (Erweiterung der Konstruktion von Ober- bzw. Unterfunktionen)

(i) Sei $X(\bar{s})$ eine Lösung des folgenden eindimensionalen Randwertproblems:

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{s}) \left(\psi(\bar{s}) X' \right)' + f(X) &= 0, & 0 \leq \bar{s} \leq s_0 & := \sqrt{V_{\max}} \\ X'(0) = X(s_0) &= 0, & (f \text{ aus Problem (1.3.2')}) & \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

$$\text{mit } \varphi(\bar{s}) = \psi(\bar{s}) := \sqrt{(1 + \alpha v_{\max})^2 - \alpha s^2} \quad \text{und} \quad V_{\max} := 2 v_{\max} + \alpha v_{\max}^2$$

(ii) Bedingungen für Maximumprinzip mit einem Ansatz (2.2.31) der P-Funktion:

$$\text{Falls } N > 1: \quad -\left(r^{k,l} + R^{kl} \right) \quad \text{positiv semidefinit in } \Omega_R$$

$$\text{Falls } N = 2: \quad r^k r^l + K_G g^{kl} - r^{k,l} \quad \text{positiv semidefinit in } \Omega_R$$

$$(R^{kl} = \text{kontravarianter Riccitenor, } K_G = \text{Gaussische Krümmung von } \Omega_R)$$

$$\kappa + r^k v_k \geq 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_R \quad (v \text{ äusserer Normalenvektor von } \partial\Omega_R \text{ mit } g^{ik} v_i v_k = 1)$$

(iii) $f(u) \geq 0$ für $u \geq 0$

Behauptungen:

(i) Falls wir $\alpha < \hat{\alpha}$ so wählen, dass gilt: $f_{,X}(X) - \alpha \geq 0$ für $0 \leq X \leq X_{\max}$, so ist $X(\bar{s})$ mit

$$\bar{s} := s(v(x)) := \sqrt{2(v_{\max} - v(x)) + \alpha(v_{\max}^2 - v^2(x))} \quad (2.2.33)$$

eine Oberfunktion für das Ausgangsproblem (1.3.2') (mit $\lambda = 1$).

(ii) Falls wir $\alpha < \hat{\alpha}$ so wählen, dass gilt: $f_{,X}(X) - \alpha \leq 0$ für $0 \leq X \leq X_{\max}$, so ist $X(\bar{s})$ mit

$\bar{s} := s(v(x))$, siehe Def. (2.2.33), eine Unterfunktion für (1.3.2') mit $\lambda = 1$.

(iii) Falls in (1.3.2') $r^k = 0$ und für die Metrik $g_{ik} = \delta_{ik}$ gewählt wird (euklidischer Fall), und Ω ein (Hyper-) Streifen mit Breite 2δ ist, so ist $X = X\{s(v(x))\}$ eine Lösung.

Beweis:

Vorerst sei bemerkt, dass der Wurzel Ausdruck in (2.2.33) für $\alpha < \hat{\alpha}$ wohldefiniert ist (Maximumprinzip für die P-Funktion der Form (2.2.31)). Wir benützen Lemma 1.4.3 und Proposition 2.2.1. Dazu bilden wir die Ableitungen $s_{,v}$ und $s_{,vv}$ von (2.2.33) und setzen die inverse Funktion von $s(v)$ in diese Ableitungsfunktionen ein. Die Rechnung (hier weggelassen) ergibt für die Ansatzfunktionen $\varphi(s)$ und $\psi(s)$ des Systems (2.2.8) folgende Form (setze $q(v) := 1 + \alpha v$):

$$\varphi(s) \psi(s) = (1 + \alpha v_{\max})^2 - \alpha s^2$$

$$\varphi(s) \psi'(s) = -\alpha s.$$

Als Lösung erhalten wir die in Voraussetzung (i) definierten Funktionen

$$\varphi(s) = \psi(s) = \sqrt{(1 + \alpha v_{\max})^2 - \alpha s^2}.$$

Mit Proposition (2.2.1) ergibt sich die elliptische Gleichung

$$\bar{\Delta} X + r^k X_{,k} + f(X) = \left\{ 1 - \frac{|\nabla v|^2}{s^2} \right\} \left\{ f(x) + \frac{X'}{s} \varphi(s) \psi(s) \right\} \quad (2.2.34)$$

für $X = X\{s(v(x))\}$. Aus der Bedingung (ii) der Voraussetzung folgt, dass der erste Klammerausdruck auf der rechten Seite von (2.2.34) nicht negativ ist. Dies folgt aus dem Maximumprinzip für die P-Funktion (2.2.31). Mit Hilfe von Lemma 1.4.3 können wir folgende elliptische Ungleichungen in Ω_R für P hinschreiben (setze im Lemma $g := 1$ und $f := 1 + \alpha v$):

$$\text{Falls } N \geq 1: \quad \bar{\Delta} P - \frac{L^k P_{,k}}{|\nabla v|^2} \geq -2 \left(r^{kl} + R^{kl} \right) v_{,k} v_{,l} \geq 0 \quad \text{in } \Omega_R$$

$$\text{mit } L^k := 0.5 P^{,k} - 2(1 + \alpha v) v^{,k} - |\nabla v|^2 r^k,$$

$$\text{falls } N=2: \quad \bar{\Delta} P - \frac{L^k P_{,k}}{|\nabla v|^2} = 2 \left(r^{kl} + K_G g^{kl} - r^{kl} \right) v_{,k} v_{,l} \geq 0 \quad \text{in } \Omega_R$$

$$\text{mit } L^k := P^{,k} - 2(1 + \alpha v - r^m v_{,m}) v^{,k} - |\nabla v|^2 r^k.$$

Ueber die Gleichung (1.5.13) erhalten wir mit Voraussetzung (ii) die Beziehung

$$\frac{\partial P}{\partial v} = -2 \left(\frac{\partial v}{\partial v} \right)^2 \left(\kappa + r^k v_{,k} \right) \leq 0 \quad \text{auf } \partial \Omega_R.$$

Mit Lemma 1.2.5 (Maximumprinzip) folgt $P = P_{\max}$ in einem Punkt, wo $|\nabla v| = 0$. Somit gilt die oben gemachte Aussage für den ersten Faktor auf der rechten Seite von (2.2.34). Um das Vorzeichen des zweiten Klammersausdruckes verifizieren zu können, definieren wir eine Hilfsfunktion

$$k(s) := s \left\{ f(X) + X' \frac{\varphi(s) \psi(s)}{s} \right\} \quad (\text{setze in (2.2.11) } \gamma(s) := s).$$

Wieder mit Proposition 2.2.1 erhalten wir:

$$k'(s) = s X'(s) \left\{ f_{,X}(X) - \alpha \right\},$$

$$k(0) = 0.$$

Für die Lösung $X(\bar{s})$ des Hilfsproblems (2.2.32) der Voraussetzung (i) folgt mit der Bedingung (iii)

$$X'(\bar{s}) \leq 0 \quad \text{für } 0 \leq \bar{s} \leq s_0.$$

Falls wir im Hilfsproblem (2.2.32) α so wählen, dass f der Bedingung

$$f_{,X}(X) - \alpha \geq 0 \quad \text{für } 0 \leq X \leq X_{\max}, \quad \alpha < \hat{\alpha}$$

genügt, so erfüllt $X = X\{s(v(x))\}$ das System:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} X + r^k X_{,k} + f(X) &\leq 0 && \text{in } \Omega_R \\ X &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_R. \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

Somit ist X eine Oberfunktion für (1.3.2') (mit $\lambda=1$). Analog argumentiert man bei der Behauptung (ii) (Unterfunktion).

Unter den in Behauptung (iii) gemachten Voraussetzungen ist der erste Klammerausdruck auf der rechten Seite in (2.2.34) identisch 0. Das Hilfsproblem (2.2.32) fällt mit dem Ausgangsproblem (1.3.2') zusammen.

◇

Bemerkungen zu Satz 2.2.4

1. Transformation des Randwertproblems (2.2.32)

Falls $\alpha = 0$ ist, so ist (2.2.30) ein "Torsionsproblem", welches zum Ausgangsproblem (1.3.2') definiert wird. Das Randwertproblem (2.2.32) besitzt die Form:

$$\begin{aligned} X''(\bar{s}) + f(X) &= 0, && 0 \leq \bar{s} \leq s_0 := \sqrt{2 v_{\max}} \\ X'(0) = X(s_0) &= 0. \end{aligned}$$

Dieser Spezialfall ist als Grenzfall von Satz 2.2.2 bzw. Satz 2.2.3 (siehe Bemerkung 2.) diskutiert worden.

Falls $\alpha \neq 0$ ist, so müssen wir eine Fallunterscheidung machen:

Sei $\alpha > 0$. Setze $\bar{s} := \frac{1 + \alpha v_{\max}}{\sqrt{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha} \vartheta)$.

Dann ist (2.2.32) äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \dot{X}(\vartheta) + f(X) &= 0, && 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0 \\ X(0) = X(\vartheta_0) &= 0, && \dot{\vartheta} = \frac{d}{d\vartheta}, \end{aligned} \quad (2.2.32')$$

$$\text{mit } \vartheta_0 := \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsin \left(\sqrt{1 - \frac{1}{(1 + \alpha v_{\max})^2}} \right).$$

Sei $\alpha < 0$. Setze $\bar{s} := \frac{1 - |\alpha| v_{\max}}{\sqrt{|\alpha|}} \sinh\left(\sqrt{|\alpha|} \vartheta\right)$.

Dann ist (2.2.32) äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \ddot{X}(\vartheta) + f(X) &= 0, & 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0 \\ \dot{X}(0) = X(\vartheta_0) &= 0, \end{aligned} \tag{2.2.32''}$$

$$\text{mit } \vartheta_0 := \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{1}{(1 - |\alpha| v_{\max})^2} - 1}\right).$$

2. Obere und untere Schranken für v_{\max}

Das Hilfsproblem (2.2.32) in Voraussetzung (i) enthält den Parameter v_{\max} , der im allgemeinen nicht explizit bekannt ist. Der Zusammenhang $v_{\max} = v_{\max}(\alpha)$ kann in einem Bifurkationsdiagramm dargestellt werden. Die Behauptung (i) gilt immer noch, falls wir für v_{\max} eine obere Schranke \hat{v} einsetzen. Damit wird der Endpunkt s_0 ,

$$s_0 = \sqrt{V_{\max}} \leq \sqrt{\hat{V}}, \quad \hat{V} := 2\hat{v} + \alpha \hat{v}^2,$$

nach oben abgeschätzt (setze das Ungleichheitszeichen "≥" in der 2. Gleichung von (2.2.35)). Eine (implizite) obere Schranke, welche konsistent ist mit der Konstruktion der Oberfunktion in Behauptung (i), findet man als Lösung der Ungleichung

$$\int_0^{v_{\max}} \frac{dy}{\sqrt{V_{\max} - 2y - \alpha y^2}} \leq R_g \tag{2.2.36}$$

(siehe (1.6.38)). Falls $\alpha < 0$ ist, so ergibt die Berechnung des obigen Integrals die Beziehung

$$\ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - z_{\max}^2}}{z_{\max}}\right) \leq \sqrt{|\alpha|} R_g, \quad \text{mit } z_{\max} := 1 - |\alpha| v_{\max}. \tag{2.2.36'}$$

Wir bezeichnen die obere Schranke von v_{\max} mit \hat{v} , welche wir als Lösung der obigen Gleichung erhalten, d.h. wir setzen in (2.2.36') das Gleichheitszeichen. $\hat{V} := 2\hat{v} + \alpha \hat{v}^2$ ist die entsprechende obere Schranke für V_{\max} (Definition von V_{\max} siehe beim Problem (2.2.32)). Als Lösung

ergibt sich die Formel

$$\hat{z} := 1 - |\alpha| \hat{v} = \frac{2Q}{1+Q^2}, \quad \text{mit } Q := e^{(\sqrt{|\alpha|} R_g)}. \quad (2.2.37)$$

Mit der obigen Schranke \hat{z} lässt sich eine obere Schranke $\hat{\vartheta}$ für den Integrationsendpunkt ϑ_0 im Problem (2.2.32") angeben. Wir erhalten

$$\hat{\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \operatorname{arsinh} \left(\frac{|1-Q^2|}{2Q} \right). \quad (2.2.38)$$

Die obere Schranke für v_{\max} lautet

$$\hat{v} = \frac{1}{|\alpha|} \frac{(1-Q)^2}{1+Q^2}. \quad (2.2.39)$$

Bilden wir in obiger Beziehung (2.2.39) den Limes $\alpha \nearrow 0^-$, so erhalten wir

$$\hat{v} = \frac{R_g^2}{2}. \quad (2.2.40)$$

Dies ergibt die bekannte obere Schranke für ein "Torsionsproblem" (setze in (2.2.30) $\alpha := 0$, siehe [8]). Ueber die Beziehung

$$|\alpha| \hat{v} = 1 - z^2$$

erhalten wir aus (2.2.37) die entsprechende obere Schranke für V_{\max} ,

$$\hat{V} = \frac{1}{|\alpha|} \left(\frac{1-Q^2}{1+Q^2} \right)^2. \quad (2.2.41)$$

Die Berechnung einer oberen Schranke für V_{\max} im Fall $\alpha > 0$ erfolgt analog.

Im Teil (ii) der Behauptung sind untere Schranken für v_{\max} einzusetzen. Wir geben hier nur eine untere Schranke für v_{\max} an, falls im Problem (2.2.30) $\alpha := 0$ und $r^k := 0$ gesetzt ist. Den Laplace-Beltrami Operator ersetzen wir durch den gewöhnlichen Laplaceoperator. Wir erhalten diese Schranke, indem wir die Ungleichung (Maximumprinzip)

$$|\nabla v| \leq s(v(x)) = \sqrt{2(v_{\max} - v(x))}$$

auf den Rand $\partial\Omega$ spezialisieren,

$$|\nabla v| \leq \sqrt{2v_{\max}} .$$

Wir integrieren obige Ungleichung entlang $\partial\Omega$, und verwenden die erste Greensche Identität. Daraus folgt eine untere Schranke für v_{\max} der Form

$$v_{\max} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\Omega|}{|\partial\Omega|} \right)^2 . \quad (2.2.42)$$

$|\Omega|$ ist das (euklidische) Flächenmass des Gebietes Ω und $|\partial\Omega|$ ist das Längenmass des Randes $\partial\Omega$.

2.3 Einige Anwendungen und Folgerungen

2.3.1 Untere Schranken für den kritischen Wert λ^* der inhomogenen Gelfand-Gleichung

Wir wollen die Resultate des letzten Abschnittes auf das Problem

$$\begin{aligned} \Delta u + b^k(x)u_{,k} + \lambda\rho(x)e^u &= 0 & \text{in } \Omega \subset E^N \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

anwenden, mit

a) $\rho > 0$ in $\Omega \cup \partial\Omega$

$b^k = 0$ $k = 1, \dots, N$ (Inhomogene Probleme ohne konvektiven Term $b^k u_{,k}$),

oder

b) $\rho = 1/\sigma$, $\sigma > 0$ in $\Omega \cup \partial\Omega$

$b^k = \sigma_{,k}/\sigma$ (Probleme mit einem selbstadjungierten Differentialausdruck $(\sigma(x)u_{,k})_{,k}$).

Für $b^k = 0$, $\rho = 1$ wird die Differentialgleichung auch etwa Gelfand-Gleichung genannt. Die obige Problemklasse gibt Anlass zur Einführung einer konformen Metrik gemäss dem Vorgehen in Abschnitt 1.6.1. Aus der Literatur ist bekannt, dass für den obigen Problemtyp ein kritischer Wert λ^* existiert, welcher die Eigenschaften (i) bis (iii) besitzt, die zu Beginn von Abschnitt 2.2 formuliert wurden (siehe auch [13], [17] und [18], wobei in diesen zitierten Arbeiten nur homogene Probleme betrachtet werden). Die oben erwähnte Eigenschaft (i) lässt sich für das Problem (2.3.1) noch etwas ergänzen:

(i') Falls $N = 1, 2$ ist, so existieren für $0 < \lambda < \lambda^*$ genau zwei (positive) Lösungen.

Falls $N = 3, 4, \dots, 9$ und Ω eine (Hyper-) Kugel ist, dann existiert sogar ein Wert λ_∞ , so dass unendlich viele (positive) Lösungen existieren (siehe Grafik 1).

Wir werden im 3. Kapitel dieser Arbeit einige Bifurkationsdiagramme $\|u\|_\infty = \text{Fkt}(\lambda)$ für ein (Hyper-)Kugelgebiet berechnen. Im Hinblick auf die in den Anwendungen wichtige Stabilitätsfrage ist es klar, dass wir eine Lösung der obigen Problemklasse immer als stationäre Lösung eines zugehörigen parabolischen Problems betrachten (siehe Definition 2.1.6 und die zitierten Sätze 2.1.7 und 2.1.8).

$$\begin{aligned}
 u_{,t} &= \Delta u + b^k(x)u_{,k} + \lambda\rho(x)e^u \quad \text{in } \Omega \times (0,T) \\
 u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0,T) \\
 u(x,0) &= u_0(x) \quad (\text{geeignet gewählte Anfangsbedingungen})
 \end{aligned}
 \tag{2.3.1'}$$

Die Gelfand-Gleichung kommt z.B. in der technischen Chemie und weiteren Gebieten der Naturwissenschaften vor (siehe auch [6]). Sie ist auch in der Differentialgeometrie von Bedeutung (siehe [3]). In [2] und [12] und den angeführten Referenzen findet man obige Gleichung vom Standpunkt der Ingenieurchemie erläutert. In [19] werden mathematische Fragen erörtert, welche durch Probleme der Art von (2.3.1) gestellt sind. Man stösst auf die Gelfand-Gleichung, indem man z.B. thermische Selbstentzündungsprozesse eines chemisch aktiven Gemisches von Gasen betrachtet. Dieser Prozess wird mit einem semilinearen parabolischen Reaktions-Diffusionssystem für die Konzentration $C = C(x,t)$ und Temperatur $T = T(x,t)$ beschrieben. Das Gleichungssystem lautet (siehe [19]):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial t} &= k \Delta T + q f(T,C) \quad \text{in } \Omega \times (0,T) \\
 \frac{\partial C}{\partial t} &= D \Delta C - \varepsilon f(T,C) \quad \text{in } \Omega \times (0,T) .
 \end{aligned}
 \tag{2.3.2}$$

Als Randbedingungen wird

$$\begin{aligned}
 T &= T_0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (\text{konstante Temperatur auf dem Rand}), \\
 \frac{\partial C}{\partial n} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (\text{Rand undurchlässig})
 \end{aligned}$$

gesetzt und die Anfangsbedingungen T_a und C_a werden geeignet gewählt. Die Parameter bedeuten folgendes:

- k: Temperaturleitfähigkeit
- D: Diffusionskoeffizient
- ε: Geschwindigkeitskonstante der Reaktion
- q: Konstante der Wärme

Es sind im Prinzip zwei Prozessabläufe möglich. Entweder ist nicht genügend Zeit da, um die Hitze, die von der Reaktion erzeugt wird, abzuführen. Dieser erste Prozess führt zu einer thermischen Selbstentzündung (z.B. wenn das Reaktionsgebiet zu gross ist). Im andern Fall stellt sich rasch ein stabiles Gleichgewicht ein, zwischen der Wärmeproduktion, erzeugt durch den chemischen Prozess, und der Wärmeabführung. Die folgende Frage geht zurück auf Ja. B. Zel'dovic und D. A. Frank-Kamenetskii (1947/48):

Unter welchen Bedingungen (Grösse des Reaktionsgebietes, Anfangsbedingungen) stellt sich ein Gleichgewicht ein? Dieses chemische Gleichgewicht kann durch eine stationäre Lösung eines parabolischen semilinearen Systems beschrieben werden. Ein approximatives Modell für den zweiten Prozess finden wir dadurch, dass wir eine Lösung 0-ter Ordnung C_0 von

$$\begin{aligned} D\Delta C &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ \frac{\partial C}{\partial n} &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

in die Temperaturgleichung des Systems (2.3.2) einsetzen. C_0 ist konstant, d.h. wir vernachlässigen den Konzentrationsteil, welcher durch die Verbrennung weg geht. Somit erhalten wir aus dem System (2.3.2) nur noch ein Anfangswertproblem der Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= k \Delta T + q f(T, C_0) \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \\ T &= T_0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

mit Anfangsbedingung $T(x,0) = T_a(x)$.

Die Grundgesetze der chemischen Kinetik und weitere Betrachtungen legen die Nichtlinearität $f(T, C_0)$ fest. Dies führt uns auf die (zeitabhängige) Gelfand-Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \Delta T + \lambda e^T \quad \text{in } \Omega \\ T &= T_0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

mit Anfangsbedingung $T(x,0) = T_a(x)$. Für den Eigenwertparameter ist $\lambda := R^2 q \epsilon / k$ zu setzen. R ist eine charakteristische Länge für das Reaktionsgebiet, z.B. der Radius der grössten eingeschriebenen Kugel von Ω . Das Problem (2.3.4) ist also nur ein approximatives Modell für die Temperaturfunktion $T = T(x,t)$. Im Hinblick auf die Frage von Zel'dovic und Frank-Kamenetskii interessiert uns für Problem (2.3.4) folgendes:

Man gebe eine gute untere Schranke μ^* für den kritischen Wert λ^* an, für welche eine kritische stationäre Lösung T^* existiert (Grenze, wo "Explosion" eintritt). Dazu konstruiere man eine "gute" Oberfunktion X , so dass die Lösung des zugehörigen parabolischen Problems (2.3.4) mit den Anfangsbedingungen

$$T(x,0) = T_a(x) = X(x) \quad \text{in } \Omega$$

gegen eine stabile Gleichgewichtslösung konvergiert.

Wir behandeln zuerst den homogenen und ebenen Fall $N = 2$ und nehmen die zeitunabhängige Gelfand-Gleichung zum Ausgangspunkt (setze in (2.3.4) $T := u$).

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda e^u &= 0 && \text{in } \Omega \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Um mit entsprechenden Formeln in [24] (siehe dort Abschnitt 4) vergleichen zu können betrachten wir zu (2.3.5) ein Hilfsproblem (Torsionsproblem) der Form

$$\begin{aligned} \Delta w + 2 &= 0 && \text{in } \Omega \quad (\Omega \text{ aus 2.3.5}) \\ w &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Wir wollen für das obige Torsionsproblem nicht ein Maximumprinzip für eine P-Funktion der Form (1.6.14/15) definieren, sondern direkt von der Ungleichung

$$|\nabla w|^2 \leq s^2(w) := \alpha (w_{\max} - w(x)) \tag{2.3.7}$$

ausgehen (Beweis siehe [24]). Dabei wurde gesetzt:

$$\alpha := \alpha_0 := 2 \left[1 + \sqrt{1 - \frac{M_{\min}}{2 w_0}} \right], \quad \text{falls } \Omega \text{ nicht konvex,}$$

$$\alpha := 2 \left[1 + \sqrt{1 - \frac{M_{\min}}{2 w_{\max}}} \right], \quad \text{falls } \Omega \text{ konvex,}$$

mit $M_{\min} := \min_{\partial\Omega} k |\nabla w|^3$ ($k =$ Krümmung der Randkurve $\partial\Omega$),

$w_0 := \min_{1 \leq k \leq A} \{ w_k \}$ ($A =$ Anzahl der kritischen Punkte, wo $\nabla w = 0$ ist).

w_0 ist bei nicht konvexen Gebieten im allgemeinen nicht explizit bekannt und M_{\min} können wir nur für wenige Spezialfälle explizit angeben. Für praktische Zwecke benötigen wir eine untere Schranke für M_{\min} . In [24] wurde eine untere Schranke der Form

$$M_{\min} \geq \frac{k_{\min}}{k_{\max}^3} \tag{2.3.8}$$

angegeben. k_{\min} und k_{\max} sind die minimalen und maximalen Werte der Krümmung k der Randkurve $\partial\Omega$. Es gilt Gleichheit in (2.3.8), falls Ω ein Streifen oder ein Kreisgebiet ist. Wir

setzen die untere Schranke (2.3.8) in die entsprechende obige Formel für α ein und erhalten die Ungleichung

$$|\nabla w|^2 \leq s^2(w) := a(w_{\max} - w), \quad (2.3.9)$$

$$\text{mit } a := 2 \left[1 + \sqrt{1 - \frac{k_{\min}}{2 k_{\max}^3 w_{\max}}} \right], \text{ falls } \Omega \text{ konvex ist.}$$

Korollar 2.3.1 (untere Schranken für λ^* der homogenen Gelfand-Gleichung (2.3.5), $N=2$)
Voraussetzung:

Wir definieren ein eindimensionales Randwertproblem der Form

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{s}) \left(\psi(\bar{s}) X' \right)' + \frac{4}{a^2} \mu e^X &= X'' + \frac{4-a}{a} \frac{X'}{s} + \frac{4}{a^2} \mu e^X = 0, \quad 0 \leq \bar{s} \leq s_0 := \sqrt{a w_{\max}} \\ X'(0) = X(s_0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

$$\text{mit } \Psi(\bar{s}) := \bar{s}^{\frac{4-a}{a}} \text{ und } \varphi(\bar{s}) := \frac{a^2}{4} \frac{1}{\psi(\bar{s})} \quad (\text{Definition von } a \text{ siehe (2.3.9)}).$$

Behauptung:

Sei X^* die kritische Lösung zum kritischen Wert μ^* des obigen Problems (2.3.10). Dann ist $X^*(\bar{s})$ mit

$$\bar{s} := s(w(x)) = \sqrt{a(w_{\max} - w(x))} \quad (2.3.11)$$

eine Oberfunktion für die Gelfand-Gleichung (2.3.5) mit $\lambda = \mu^*$. Es gilt insbesondere

$$u_{\max} := \max_{\Omega} u(x) \leq X_{\max}^* \quad (2.3.12)$$

und

$$\mu^* \leq \lambda^*(\Omega). \quad (2.3.13)$$

Gleichheit in (2.3.12/13) gilt, falls Ω ein Streifen ($a = 4$) oder ein Kreisgebiet ($a = 2$) ist.

Beweis:

Mit der Definition (2.3.11) für $s(w)$ hat das System (2.2.8) für die Ansatzfunktionen φ und ψ die Form (setze $q(w) := 2!$)

$$\varphi(s) \psi(s) = (s s_{,w})^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\varphi(s) \psi'(s) = s^2 s_{,ww} - 2 s_{,w} = \frac{a}{s} \left(\frac{4-a}{4} \right).$$

Eliminieren wir φ im obigen System, so erhalten wir eine Differentialgleichung für die logarithmische Ableitung von ψ ,

$$(\ln \psi)' = \frac{\psi'}{\psi} = \frac{1}{s} \frac{4-a}{a} = \left(\ln \left(s^{(4-a)/a} \right) \right)'$$

Als Lösungen ergeben sich die Ansatzfunktionen φ und ψ des Hilfsproblems (2.3.10). Wir erhalten mit Proposition (2.2.1) eine elliptische Gleichung für $X = X\{s(w(x))\}$ der Form

$$\Delta X + \mu e^X = \left\{ 1 - \frac{|\nabla w|^2}{s^2} \right\} \left\{ \mu e^X + \frac{a}{s} X' \right\}. \quad (2.3.14)$$

Mit der Ungleichung (2.3.9) folgt, dass der erste Faktor auf der rechten Seite von (2.3.14) nicht negativ ist. Für die Bestimmung des Vorzeichens des zweiten Klammerausdruckes auf der rechten Seite von (2.3.14) definieren wir $k(s)$ durch

$$k(s) = \gamma(s) \left\{ \mu e^X + \frac{a}{s} X' \right\},$$

mit $\gamma(s) := s^{4/a}$ (Formel (2.2.10) mit $q(y) := 2$ und $s^2(y) = a(w_{\max} - y)$).

und erhalten die Beziehungen (siehe (2.2.12))

$$k'(s) = \gamma(s) X'(s) \mu e^X$$

$$k(0) = 0.$$

Die Lösung X von (2.3.10) ist eine gerade Funktion. Somit gilt (Maximumprinzip)

$$X'(\bar{s}) \leq 0 \quad \text{für } 0 \leq \bar{s} \leq s_0,$$

d.h. wir erhalten für $X = X\{s(w(x))\}$ das System

$$\begin{aligned} \Delta X + \mu e^X &\leq 0 && \text{in } \Omega \\ X &= 0 && \text{auf } \partial\Omega . \end{aligned}$$

Falls X eine Lösung von (2.3.10) mit Parameterwert μ ist, so ist $X(\bar{s})$, \bar{s} definiert in (2.3.11), eine Oberfunktion für das Ausgangsproblem (2.3.5) mit $\lambda = \mu$. Insbesondere gilt diese Aussage auch für die kritische Lösung $X^* = X^*(s(w(x)))$ zum Parameterwert μ^* von (2.3.10). Somit gelten die Ungleichungen (2.3.12) und (2.3.13). Es tritt in zwei Fällen Gleichheit ein. Falls das Gebiet Ω ein Streifen mit Breite 2δ ist, so gilt für das Torsionsproblem (2.3.6)

$$w(x) = \delta^2 - x^2, \quad w_{\max} = \delta^2, \quad a = 4 \quad (M_{\min} = 0) .$$

Falls Ω ein Kreis mit Radius R ist, so gilt für (2.3.6)

$$w(r) = \frac{1}{2} (R^2 - r^2), \quad w_{\max} = \frac{R^2}{2}, \quad a = 2 \quad (M_{\min} = R^2) .$$

In beiden Fällen ist das Hilfsproblem (2.3.10) identisch mit dem Ausgangsproblem.

◇

Bemerkungen zu Korollar 2.3.1

1. Korollar 2.3.1 ist eine Erweiterung des erwähnten Resultats aus [24] auf eine Klasse von nichtlinearen Problemen, deren Nichtlinearität die Bedingung (H) (siehe Abschnitt 2.2) erfüllt. Um eine Erweiterung auf die eingangs dieses Abschnittes formulierte Problemklasse (2.3.1) mit den Inhomogenitäten $\rho(x)$ (bzw. $1/\sigma(x)$ für den selbstadjungierten Fall) zu erhalten, müsste man zuerst eine Erweiterung der Ungleichung (2.3.9) beweisen. Unter gewissen Voraussetzungen dürfte die Erweiterung vermutlich folgende Form besitzen:

$$|\nabla w|^2 \leq a (w_{\max} - w(x)) ,$$

$$\text{mit } a := 2 \left[1 + \sqrt{1 - \frac{\bar{\kappa}_{\min}}{2 \bar{\kappa}_{\max}^3 w_{\max}}} \right] , \text{ falls } \bar{\kappa} \geq 0 \text{ ist. (Konvexitätsbedingung).}$$

Dabei ist zu setzen: $|\bar{\nabla} w|^2 = \frac{|\nabla w|^2}{\rho(x)}$ bzw. $|\bar{\nabla} w|^2 = \sigma(x) |\nabla w|^2$ für den selbstadj. Fall

und $\bar{\kappa} := \frac{H + \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$ bzw. $\bar{\kappa} := \sqrt{\sigma} \left(H + \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\sigma} \right)$ für den selbstadj. Fall,

$$\bar{\kappa}_{\max} := \max_{\partial\Omega} \bar{\kappa}, \quad \bar{\kappa}_{\min} := \min_{\partial\Omega} \bar{\kappa}.$$

2. Die kritische Lösung X^* zum Parameterwert μ^* des eindimensionalen Hilfsproblems (2.3.10) lässt sich durch einen (impliziten) geschlossenen Ausdruck von transzendenten Funktionen angeben (siehe [14] und [23]). Wir werden jedoch im Numerikteil dieser Arbeit μ^* mit einem Newtonverfahren berechnen.

Wir betrachten als nächstes die Gelfand-Gleichung (2.3.1) Fall a), $N > 1$ mit der Inhomogenität $\rho(x) > 0$ in $\Omega \cup \partial\Omega$ und $b^k = 0$, $k = 1, \dots, N$ und fassen die Ergebnisse im folgenden Korollar 2.3.2 zusammen.

Korollar 2.3.2 (Inhomogene Gelfand-Gleichung (2.3.1) mit $\rho > 0$ und $b^k = 0$, $N > 1$)

Voraussetzungen:

- (i) Definition des eindimensionalen Randwertproblems (siehe Bemerkung 4 von Satz 2.2.2)

Sei $X^*(\vartheta)$ die kritische Lösung zum kritischen Wert μ^* des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\vartheta) \left(\bar{\psi}(\vartheta) \dot{X} \right)' + \mu e^X &= 0, & 0 \leq \vartheta \leq \hat{\vartheta} \\ \dot{X}(0) = X(\hat{\vartheta}) &= 0, & \cdot = \frac{d}{d\vartheta}, \end{aligned} \tag{2.3.15}$$

$$\text{mit } \bar{\varphi}(\vartheta) := 1 + \cos \left(\frac{2}{\sqrt{\hat{a}}} \vartheta \right) \text{ und } \bar{\psi}(\vartheta) := \frac{1}{\bar{\varphi}(\vartheta)}.$$

Die Parameter $\hat{\vartheta}$ und \hat{a} sind wie folgt zu definieren:

Falls Ω ein (Hyper-) Streifen mit Breite 2δ ist, so wählen wir für $\hat{\vartheta}$ und \hat{a}

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{a}}} := 0 \quad \text{und} \quad \hat{\vartheta} := \int_0^{\delta} \sqrt{\rho(y)} \, dy,$$

andernfalls setze man (siehe Beziehungen (1.6.42) bis (1.6.46))

$$\hat{\vartheta} := \frac{\sqrt{\hat{a}}}{2} \arcsin \left(2 \frac{\hat{z}}{1 + \hat{z}^2} \right), \quad \text{wobei } \hat{z} \text{ Lösung ist von}$$

$$z \arctan(z) = 0.5 \bar{\kappa}_{\min} R_g \text{ ist,}$$

$$\text{mit} \quad \bar{\kappa}_{\min} := \min_{\partial\Omega} \frac{H + \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}, \quad (2.3.16)$$

$$R_g := \max_{P \in \Omega} \left(\min_{Q \in \partial\Omega} \int_P^Q \sqrt{\rho(r)} \, dr \right). \quad (2.3.17)$$

Aus den folgenden Hilfsgrößen

$$\hat{\varrho} := \frac{4}{\bar{\kappa}_{\min}} \frac{\hat{z}^2}{1 + \hat{z}^2}, \quad \beta' := \frac{\hat{\varrho}}{\bar{\kappa}_{\min}}, \quad \hat{\omega} := \beta' \hat{z}^2, \quad \hat{\beta} := \max \{ \beta', \hat{\omega} \}.$$

wird $\hat{a} := \hat{\omega} + \hat{\beta}$ definiert.

(ii) Voraussetzungen für Maximumprinzip (siehe Bemerkung 5c von Korollar 1.6.1):

$$-(N-2) \left(\ln \sqrt{\rho} \right)_{,k} \left(\ln \sqrt{\rho} \right)_{,l} - \Delta \left(\ln \sqrt{\rho} \right) \delta^{kl} \quad \text{positiv semidefinit in } \Omega$$

$$\bar{\kappa}_{\min} \geq 0 \quad (\text{Konvexitätsbedingung an den Rand } \partial\Omega).$$

Behauptungen:

(i) Es existiert eine asymptotisch stabile Lösung $u(x)$ der inhomogenen Gelfand-Gleichung (2.3.1) Fall a) mit

$$0 < u(x) \leq X^*(0) =: X_{\max}^* \text{ in } \Omega$$

(ii) $\mu^* \leq \lambda^*(\Omega)$

(iii) In den obigen Ungleichungen gilt Gleichheit, falls Ω ein (Hyper-) Streifen mit Breite 2δ ist und im Problem (2.3.1) Fall a) $\rho = 1$ gesetzt wird.

Beweis:

Eine Oberfunktion konstruieren wir gemäss Satz 2.2.2 (setze dort als Nichtlinearität $f(X) := e^X$). $X \equiv 0$ ist eine (triviale) Unterfunktion. Die Existenz einer Lösung $u(x)$ folgt aus Satz 2.1.4 und die asymptotische Stabilität aus Satz 2.1.7. Um einen Vergleich mit der Arbeit [24] anstellen zu können, beachte man, dass hier das Hilfsproblem der Form (2.2.H1) wie folgt gewählt wird:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} w + r^k w_{,k} + 2 &= 0 && \text{in } \Omega_{\mathbb{R}} && \text{(Metrik: } g_{ik} := \rho(x) \delta_{ik} \text{)} \\ w &= 0 && \text{auf } \partial\Omega_{\mathbb{R}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \bar{\Delta} w &= g^{ik} w_{,ik} = \frac{\Delta w}{\rho} + \frac{N-2}{\rho} (\ln \sqrt{\rho})_{,k} w_{,k} \\ r^k &= -\frac{N-2}{\rho} (\ln \sqrt{\rho})_{,k}. \end{aligned}$$

Somit sind die Formeln (1.6.40) bis (1.6.46) zur Bestimmung der oberen Schranken \hat{w} und \hat{r} sowie Hilfsproblem (2.2.15) und Definition (2.2.18) für $s(w(x))$ an den entsprechenden Stellen mit einem Faktor 2 zu korrigieren. Die Definition von

$$\hat{\beta} := \{ \beta', \hat{w} \}$$

ist notwendig, damit die in Satz 2.2.2 konstruierte Oberfunktion $X = X(\bar{s})$ mit $\bar{s} := s(w(x))$ (siehe (2.2.18)) in Ω definiert ist. ($s(w)$ muss in $(0, w_{\max})$ invertierbar sein.) Diese Schwierigkeit hat man beim folgenden Korollar für den Spezialfall $N = 2$ nicht.

◇

Bemerkung zu Korollar 2.3.2

Für die selbstadjungierte Form der Gelfand-Gleichung (2.3.1) Fall b) sind die Voraussetzungen des Korollars an den entsprechenden Stellen zu ändern.

(i') Folgende Grössen sind zu ändern:

$$\hat{\vartheta} := \int_0^\delta \sqrt{\frac{1}{\sigma(x)}} dx, \quad \text{falls } \Omega \text{ ein (Hyper-) Streifen mit Breite } 2\delta \text{ ist,}$$

$$\bar{\kappa}_{\min} := \min_{\partial\Omega} \sqrt{\sigma} \left(H + \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\sigma} \right), \quad (2.3.16')$$

$$R_g := \max_{P \in \Omega} \left(\min_{Q \in \partial\Omega} \int_P^Q \frac{1}{\sqrt{\sigma(r)}} dr \right). \quad (2.3.17')$$

(ii') Die Voraussetzungen für das Maximumprinzip lauten (siehe Bemerkung 5 Korollar 1.6.1):

$$M_N^{kl} = -\frac{4}{N+2} \frac{(\sigma^{(N+2)/4})_{,kl}}{\sigma^{(N+2)/4}} + \frac{\Delta \sigma}{2\sigma} \delta^{kl} \quad \text{positiv semidefinit in } \Omega,$$

$$\bar{\kappa}_{\min} \geq 0.$$

Für den Spezialfall $N = 2$ gilt zusätzlich das nächste Korollar 2.3.3.

Korollar 2.3.3 (Inhomogene Gelfand-Gleichung (2.3.1) mit $\rho > 0$ und $b^k = 0, k=1,2; N = 2$)

Voraussetzungen:

(i) Definition des eindimensionalen Randwertproblems (siehe Bemerkung 4 von Satz 2.2.3)

Sei $X^*(\vartheta)$ die kritische Lösung zum kritischen Wert μ^* des Randwertproblems:

$$\ddot{X} + \frac{\mu}{\cos^2 \left(\sqrt{\hat{\beta}} \vartheta \right)} e^X = 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \hat{\vartheta} \quad (2.3.18)$$

$$\dot{X}(0) = X(\hat{\vartheta}) = 0, \quad \cdot = \frac{d}{d\vartheta}.$$

Die Parameter $\hat{\vartheta}$ und $\hat{\beta}$ sind wie folgt zu definieren:

Falls Ω ein (Hyper-) Streifen mit Breite 2δ ist, so wählen wir für $\hat{\vartheta}$ und $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta} := 0 \quad \text{und} \quad \hat{\vartheta} := \int_0^{\delta} \sqrt{\rho(y)} \, dy,$$

andernfalls setze man (siehe Unterabschnitt 1.6.2, Beziehung (1.6.49) bis (1.6.52)):

$$\hat{\vartheta} := \frac{1}{\sqrt{\hat{\beta}}} \arcsin(\hat{z}), \quad \sqrt{\hat{\beta}} := \frac{\bar{\kappa}_{\min}}{\hat{z}} \quad \text{wobei } \hat{z}$$

Lösung der goniometrischen Gleichung

$$z \operatorname{artanh}(z) = \bar{\kappa}_{\min} R_g$$

ist mit $\bar{\kappa}_{\min} = \min_{\partial\Omega} k_g$, $k_g = \frac{k + \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$ (geodätische Krümmung).

R_g ist in (2.3.17) definiert.

(ii) Voraussetzungen für Maximumprinzip (siehe Bemerkung 4c von Korollar 1.6.2):

$$\Delta \ln(\sqrt{\rho}) \leq 0 \quad \text{in } \Omega,$$

$$\bar{\kappa}_{\min} \geq 0 \quad (\text{unveränderte Bedingung gegenüber Korollar 2.3.2}).$$

Behauptungen: (identisch mit Korollar 2.3.2)

(i) Es existiert eine (positive) asymptotisch stabile Lösung $u(x)$ der inhomogenen Gelfand-Gleichung (2.3.1) Fall a) mit

$$0 < u(x) \leq X^*(0) = X_{\max}^* \quad \text{in } \Omega$$

(ii) $\mu^* \leq \lambda^*(\Omega)$

(iii) In den obigen Ungleichungen gilt Gleichheit, falls Ω ein (Hyper-) Streifen mit Breite 2δ ist und im Problem (2.3.1) Fall a) $\rho = 1$ gesetzt wird.

Beweis:

Der Beweis verläuft ähnlich wie in Korollar 2.3.2. Wir benützen Satz 2.2.3 für die Konstruktion einer Oberfunktion und Korollar 1.6.2 für das Maximumprinzip. $X \equiv 0$ ist eine

(triviale) Unterfunktion. Gemäss Satz 2.1.4 existiert eine Lösung, welche nach Satz 2.1.7 asymptotisch stabil ist.

◇

Bemerkungen zu Korollar 2.3.3

Analog zur Bemerkung des vorangehenden Korollars lässt sich das obige Resultat auch auf eine selbstadjungierte Form der Gelfand-Gleichung ((2.3.1) Fall b) übertragen. In Voraussetzung (i') sind die Parameter über die Geometrie von Ω zu ersetzen durch:

$$\bar{\kappa}_{\min} = \min_{\partial\Omega} k_g, \quad k_g = \sqrt{\sigma} \left(k + \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\sigma} \right)$$

$$R_g = \max_{P \in \Omega} \left(\min_{Q \in \partial\Omega} \int_P^Q \frac{1}{\sqrt{\sigma(r)}} dr \right).$$

Die Voraussetzung (ii) für das Maximumprinzip ist gemäss Bemerkung 4 b zu Korollar 1.6.2 wie folgt zu ersetzen:

$$(ii') \quad M_2^{kl} + \frac{\beta}{\sigma} (1 + \sigma_{,s} w_{,s}) \delta^{kl} \text{ positiv semidefinit in } \Omega,$$

$$\text{mit } M_2^{kl} := -(\ln \sigma)_{,kl} + \frac{1}{2} \frac{\Delta \sigma}{\sigma} \delta^{kl},$$

$$\bar{\kappa}_{\min} \geq 0.$$

$w(x)$ ist die Lösung des folgenden Hilfsproblems (siehe Beweis Korollar 2.3.2), welches wir bezüglich dem Riemannschen Raum mit der konformen Metrik

$$g_{ik} := \frac{\delta_{ik}}{\sigma(x)}$$

darstellen:

$$\bar{\Delta} w + r^k w_{,k} + 2 = 0 \quad \text{in } \Omega_R$$

$$w = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_R,$$

mit $\bar{\Delta} w = \sigma \Delta w$ und $r^k = \sigma_{,k}$ (Spezialfall $N = 2$).

2.3.2 Untere Schranken für den "Dead-Core" Wert Φ^* der inhomogenen Reaktionsgleichung p-ter Ordnung

Wir betrachten in einem beschränkten Gebiet Ω des euklidischen Raumes E^N , $N = 1, 2, 3, 4, \dots$ die folgende stationäre Gleichung einer Reaktion p-ter Ordnung:

$$\begin{aligned} \Delta u + b^k(x)u_{,k} - \Phi^2 \rho(x) u^p &= 0 & \text{in } \Omega \subset E^N \\ u &= 1 & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

mit (siehe Problem (2.3.1))

a) $\rho > 0$ in $\Omega \cup \partial\Omega$

$b^k = 0$ $k = 1, \dots, N$ (Inhomogene Probleme ohne konvektiven Term $b^k u_{,k}$),

oder

b) $\rho = 1/\sigma$, $\sigma > 0$ in $\Omega \cup \partial\Omega$

$b^k = \sigma_{,k}/\sigma$ (Probleme mit einem selbstadjungierten Differentialausdruck $(\sigma(x)u_{,k})_{,k}$).

Die obigen Dirichletprobleme beschreiben einen isothermen Diffusions-Reaktionsvorgang einer chemischen Substanz (Reaktant), welcher sich im chemischen Gleichgewicht befindet. $u(x)$ ist ein Mass für die Konzentration in Ω . Man stelle sich vor, das Gebiet Ω enthalte einen Katalysator, welcher eine irreversible chemische Reaktion eines Reaktanten ermöglicht. Der Katalysator ist ein Stoff, der in der stöchiometrischen Gleichung der Reaktion (und somit auch in der obigen Gleichung (2.3.19)) nicht enthalten ist. Die Dirichletrandbedingung: $u = 1$ auf $\partial\Omega$ bedeutet, dass das Reaktionsgebiet Ω im "Bad" eines Reaktanten mit konstanter Konzentration liegt. Der Reaktant kann ungehindert durch die Oberfläche $\partial\Omega$ treten und in das Innere von Ω diffundieren. In der Problemklasse (2.3.19), Fall a) hängt die "Reaktionskonstante" vom Ort $x \in \Omega$ ab, wogegen in der Problemklasse (2.3.19, Fall b) der Diffusionskoeffizient nicht konstant ist. Man spricht von nicht uniformen katalytischen Gebieten Ω . Der Parameter Φ^2 wird in der Chemieliteratur als Thielemodul bezeichnet und ist definiert durch

$$\Phi^2 := \frac{k L^2}{D},$$

mit D : Diffusionskoeffizient,

k : Geschwindigkeitskonstante der Reaktion,

L : typische "Länge" für das Reaktionsgebiet Ω .

Aus dem Maximumprinzip folgt $u < 1$ in Ω , d.h. die Konzentration des Reaktanten ist im Innern von Ω immer kleiner als auf dem Rand $\partial\Omega$. Es ist möglich, dass für gewisse Stoffe die

Reaktion gegenüber der Diffusion überwiegt. Die Konzentration des Reaktanten fällt im Innern des Gebietes ab, und über die Diffusion kann nicht genügend Stoff von aussen her nachgeliefert werden. Für gewisse Werte von p und Φ ist es möglich, dass die Konzentration $u(x)$ in einem Teilgebiet $\Omega_0 \subset \Omega$ identisch verschwindet. Das Gebiet Ω_0 ($|\Omega_0| \neq 0$) wird als "Dead-Core" bezeichnet. Im folgenden soll die Frage beantwortet werden, unter welchen Bedingungen ein "Dead-Core" eintreten kann. Wir bezeichnen den Thielemodul, wo ein "Dead-Core" entsteht, mit Φ^* und die zugehörige Lösung mit u^* . u^* ist die Lösung, die in genau einem Punkt $x_0 \in \Omega$ null wird (ein einpunktiges "Dead-Core"). Wir interessieren uns somit für untere Schranken μ^* von Φ^* , die für ein Grenzgebiet (Ω ein Streifen) optimal sind.

Vorerst diskutieren wir den eindimensionalen und homogenen Fall

$$\begin{aligned} u''(x) - \Phi^2 u^p &= 0, \quad |x| < \delta \\ u(\pm\delta) &= 1. \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

Es genügt, das Problem im Intervall $|x| < \delta := 1$ zu betrachten. Probleme mit Thielemodul Φ' , welche in einem allgemeinen Intervall $[-\delta, \delta]$ formuliert sind, werden über eine Ähnlichkeitstransformation auf Problem (2.3.20) mit $\Phi = \delta\Phi'$ zurückgeführt. Die Lösung $u(x)$ ist eine konvexe und gerade Funktion. Falls u_{\min} ,

$$u_{\min} := \min_{[-1,1]} u(x)$$

positiv ist, so wird dieses Minimum nur im Punkt $x = 0$ angenommen. Falls $u_{\min} = 0$ ist, so kann ein Intervall $|x| < \varpi$ existieren, in welchem $u \equiv 0$ ist. Die Lösung braucht nur im Intervall $[\varpi, 1]$, $\varpi > 0$ analysiert zu werden.

Wir betrachten zuerst eine isothermische Reaktion 0-ter Ordnung ($p = 0$). Sie wird durch das folgende System beschrieben:

$$u'' = \begin{cases} \Phi^2, & \text{falls } u > 0 \\ 0, & \text{falls } u \leq 0 \end{cases} \quad \text{in } |x| < 1, \tag{2.3.21}$$

mit den Randbedingungen $u(\pm 1) = 1$.

Die Lösung von (2.3.21) hat folgende Form:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{\Phi^2}{2} x^2 + \left(1 - \frac{\Phi^2}{2}\right), & \text{falls } \Phi \leq \Phi^* \\ H(|x| - \varpi) u^* \left(\frac{|x| - \varpi}{1 - \varpi}\right), & \text{falls } \Phi > \Phi^*, \end{cases}$$

wobei wir für den kritischen Wert Φ^* ,

$$\Phi^* := \sqrt{2}$$

und für die kritische Lösung u^* ,

$$u^* := x^2$$

zu setzen haben. $\varpi > 0$ ist durch die Relation

$$(1 - \varpi) \Phi = \Phi^* , \quad \text{falls } \Phi > \Phi^* \tag{2.3.22}$$

bestimmt. H ist die charakteristische Funktion (auch Heavisidsche Sprunkfunktion genannt).

Man beachte, dass eine Lösung, welche ein "Dead-Core" besitzt, nicht $C^2(\Omega)$ ist.

Sei nun $p \neq 0$ und $u_{\min} > 0$. Wir multiplizieren (2.3.20) mit $u' > 0$ und erhalten

$$(u')^2 = \Phi^2 \frac{2}{p+1} \left(u^{p+1} - u_{\min}^{p+1} \right) .$$

Eine weitere Integration liefert uns eine implizite Darstellung

$$\int_{u_{\min}}^{u(x)} \frac{du}{\sqrt{u^{p+1} - u_{\min}^{p+1}}} = \left(\Phi \sqrt{2/(p+1)} \right) x \tag{2.3.23}$$

für die Lösung $u(x)$. Wir setzen in der obigen Formel (2.3.23) $x = 1$ und erhalten die Beziehung $\Phi = \Phi(u_{\min})$, welche in einem Bifurkationsdiagramm dargestellt werden kann (siehe Grafik 3).

$$\Phi(u_{\min}) = \sqrt{\frac{p+1}{2}} \int_{u_{\min}}^1 \frac{du}{\sqrt{u^{p+1} - u_{\min}^{p+1}}} . \tag{2.3.24}$$

Ueber die Transformation

$$z := \left(\frac{u_{\min}}{u} \right)^{p+1}$$

föhren wir das Integral in (2.3.24) auf die Form

$$\Phi = \frac{(u_{\min})^{(1-p)/2}}{\sqrt{2(p+1)}} B_x(0.5, -0.5(p+1)), \quad \text{mit } x := 1 - (u_{\min})^{p+1} \quad (2.3.25)$$

zurück. B_x ist die unvollständige Beta Funktion und ist durch das Parameterintegral

$$B_x(a,b) := \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt \quad (2.3.26)$$

definiert (siehe [31]). Die vollständige Beta Funktion ($x := 1$, bzw. $u_{\min} = 0$) konvergiert nur, falls $|p| < 1$. Wir diskutieren die Beziehung (2.3.25) für einige p -Werte:

- (i) $p \geq 1$: Das Integral in (2.3.25) divergiert für $u_{\min} \rightarrow 0$, d.h für jedes $\Phi > 0$ hat Gleichung (2.3.25) genau eine Lösung $u_{\min} > 0$. Es tritt kein "Dead-Core" auf.

Falls $p = 1$ ist, lautet die Lösung (lineares Problem)

$$u(x) = \frac{\cosh(\Phi x)}{\cosh(\Phi)}, \quad u_{\min} = \frac{1}{\cosh(\Phi)}.$$

- (ii) $0 \leq p < 1$: Das Integral in (2.3.25) konvergiert für $u_{\min} \rightarrow 0$ gegen den kritischen Wert

$$\Phi^* = \frac{\sqrt{2(1+p)}}{1-p}. \quad (2.3.27)$$

Falls $\Phi < \Phi^*$, existiert genau eine Lösung $u(x)$ mit $u_{\min} > 0$. Andererseits tritt für $\Phi > \Phi^*$ eine Lösung mit einem "Dead-Core" der Form

$$u(x) = H(|x| - \varpi) u^* \left(\frac{|x| - \varpi}{1 - \varpi} \right) \quad (2.3.28)$$

auf, wobei $\varpi > 0$ durch die Relation (2.3.22) bestimmt ist. Die kritische Lösung $u^*(x)$ zum oben definierten kritischen Wert Φ^* (siehe (2.3.27)) lautet

$$u^*(|x|) = |x| \frac{2}{1-p} \quad \text{für } |x| \leq 1. \quad (2.3.29)$$

- (iii) $-1 < p < 0$: Die rechte Seite der Beziehung (2.3.24) konvergiert ebenfalls wie unter

(ii) gegen den kritischen Wert Φ^* (siehe (2.3.27)). Es gelten die gleichen Aussagen wie unter (ii), mit dem Unterschied, dass für ein Intervall $\Phi^* < \Phi \leq \epsilon$ nicht nur die "Dead-Core" Lösung, sondern noch zwei weitere Lösungen mit $u_{\min} > 0$ existieren (siehe Figur 1 in Abschnitt 3.3).

(iv) $p \rightarrow -1$: Für die kritische Lösung u^* gilt (siehe (2.3.27) und (2.3.29))

$$u^* \rightarrow |x|, \text{ für } p \rightarrow -1 \text{ (d.h. } \Phi^* \rightarrow 0).$$

Für (inhomogene) Reaktionsgleichungen p -ter Ordnung, die in einem allgemeinen beschränkten Gebiet Ω des k -dimensionalen euklidischen Raumes E^k , $k = 2, 3, \dots, N$ formuliert sind, erwarten wir unter gewissen Voraussetzungen über $\partial\Omega$ und der Inhomogenität ähnliche Aussagen, wie in den Bemerkungen (i) bis (iv) (siehe Korollar 2.3.4). Im folgenden Korollar 2.3.5 geben wir untere und obere Schranken μ^* für den kritischen Wert Φ^* an. Um Satz 2.2.4 aus Abschnitt 2.2 direkt anwenden zu können, führen wir zuerst eine Transformation

$$U := u - 1$$

durch. Damit können wir die Problemklasse (2.3.19) auf eine Form mit homogenen Randbedingungen bringen.

$$\begin{aligned} \Delta U + b^k(x)U_{,k} - \Phi^2 p(x)(1+U)^p &= 0 & \text{in } \Omega \subset E^N \\ U &= 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.3.19'}$$

(Definitionen von p und b^k siehe die beiden Fälle a) und b) beim Problem (2.3.19)). Die kritische Lösung U^* ist wie folgt charakterisiert:

Es existiert genau ein Punkt $x_0 \in \Omega$ mit: $-1 < U^*$ in $\Omega \setminus \{x_0\}$ und $U^*(x_0) = -1$.

Korollar 2.3.4 (Nichtexistenz eines "Dead-Cores" falls $p \geq 1$, untere Schranken für Φ^* falls $-1 < p \leq 0$ und obere Schranken für Φ^* falls $0 \leq p < 1$)

Gegeben sei die Problemklasse (2.3.19') (Fall a) oder b)) in einem beschränkten Gebiet Ω des euklidischen Raumes E^N .

Voraussetzungen: (Maximumprinzip gemäss Korollar 1.6.1 mit Bemerkung 5b und 5c)

Fall a)

$$-(N-2) \begin{pmatrix} \ln \sqrt{p} \\ \end{pmatrix}_{,k} \begin{pmatrix} \ln \sqrt{p} \\ \end{pmatrix}_1 - \Delta \begin{pmatrix} \ln \sqrt{p} \\ \end{pmatrix} \delta^{kl} \text{ positiv semidefinit in } \Omega$$

$$\bar{\kappa}_{\min} := \min_{\partial\Omega} \frac{H + \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \geq 0 \quad (\text{siehe (2.3.16)})$$

Fall b)

$$-\frac{4}{N+2} \frac{(\sigma^{(N+2)/4})_{,kl}}{\sigma^{(N+2)/4}} + \frac{\Delta \sigma}{2\sigma} \delta^{kl} \quad \text{positiv semidefinit } \Omega$$

$$\bar{\kappa}_{\min} := \min_{\partial\Omega} \sqrt{\sigma} \left(H + \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\sigma} \right) \geq 0 \quad (\text{siehe (2.3.16')})$$

Behauptungen:

- (i) Falls $p \geq 1$ ist, dann existiert keine Lösung mit einem "Dead-Core" für (2.3.19)
- (ii) Sei v_{\max} das Maximum der Lösung des Hilfsproblems (2.3.32) mit $\alpha = 0$.
Falls $-1 < p \leq 0$ ist, so folgt, dass

$$\mu^* := \frac{\sqrt{2(1+p)}}{1-p} \frac{1}{\hat{\xi}_0}, \quad \text{mit } \hat{\xi}_0 := \sqrt{2\hat{v}} \quad , \quad (2.3.30a)$$

eine untere Schranke für den kritischen Wert Φ^* ist. \hat{v} ist eine obere Schranke für v_{\max} (siehe z.B. Formel (2.2.40)).

Falls $0 \leq p < 1$ ist, so folgt, dass

$$\mu^* := \frac{\sqrt{2(1+p)}}{1-p} \frac{1}{\hat{\xi}_0}, \quad \text{mit } \hat{\xi}_0 := \sqrt{2v_u} \quad , \quad (2.3.30b)$$

eine obere Schranke für den kritischen Wert Φ^* ist. v_u ist eine untere Schranke für v_{\max} .

- (iii) Die Schranken in (ii) sind scharf, falls wir homogene Probleme zum Ausgangspunkt nehmen (d. h. $\rho := \sigma := 1$ in (2.3.19)), die in einem (Hyper-) Streifen mit Breite 2δ gegeben sind und für $v_u = \hat{v} = \delta^2/2$ gesetzt wird.

Beweis:

- (i) Wir wollen sinngemäss Satz (2.2.4) anwenden und konstruieren bei gegebenem $\Phi > 0$ eine (nicht triviale) Unterfunktion von (2.3.19'), für die

$$-1 < X \quad \text{in } \Omega$$

gilt. $X \equiv 0$ ist eine triviale Oberfunktion. Daraus folgt mit Satz (2.1.4) (und Satz 2.1.7), dass eine stabile Lösung U existiert mit

$$-1 < X \leq U < 0 \quad \text{in } \Omega .$$

Es ist bekannt, dass die Lösung U eindeutig bestimmt ist (wende Maximumprinzip auf die Differenz von 2 Lösungen $U_1 - U_2$ an). Somit kann (falls $p \geq 1$ ist) für (2.3.19') keine Lösung mit einem "Dead-Core" existieren. Wir wollen die einzelnen Beweisschritte etwas ausführlicher darlegen.

Aus den Voraussetzungen für das Maximumprinzip für den Ansatz (2.2.31) einer P-Funktion erhalten wir folgende Ungleichung, welche wir später benutzen werden (wende Korollar 1.6.1 auf das Hilfsproblem (2.3.32) an):

$$1 - \frac{|\nabla v|^2}{s^2(v)} \geq 0 \quad \text{in } \Omega , \quad (2.3.31)$$

wobei v Lösung des Hilfsproblems

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} v + r^k v_{,k} + q(v) &= 0 \quad \text{in } \Omega_R \\ v &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega_R , \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

mit $q(v) := 1 + \alpha v$ und

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} v &:= \frac{\Delta v}{\rho} + \frac{N-2}{\rho} (\ln \sqrt{\rho})_{,k} v_{,k} , \\ r^k &:= -\frac{N-2}{\rho} (\ln \sqrt{\rho})_{,k} \quad ((2.3.19) \text{ Fall a}) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} v &:= \sigma \Delta v - \sigma (N-2) (\ln \sqrt{\sigma})_{,k} v_{,k} \\ r^k &:= \sigma_{,k} + \sigma (N-2) (\ln \sqrt{\sigma})_{,k} \quad ((2.3.19) \text{ Fall b}). \end{aligned}$$

$s(v(x))$ ist definiert durch

$$s(v(x)) := \sqrt{2(v_{\max} - v(x)) + \alpha(v_{\max}^2 - v^2(x))} \quad (2.3.33)$$

(siehe (2.2.33)). Um eine (nicht triviale) Unterfunktion $-1 < X$ zu konstruieren, müssen wir ein weiteres Hilfsproblem

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{s}) \left(\psi(\bar{s}) X' \right)' - \mu^2 (1 + X)^p &= 0, \quad 0 \leq \bar{s} \leq s_0 \\ X'(0) = X(s_0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

$$\text{mit } \varphi(\bar{s}) = \psi(\bar{s}) := \sqrt{(1 + \alpha v_{\max})^2 - \alpha \bar{s}^2}$$

$$\text{und } s_0 := \sqrt{V_{\max}}, \quad V_{\max} := 2 v_{\max} + \alpha v_{\max}^2$$

definieren. Mit Proposition (2.2.1) erhalten wir für $X(\bar{s})$ mit $\bar{s} := s(v(x))$ (siehe (2.3.33)) folgende elliptische Gleichung:

$$\bar{\Delta} X + r^k X_{,k} - \mu^2 (1 + X)^p = \left\{ 1 - \frac{|\nabla v|^2}{s^2(v)} \right\} \left\{ -\mu^2 (1 + X)^p + X' \frac{\varphi^2(s)}{s} \right\} \quad \text{in } \Omega.$$

Aus der Ungleichung (2.3.31) folgt, dass der erste Klammerausdruck auf der rechten Seite der obigen elliptischen Gleichung nicht negativ ist in Ω . Das Vorzeichen des zweiten Klammerausdruckes können wir mit Hilfe der Formeln (2.2.10) bis (2.2.12) (siehe Proposition 2.2.1) entscheiden. Setze

$$k(s) = s \left\{ -\mu^2 (1 + X)^p + X' \frac{\varphi^2}{s} \right\}.$$

Daraus folgt (siehe 2.2.12)

$$k'(s) = s X'(s) \left\{ -\mu^2 p (1 + X)^{p-1} - \alpha \right\}.$$

Wir wählen ein $\alpha < 0$ so, dass gilt:

$$-\mu^2 p (1 + X)^{p-1} - \alpha \geq 0 \quad \text{für } -1 \leq X \leq 0, \quad p \geq 1, \quad (2.3.35)$$

d. h. $\alpha \leq -p \mu^2$. Für V_{\max} können wir die obere Schranke \hat{V} ,

$$\hat{V} = \frac{1}{|\alpha|} \left(\frac{1 - Q^2}{1 + Q^2} \right)^2 \quad \text{mit } Q := e^{\left(\sqrt{|\alpha|} R_g \right)}$$

im System (2.3.34) einsetzen (siehe (2.2.41)). Wir erhalten somit das folgende System von Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} X + r^k X_k - \mu^2 (1 + X)^p &\geq 0 && \text{in } \Omega_R, \quad p \geq 1 \\ X &\leq 0 && \text{auf } \partial\Omega_R. \end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass für die Lösung X des Hilfsproblems (2.3.34)

$$X'(\bar{s}) \geq 0, \quad 0 \leq \bar{s} \leq s_0$$

gilt. $X = X\{s(v(x))\}$ ist somit eine Unterfunktion. Mittels der folgenden Transformation

$$\bar{s} := \frac{1 - |\alpha| \hat{\vartheta}}{\sqrt{|\alpha|}} \sinh\left(\sqrt{|\alpha|} \vartheta\right) \quad (2.3.36)$$

(siehe Bemerkung 1 zu Satz 2.2.4) lässt sich (2.3.34) auf folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} \ddot{X} - \mu^2 (1 + X)^p &= 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \hat{\vartheta} \\ \dot{X}(0) = X(\hat{\vartheta}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.34T)$$

$$\text{mit } \hat{\vartheta} := \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} \operatorname{arsinh}\left(\frac{|1 - Q^2|}{2Q}\right) \quad (\text{Definition von } Q \text{ siehe oben}).$$

Das obige eindimensionale Problem wurde in Punkt (i) zu Beginn dieses Unterabschnittes diskutiert. Es hat für jedes $\mu > 0$ eine eindeutig bestimmte Lösung X , für die gilt

$$-1 < X \quad \text{in } \Omega.$$

$X(\vartheta)$ mit der Inverse $\vartheta(\bar{s})$ aus (2.3.36) und $\bar{s}(v(x))$ aus (2.3.33) kombiniert ergibt die Unterfunktion für das Problem (2.3.19') mit $\Phi = \mu$. Somit kann (2.3.19) mit den oben erwähnten beiden Voraussetzungen a) bzw. b) für $p \geq 1$ keine Lösung mit einem "Dead-Core" besitzen.

- (ii) Falls $-1 < p < 0$ gewählt wird, so erfüllt die Bedingung (2.3.35) mit $\alpha := 0$ die Ungleichung

$$-\mu^2 p (1 + X)^{p-1} \geq 0 \quad \text{für } -1 \leq X \leq 0, \quad -1 < p \leq 0.$$

Das Hilfsproblem (2.3.34) zur Bestimmung einer unteren Schranke μ^* nimmt für $\alpha = 0$ die Form

$$\begin{aligned} X'' - \mu^2 (1 + X)^p &= 0, \quad 0 \leq \bar{s} \leq s_0 := \sqrt{2 v_{\max}} \\ X'(0) &= X(s_0) = 0 \end{aligned} \quad (2.3.34')$$

an. Sei $X^*(\bar{s})$ die kritische Lösung des obigen Systems mit

$$\bar{s} := s(v(x)) = \sqrt{2(v_{\max} - v(x))}.$$

Es gilt $X^{*\prime}(\bar{s}) \geq 0$ und $X^* \in C^2((0, s_0))$. Aus dem unter (i) erklärten Argument folgt, dass X^* eine (kritische) Unterfunktion gemäss Definition 2.1.3 in Ω für Problem (2.3.19') ist. Da es sich um eine Konstruktion von Unterfunktionen handelt, können wir im Randwertproblem (2.3.34') die obere Schranke

$$\hat{v} = \frac{R_g^2}{2} \quad (\text{siehe (2.2.40)})$$

für v_{\max} (Maximum der Lösung $v(x)$ von (2.3.32)) einsetzen. Diese Schranke ist konsistent mit der Konstruktion der Unterfunktion (siehe Beweis (iii) unten). Somit ist der kritische Wert μ^* von (2.3.34') eine untere Schranke für den kritischen Wert Φ^* von Problem (2.3.19). Gemäss den eingangs dieses Unterabschnittes ausgeführten Diskussionen über die eindimensionale Reaktionsgleichung p -ter Ordnung gilt für μ^* die explizite Formel (2.3.30a).

Falls in (2.3.19') $p := 0$ gewählt wird und im obigen Problem (2.3.34') keine Schranke für den Parameter v_{\max} eingesetzt wird, so ist $X^* = X^*\{s(v(x))\}$ sogar die kritische Lösung für (2.3.19').

Falls $0 < p < 1$ ist, so gilt in der Bedingung (2.3.35) für $\alpha = 0$ das umgekehrte Vorzeichen. Die oben definierte Funktion $X\{s(v(x))\}$ wird Oberfunktion. $X = -1$ ist eine (triviale) Unterfunktion. Sei X^* die kritische Lösung von Problem (2.3.34') mit Parameter μ^* , dann ist $X^*\{s(v(x))\}$ eine kritische Oberfunktion mit $-1 < X^*$. Es folgt, dass μ^* eine obere Schranke für den kritischen Wert Φ^* ist. Für den Endpunkt

$$s_0 = \sqrt{2 v_{\max}}$$

des Integrationsintervalls müssen wir jetzt eine untere Schranke v_u für v_{\max} einsetzen, um μ^* aus (2.3.34') gemäss Formel (2.3.30b) bestimmen zu können (zu unteren Schranken v_u für v_{\max} siehe Bemerkung 2 zu Satz 2.2.4).

- (iii) Wir setzen im Ausgangsproblem $\rho = \sigma = 1$ und wählen für Ω einen (Hyper-) Streifen mit Breite 2δ . Das Hilfsproblem (2.3.32) mit $\alpha = 0$ besitzt dann die Form

$$v''(x) + 1 = 0, \quad 0 \leq x \leq \delta$$

$$v'(0) = v(\delta) = 0.$$

Somit gilt in Ungleichung (2.3.31) Gleichheit, falls wir die Lösung $v(x) = 0.5(\delta^2 - x^2)$ des obigen Hilfsproblems einsetzen. Für die Beziehung (2.3.33) gilt $s(v(x)) = x$. Das Hilfsproblem (2.3.34) fällt mit dem Problem (2.3.19') zusammen. Die Schranken (2.3.30a) bzw. (2.3.30b) sind scharf, d.h. es gilt

$$\mu^* = \frac{\sqrt{2(1+p)}}{1-p} \frac{1}{\hat{\xi}_0} = \Phi^*, \quad \text{mit } \hat{\xi}_0 = \delta.$$

◇

Bemerkungen zu Korollar 2.3.4:

Es gibt für die Behauptung (i) auch einen anderen Beweis (Vorlesung R. P. Sperb). Man beachte, dass im Fall (ii) nicht die Existenz einer kritischen Lösung bewiesen ist. Es wird nur eine kritische Unterfunktion X^* konstruiert. Der zugehörige kritische Wert μ^* von (2.3.34) ist eine untere Schranke für den "Dead-Core" Wert. Im Fall $-1 < p \leq 0$ wäre auch folgende mögliche Wahl von α denkbar, um die Bedingung (2.3.35) zu erfüllen:

$$\alpha = \mu^2 |p|, \quad \text{mit der Nebenbedingung } \alpha < \hat{\alpha}.$$

(Für die Definition von $\hat{\alpha}$ siehe Abschnitt 2.2, Problem (2.2.H1) ff.).

Daraus würden sich verbesserte Unterfunktionen ergeben und somit bessere untere Schranken. Wir wollen aber im nächsten Korollar 2.3.5 eine verbesserte Unterfunktion konstruieren, analog zum Beweis von Korollar 2.3.2. (Ansatz (1.6.18) für eine P-Funktion mit $\alpha = 0$ im Hilfsproblem (2.3.32)). Damit lassen sich die Genauigkeiten der unteren Schranken μ^* in den beiden Korollaren 2.3.2 und 2.3.5 miteinander vergleichen.

Korollar 2.3.5 (Inhomogene Reaktionsgleichung (2.3.19) Fall a) und b), $N > 1$)

Voraussetzungen:

- (i) Für das Maximumprinzip gelten die Voraussetzungen des Korollars 2.3.4.
- (ii) μ^* ist durch das folgende Hilfsrandwertproblem bestimmt (siehe 2.2.15T):

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\vartheta) \left(\bar{\psi}(\vartheta) \dot{X} \right)' - \mu^2 (1 + X)^P &= 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \hat{\vartheta} \\ \dot{X}(0) = X(\hat{\vartheta}) &= 0, \end{aligned} \tag{2.3.37}$$

$$\text{mit } \tilde{\varphi}(\vartheta) := 1 + \cos\left(\frac{2}{\sqrt{\hat{a}}}\vartheta\right) \text{ und } \tilde{\psi}(\vartheta) := \frac{1}{\tilde{\varphi}(\vartheta)}, \quad ' = \frac{d}{d\vartheta}.$$

Für das Problem (2.3.19) Fall a) werden die Parameter $\hat{\vartheta}$ und \hat{a} gemäss der Voraussetzung (i) von Korollar 2.3.2 bestimmt, für den Fall b) in (2.3.19) gilt die zugehörige Bemerkung zu Korollar 2.3.2.

Behauptungen:

- (i) Der kritische Wert μ^* von (2.3.37) ist eine untere Schranke für den kritischen Wert Φ^* des Problems (2.3.19), d. h.

$$\mu^* \leq \Phi^*(\Omega).$$

- (ii) In obiger Ungleichung gilt Gleichheit, falls (2.3.19) in einem (Hyper-) Streifen der Breite 2δ definiert ist und $p := \sigma := 1$ gesetzt wird (homogenes Problem).

(Setze dazu für die Parameter \hat{a} und $\hat{\vartheta}$ oben im Randwertproblem der Voraussetzung (ii):

$$\frac{1}{\hat{a}} := 0 \text{ und } \hat{\vartheta} := \delta).$$

Beweis:

Der Beweis verläuft analog zu Korollar (2.3.2). Man setze dort anstelle von μe^X , die Nichtlinearität $-\mu^2(1+X)^p$ mit $-1 < p \leq 0$ ein.

◇

Bemerkungen zu Korollar 2.3.5

- (i) Die untere Schranke μ^* , die gemäss Korollar 2.3.5 bestimmt wird, ist eine verbesserte Schranke gegenüber dem Wert (2.3.30a) in Korollar 2.3.4, falls dort für v_{\max} die obere Schranke (2.2.40), d. h.

$$\hat{v} = \frac{R_g^2}{2}$$

gesetzt wird. Vergleiche mit Tabelle 9 in Abschnitt 3.3.

- (ii) Für den Fall $N = 2$ lässt sich auch hier für die Reaktionsgleichung ein analoges Korollar formulieren, wie Korollar 2.3.3 bei der Gelfand-Gleichung.

3 Numerische Beispiele

Im letzten Teil dieser Arbeit möchte ich die Ergebnisse aus Abschnitt 2.3 anhand einiger konkreter Beispiele numerisch untermauern. Vorerst seien einige Bemerkungen allgemeiner Art erwähnt. Sämtliche Rechnungen wurden interaktiv von einem Graphic-Terminal (HP2648A) aus auf einer DEC-10 Anlage (KL 10B, 36-Bit Prozessor, 33 ns Zykluszeit) durchgeführt. Zur Zeit der Ausführung der Programmierarbeiten war auf dem Computersystem der Monitor TOPS-10 Version V7.03 installiert (Betriebssystem). Es wurde der Compiler FORTRAN 10 Version 6 (1981) benützt. Um eine Mantissengenauigkeit von 7 Stellen (single precision Genauigkeit) in den folgenden Tabellen garantieren zu können, wurde alles in doppelter Genauigkeit gerechnet (ca. 18 Stellen Mantissengenauigkeit, Zahlenbereich von $0.14 \cdot 10^{-38}$ bis $3.4 \cdot 10^{38}$). Wir wollen damit zeigen, dass alle folgenden Algorithmen auch für höhere Genauigkeiten richtig funktionieren. Ausserdem lassen sich die auf dem Computer berechneten Werte mit bekannten exakten Grössen besser vergleichen. Aus physikalischen Gründen würde jedoch eine Mantissengenauigkeit von höchstens 3 Dezimalstellen in den numerischen Resultaten genügen! Für den interaktiven Input und Output von Zahlen, sowie den Output von Grafiken auf den Bildschirm bzw. Plotter (Interaktiver Digital Plotter Tektronix 4663) wurden Fortranroutinen aus einem "Schirm-Paket" bzw. "Plot-Paket" benützt, welche auf der Fortran Library des Seminars für angewandte Mathematik der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich installiert waren (SAM Library). Es wurden auch eigene Fortranroutinen geschrieben, welche teilweise im Anhang zu finden sind. Im folgenden Abschnitt 3.2 wird die Gelfand-Gleichung der Form (2.3.1) betrachtet und im Abschnitt 3.3 die Gleichung des Diffusions-Reaktions-Modell p-ter Ordnung der Form (2.3.19) (inhomogene Reaktionsgleichung). In beiden Fällen werden folgende Inhomogenitäten gewählt:

$$\rho(r) := e^{-\frac{(\theta r)^2}{2}} \quad \text{und} \quad b^k := 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (3.0.1)$$

oder

$$\sigma := \frac{1}{\rho} = e^{\frac{(\theta r)^2}{2}} \quad \text{und} \quad b^k := \frac{\sigma_{,k}}{\sigma} = \theta^2 r r_{,k} = \theta^2 x^k, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.0.2)$$

θ ist ein reeller Parameter und r ist der Radius:

$$r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}, \quad (x_k = x^k = \text{kartesische Koordinaten in } E^N).$$

Die unteren Schranken μ^* für den kritischen Wert Φ^* sollen gemäss Korollar 2.3.2 falls

$N > 1$, bzw. Korollar 2.3.3 falls $N = 2$ numerisch berechnet werden. In Abschnitt 3.3 berechnen wir untere Schranken μ^* für den "Dead-Core" Wert Φ^* der inhomogenen Gleichung einer Reaktion p -ter Ordnung mit $p = -0.5$, $p = 0$ gemäss Korollar 2.3.5. Wir betrachten alle Beispiele in einem (Hyper-) Kugelgebiet mit Radius 1. Dieses Gebiet ist ein ungünstigster Fall. Die berechneten unteren Schranken μ^* gemäss den obgenannten Korollaren liegen weit unterhalb den richtigen kritischen Werte. Die Inhomogenitäten sind radialsymmetrisch gewählt, sodass alle (positiven) Lösungen radialsymmetrisch sind. Zum Beweis dieses intuitiv klaren Sachverhaltes siehe in [20] (dort Theorem 1 für den homogenen Fall, Korollar 1 für den inhomogenen Fall). Somit lässt sich der Laplace-Operator durch seinen Radialteil ersetzen:

$$\Delta u = u''(r) + \frac{N-1}{r} u'(r).$$

Es werden zu den obgenannten Beispielen noch zwei Variationsgleichungen betrachten, so dass wir nach einer Transformation auf ein System eine Vektordifferentialgleichung der folgenden Form erhalten:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) & \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_N) & \cdot &= \frac{d}{dt} \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 & & \text{(Anfangsbedingungen)} & & \end{aligned} \quad (3.0.3)$$

Zur Integration eines Systems obiger Art wurde die Methode von Runge-Kutta mit Koeffizienten nach E. Fehlberg verwendet (siehe [33]). Es wurde die SAM-Fortranlibrary-routine RKD verwendet (Double Precision Version, 1984, siehe Kurzbeschreibung im Anhang). In dieser Routine sind die Runge-Kutta-Formeln 5. und 8. Ordnung implementiert. Unsere gewählten Beispiele sind im wesentlichen analytische Differentialgleichungen. (Die Singularität bei $r = 0$ ist nur eine Folge des gewählten Polarkoordinatensystems). Numerische Experimente ergaben, dass die Berechnung der Lösung auf doppelte Genauigkeit (oder schon auf 7 Mantissenstellen) mit der Methode 8. Ordnung effizienter ist als mit der Methode 5. Ordnung. Bei der Methode 8. Ordnung liegt der lokale Diskretisationsfehler in der Grössenordnung von $O(h^8)$. Der oben erwähnte RKD-Integrator bildet für alle folgenden Berechnungen das Kernstück. Weiter wurde für gewöhnliche Quadraturprobleme das Interaktive Mehrfach-Präzisions-Arithmetik-System IMP benützt. Dieses interaktive Programm, welches von einem Terminal aus wie ein Taschenrechner bedient werden kann und auch für sehr grosse Zahlenbereiche arbeitet, baut auf Fortranroutinen aus dem MP-Paket von R. Brent auf (siehe [32]).

3.1 Numerische Werte für w_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$ eines Hilfsproblems

Im Sinne einer Vorbereitung für die Berechnung der unteren Schranken für die kritischen Werte λ^* bzw. Φ^* gemäss den Korollaren 2.3.2, 2.3.3 und 2.3.5, definieren wir ein Hilfsproblem in der folgenden (nichteuclidischen) Form:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} w + r^k w_{,k} + 2 &= 0 & \text{in } \Omega = (\text{Hyper-}) \text{ Kugel mit Radius } 1 \\ w &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

mit $\bar{\Delta} w = \frac{\Delta w}{\rho(r)} + \frac{N-2}{\rho(r)} \left(\ln \sqrt{\rho(r)} \right)_{,k} w_{,k}$, $r^k = -\frac{N-2}{\rho(r)} \left(\ln \sqrt{\rho(r)} \right)_{,k}$, $\rho(r) = e^{-\frac{(r^*)^2}{2}}$

(Fall a) in (2.3.1) bzw. (2.3.19)). Für die numerische Berechnung der (radialsymmetrischen) Lösung $w(r)$ betrachten wir aber ein zu (3.1.1) äquivalente Form:

$$\begin{aligned} w'' + \frac{N-1}{r} w' + 2\rho(r) &= 0, & 0 \leq r \leq 1 \\ w'(0) = w(1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Für obige lineare Differentialgleichung (3.1.2), welche wir mit Anfangswerten $w(0) = w_0$ und $w'(0) = 0$ betrachten, lassen sich folgende Ausdrücke für $w'(r)$ und $w(r)$ angeben:

$$w'(r) = -\frac{2}{r^{N-1}} \int_0^r s^{N-1} \rho(s) ds \quad (3.1.3)$$

$$w(r) = w(r; w_0) = w_0 + \int_0^r w'(\bar{r}) d\bar{r}. \quad (3.1.4)$$

Aus der Randbedingung $w(1; w_0) = 0$ lassen sich die gewünschten Grössen berechnen:

$$\bar{\tau}_{\max} = \frac{|w'(1)|}{\sqrt{\rho(1)}} = \frac{2}{\sqrt{\rho(1)}} \int_0^1 s^{N-1} \rho(s) ds \quad (3.1.5)$$

$$w_{\max} = w(0) = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{\bar{r}^{N-1}} \int_0^{\bar{r}} s^{N-1} \rho(s) ds \right) d\bar{r}. \quad (3.1.6)$$

Falls $\theta = 0$ ist, lautet z.B. die exakte Lösung: $w(r) = 1/N (1 - r^2)$, und daraus erhalten wir die Hilfsgrößen

$$w_{\max} = \frac{1}{N} \quad \text{und} \quad \bar{\tau}_{\max} = \frac{2}{N} .$$

Wir benutzen die obigen Parameter als Kontrollwerte für die nachfolgenden numerischen Berechnungen. Die Integrale (3.1.3) und (3.1.4) können nicht durch Ausdrücke mit elementaren Funktionen explizit dargestellt werden. (Für $N=1$ ist (3.1.3) bis auf einen konstanten Faktor die Error-Funktion "erf(.)", siehe [31]). Zur Bestimmung der obigen Hilfsgrößen für $\theta \neq 0$ führen wir in (3.1.2) eine Transformation auf Systemform durch:

Wir setzen

$$\begin{aligned} w_1 &:= w \\ w_2 &:= w' \end{aligned}$$

und erhalten das System

$$\begin{aligned} w_1' &= w_2 \\ w_2' &= \frac{1-N}{r} w_2 - 2 \rho(r) \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

mit Anfangswerten $w_1(0) = w_0$
 $w_2(0) = 0$.

Dieses System besitzt eine $1/r$ -Singularität. In der Subroutine, wo die Differentialgleichung für den RKD-Integrator programmiert werden muss, definieren wir das folgende System:

$$\begin{aligned} w_1' &= w_2 \\ w_2' &= \begin{cases} \frac{1-N}{r} w_2 - 2 e^{-(\theta r)^2/2}, & r > 0 \\ -2/N, & r = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1.7'}$$

(Für den Ausdruck $((1-N)/r)w_2$ wurde der Grenzwert $(1-N)w_2'(0)$, falls $r \rightarrow 0$ geht, gesetzt.) Die automatische Schrittweitensteuerung der RKD-Routine bewältigt die $1/r$ -Singularität des obigen Differentialgleichungssystems ohne Probleme. Es handelt sich hier um eine ausserwesentliche Singularität (oder Singularität vom Fuchsschen Typus). Wir wählen einen beliebigen Anfangswert \bar{w}_0 . Um evt. mehr als 7 Stellen Mantissengenauigkeit zu haben, berechnen wir die Lösung $w(r)$ an der Stelle $r = 1$ mit einer Toleranz von $TOL := 10^{-10}$. Daraus erhalten wir die gewünschten Größen

$$w_{\max} = \bar{w}_0 - w(1; \bar{w}_0)$$

$$\bar{\tau}_{\max} = \frac{|w'(1; \bar{w}_0)|}{\sqrt{\rho(1)}}.$$

Die obige Gleichung für w_{\max} entspricht dem Newtonverfahren, welche hier in einem Schritt konvergiert (lineares Problem). Um die oberen Schranken \hat{w} für w_{\max} bzw. $\hat{\tau}$ für $\bar{\tau}_{\max}$ zu bestimmen, wenden wir Korollar 1.6.1 auf das Problem (3.1.1) an und berechnen diese Schranken entsprechend dem Vorgehen in Unterabschnitt 1.6.2. Die benötigten geometrischen Hilfsgrößen

$$R_g = \int_0^1 \sqrt{\rho(s)} \, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{\theta} \operatorname{erf}\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{geodätischer Radius, erf(.) siehe [31]}) \quad (3.1.8)$$

und

$$\bar{\kappa}_{\min} = \bar{\kappa}|_{r=1} = \frac{H + \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\rho(r)}}{\sqrt{\rho(r)}} \Big|_{r=1} = e^{(\theta/2)^2} \left(N - 1 - 2 \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 \right) \quad (3.1.9)$$

wurden mit dem im vorangehenden Abschnitt erwähnten IMP-Paket berechnet. Wir müssen für die Inhomogenität $\rho(r)$, welche in (3.0.1) definiert ist, die Voraussetzungen (i) und (ii) des Korollars 1.6.1 (mit Bemerkung 5c) verifizieren.

$$(i) \quad \left[-(N-2) (\ln \sqrt{\rho})_{,k} (\ln \sqrt{\rho})_{,1} - \left(\Delta \ln \sqrt{\rho} - \frac{2\rho}{w+\beta} \right) \delta^{kl} \right] w_{,k} w_{,1} =$$

$$\left[-\frac{N-2}{4} \theta^4 r^2 + \frac{N}{2} \theta^2 + \frac{2\rho}{w+\beta} \right] (w')^2 \geq 0 \quad (3.1.10)$$

$$(ii) \quad \bar{\kappa}_{\min} = e^{(\theta/2)^2} \left(N - 1 - 2 \left(\frac{\theta}{2} \right)^2 \right) \geq 0 \quad (3.1.11)$$

Die obigen (hinreichenden) Bedingungen (i) und (ii) sind erfüllt falls

$$\theta^2 \leq \frac{2N}{N-2} \quad \text{für Bedingung (3.1.10)} \quad \text{und} \quad \theta^2 \leq 2(N-1) \quad \text{für Bedingung (3.1.11)}$$

gilt. Für $N = 2, 3, 4$ und $\theta \in [0, 1]$ sind die Werte für die oben erwähnten Größen w_{\max} bzw. \hat{w} und $\bar{\tau}_{\max}$ bzw. $\hat{\tau}$ für das Problem (3.1.1) zusammengestellt.

θ	w_{\max}	$\bar{\tau}_{\max}$	\hat{w}	$\hat{\tau}$
N = 1				
0	1	2		
0.25	0.9948240	2.0105309		
0.5	0.9796761	2.0435109		
0.75	0.9556349	2.1032282		
1.0	0.9243101	2.1972870		
N = 2				
0	0.5	1.0	0.8655980	1.4776216
0.25	0.4961207	1.0000407	0.8589058	1.4785210
0.5	0.4847991	1.0006512	0.8397814	1.4829558
0.75	0.4669302	1.0032992	0.8110554	1.4966658
1.0	0.4438421	1.0104493	0.7774637	1.5314796
N = 3				
0	0.3333333	0.6666666	0.7763787	1.1493104
0.25	0.3302314	0.6646089	0.7691247	1.1461479
0.5	0.3211965	0.6587393	0.7481480	1.1375306
0.75	0.3069933	0.6499521	0.7157139	1.1261921
1.0	0.2887512	0.6396854	0.6753474	1.1172175
N = 4				
0	0.25	0.5	0.7140181	0.9297656
0.25	0.2474161	0.4974161	0.7066412	0.9249694
0.5	0.2399009	0.4899048	0.6852248	0.9111381
0.75	0.2281219	0.4781657	0.6518051	0.8899516
1.0	0.2130613	0.4632970	0.6094540	0.8642721

Tabelle 1
(Beispiel (3.1.1), Korollar 1.6.1)

Aehnlich wird ein Hilfsproblem für den Fall b) in (2.3.1) bzw. (2.3.19) mit einem selbstadjungierten Differentialausdruck behandelt. Wir betrachten das folgende Hilfsproblem wieder in der "nichteuclidischen" Form, um den Zusammenhang mit der Theorie aus Abschnitt 2.2 herzustellen (Vergleiche mit Problem (2.2.H1)):

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} w + r^k w_{,k} + 2 &= 0 & \text{in } \Omega = (\text{Hyper-}) \text{ Kugel mit Radius } R = 1 \\ w &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

$$\text{mit } \bar{\Delta} w = \sigma \Delta w - \sigma (N-2) (\ln \sqrt{\sigma})_{,k} w_{,k} \quad r^k = \sigma_{,k} + \sigma (N-2) (\ln \sqrt{\sigma})_{,k} \quad \sigma(r) = e^{-\frac{(\theta r)^2}{2}}.$$

Die Berechnung der exakten Werte für w_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$ verläuft analog zum vorangehenden Fall. Dazu definieren wir in einer Subroutine, welche vom RKD-Integrator benötigt wird, das folgende System:

$$\begin{aligned} w'_1 &= w_2 \\ w'_2 &= \begin{cases} \left((1-N)r - \theta^2 r \right) w_2 - 2 e^{-\frac{(\theta r)^2}{2}}, & r > 0 \\ -2/N, & r = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1.12')$$

$$\begin{aligned} \text{mit Anfangswerten } w_1(0) &= w_0 \\ w_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Wir wählen einen beliebigen Wert $w_1(0) := \bar{w}_0$ als Anfangswert und berechnen die Lösung w an der Stelle $r = 1$. Daraus erhalten wir die gewünschten Größen

$$\begin{aligned} w_{\max} &= \bar{w}_0 - w(1; \bar{w}_0) \\ \bar{\tau}_{\max} &= \sqrt{\sigma(1)} |w'(1; \bar{w}_0)|. \end{aligned}$$

Um die oberen Schranken \hat{w} und $\hat{\tau}$ bestimmen zu können, müssen wir die Voraussetzungen (i) und (ii) von Korollar 1.6.1 (siehe dazu Bemerkung 5 b) für $\sigma(r)$ nachprüfen. Wir setzen in (1.6.20):

$$\frac{\lambda \rho f(u)}{u + \beta} = \frac{2}{\sigma(w + \beta)}, \quad \beta := \frac{\bar{\tau}_{\max}}{\bar{\kappa}_{\min}}$$

und

$$M_N^{kl} = -\frac{1}{\sigma} \left(\sigma_{,kl} + \frac{N-2}{4} \frac{\sigma_{,k} \sigma_{,l}}{\sigma} \right) + \frac{\Delta \sigma}{2\sigma} \delta^{kl} =$$

$$-\theta^2 \left(r_{,kl} + r_{,k} r_{,l} + \frac{N+2}{4} \theta^2 r^2 r_{,k} r_{,l} \right) + \frac{\theta^2}{2} (N + \theta^2 r^2) \delta^{kl}.$$

Wir erhalten zusammen mit der radialsymmetrischen Lösung $w=w(r)$ von (3.1.12) folgende Bedingungen ($r_{,kl} r_{,k} r_{,l} = 0$):

$$(i) \quad \left[M_N^{kl} + \frac{2}{\sigma(w+\beta)} \delta^{kl} \right] w_{,k} w_{,l} = \left[-\frac{N}{4} \theta^4 r^2 + \frac{N-2}{2} \theta^2 + \frac{2}{\sigma(w+\beta)} \right] (w')^2 \geq 0 \quad (3.1.13)$$

$$(ii) \quad \bar{\kappa}_{\min} = \sqrt{\alpha(r)} \left(H + \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\sigma(r)} \right) \Big|_{r=1} = e^{(\theta/2)^2} \left(N - 1 + 2(\theta/2)^2 \right) \geq 0 \quad (3.1.14)$$

Die obigen Bedingungen sind sicher erfüllt für

$$\theta^2 \leq 2 \frac{N-2}{N} \quad \text{falls } N = 3, 4, \dots$$

Zur Verifikation der Bedingung (3.1.13) für den Fall $N = 2$ schätzen wir den Term $2/\sigma(w+\beta)$ wie folgt ab:

$$\frac{2}{\sigma(w+\beta)} \geq \frac{2}{\sigma(w_{\max}+\beta)} \quad \text{mit } \beta = \frac{\bar{\tau}_{\max}}{\bar{\kappa}_{\min}}.$$

Wir können in der obigen Abschätzung statt der oberen Schranken für w_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$, die richtigen Werte einsetzen. Sie sind in Tabelle 2 für unser Spezialfall (Ω ein (Hyper-) Kugelgebiet) numerisch berechnet worden. Die obige Bedingung (i) ist aber für den allgemeinen Fall schwierig zu verifizieren, da sie von der (unbekannten) Lösung w abhängt. Die beiden Bedingungen (3.1.13) und (3.1.14) sind für

$$0 \leq \theta \leq 1, \quad N = 2, 3, 4$$

erfüllt. Somit lassen sich die oberen Schranken \hat{w} und $\hat{\tau}$ gemäss dem Vorgehen in Unterabschnitt 1.6.2 bestimmen. In der folgenden Tabelle 2 sind die Ergebnisse für das Hilfsproblem (3.1.12) zusammengestellt.

θ	w_{\max}	$\bar{\tau}_{\max}$	\hat{w}	\hat{t}
N = 1				
0	1.0	2.0		
0.25	0.9845365	1.9689929		
0.5	0.9400248	1.8788261		
0.75	0.8716814	1.7376301		
1.0	0.7869387	1.5576016		
N = 2				
0	0.5	1.0	0.8655980	1.4776216
0.25	0.4922682	0.9844964	0.8522001	1.4531423
0.5	0.4700124	0.9394131	0.8132788	1.3812498
0.75	0.4358407	0.8688151	0.7524809	1.2666312
1.0	0.3934693	0.7788008	0.6753474	1.1172175
N = 3				
0	0.3333333	0.6666667	0.7763787	1.1493104
0.25	0.3281788	0.6563310	0.7645576	1.1296863
0.5	0.3133416	0.6262754	0.7302744	1.0722786
0.75	0.2905605	0.5792100	0.6768915	0.9814434
1.0	0.2623129	0.5192005	0.6094540	0.8642721
N = 4				
0	0.25	0.5	0.7140181	0.9297656
0.25	0.2461341	0.4922482	0.7033790	0.9136685
0.5	0.2350062	0.4697065	0.6725512	0.8666981
0.75	0.2179204	0.4344075	0.6246264	0.7927340
1.0	0.1967347	0.3894004	0.5642041	0.6979428

Tabelle 2
 (Beispiel (3.1.12), Korollar 1.6.1 mit Bemerkung 5 b)

Für den Fall $N = 2$ lassen sich die oberen Schranken \hat{w} und \hat{t} etwas verschärfen, falls wir Korollar 1.6.2 auf die Probleme (3.1.1) und (3.1.12) anwenden. Vorerst müssen wir aber die Bedingung (i) in den Voraussetzungen von Korollar 1.6.2 nachprüfen. Die Bedingung (ii) ändert

sich gegenüber Korollar 1.6.1 nicht. Für das Hilfsproblem (3.1.1) mit der Inhomogenität $\rho(r)$ erhalten wir folgende Bedingung:

$$(i) \quad (-\Delta \ln \sqrt{\rho} + \beta \rho) \delta^{kl} w_{,k} w_{,l} = \left(\theta^2 + \beta \rho \right) (w')^2 \geq 0, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{2 \bar{\kappa}_{\min}}{\bar{\tau}_{\max}} \quad (3.1.15)$$

Der obige Ausdruck (3.1.15) ist positiv semidefinit für positive und negative Parameter θ . Für Problem (3.1.12) mit der Inhomogenität $1/\sigma(r)$ hat die Bedingung (i) in Bemerkung 4 b) von Korollar 1.6.2 folgende Form:

$$(i) \quad \left[-(\ln(\sigma))_{,kl} + \frac{\Delta \sigma}{2\sigma} \delta^{kl} + \frac{\beta}{\sigma} (1 + \sigma_{,s} w_{,s}) \delta^{kl} \right] w_{,k} w_{,l} =$$

$$\left[\theta^4 \frac{r^2}{2} + \frac{\beta}{\sigma} (1 + \theta^2 r \sigma w') \right] (w')^2 \geq 0. \quad 0 \leq \beta \leq \frac{2 \bar{\kappa}_{\min}}{\bar{\tau}_{\max}} \quad (3.1.16)$$

Obige Bedingung (3.1.16) ist für $\beta \neq 0$ schwierig nachzuprüfen, da wir im allgemeinen die Werte für den folgenden Ausdruck $\sigma_{,s} w_{,s}$ bzw. für w' im Gebiet Ω nicht kennen. In unserem Fall gilt aber $w'(r) \leq 0$. Wir setzen für β den ("bestmöglichen") Wert ein (siehe 1.6.35):

$$\beta := \frac{2 \bar{\kappa}_{\min}}{\bar{\tau}_{\max}}.$$

Für $|w'|$ können wir die obere Schranke

$$|w'(r)| \leq |w'(1)| = \frac{\bar{\tau}_{\max}}{\sqrt{\alpha(1)}}$$

benützen. Wir erhalten für (3.1.16) folgende Ungleichung:

$$\left[\theta^4 \frac{r^2}{2} + \frac{2 \bar{\kappa}_{\min}}{\sigma(r) \bar{\tau}_{\max}} (1 + \theta^2 r \sigma(r) w'(r)) \right] (w'(r))^2 \geq$$

$$\left[\theta^4 \frac{r^2}{2} + \frac{2 \bar{\kappa}_{\min}}{\sigma(1) \bar{\tau}_{\max}} \left(\frac{1}{\sigma(r)} - \theta^2 r \sqrt{\alpha(1)} \bar{\tau}_{\max} \right) \right] (w'(r))^2 \quad (3.1.16')$$

Der Ausdruck: $1/\sigma(r) - \theta^2 r \sqrt{\alpha(1)} \bar{\tau}_{\max}$ ist für $0 \leq r \leq 1$ nicht negativ, falls θ im Intervall

$$0 \leq \theta \leq 1$$

gewählt wird. Die Werte $\bar{\tau}_{\max}$ sind in unserem Fall bekannt (siehe Tabelle 2). Die Voraussetzungen von Korollar 1.6.2 sind somit für die beiden Fälle erfüllt. Die oberen Schranken \hat{w} und \hat{t} in der folgenden Tabelle 3 wurden gemäss den Beziehungen (1.6.47) bis (1.6.52) berechnet. Man beachte dabei den Unterschied zwischen den Problemen (3.1.1/12) und (1.6.39).

θ	Problem (3.1.1)		Problem (3.1.12)	
	\hat{w}	\hat{t}	\hat{w}	\hat{t}
N = 2				
0	0.8246376	1.3896331	0.8246376	1.3896331
0.25	0.8198761	1.3938281	0.8086009	1.3599186
0.5	0.8064187	1.4082907	0.7613283	1.2718752
0.75	0.7866378	1.4390280	0.6853438	1.1296324
1.0	0.7641247	1.4974135	0.5852098	0.9432445

Tabelle 3
(Korollar 1.6.2)

Die obige Tabelle zeigt, dass mit der Anwendung von Korollar 1.6.2 leichte Verbesserungen für die oberen Schranken erzielt werden. Für das Problem (3.1.1) erreichen wir eine Verbesserung von 3 bis 8.5 Prozent gegenüber einer Anwendung von Korollar 1.6.1. Für das Problem (3.1.12) (selbstadjungierter Fall) liegt das entsprechende Ergebnis etwa zwischen 8.5 und 22 Prozent.

3.2 Numerische Resultate zur inhomogenen Gelfand-Gleichung

3.2.1 Berechnung des kritischen Wertes λ^* für eine (Hyper-) Kugel mit Radius 1

Gegeben sei die Gelfand-Gleichung der Form (2.3.1) Fall a) in einer Einheits(hyper-)kugel mit der in (3.0.1) definierten radialsymmetrischen Inhomogenität $\rho(r)$:

$$u'' + \frac{N-1}{r} u' + \lambda \rho(r) e^u = 0, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (3.2.1)$$

$$u'(0) = u(1) = 0, \quad \rho(r) := e^{-\frac{(\theta r)^2}{2}}, \quad \theta \text{ ein reeller Parameter.}$$

u_{\max} bezeichnet den Maximalwert der Lösung. Für jede Lösung u gilt $u(-r) = u(r)$ und $u''(r) \leq 0$. Aus dem Maximumprinzip folgt $u \geq 0$ für $0 \leq r \leq 1$. Somit liegt das Maximum u_{\max} im Punkt $r = 0$, d. h. $u_{\max} = u(0) =: u_0$. Wir wollen für die obige Problemklasse ein Verfahren zur Berechnung eines Bifurkationsdiagramms und des kritischen Wertes λ^* erklären. Im folgenden Unterabschnitt 3.2.2 sollen mit dem gleichen Verfahren aufgrund von Korollar 2.3.2 ($N > 1$) bzw. 2.3.3 ($N = 2$) untere Schranken μ^* für λ^* berechnet werden. Wir können diese unteren Schranken mit den exakten Werten vergleichen. Im Fall $\theta = 0$ und $N = 1$ lässt sich für (3.2.1) eine Formel für die Lösung angeben (siehe [23]). Sie lautet

$$u(x) = 2 \ln \left(\frac{\sqrt{2k}}{\cosh(\sqrt{\lambda k} x)} \right). \quad (3.2.2)$$

Der Parameter k ist durch eine implizite Bifurkationsgleichung

$$\sqrt{2k} = \cosh(\sqrt{\lambda k}), \quad (3.2.3)$$

gegeben. Gemäss der obigen Gleichung (3.2.2) besteht zwischen k und u_{\max} der Zusammenhang

$$k = \frac{e^{u_{\max}}}{2}. \quad (3.2.4)$$

Setzen wir den Ausdruck (3.2.4) für k in (3.2.3) ein und lösen nach λ auf, so erhalten wir eine explizite Darstellung für $\lambda(u_{\max})$ der Form

$$\lambda(u_{\max}) = 2 e^{-u_{\max}} \operatorname{arcosh}^2 \left(e^{u_{\max}/2} \right). \quad (3.2.5)$$

Um den kritischen Punkt (u_{\max}^*, λ^*) aus obiger Gleichung zu bestimmen, bilden wir die Ab-

leitung $d\lambda/du_{\max}$ und setzen:

$$\frac{d\lambda(u_{\max})}{du_{\max}} = 0.$$

Daraus ergibt sich eine nichtlineare Bestimmungsgleichung für u_{\max}^* .

$$e^{(u_{\max}/2)} = \sqrt{e^{u_{\max}} - 1} \operatorname{arcosh}\left(e^{(u_{\max}/2)}\right). \quad (3.2.6)$$

Setzen wir die Lösung u_{\max}^* in (3.2.5) ein, so erhalten wir den kritischen Wert λ^* . Die approximativen numerischen Werte lauten

$$\begin{aligned} u_{\max}^* &= 1.186842168634, \\ \lambda^* &= 0.878457679781. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Wir geben hier eine zwölfstellige Genauigkeit an, damit wir mit denjenigen Werten vergleichen können, welche wir im folgenden auf dem Computer berechnen werden. Damit soll eine Sicherung der errechneten Zahlenwerte für den allgemeinen Fall $N \neq 1$ und $\theta \neq 0$, sowie die richtige Funktion der programmierten Algorithmen gewährleistet werden. Die nichtlineare Differentialgleichung (3.2.1) ist für $r = 0$ singulär. Weil die Berechnung der instabilen Lösungen mit dem Computer kritisch ist, müssen wir die Lösungen im Nullpunkt durch folgenden Ansatz approximieren:

$$u(r) = U_0 + U_1 r^2 + U_2 r^4 + U_3 r^6, \quad 0 \leq r \leq r_z. \quad (3.2.8)$$

U_0 ist durch den Anfangswert $U_0 := u(0) = u_{\max}$ gegeben. Die weiteren Koeffizienten U_1 , U_2 und U_3 lassen sich wie folgt berechnen:

Aus dem Ansatz (3.2.8) erhalten wir für den radialsymmetrischen Teil des Laplace-Operators den Ausdruck

$$u'' + \frac{N-1}{r}u' = 2N U_1 + 4(N+2)U_2 r^2 + 6(N+4)U_3 r^4 + \dots$$

Der Exponentialausdruck λe^u hat die Entwicklungskoeffizienten (siehe [30])

$$\lambda e^u = e_0 + e_1 r^2 + e_2 r^4 + \dots,$$

mit

$$\begin{aligned} e_0 &= \lambda e^{U_0} \\ e_1 &= U_1 e_0 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$e_j = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j k U_k e_{j-k} \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

Für die Inhomogenität $\rho(r)$ lautet die Taylorreihe:

$$\rho(r) = e^{-\frac{(\theta r)^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^{2k} \quad \text{mit} \quad c_k = (-0.5)^k \frac{\theta^{2k}}{k!}.$$

Die Reihenentwicklung für das Produkt $\lambda \rho(r) e^u$ lässt sich durch den Ansatz

$$\lambda \rho(r) e^u = f_0 + f_1 r^2 + f_2 r^4 + \dots$$

gewinnen. Die Koeffizienten f_j sind durch das Cauchy-Produkt der Folgen c_k und e_k gegeben (siehe [30]):

$$\begin{aligned} f_0 &= e_0 & (e_0 &:= \lambda e^{U_0}) \\ f_1 &= e_1 - \frac{\theta^2}{2} e_0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ f_j &= \sum_{k=0}^j c_k e_{j-k} & j &= 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert uns für die Koeffizienten U_1 , U_2 und U_3 des Ansatzes (3.2.8) folgende Ausdrücke:

$$U_1 = -\frac{e_0}{2N} = -\frac{\lambda e^{U_0}}{2N}, \quad (3.2.9)$$

$$U_2 = (K_1 + K_2 e_0) e_0 \quad \text{mit} \quad K_1 := \frac{\theta^2}{8(N+2)} \quad \text{und} \quad K_2 := \frac{1}{8N(N+2)},$$

$$U_3 = -(R_1 + (R_2 + R_3 e_0) e_0) e_0 \quad \text{mit}$$

$$R_1 := \frac{\theta^4}{48(N+4)}, \quad R_2 := \frac{(3N+4)\theta^2}{48N(N+2)(N+4)} \quad \text{und} \quad R_3 := \frac{N+1}{24N^2(N+2)(N+4)}.$$

Die Entwicklung (3.2.8) enthält nur gerade Potenzen von r . Zur numerischen Berechnung substituieren wir in (3.2.8)

$$x := r^2$$

und erhalten folgende Entwicklungen bis zur dritten Ordnung in x

$$\begin{aligned} u &= U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + U_3 x^3 \\ u' &= (U_1 + 2U_2 x + 3U_3 x^2) 2r. \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Die obigen Polynome werten wir mit dem Horner Schema aus (Implementation in der Fortranroutine HORNER, siehe Anhang). Um die Integrationsroutine RKD benutzen zu können, transformieren wir (3.2.1) auf ein System. Wir setzen:

$$\begin{aligned} u_1 &= u \\ u_2 &= u' \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -\frac{N-1}{r} u_2 - \lambda e^{-(\theta r)^2/2} e^{u_1}, \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

mit Anfangswerten $u_1(0) = u_{\max}$ (3.2.12)
 $u_2(0) = 0$.

Mit einem einfachen Schiessverfahren berechnen wir die Lösung des Randwertproblems (3.2.1). Wir wählen einen festen Parameter u_{\max} und berechnen die Lösung des Systems (3.2.11) mit den Anfangswerten (3.2.12). Da das System (3.2.11) eine $1/r$ -Singularität besitzt, setzen wir die Lösung aus zwei Teilen zusammen. Zuerst wird ein Zwischenwert $x_z = r_z^2$ gewählt. Wir approximieren in $0 \leq r \leq r_z$ $u(r)$, $u'(r)$ durch die Polynome (3.2.10). Im Intervall $r_z \leq r \leq 1$ benutzen wir den RKD-Integrator und berechnen die Lösung an der Stelle $r = 1$. Als "Anfangswerte" sind die Grössen $u(x_z)$ und $2r_z u_x(x_z)$ in die RKD-Routine einzusetzen. Um die zweite Randbedingung $u(1) = 0$, erfüllen zu können, betrachten wir die Lösung an der Stelle 1, welche von λ und u_{\max} abhängt. Wir setzen

$$F(\lambda, u_{\max}) := u(1) = u(1; u_{\max}, \lambda)$$

Mit dem Newton-Raphson Verfahren versuchen wir die Niveaulinie von

$$F(\lambda, u_{\max}) = 0 \quad (3.2.13)$$

iterativ zu bestimmen. Wir wählen einen festen Wert für u_{\max} und betrachten folgende Iteration:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \text{Startwert (wird vom Programm abgefragt)} \\ \lambda_{n+1} &= \lambda_n - \frac{F(\lambda_n)}{F_{,\lambda}(\lambda_n)} \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Die Ableitung

$$\zeta(r) := F_{,\lambda} = u_{,\lambda}(r; u_{\max}, \lambda) \quad (3.2.15)$$

bestimmen wir aus einer Variationsgleichung der Ausgangsgleichung (3.2.1):

$$\begin{aligned} \zeta'' + \frac{N-1}{r} \zeta' + \rho(r) (e^u + \lambda e^u \zeta) &= 0, \quad 0 \leq r \leq 1 \\ \zeta'(0) = \zeta(1) &= 0, \quad ' = \frac{d}{dr}. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Zur Bestimmung der Lösung $\zeta(r)$ an der Stelle $r = 1$ mit der RKD-Routine fügen wir zum System (3.2.11) ein System von Variationsgleichungen hinzu, welches wir mitintegrieren:

$$\begin{aligned} \zeta_1' &= \zeta_2 \\ \zeta_2' &= \frac{1-N}{r} \zeta_2 - \rho(r) \left(e^{u_1} + \lambda e^{u_1} \zeta_1 \right), \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

$$\begin{aligned} \text{mit Anfangswerten} \quad \zeta_1(0) &= 0 \\ \zeta_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

In der verwendeten Software (siehe Anhang) wird die Iteration (3.2.14) abgebrochen, falls

$$\left| \frac{u_1(1)}{\zeta_1(1)} \right| < C \cdot (\lambda_n + 1) \cdot \text{TOL}$$

gilt. $\text{TOL} > 0$ ist die eingegebene Fehlertoleranz für die automatische Schrittweitensteuerung der RKD-Routine (siehe Anhang) und $C := 10$ ist ein Sicherheitsfaktor. Falls $\lambda_n = 0$ ist, so steuert das obige Abbruchkriterium den absoluten Fehler, sonst wird eher nach dem relativen Fehler abgebrochen. Die Variationsgleichung (3.2.16) besitzt die gleiche $1/r$ -Singularität wie das ursprüngliche Problem (3.2.1). Zur Bestimmung der Lösung müssen wir wieder eine

Entwicklung im Nullpunkt durchführen. Es sei

$$\zeta(r) = \zeta_0 + \zeta_1 x + \zeta_2 x^2 + \zeta_3 x^3, \quad 0 < x \leq x_z, \quad x := r^2 \quad (3.2.18)$$

der Ansatz für die Lösung in der Nähe des Nullpunktes. Über die Beziehung

$$\zeta_k = \frac{\partial U_k}{\partial \lambda} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

lassen sich die Koeffizienten für den Ansatz (3.2.18) direkt aus der Entwicklung (3.2.8) für die Lösung $u(r)$ berechnen. Mit den Formeln (3.2.9) für U_1 , U_2 und U_3 , sowie dem Anfangswert $U_0 := u_{\max}$ erhalten wir folgende Koeffizienten ζ_k :

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= 0, & \zeta_1 &= \frac{U_1}{\lambda}, \\ \zeta_2 &= (K_1 + 2K_2 e_0) \frac{e_0}{\lambda}, & \zeta_3 &= -(R_1 + (2R_2 + 3R_3 e_0) e_0) \frac{e_0}{\lambda}. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Die Koeffizienten K_i und R_i sind in (3.2.9) definiert. Bei genügend kleiner Wahl von $x_z = r_z^2$ liefern die Entwicklungen (3.2.10) und (3.2.18) gute Approximationen für die Lösungen $u(r)$ und $\zeta(r)$ in $r \leq r_z$. Im Intervall $r_z \leq r \leq 1$ wird die Lösung mit dem RKD-Integrator berechnet. Für volle Maschinengenauigkeit mit $TOL := 10^{-18}$ erreicht man nach der typischen Zahl von 4 bis 6 Newtoniterationen mindestens 15 - stellige Genauigkeit für λ , falls ein Anfangswert eingegeben wird, welcher der Grössenordnung nach richtig ist. Wir berechnen somit einige Punkte der Funktion

$$\lambda = \lambda(u_{\max}), \quad (3.2.20)$$

so dass die Niveaulinienrelation (3.2.13) erfüllt ist. Den obigen Zusammenhang (3.2.20) stellen wir in einem Bifurkationsdiagramm dar. Wir halten uns an die in der Literatur (siehe [2]) übliche Darstellung und tragen auf der Abszisse Werte von λ und auf der Ordinate Werte von u_{\max} ab. In der folgenden Grafik 1 sind die Bifurkationsdiagramme für die 2, 3, 4 und 5 dimensionale (Hyper-) Kugel dargestellt. Für den Parameter θ (=a im Diagramm) wurde ein charakteristischer Wert von $\theta := 0.5$ gewählt. Pro Kurve wurden 380 Punkte berechnet. Um sicher eine glatte Kurve zu erhalten, wurde eine Mindesttoleranz von $TOL = 10^{-10}$ verwendet. In der nächsten Grafik 2 sind für die Parameterwerte

$$\theta := 0.5, \quad \lambda := 1.8 \quad \text{und} \quad N := 3$$

alle 3 Lösungen $u(r)$ der inhomogenen Gelfand-Gleichung (3.2.1) im Intervall $0 \leq r \leq 2$ aufgezeichnet. Mit dieser Grafik bestätigen wir numerisch ein theoretisches Resultat aus [17] und [18]. In jenen Arbeiten wird für semilineare elliptische (jedoch nur homogene) Probleme

mit strikt konvexer Nichtlinearität bewiesen, dass es kein Tripel von Lösungen gibt, deren Werte im Intervall $[0, 1]$ geordnet sind. Die Graphen der instabilen Lösungen schneiden sich gegenseitig.

Um den kritischen Punkt $(\lambda^*, U_0^* = u_{\max}^*)$ bestimmen zu können, definieren wir vorerst die Hilfsfunktion

$$G(u_{\max}) := \frac{d\lambda}{du_{\max}}.$$

Wir wollen unter Verwendung der Gelfand-Gleichung (3.2.1) einen Ausdruck für die Funktion $G = G(u_{\max})$ herleiten. Dazu betrachten wir in der Niveauliniengleichung (3.2.13) die Variable λ als Funktion von u_{\max} :

$$u(1) = F(\lambda, u_{\max}) \quad (3.2.21)$$

Wir leiten (3.2.21) nach u_{\max} ab und erhalten

$$\frac{\partial u}{\partial u_{\max}} + \frac{\partial u}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{du_{\max}} = 0. \quad (3.2.22)$$

Mit den Definitionen (3.2.15) für $\zeta(r)$ und

$$\eta(r) := \frac{\partial u(r)}{\partial u_{\max}} \quad (3.2.23)$$

ergibt sich aus (3.2.22) folgender Ausdruck für G :

$$G = -\frac{\eta}{\zeta}.$$

$\eta(r)$ bestimmen wir aus einem weiteren Variationsgleichungssystem, welches wir zum System (3.2.11) hinzufügen.

$$\begin{aligned} \eta_1' &= \eta_2 \\ \eta_2' &= \frac{1-N}{r} \eta_2 - \lambda \rho(r) e^{u_1} \eta_1, \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

mit Anfangswerten: $\eta_1(0) = 1$

$$\eta_2(0) = 0.$$

Einen kritischen Punkt u_{\max}^* ist die Nullstelle von $G(u_{\max})$. Wir bestimmen ihn aus der

Gleichung

$$G(u_{\max}) = 0.$$

Mit u_{\max}^* berechnen wir dann über die Newtoniteration (3.2.14) den kritischen Wert λ^* . Um die Berechnung der Ableitung $G_{,u_{\max}}$ zu vermeiden, verwenden wir diesmal ein Sekanten-iterationsverfahren, welches im generischen Fall ($G_{,u_{\max}} \neq 0$) ein Fehlergesetz der folgenden Form hat:

$$|e_{n+1}| \approx \text{const} |e_n|^p \quad (p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618 \dots, \text{Goldener Schnitt}).$$

$$\text{mit } e_n := u_{\max}^* - u_{\max}^n \text{ (Fehler des } n\text{-ten Folgengliedes)}$$

Es sei nebenbei bemerkt, dass der Konvergenzexponent beim Newtonverfahren im generischen Fall quadratisch ($p = 2$) ist. Wir erhalten somit das folgende Iterationsschema:

$$u_{\max}^0 = \text{"guter" Startwert (wird vom Programm abgefragt)}$$

$$u_{\max}^1 = u_{\max}^0 + 10^{-5}$$

$$u_{\max}^{n+1} = u_{\max}^n - \text{KOR} \tag{3.2.25}$$

$$\text{mit } \text{KOR} := \frac{G(u_{\max}^n)}{\text{DIFF}} \quad \text{DIFF} := \frac{G(u_{\max}^n) - G(u_{\max}^{n-1})}{u_{\max}^n - u_{\max}^{n-1}}.$$

Im Programm (siehe Anhang) wird das obige Iterationsschema abgebrochen, falls gilt

$$|\text{KOR}| < C^2 \cdot (u_{\max}^n + 1) \cdot \text{TOL}.$$

C^2 ist ein Sicherheitsfaktor für den Abbruch der Iteration und ist beim Abbruchkriterium des Iterationsschemas (3.2.14) definiert ($C = 10$). TOL ist wieder die eingegebene Fehlertoleranz für die RKD-Routine. Um eine Genauigkeit von ca. 14 Stellen für u_{\max}^* und λ^* zu erhalten, benötigt man bei guten Startwerten (d. h. mindestens eine Ziffer richtig) typischerweise 4 bis 6 Iterationen. Die Variationsgleichung (3.2.24) besitzt ebenfalls eine $1/r$ -Singularität beim Term mit der ersten Ableitung. Um die Lösung numerisch berechnen zu können, ist es wieder zweckmässig, diese in der Nähe des Nullpunktes durch das Taylorpolynom

$$\eta(r) = \eta_0 + \eta_1 x + \eta_2 x^2 + \eta_3 x^3, \quad x := r^2. \quad (3.2.26)$$

zu approximieren. Die Koeffizienten η_k lassen sich aus (3.2.19) berechnen durch die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= 1, & \eta_1 &= \lambda \zeta_1 = U_1, \\ \eta_2 &= \lambda \zeta_2, & \eta_3 &= \lambda \zeta_3. \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Zusammenfassend halten wir fest:

In der Subroutine, in welcher das Differentialgleichungssystem mit den Variationsgleichungen für den Runge-Kutta-Integrator RKD definiert werden muss, programmieren wir in Fortran das folgende System:

$$\begin{aligned} F &= \text{DEXP}(-0.5D0 * \text{ALF} * \text{ALF} * T * T + X(1)) & (3.2.28) \\ DF &= F \\ HI &= (1.D0 - NN) / T \\ DX(1) &= X(2) \\ DX(2) &= HI * X(2) - LAM * F \\ DX(3) &= X(4) \\ DX(4) &= HI * X(4) - LAM * DF * X(3) \\ DX(5) &= X(6) \\ DX(6) &= HI * X(6) - F - LAM * DF * X(5) \end{aligned}$$

Anfangswerte:

$$\begin{array}{lll} X(1) = \text{UM} & X(3) = 1.D0 & X(5) = 0.D0 \\ X(2) = 0.D0, & X(4) = 0.D0, & X(6) = 0.D0. \end{array}$$

Dabei wurde gesetzt:

$$HI := \frac{1-N}{r}, \quad F := e^{\left(-(\theta r)^2/2 + u_1\right)} \quad (\text{Verminderung des Rechenaufwandes}), \quad \text{UM} := u_{\max},$$

$$\text{ALF} := \theta, \quad F := DF \quad (\text{hier unnötige Definition, aber als Vorbereitung für Beispiel (3.3.1) gedacht})$$

und

$$\begin{array}{ll} X(1) := u_1 & DX(1) := u_1' \\ X(2) := u_2 & DX(2) := u_2' \\ X(3) := \eta_1 & DX(3) := \eta_1' \\ X(4) := \eta_2 & DX(4) := \eta_2' \\ X(5) := \zeta_1 & DX(5) := \zeta_1' \\ X(6) := \zeta_2 & DX(6) := \zeta_2'. \end{array}$$

In den Polynomen (3.2.10), (3.2.18) und (3.2.26) sind Terme bis und mit 6. Ordnung der zugehörigen formalen Entwicklungen berücksichtigt. Der Abbruchfehler der abgeleiteten Polynome der oben erwähnten Entwicklungen sind von der Grössenordnung $O(r^7)$. Mit den obigen Anfangswerten berechnen wir die Koeffizienten von (3.2.10), (3.2.18) und (3.2.26) und werten diese Polynome mit der Subroutine HORNER an der Stelle

$$r_z := \text{TOL}^{1/7}$$

aus. Wir setzen $\text{TOL} := 10^{-18}$ (volle Maschinengenauigkeit) und erhalten $r_z = 2.68 \cdot 10^{-3}$. Aus Sicherheitsgründen wurde aber im Programm $r_z := 10^{-4}$ gewählt. Das Programm setzt nachher den an der Stelle r_z berechneten Lösungsvektor als "Anfangswert" in die Subroutine RKD ein. Es wird der oben definierte Wert für den Parameter TOL in der RKD-Routine eingesetzt (siehe Anhang). $[r_z, 1]$ ist das Integrationsintervall. Die korrekte Funktion der oben erwähnten Algorithmen wurden mit Testläufen bei verschiedenen Werten von TOL zusätzlich kontrolliert. Es wurden verschiedene Rechenaufwände beobachtet. Falls wir eine Lösung berechnen, die auf dem stabilen Ast des Bifurkationsdiagramms liegt ($u_{\max} \leq u_{\max}^*$), braucht der RKD-Integrator ca. 200 Schritte. Für die Berechnung von Lösungen auf dem ersten instabilen Ast des Bifurkationsdiagramms ($N = 3$) benötigt der RKD-Integrator ca. 400 bis 500 Integrationsschritte. Für grosse Werte von u_{\max} wird die Berechnung der Lösung schwierig. Der Rechenaufwand nimmt erheblich zu. Der Aufwand zur Berechnung von Punkten des Bifurkationsdiagramms (Newtoniteration (3.2.14)) bzw. der zusätzlichen Bestimmung des kritischen Punktes (Sekanteniteration (3.2.25)) wird im wesentlichen durch den RKD-Integrator bestimmt. Das Differentialgleichungssystem (3.2.28) für die Subroutine DGL sowie die formalen Entwicklungen in der Subroutine ASYMPT (siehe Anhang File: BP1.FOR) sind bezüglich des Aufwandes nicht optimal implementiert. Die Rechnungen wurden mit dem Resultat (3.2.7) (Spezialfall $N = 1$ und $\theta = 0$) verglichen. Zudem konnte man mit dem kritischen Wert $\lambda^* = 2$ der homogenen Gelfand-Gleichung (2.3.5) im Einheitskreis vergleichen (siehe [2]).

Als weitere Variante der inhomogenen Gelfand-Gleichung betrachten wir das Problem ((2.3.1) Fall b) mit dem selbstadjungierter Differentialausdruck $(\sigma(r)u_k)_k$ und mit $\sigma(r)$ aus (3.0.2)):

$$u'' + \left(\frac{N-1}{r} + \theta^2 r \right) u' + \lambda e^{-\frac{(\theta r)^2}{2}} e^u = 0, \quad 0 < r < 1$$

$$u'(0) = u(1) = 0, \quad (u(0) = u_0). \quad (3.2.29)$$

Analog dem vorangehenden Fall fügen wir zur obigen Gleichung (3.2.29) zwei Variationsgleichungen hinzu:

$$\eta'' + \left(\frac{N-1}{r} + \theta^2 r \right) \eta' + \lambda e^{-\frac{(\theta r)^2}{2}} e^u \eta = 0, \quad 0 < r < 1$$

$$\eta'(0) = \eta(1) = 1 \qquad \eta = \frac{\partial u}{\partial u_0}$$

und

$$\zeta'' + \left(\frac{N-1}{r} + \theta^2 r \right) \zeta' + e^{-\frac{(\theta r)^2}{2}} (e^u + \lambda e^u \zeta) = 0, \quad 0 < r < 1$$

$$\zeta'(0) = \zeta(1) = 0 \qquad \zeta = \frac{\partial u}{\partial \lambda}$$

Somit müssen wir in der zugehörigen Subroutine DGL zum RKD-Integrator das folgende System definieren:

$$\begin{aligned} F &= \text{DEXP}(X(1) - 0.5D0 * \text{ALF} * \text{ALF} * T * T) & (3.2.30) \\ DF &= F \\ HI &= (1. D0 - NN) / T - \text{ALF} * \text{ALF} * T \\ DX(1) &= X(2) \\ DX(2) &= HI * X(2) - \text{LAM} * F \\ DX(3) &= X(4) \\ DX(4) &= HI * X(4) - \text{LAM} * DF * X(3) \\ DX(5) &= X(6) \\ DX(6) &= HI * X(6) - F - \text{LAM} * DF * X(5) \end{aligned}$$

Anfangswerte:

X(1) = UM	X(3) = 1. D0	X(5) = 0. D0
X(2) = 0. D0	X(4) = 0. D0	X(6) = 0. D0

(Die Bedeutung der Variablen in der obigen Fortranroutine wurde beim System (3.2.28) erklärt.) Für die Berechnung der Lösung $u(r)$ um den Nullpunkt setzen wir die folgenden formalen Entwicklungen an:

$$\begin{aligned} u(r) &= U_0 + U_1 x + U_2 x^2 + U_3 x^3, \quad \text{mit } x = r^2 \\ u'(r) &= 2r (U_1 + 2U_2 x + 3U_3 x^2) \end{aligned} \qquad (3.2.31)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir analog zum vorangehenden Beispiel (3.2.1) für U_k die Ausdrücke

$$U_0 = u_{\max} \quad (\text{Anfangswert}) \quad (3.2.32)$$

$$U_1 = -\frac{e_0}{2N}, \quad e_0 = \lambda e^{U_0}$$

$$U_2 = (K_1 + K_2 e_0) e_0, \quad K_1 := \frac{\theta^2}{8N}, \quad K_2 := \frac{1}{8N(N+2)}$$

$$U_3 = -\left(R_1 + (R_2 + R_3 e_0) e_0\right) e_0$$

$$\text{mit } R_1 := \frac{\theta^4}{48N}, \quad R_2 := \frac{(3N+10)\theta^2}{48N(N+2)(N+4)}, \quad R_3 := \frac{N+1}{24N^2(N+2)(N+4)}.$$

Die formalen Entwicklungen um den Punkt $r = 0$ für die Lösungen $\eta(r)$ und $\zeta(r)$ der Variationsgleichungen erhalten wir ebenfalls analog zum vorangehenden Fall. Die Koeffizienten für

$$\eta(r) = \eta_0 + \eta_1 x + \eta_2 x^2 + \eta_3 x^3 \quad (x := r^2)$$

$$\text{lauten: } \eta_0 = 1 \quad (3.2.33)$$

$$\eta_1 = -\frac{e_0}{2N} = U_1$$

$$\eta_2 = (K_1 + 2K_2 e_0) e_0$$

$$\eta_3 = -\left(R_1 + (2R_2 + 3R_3 e_0) e_0\right) e_0, \quad \left(e_0 = \lambda e^{U_0}\right)$$

$$\text{und für } \zeta(r) = \zeta_0 + \zeta_1 x + \zeta_2 x^2 + \zeta_3 x^3$$

$$\text{erhalten wir: } \zeta_0 = 0, \quad \zeta_k = \frac{\eta_k}{\lambda}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.2.34)$$

Die Koeffizienten K_1 und K_2 sowie R_1 , R_2 , R_3 sind in (3.2.32) definiert. In Tabelle 4 sind die kritischen Punkte für die Beispiele (3.2.1) und (3.2.29) zusammengestellt.

θ	Beispiel (3.2.1)		Beispiel (3.2.29)	
	u_{\max}^*	λ^*	u_{\max}^*	λ^*
N = 1				
0	1.1868422	0.8784577	1.1868422	0.8784577
0.25	1.1858628	0.8822885	1.1878229	0.8930035
0.5	1.1829795	0.8937142	1.1907258	0.9376127
0.75	1.1783510	0.9125355	1.1954226	1.0151950
1.0	1.1722263	0.9384231	1.2016708	1.1305507
N = 2				
0	1.3862944	2.0000000	1.3862944	2.0000000
0.25	1.3851319	2.0142181	1.3886192	2.0342728
0.5	1.3816829	2.0569269	1.3955121	2.1394820
0.75	1.3760637	2.1282631	1.4066970	2.3227839
1.0	1.3684718	2.2283695	1.4216183	2.5959664
N = 3				
0	1.6074568	3.3219921	1.6074568	3.3219921
0.25	1.6066317	3.3519830	1.6115702	3.3802413
0.5	1.6041525	3.4425042	1.6237791	3.5591477
0.75	1.6000167	3.5951295	1.6436171	3.8711445
1.0	1.5942451	3.8122491	1.6700860	4.3366443
N = 4				
0	1.8610469	4.8146962	1.8610469	4.8146962
0.25	1.8610415	4.8649703	1.8675612	4.9003914
0.5	1.8609626	5.0172296	1.8869029	5.1636422
0.75	1.8606350	5.2756691	1.9183225	5.6228399
1.0	1.8598089	5.6468890	1.9601219	6.3080304

Tabelle 4

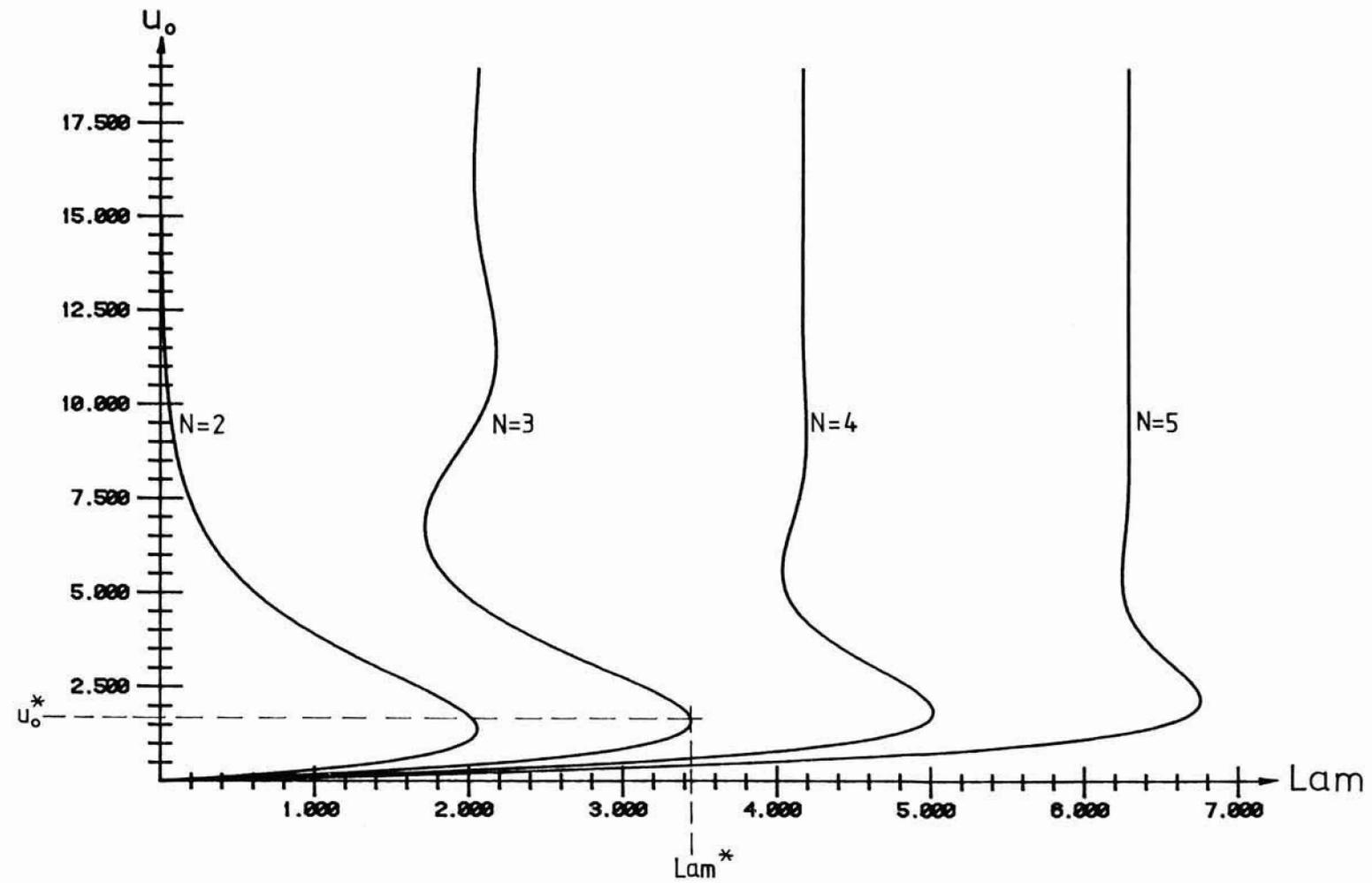
(Kritische Punkte (λ^* , u_{\max}^*) der inhomogenen Gelfand-Gleichungen (3.2.1) und (3.2.29).)

$$u''(r) + (N-1)/r * u'(r) + \text{Lam} * \text{EXP}(-0.5 * a * r * r + u(r)) = 0$$

$$u'(0) = 0, u(1) = 0;$$

$$a = 0.5$$

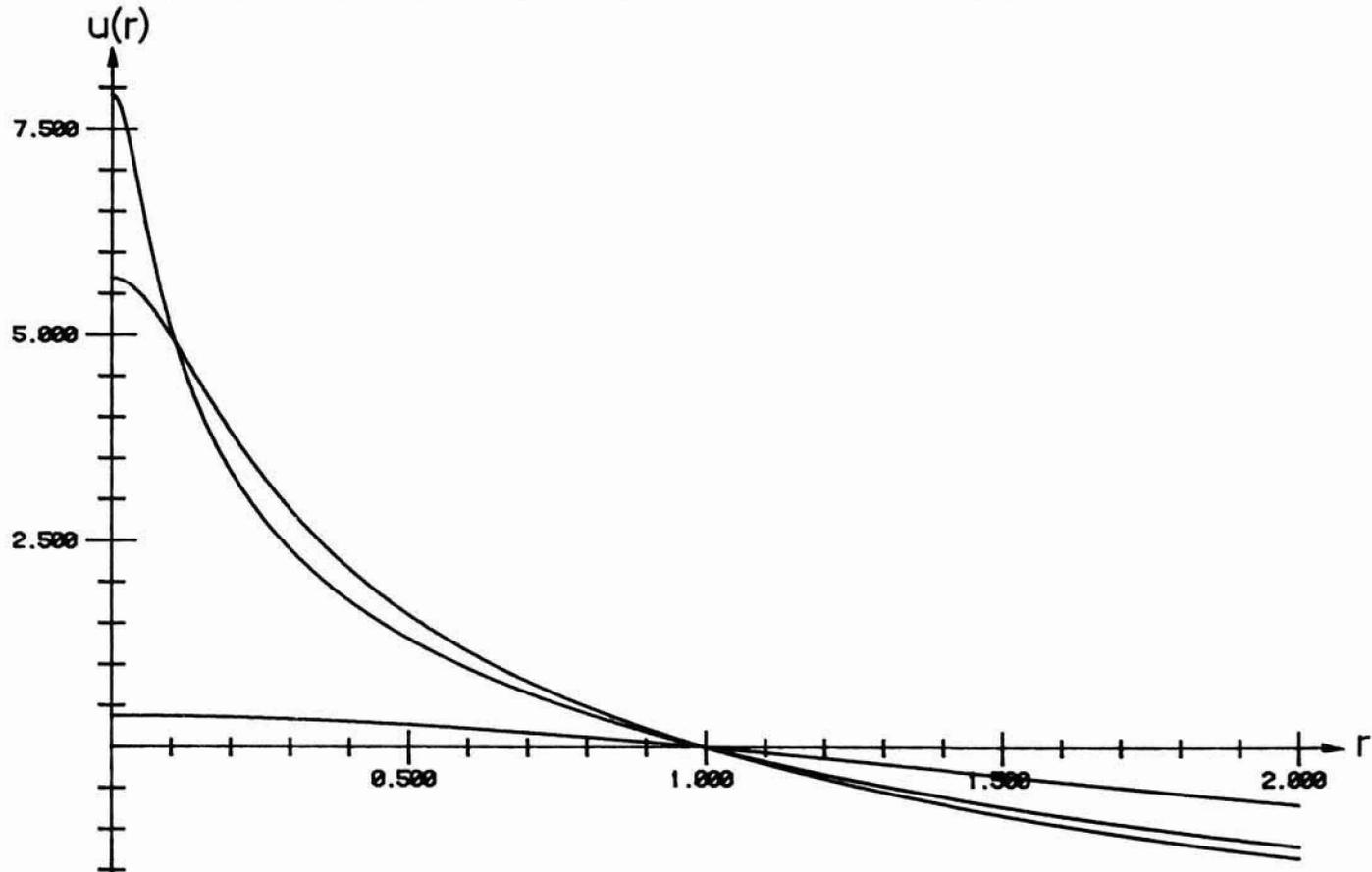
BIFURKATIONS-DIAGRAMM



Grafik 1

$$u''(r) + 2/r * u'(r) + \text{Lam} * \text{EXP}(-0.5 * a * a * r * r + u(r)) = 0$$

$u'(0) = 0, u(1) = 0; \quad a = 0.5, \text{Lam} = 1.8 \quad \text{LOESUNGEN}$



3.2.2 Numerische Werte für untere Schranken μ^*

μ^* Werte zur inhomogenen Gelfand-Gleichung (3.2.1)

Nach den Vorbereitungen in den vorangegangenen Abschnitten sind wir nun in der Lage, untere Schranken μ^* für den kritischen Wert λ^* der inhomogenen Gelfand-Gleichung (3.2.1) und (3.2.29), gemäss den Korollaren 2.3.2 und 2.3.3, numerisch zu berechnen. Die unteren Schranken μ^* sind durch die kritischen Werte eines eindimensionalen elliptischen Randwertproblems der Form (2.3.15) bzw. (2.3.18) bestimmt. Wir können somit zur Berechnung von μ^* das gleiche Verfahren anwenden, wie es im vorangehenden Unterabschnitt (3.2.1) beschrieben wurde. Wir müssen lediglich in der Subroutine DGL für den RKD-Integrator ein modifiziertes Differentialgleichungssystem und ein anderes Integrationsintervall definieren. Als erstes wenden wir Korollar 2.3.2 auf die inhomogene Gelfand-Gleichung (3.2.1) an. Die Voraussetzungen (ii) (Maximumprinzip) für die Inhomogenität $\rho(r)$ (siehe (3.0.1)) sind in (3.1.10) und (3.1.11) überprüft worden. Um den kritischen Wert μ^* des Randwertproblems (2.3.15) in Voraussetzung (i) des Korollars 2.3.2 berechnen zu können, definieren wir in einer Subroutine das folgende System mit den beiden Variationsgleichungen:

$$\begin{aligned}
 F &= \text{DEXP}(X(1)) & (3.2.35) \\
 DF &= F \\
 HI &= -2 * ALF * DTAN(ALF * T) \\
 DX(1) &= X(2) \\
 DX(2) &= HI * X(2) - LAM * F \\
 DX(3) &= X(4) \\
 DX(4) &= HI * X(4) - LAM * DF * X(3) \\
 DX(5) &= X(6) \\
 DX(6) &= HI * X(6) - F - LAM * DF * X(5),
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
 \text{Anfangswerte:} & X(1) = UM & X(3) = 1. D0 & X(5) = 0. D0 \\
 & X(2) = 0. D0 & X(4) = 0. D0 & X(6) = 0. D0,
 \end{array}$$

$$\text{Integrationsintervall: } 0 \leq \vartheta \leq \hat{\vartheta}.$$

Die Arrayvariablen $X(*)$ und $DX(*)$ sind beim System (3.2.28) definiert. Für die weiteren Grössen, welche mit dem Randwertproblem (2.3.15) verknüpft sind, gilt:

$HI := -\frac{2}{\sqrt{\hat{a}}} \tan\left(\frac{\hat{\vartheta}}{\sqrt{\hat{a}}}\right)$, $F := e^{X_1}$, $F=DF$ (nicht nötig, aber einfach modifizierbar bei weiteren Beispielen, siehe Abschnitt 3.3),

Commonblock-Parameter: $LAM := \mu$, $ALF := \frac{1}{\sqrt{\hat{a}}}$, $UM := X_{\max} = X(0)$.

Die Parameter \hat{a} und $\hat{\vartheta}$ bestimmen wir gemäss den Formeln in Voraussetzung (i) von Korollar 2.3.2. Dabei ist zu beachten, dass der Parameter β' ,

$$\beta' = \frac{\hat{\varrho}}{\bar{\kappa}_{\min}}$$

genügend gross sein muss (siehe Beweis von Korollar 2.3.2). Wir setzen deshalb

$$\hat{\beta} := \begin{cases} \beta' & \text{falls } \beta' > \hat{\omega}, \\ \hat{\omega} & \text{falls } \beta' \leq \hat{\omega}. \end{cases}$$

Im Fall $\beta' > \hat{\omega}$ setzen wir die Grössen

$$\hat{\varrho} = \frac{4}{\bar{\kappa}_{\min}} \frac{\hat{z}^2}{1 + \hat{z}^2}, \quad \hat{z}^2 = \frac{\hat{\omega}}{\beta'}$$

in $\hat{a} = \hat{\omega} + \hat{\beta}$ ein. Für den Parameter $\frac{1}{\sqrt{\hat{a}}}$ des Randwertproblems (2.3.15) erhält man die Beziehung:

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{a}}} := \begin{cases} \frac{\bar{\kappa}_{\min}}{2\hat{z}} & \text{falls } \beta' > \hat{\omega}, \\ \frac{1}{\sqrt{2\hat{\omega}}} & \text{falls } \beta' \leq \hat{\omega} \quad (\hat{z} = 1). \end{cases} \quad (3.2.36')$$

Für $\hat{\vartheta}$ gelten entsprechend die folgenden Formeln:

$$\hat{\vartheta} := \begin{cases} \frac{\hat{z}}{\bar{\kappa}_{\min}} \arcsin\left(\frac{2\hat{z}}{1 + \hat{z}^2}\right) & \text{falls } \beta' > \hat{\omega} \\ \frac{\pi}{4} \sqrt{2\hat{\omega}} & \text{falls } \beta' \leq \hat{\omega} \end{cases} \quad (3.2.36'')$$

Der Wert für $1/\sqrt{\hat{a}}$ wird in der Subroutine PARAM (siehe File `PARAM.FOR`) gemäss (3.2.36') berechnet und über die Output-Variable `DGP` dem Hauptprogramm übergeben. Im

Hauptprogramm wird ALF=DGP gesetzt, da Variablen im Subroutinenkopf beim verwendeten Fortrancompiler keine Commonblock-Variablen sein dürfen. Mittels dem Commonblock-Parameter ALF wird die Grösse (3.2.36') der Subroutine DGL übergeben, wo das Problem (2.3.15) als System der Form (3.2.35) implementiert ist. Die Parameter $1/\sqrt{\hat{a}}$ und $\hat{\vartheta}$ könnte man auch direkt (ohne vorherige Bestimmung der Hilfsgrösse \hat{z}) aus den oberen Schranken \hat{w} und \hat{t} berechnen, welche für das Hilfsproblem (3.1.1) in Tabelle 1 aufgelistet sind. Im ersten Spaltenpaar der folgenden Tabelle 5 sind die Ergebnisse für die kritischen Punkte X_{\max}^* und μ^* dargestellt, welche sich aus dem System (3.2.35) mit den oben definierten Parametern (3.2.36'/36'') berechnen lassen. In den hinteren beiden Spalten von Tabelle 5 sind diejenigen kritischen Punkte X_{\max}^* und μ^* aufgelistet, die sich ebenfalls aus System (3.2.35) ergeben. Dabei werden aber die Parameter $1/\sqrt{\hat{a}}$ und $\hat{\vartheta}$ mittels w_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$ aus Tabelle 1 analog zu den Beziehungen (3.2.36'/36'') wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &:= \max \left\{ \bar{\tau}_{\max} / \bar{\kappa}_{\min}, w_{\max} \right\} \quad (\text{Def. von } \bar{\kappa}_{\min} \text{ siehe (2.3.16) bzw. (3.1.9)}) \\ \hat{a} &:= w_{\max} + \hat{\beta} \\ \hat{\vartheta} &:= 0.5 \sqrt{\hat{a}} \arcsin \left(2 \frac{\sqrt{\hat{\beta} w_{\max}}}{\hat{a}} \right). \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

θ	X_{\max}^* (\hat{w}, \hat{t} eingesetzt)	μ^*	X_{\max}^* ($w_{\max}, \bar{\tau}_{\max}$ eingesetzt)	μ^*
N = 2				
0	1.2153839	1.0396787	1.2120200	1.7948076
0.25	1.2148430	1.0473036	1.2115387	1.8081094
0.5	1.2131203	1.0696049	1.2100092	1.8479547
0.75	1.2098847	1.1044780	1.2071487	1.9140552
1.0	1.2044644	1.1469448	1.2023817	2.0055325
N = 3				
0	1.2290509	1.1724911	1.2290509	2.7308913
0.25	"	1.1835494	1.2288679	2.7561216
0.5	"	1.2167340	1.2282747	2.8322456
0.75	"	1.2718729	1.2271275	2.9604436
1.0	"	1.3478945	1.2251412	3.1422520

N = 4

0	1.2290509	1.2748936	1.2290509	3.6411884
0.25	"	1.2882027	"	3.6792161
0.5	"	1.3284649	"	3.7944717
0.75	"	1.3965787	"	3.9903972
1.0	"	1.4936272	"	4.2724654

Tabelle 5

(Anwendung von Korollar 2.3.2 auf Problem (3.2.1))

Rechenaufwand:

Der Aufwand zur Berechnung des kritischen Punktes (X_{\max}^*, μ^*) ist vor allem durch die RKD-Routine bestimmt. Die Newton- bzw. Sekanteniterationen zur Berechnung der unteren Schranken μ^* fallen weniger ins Gewicht. Experimentell wurde folgender Aufwand ermittelt:

$$\text{Anz. Auswertungen der rechten Seite von (3.2.35)} \approx c \cdot \text{TOL}^{-p} \quad (3.2.38)$$

mit: $c = 182$,

$p = \frac{1}{8}$ (Runge-Kutta 8. Ordnung),

TOL = Parameter für die Fehlertoleranz in RKD-Routine.

c ist eine Konstante, welche von weiteren Grössen abhängt, wie z.B. Nichtlinearität $f(X) = e^X$ und Anfangsbedingungen. Bei der Bestimmung der obigen Aufwandformel (3.2.38) wurde mit folgenden Startwerten experimentiert:

$X(0) = X_{\max} = 1.0$ (muss ein gut gewählter Startwert sein),

$\mu = 1.0$ (muss nur in der Grössenordnung richtig gewählt werden).

Falls z.B. $\text{TOL} = 10^{-10}$ gewählt wird, erhält man mit der obigen Formel (3.2.38) ca. 3236 Auswertungen der rechten Seite von (3.2.35), um den kritischen Punkt (X_{\max}^*, μ^*) mit ca. 7-stelliger Genauigkeit zu erhalten. Man beachte, dass das System (3.2.35) keine Singularitäten besitzt. Deshalb sind für die Integration weniger Schritte notwendig, als für die Berechnung des exakten kritischen Wertes λ^* für eine (Hyper-) Kugel gemäss (3.2.28) (1/r-Singularität).

μ^* Werte zur Gelfand-Gleichung (3.2.29)

Als nächstes Beispiel betrachten wir die inhomogene Gelfand-Gleichung (3.2.29) mit einem selbstadjungierten Differentialoperator. Die Berechnung der kritischen Punkte (X_{\max}^* , μ^*) verläuft ähnlich wie im vorangehenden Fall. Es sind die Bedingungen in der Bemerkung zu Korollar 2.3.2 zu prüfen. Die Voraussetzungen für das Maximumprinzip sind aufgrund der Beziehungen (3.1.13/14) für $0 \leq \theta \leq 1$ erfüllt. In der zweiten Doppelspalte von Tabelle 6 sind wieder diejenigen Wertepaare aufgelistet, die sich ergeben, falls wir die richtigen Werte für die Parameter w_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$ aus dem Hilfsproblem (3.1.12) (siehe Tabelle 2) im Randwertproblem (2.3.15) bzw. im zugehörigen System (3.2.35) einsetzen.

θ	X_{\max}^* (\hat{w} , $\hat{\tau}$ eingesetzt)	μ^*	X_{\max}^* (w_{\max} , $\bar{\tau}_{\max}$ eingesetzt)	μ^*
N = 2				
0	1.2153839	1.0396787	1.2120200	1.7948076
0.25	1.2164546	1.0569734	1.2129736	1.8244596
0.5	1.2197237	1.1105970	1.2158887	1.9155350
0.75	1.2253495	1.2059936	1.2209176	2.0744476
1.0	1.2290509	1.3478945	1.2282712	2.3120092
N = 3				
0	1.2290509	1.1724911	1.2290509	2.7308913
0.25	"	1.1906195	"	2.7737837
0.5	"	1.2465138	"	2.9051270
0.75	"	1.3448199	"	3.1329007
1.0	"	1.4936272	"	3.4702721
N = 4				
0	1.2290509	1.2748936	1.2290509	3.6411884
0.25	"	1.2941773	"	3.6983783
0.5	"	1.3534987	"	3.8735026
0.75	"	1.4573464	"	4.1772010
1.0	"	1.6134180	"	4.6270294

Tabelle 6

(Anwendung von Korollar 2.3.2 mit Bem. auf den selbstadjungierten Fall (3.2.29))

Einfluss von $g(w)$ im Ansatz der P-Funktion

Um den Unterschied zwischen

$$g(w) := 1$$

und

$$g(w) := \frac{1}{(w + \beta)^2}, \quad \beta := \max \left\{ w_{\max}, \frac{\bar{\tau}_{\max}}{\bar{\kappa}_{\min}} \right\}$$

im Ansatz

$$P = g(w) |\bar{\nabla} w|^2 + 2 \int_0^w 2g(y) dy, \quad w \text{ Lösung von (3.1.1)} \quad (3.2.39)$$

zu illustrieren, berechnen wir gemäss Korollar 2.3.2 die kritischen Werte X_{\max}^* und μ^* für den Grenzfall $\beta \rightarrow \infty$, d. h. wir setzen im System (3.2.35) die Parameterwerte:

$$\frac{1}{\sqrt{\hat{a}}} = ALF = 0,$$

$$\hat{\vartheta} = R_g = \int_0^1 \sqrt{\rho(s)} ds = \int_0^1 e^{-(\theta s/2)^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{\theta} \operatorname{erf}(\theta/2).$$

Es ergeben sich die in Tabelle 7 zusammengefassten unteren Schranken μ^* , die für das Problem (3.2.1) sowie auch für das Problem (3.2.29) (selbstadjungierter Fall) gelten.

θ	X_{\max}^*	μ^*
0	1.1868422	0.8784577
0.25	"	0.8876369
0.5	"	0.9155167
0.75	"	0.9631179
1.0	"	1.0321188

Tabelle 7

(Korollar 2.3.2, Grenzfall $\beta \rightarrow \infty$, Dimension $N > 1$)

Für den Spezialfall $N = 2$ können wir mit Hilfe von Korollar 2.3.3 etwas verbesserte untere Schranken μ^* berechnen. Um den Verbesserungseinfluss von Korollar 2.3.3 gegenüber Korollar 2.3.2 abgrenzen zu können, listen wir in Tabelle 8 die Wertepaare (X_{\max}^*, μ^*) für die beiden Beispiele (3.2.1) und (3.2.29) auf. Die Voraussetzungen (ii) in Korollar (2.3.3) (für das Maximumprinzip) wurden in Abschnitt 3.1 überprüft (Beziehungen (3.1.15) und (3.1.16/16')). Die Rechnungen wurden mit Hilfe des Programmpaketes vorgenommen, das schon die Berechnung von Tabelle 5 und 6 ermöglichte. In einer Subroutine ist die Differentialgleichung (2.3.18) mit den zugehörigen Variationsgleichungen zu definieren, und im File PARA2.FOR sind die Formeln gemäss Voraussetzung (i) von Korollar 2.3.3 zu programmieren. Wir geben hier die Resultate wieder.

θ	X_{\max}^* (Beispiel (3.2.1))	μ^*	X_{\max}^* (Beispiel (3.2.29))	μ^*
N = 2				
0	1.2280714	1.1022900	1.2280714	1.1022900
0.25	1.2269646	1.1077061	1.2303132	1.1261726
0.5	1.2235505	1.1230956	1.2376010	1.2030539
0.75	1.2175664	1.1457555	1.2518891	1.3514614
1.0	1.2086531	1.1709076	1.2774309	1.6136826

Tabelle 8
(Anwendung von Korollar 2.3.3, $N = 2$)

Bemerkungen zu den numerischen Ergebnissen:

Um einen Einblick zu erhalten, wie stark die unteren Schranken μ^* gemäss Korollar 2.3.2 und 2.3.3 gegenüber den genauen Werten λ^* für verschiedene Gebiete Ω abweichen können, wurden die Werte für einen ungünstigen Fall berechnet, d. h. Ω eine (Hyper-) Kugel. Falls Ω ein Streifen mit Breite 2δ ist, und die Probleme homogen sind, d. h. $\rho = 1$ in (3.2.1) bzw. $\sigma = 1$ in (3.2.29), so erhalten wir scharfe Werte für μ^* gemäss den oben erwähnten Korollaren. μ^* ist im wesentlichen durch ein eindimensionales semilineares Randwertproblem mit der Gelfand- Nichtlinearität $f(u) = e^u$ bestimmt. Es ist klar, dass die Werte μ^* für den höher dimensional Fall $N > 2$ "schlechte" untere Schranken sein müssen. Die Verbesserungen für

μ^* , welche wir durch die Hilfsfunktionen

$$g(u) = \frac{1}{(u + \beta)^2} \quad N > 1, \quad \text{bzw.}$$

$$g(u) = e^{-\beta u} \quad N = 2$$

im Ansatz (3.2.39) für eine P-Funktion erhalten, liegen zwischen 5 und 10 Prozent. Dies ist unter den Erwartungen. Der Verbesserungseinfluss der oberen Schranken für w_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$ aufgrund der Korollare 1.6.1 und 1.6.2 ist wesentlich grösser. Diese Schranken werden in den eindimensionalen Randwertproblemen (2.3.15) bzw. (2.3.18) weiter verwendet, um die unteren Schranken μ^* zu berechnen. Sind wir in der Lage, exakte Werte oder mindestens sehr gute obere Schranken für die Parameter w_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$ in (2.3.15) bzw. (2.3.18) einzusetzen, so verbessern sich die berechneten unteren Schranken μ^* selbst für eine (Hyper-) Kugel erheblich. Ich verweise in diesem Zusammenhang auch auf die Bemerkungen 5 und 6 von Satz 2.2.2. Für den ebenen Fall $N = 2$ gibt Korollar 2.3.1 nur für homogene Probleme scharfe untere Schranken, falls Ω ein Streifen oder ein Kreis ist. Ein ähnliches Resultat für den Fall $N = 3$ wäre Gegenstand weiterer Untersuchungen. Den Verbesserungseinfluss, welchen wir mit Korollar 2.3.3 ($N = 2$) gegenüber Korollar 2.3.2 ($N > 1$) erreichen, ist gering (höchstens ca. 3 Prozent). Wir können somit Satz 2.2.2 quasi als Erweiterung von Satz 2.2.3 (siehe auch [29]) auf den allgemein dimensional Fall $N > 1$ betrachten (Korollar 2.3.2 ist eine Folgerung von Satz 2.2.2.).

3.3 Numerische Resultate zur inhomogenen Reaktionsgleichung p-ter Ordnung

Als letztes Beispiel betrachten wir eine inhomogene Reaktionsgleichung p-ter Ordnung der Form (2.3.19, Fall a) in einer Kugel $\Omega \subset E^N$ mit Radius 1. Wir wählen dieselbe Inhomogenität $\rho(r)$, wie sie im vorangehenden Abschnitt für die Gelfand-Gleichung (siehe (3.2.1)) definiert ist. Zur Berechnung der Lösung setzen wir folgende Differentialgleichung an (radial-symmetrisches Problem):

$$u'' + \frac{N-1}{r}u' = \Phi^2 \rho(r) u^p, \quad p \neq 1 \tag{3.3.1}$$

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = 1, \quad \rho(r) := e^{-\frac{\theta r^2}{2}}, \quad \theta \text{ ein Parameter.}$$

Φ ist der Thielemodul (siehe Abschnitt 2.3.2). Für eine (nicht negative) Lösung folgt aus dem Maximumprinzip, dass $0 \leq u_{\min} \leq u(r) \leq 1$ ist für $0 \leq r \leq 1$. Weiter gilt $u(r) = u(-r)$. Das Minimum der Lösung wird somit im Punkt $r = 0$ angenommen ($u(0) = u_{\min}$). Die Berechnung des Bifurkationsdiagramms $\Phi = \Phi(u_{\min})$ erfolgt nach der Methode, welche in Unterabschnitt 3.2.1 anhand der Gelfand-Gleichung erläutert wurde. Das obige Randwertproblem (3.3.1) besitzt in $r = 0$ eine $1/r$ - Singularität. (Im Fall $p = 1$ ist (3.3.1) eine lineare Differentialgleichung vom Fuchsschen Typ.) Falls $-1 \leq p < 0$ ist, so enthält das Bifurkationsdiagramm weitere kritische Punkte, die aber nicht im Zentrum des Interesses liegen. Es genügt somit, das folgende System mit nur einer Variationsgleichung zu integrieren (wir können hier $u''(0) = \Phi^2 \rho(0) u^p(0)$ setzen, falls $r \rightarrow 0$ geht):

```

IF (T.EQ.0) THEN
    F=LAM*(X(1)**PP)
    DF=PP*F/X(1)
    DX(1)=X(2)
    DX(2)=LAM*F/NN
    DX(5)=X(6)
    DX(6)=(2.D0*F+LAM*DF*X(5))/NN
ELSE
    F=LAM*DEXP(-0.5D0*ALF*ALF*T*T)*X(1)**PP
    DF=PP*F/X(1)
    HI=(1.D0-NN)/T
    DX(1)=X(2)
    DX(2)=HI*X(2)+LAM*F
    DX(5)=X(6)

```


charakterisiert. u^* ist die Lösung mit einem Dead-Core, das nur aus einem Punkt besteht. Man spricht auch von einer Einpunkt-Dead-Core-Lösung. Zur Bestimmung von u^* müssen wir homogene Anfangsbedingungen

$$u^*(0) = 0,$$

$$u'^*(0) = 0$$

wählen.

Der kritische Wert Φ^* des Thielemoduls lässt sich wie folgt bestimmen:

Mit der Transformation

$$y(r) := \frac{u^*(r)}{\Phi^\gamma}, \quad \gamma := \frac{2}{1-p} \quad (3.3.6)$$

geht das Problem (3.3.1) über in

$$y'' + \frac{N-1}{r} y' = \rho(r) y^p \quad (3.3.7)$$

mit homogenen Anfangsbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$. Wir bestimmen die Lösung y an der Stelle $r = 1$, d.h. $y(1)$. Aus der zweiten Randbedingung $u^*(1) = 1$ folgt

$$\Phi^* = \frac{1}{y(1)^{1/\gamma}} \quad (\text{Def. von } \gamma \text{ siehe (3.3.6)}). \quad (3.3.8)$$

Falls der Parameter p im Problem (3.3.7) negativ gewählt ist, wird die Differentialgleichung zur Bestimmung der kritischen Lösung singular, falls $u^*(r) \rightarrow 0$ geht für $r \rightarrow 0$. Wir machen deshalb eine formale Entwicklung für die Lösung und wählen den Ansatz

$$y(r) = \bar{y}_0 r^\gamma + \bar{y}_2 r^{\gamma+2} + O(r^{\gamma+4}). \quad (3.3.9)$$

Einsetzen in (3.3.7) ergibt

$$y'' + \frac{N-1}{r} y' = \gamma(N-2+\gamma) \bar{y}_0 r^{\gamma-2} + (\gamma+2)(N+\gamma) \bar{y}_2 r^\gamma + O(r^{\gamma+2}) \quad (3.3.10)$$

und für die rechte Seite von (3.3.7) erhalten wir

$$\rho(r) y^p = \bar{y}_0^p r^{p\gamma} \left(1 + \left(\frac{p\bar{y}_2}{\bar{y}_0} - \frac{\theta^2}{2} \right) r^2 + O(r^4) \right). \quad (3.3.11)$$

Zur Entwicklung von y^p kann Formel (7) aus [30] benützt werden. Aus (3.3.6) folgt

$$\gamma - 2 = p \gamma. \quad (3.3.12)$$

Somit stimmen die Exponenten der niedrigsten Potenz in (3.3.10) und (3.3.11) überein. Koeffizientenvergleich ergibt nun:

$$\bar{y}_0 = (\gamma(N - 2 + \gamma))^{-\frac{1}{p-1}}, \quad (3.3.13)$$

$$\bar{y}_2 = -\frac{\theta^2 \gamma(N - 2 + \gamma)}{4(3\gamma + 2N - 2)} \bar{y}_0. \quad (3.3.14)$$

Obige asymptotische Entwicklung wurde in der Subroutine ASYMPY implementiert (siehe Files BP2.FOR im Anhang). Der Abbruchfehler des Ansatzes (3.3.9) für $y'(r)$ liegt in der Grössenordnung $O(r^{\gamma+3})$. Die approximative Berechnung der kritischen Lösung $y(r)$ erfolgt in zwei Schritten. Wir wählen einen Zwischenpunkt

$$r_z := \text{TOL}^{\frac{1}{\gamma+3}}, \quad (\text{TOL ist der Toleranzparameter für die RKD-Routine, siehe Anhang})$$

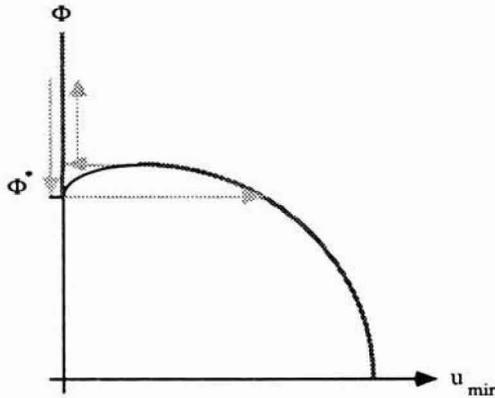
und bestimmen mittels des Ansatzes (3.3.9) die Lösung des Problems (3.3.7) an der Stelle r_z . Aus Gründen der Sicherheit wurde in den numerischen Berechnungen $r_z := 10^{-5}$ gewählt. Im zweiten Schritt integrieren wir die Gleichung (3.3.7) mit der RKD-Fortranroutine in $r_z \leq r \leq 1$. Als Anfangswerte sind die Grössen $y(r_z)$ und $y'(r_z)$ in die Fortranroutine einzusetzen. Der kritische Wert Φ^* berechnet sich dann durch die Beziehung (3.3.8). Einige Werte für Φ^* sind in den ersten Spalten von Tabelle 9 und 10 aufgelistet. Es wurde nicht bewiesen, dass die formale Entwicklung (3.3.9) gegen die kritische Lösung y konvergiert. Setzen wir jedoch $\theta = 0$ in der Inhomogenität $\rho(r)$ (siehe (3.3.1)), so erhalten wir mit dem Ansatz (3.3.9) die richtige Formel für die Lösung

$$y(r) = \bar{y}_0 r^\gamma \quad \text{mit} \quad \bar{y}_0 = [\gamma(N - 2 + \gamma)]^{-\frac{1}{p-1}}, \quad \gamma = \frac{2}{1-p}. \quad (3.3.15)$$

(Formale Entwicklungen sind meistens asymptotisch, falls alle Koeffizienten formal bestimmt werden können.) In der Grafik 3 sind für einige charakteristische Parameterwerte die Bifurkationsdiagramme für eine (Hyper-) Kugel mit Radius $R = 1$ gezeichnet (setze $\theta := 0.5$ sowie $p := -2, 0$ und 0.5 im Problem (3.3.1)). Grafik 4 illustriert eine Lösung mit einem Dead-Core für $p = 0.5$. Falls der Wert von p im Intervall $-1 < p < 0$ liegt, gibt es mehrere positive Lösungen. In Grafik 5 sind für den Thielemodul $\Phi = 1.09$ die beiden positiven Lösungen und die Dead-Core-Lösung aufgezeichnet. Letztere ist in einem Punkt nicht differenzierbar. Wir wollen damit ein Resultat aus [17] und [18] numerisch bestätigen, wonach

3 Lösungen für unsere Problemklasse (3.3.1) nicht geordnet sein können. Allerdings wurde dies in [18] nur für klassische Lösungen und für homogene Probleme mit konvexer Nichtlinearität bewiesen. Man vergleiche mit der entsprechenden Bemerkung bei der Gelfand-Gleichung in Unterabschnitt 3.2.

Wir wollen noch eine Bemerkung zur Stabilitätsfrage anfügen. Es sind vermutlich diejenigen Lösungen die "stabilen", welche in Figur 1 jenen Punkten auf dem Graphen und der Ordinate nachse entsprechen, die mit einer punktierten Linie markiert sind. Man erhält ein Diagramm mit einer Hysteresis.



Figur 1

(Schematisches Bifurkationsdiagramm für Problem (3.3.1) mit $-1 < p < 0$)

Untere Schranken für den kritischen Wert Φ^*

Die unteren Schranken μ^* in den Tabellen 9 und 10 wurden aufgrund von Korollar 2.3.5 bestimmt. Die Voraussetzungen (i) in diesem Korollar für das Maximumprinzip sind für die gewählte Inhomogenität $\rho(r)$ (siehe 3.0.1) im vorangehenden Unterabschnitt 3.2.2 im Zusammenhang mit der Gelfand-Gleichung verifiziert worden. Zur Bestimmung von μ^* müssen wir die kritische Lösung X^* des folgenden eindimensionalen Randwertproblems berechnen (siehe 2.3.37):

$$\begin{aligned} X_1' &= X_2 \\ X_2' &= -2/\sqrt{\hat{a}} \tan\left(\vartheta/\sqrt{\hat{a}}\right) X_2 + \mu^2 X_1^p \end{aligned} \quad \left(' = \frac{d}{d\vartheta} \right), \quad (3.3.16)$$

Anfangsbedingungen: $X_1(0) = X_2(0) = 0$, Randbedingung: $X_1(\hat{\vartheta}) = 1$.

Die Parameter $\hat{\alpha}$ und $\hat{\vartheta}$ sind gemäss der Voraussetzung (ii) von Korollar 2.3.5 bestimmt, d.h. es werden die Formeln (3.2.36') und (3.2.36'') benützt. Das System (3.3.16) wird bei der Bestimmung der kritischen Lösung X^* in $\vartheta = 0$ singular, falls $p < 0$. Deshalb wählen wir in einer Umgebung des Nullpunktes $\vartheta = 0$ für die kritische Lösung den (formalen) Ansatz

$$X(\vartheta) = \bar{X}_0 \vartheta^\gamma + \bar{X}_2 \vartheta^{\gamma+2} + O(\vartheta^{\gamma+4}). \quad (3.3.17)$$

Die Koeffizienten lassen sich durch Koeffizientenvergleich bestimmen analog dem Vorgehen bei der Entwicklung von $y(r)$ (vergleiche mit Beziehungen (3.3.10) bis (3.3.14)). Es wird in (3.3.16) $\mu := 1$ gesetzt (vergleiche mit Transformation (3.3.6)). Die Rechnung ergibt

$$\bar{X}_0 = [\gamma(\gamma-1)]^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{2}{1-p}, \quad (3.3.18)$$

$$\bar{X}_2 = -\frac{1}{3\hat{\alpha}} \bar{X}_0. \quad (3.3.19)$$

Wir berechnen die Lösung in zwei Schritten. Zuerst wählen wir einen Zwischenpunkt

$$\vartheta_z := \text{TOL}^{\frac{1}{\gamma+3}} \quad (\text{TOL siehe Beschreibung RKD-Routine im Anhang})$$

und approximieren $X(\vartheta_z)$ und $X'(\vartheta_z)$ an der Stelle ϑ_z durch

$$X(\vartheta_z) = \vartheta_z^\gamma \left(\bar{X}_0 + \bar{X}_2 \vartheta_z^2 \right) \quad \text{und} \quad (3.3.20)$$

$$X'(\vartheta_z) = \vartheta_z^{\gamma-1} \left(\gamma \bar{X}_0 + (\gamma+2) \bar{X}_2 \vartheta_z^2 \right).$$

Wir setzen die obige Lösung an der Stelle ϑ_z als Anfangswert in die RKD-Routine ein und berechnen die Lösung an der Stelle $\hat{\vartheta}$. Die untere Schranke μ^* erhalten wir anschliessend aus der Beziehung

$$\mu^* = \frac{1}{X(\hat{\vartheta})^{1/\gamma}} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{2}{1-p}. \quad (3.3.21)$$

Die mittleren Spalten der Tabellen 9 und 10 enthalten einige Werte für μ^* .

Setzen wir im obigen Randwertproblem (3.3.16) für die Parameter $\hat{\alpha}$ und $\hat{\vartheta}$ die Definitionen (3.2.37)

ein, dann erhält man wesentlich verbesserte untere Schranken. Sie sind in den letzten Spalten der Tabellen 9 und 10 dargestellt. Man beachte, dass im Fall $p = 0$ die Funktion

$$X = X \left\{ 0.5 \sqrt{a} \arcsin \left(s(w(x)) / \sqrt{a} \right) \right\} \quad \text{mit } s = s(w(x)) = 2 \sqrt{\frac{(w(x) + \beta)(w_{\max} - w(x))}{a}},$$

eine Lösung des Problems (3.3.1) ist. $w(x)$ ist die Lösung des Hilfsproblems (3.1.1). Aus Proposition 2.2.1 folgt für $X = \{s(w(x))\}$

$$\Delta X = \mu^2 \rho X^p \quad \text{in } \Omega = \text{Kugel mit Radius } 1$$

$$X = 1 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

Die berechneten Werte für μ^* in der dritten Spalte von Tabelle 10 müssen somit mit den richtigen Werten Φ^* zusammenfallen (Kontrollwerte). Im Fall $N = 2$ kann man ein weiteres Korollar angeben, welches dem Korollar 2.3.3 für die Gelfand-Gleichung entsprechen würde. Daraus ergeben sich etwas verbesserte untere Schranken μ^* . Die numerischen Experimente zeigten aber nur eine 1- bis 2- prozentige Verbesserung (siehe Bemerkungen zu den Ergebnissen bei der Gelfand-Gleichung).

θ	Φ^* (exakte Werte)	μ^* (\hat{w} , $\hat{\tau}$ einges.)	μ^* (w_{\max} , $\bar{\tau}_{\max}$ einges.)
N = 2			
0	1.3333333	0.7413965	0.9719214
0.25	1.3379560	0.7438447	0.9751952
0.5	1.3517406	0.7508582	0.9848397
0.75	1.3744362	0.7613085	1.0002704
1.0	1.4056242	0.7727888	1.0202985
N = 3			
0	1.7638342	0.7939335	1.2116623
0.25	1.7718678	0.7976687	1.2171201
0.5	1.7959104	0.8087740	1.2333971
0.75	1.8357768	0.8268967	1.2601703
1.0	1.8911261	0.8512504	1.2967806

N = 4

0	2.1081851	0.8278780	1.3991071
0.25	2.1191643	0.8321880	1.4063940
0.5	2.1520872	0.8450928	1.4282526
0.75	2.2068900	0.8664871	1.4646621
1.0	2.2834027	0.8960876	1.5155443

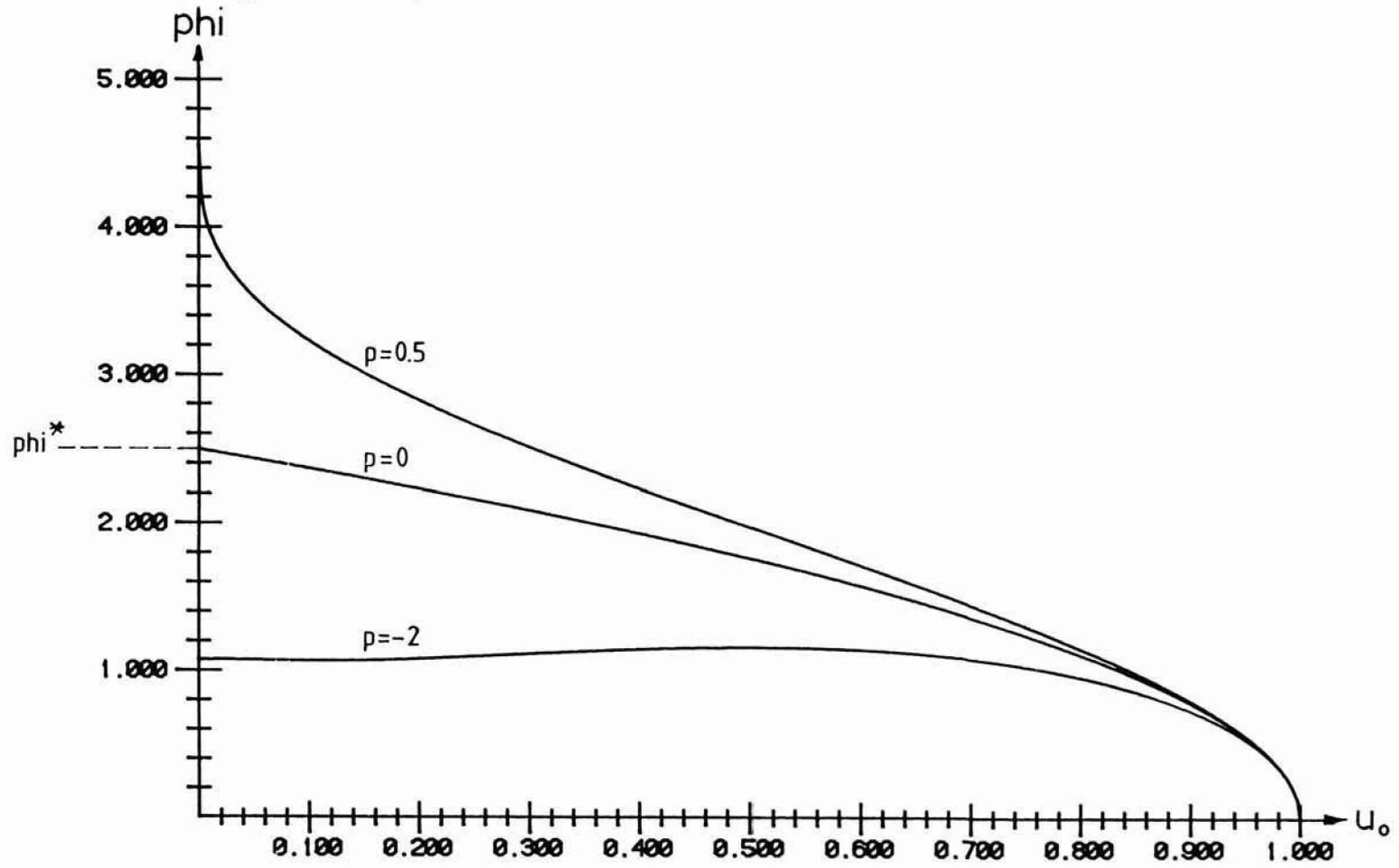
Tabelle 9(Anwendung von Korollar 2.3.5 auf Problem (3.3.1) mit $p = -0.5$)

θ	Φ^* (exakte Werte)	μ^* (\hat{w} , $\hat{\tau}$ einges.)	μ^* (w_{\max} , $\bar{\tau}_{\max}$ einges.)
N = 2			
0	2.0	1.5200465	2.0
0.25	2.0078040	1.5259568	2.0078040
0.5	2.0311131	1.5432343	2.0311131
0.75	2.0696125	1.5703257	2.0696125
1.0	2.1227593	1.6038913	2.1227593
N = 3			
0	2.4494897	1.6050117	2.4494897
0.25	2.4609670	1.6125627	2.4609670
0.5	2.4953393	1.6350131	2.4953393
0.75	2.5524108	1.6716497	2.5524108
1.0	2.6318012	1.7208831	2.6318012
N = 4			
0	2.8284271	1.6736336	2.8284271
0.25	2.8431584	1.6823468	2.8431584
0.5	2.8873476	1.7084350	2.8873476
0.75	2.9609528	1.7516855	2.9609528
1.0	3.0638161	1.8115258	3.0638161

Tabelle 10(gleiche Tabelle wie 9, jedoch Problem (3.3.1) mit $p = 0$)

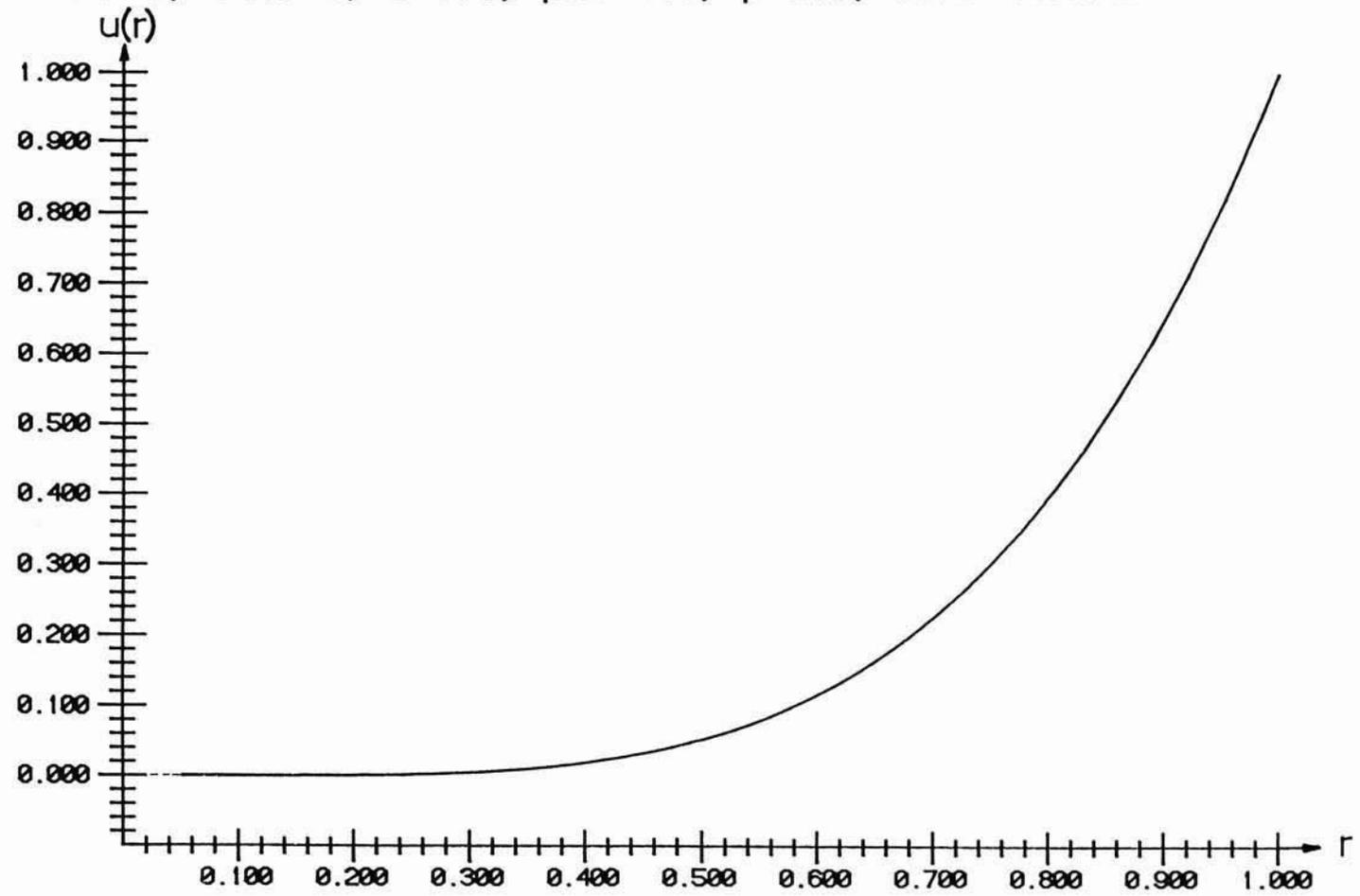
$$u''(r) + 2/r * u'(r) - \text{phi}^2 * \text{EXP}(-0.5 * a * r * r) * u(r) = 0$$

$$u'(0) = 0, u(1) = 1; \quad a = 0.5 \quad \text{BIFURKATIONS DIAGRAM}$$



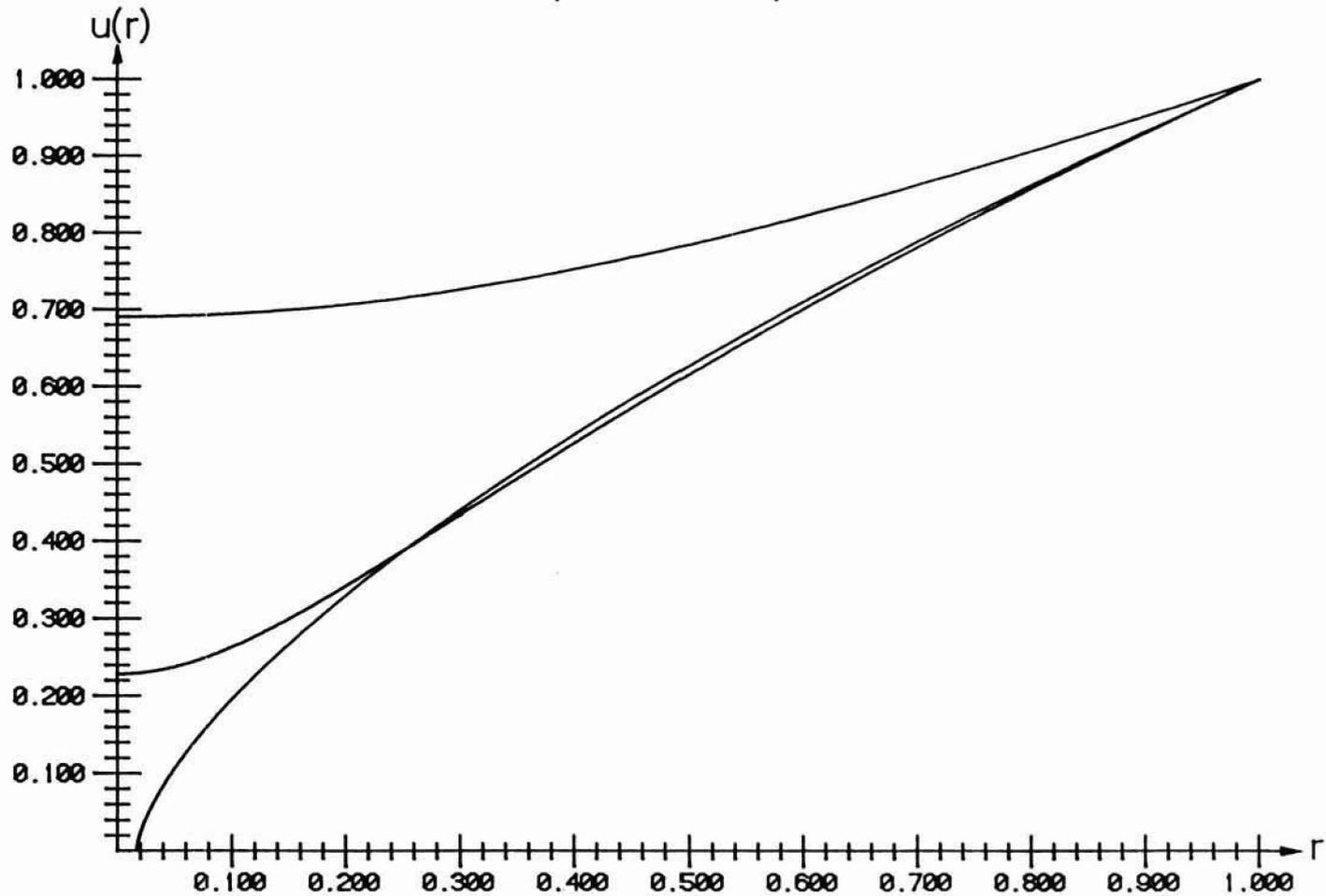
Grafik 3

$u''(r) + 2/r * u'(r) - \phi^2 * \exp(-0.5 * a * a * r * r) * u(r) = 0$
 $u'(0) = 0, u(1) = 1; a = 0.5, \phi = 4.8, p = 0.5, \text{DEAD-CORE-LOESUNG}$



Grafik 4

$u''(r) + 2/r * u'(r) - \text{phi} ** 2 * \text{EXP}(-0.5 * a * a * r * r) * u(r) ** p = 0$
 $u'(0) = 0, u(1) = 1; \alpha = 0.5, \text{phi} = 1.09, p = -2$ LOESUNGEN



Grafik 5

Anhang

Zusammenstellung der benutzten Begriffe und Formeln aus der Differentialgeometrie (siehe [5])

N-dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit M^N :

Eine (allgemeine) N-dimensionale C^k -Mannigfaltigkeit M^N ist ein zusammenhängender topologischer Hausdorff-Raum (2.Trennungsaxiom), auf welchem eine Äquivalenzklasse von Atlanten der Klasse C^k existiert. Jeder Punkt der Mannigfaltigkeit ist lokal euklidisch, d.h. es existiert eine Koordinatenumgebung (Karte genannt) mit den lokalen Koordinaten

$$u^1, u^2, \dots, u^N.$$

Die Koordinatentransformationen zwischen zwei überlappenden Karten sind C^k -Funktionen.

Sonderfall: Fläche $\partial\Omega$, welche im euklidischen Raum E^3 eingebettet ist.

Parameterdarstellung von $\partial\Omega$:

$$u^1, u^2 \rightarrow \mathbf{x}(u^1, u^2) \quad (\text{A.1})$$

$\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ kartesische Koordinaten in E^3 ,

u^1, u^2 lokale Koordinaten von $\partial\Omega$; auch Gaussche Koordinaten genannt.

Riemannsche Mannigfaltigkeit R^N (Riemannscher Raum):

Eine C^k -Mannigfaltigkeit R^N heisst eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, falls in jedem Punkt $p \in R^N$ ein positiv definiten symmetrischer Tensor mit den kovarianten Komponenten g_{ik} definiert ist. g_{ik} wird als der metrische Tensor der Riemannschen Mannigfaltigkeit R^N bezeichnet.

Der kontravariante (inverse) metrische Tensor ist über die Relation

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k \quad (\text{A.2})$$

definiert. Das Kronecker-Symbol δ_i^k ist definiert durch

$$\delta_i^k := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq k \\ 1 & \text{falls } i = k \end{cases} \quad i, k = 1, \dots, N. \quad (\text{A.3})$$

Es gilt $\delta_{ik} = \delta^{ik} = \delta_i^k$.

Beispiel: Metrik einer Fläche $\partial\Omega$ in E^3 , die durch eine Abbildung der Form (A.1) gegeben ist.

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{ik} x^i_{,\alpha} x^k_{,\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (\text{A.4})$$

Linielement (1. Grundform):

$$ds^2 = g_{ik} du^i du^k \quad (\text{A.5})$$

Volumenelement:

$$dO = \sqrt{g} du^1 \dots du^N, \quad g = \det(g_{ik}) \quad (\text{A.6})$$

Skalarprodukt:

$$(v, w) = g_{ik} v^i w^k \quad (\text{A.7})$$

(v^i, w^k kontravariante Komponenten von zwei Vektoren v, w)

Länge eines Vektors:

$$\|v\| = \sqrt{g_{ik} v^i v^k} \quad (\text{A.8})$$

Konformität einer Abbildung: (Winkeltreue)

Sei $F: \partial\Omega \rightarrow \partial\Omega^*$ eine eindeutige Abbildung eines Flächenstücks $\partial\Omega$ in E^3 (mit Koordinaten u^1, u^2) auf ein Flächenstück $\partial\Omega^*$ in E^3 (mit Koordinaten u^{1*}, u^{2*}). $u^\alpha, u^{\alpha*}$ seien so gewählt, dass die Abbildung F gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} u^{1*} &= u^1 \\ u^{2*} &= u^2 \end{aligned}$$

(gleiche Gaussche Koordinatensysteme für $\partial\Omega$ und $\partial\Omega^*$)

Die Abbildung F ist genau dann konform (Winkeltreue einander sich schneidender Kurvenstücke auf $\partial\Omega$ bzw. auf $\partial\Omega^*$) falls gilt:

$$\text{Es existiert ein } \eta > 0, \text{ so dass gilt: } g_{ik}^* = \eta(u^1, u^2) g_{ik} \quad i, k = 1, 2 \quad (\text{A.9})$$

Konforme Metrik einer Riemannschen Mannigfaltigkeit R^N :

Eine Metrik g_{ik} heisst konform zur euklidischen Metrik δ_{ik} , falls eine Funktion $\rho > 0$ existiert, so dass gilt:

$$g_{ik} = \rho \delta_{ik} \quad i, k = 1, \dots, N. \quad (\text{A.10})$$

Christoffel-Symbol 1.Art: (ist kein Tensor)

$$\Gamma_{ijm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right) \quad (\text{A.11})$$

in der konformen Metrik:

$$\Gamma_{ijm} = \frac{1}{2} \left(\rho_{,i} \delta_{jm} + \rho_{,j} \delta_{im} - \rho_{,m} \delta_{ij} \right), \quad \rho_{,j} = \frac{\partial \rho}{\partial u^j} \quad (\text{A.12})$$

Christoffel-Symbol 2.Art: (ist kein Tensor)

$$\Gamma_{ij}^l = g^{lm} \Gamma_{ijm} \quad (\text{A.13})$$

in der konformen Metrik:

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2\rho} \left(\rho_{,i} \delta_{jl} + \rho_{,j} \delta_{il} - \rho_{,l} \delta_{ij} \right) \quad (\text{A.14})$$

Beziehungen zwischen den Christoffel-Symbolen: (Symmetrien)

$$\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i} = \Gamma_{ijm} + \Gamma_{imj} \quad (\text{A.15})$$

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma_{jik}, \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (\text{A.16})$$

Transformationsgesetz eines r-fach kovarianten und s-fach kontravarianten Tensors (r+s)-ter Stufe:

$$\bar{T}_{m_1 \dots m_r}^{p_1 \dots p_s} = T_{j_1 \dots j_r}^{k_1 \dots k_s} \frac{\partial u^{j_1}}{\partial \bar{u}^{m_1}} \dots \frac{\partial u^{j_r}}{\partial \bar{u}^{m_r}} \frac{\partial \bar{u}^{p_1}}{\partial u^{k_1}} \dots \frac{\partial \bar{u}^{p_s}}{\partial u^{k_s}} \quad (\text{A.17})$$

Oberer Index: Kontravarianter Index

Unterer Index: Kovarianter Index

Sonderfälle:

Kontravarianter Tensor 2. Stufe:

$$\bar{T}^{mp} = T^{jk} \frac{\partial \bar{u}^m}{\partial u^j} \frac{\partial \bar{u}^p}{\partial u^k} \quad (\text{A.18})$$

Kovarianter Tensor 2. Stufe:

$$\bar{T}_{mp} = T_{jk} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^m} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^p} \quad (\text{A.19})$$

Gemischter Tensor 2. Stufe:

$$\bar{T}_m^p = T_j^k \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^m} \frac{\partial \bar{u}^p}{\partial u^k} \quad (\text{A.20})$$

Riemannscher Krümmungstensor: (hängt nur vom metrischen Tensor g_{ik} ab)

gemischter:

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^l} + \Gamma_{jl}^p \Gamma_{pk}^i - \Gamma_{jk}^p \Gamma_{pl}^i \quad (\text{A.21})$$

kovarianter:

$$R_{hijkl} = g_{hi} R_{jkl}^i \quad (\text{A.22})$$

Darstellung durch Terme mit 2-ten partiellen Ableitungen:

$$R_{hijkl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{lh}}{\partial u^j \partial u^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial u^h \partial u^l} - \frac{\partial^2 g_{kh}}{\partial u^j \partial u^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial u^h \partial u^k} \right) + g^{im} \left(\Gamma_{jkm} \Gamma_{hli} - \Gamma_{jlm} \Gamma_{hki} \right) \quad (\text{A.23})$$

Symmetrien:

$$R_{hijkl} = -R_{jhkl}, \quad R_{hijkl} = -R_{hjik}, \quad R_{hijkl} = R_{klhj} \quad (\text{A.24})$$

Riemannscher Krümmungstensor für R^2 :

nur die folgenden 4 Komponenten sind verschieden von Null:

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{2112} = -R_{1221} \quad (\text{A.25})$$

Gauss'sche Krümmung K_G :

$$K_G = \frac{R_{1212}}{g}, \quad g = \det(g_{ik}) \quad (\text{A.26})$$

in der konformen Metrik:

$$K_G = -\frac{\Delta \ln \sqrt{\rho}}{\rho} \quad (\text{A.27})$$

Ricci-Tensor: (Spur des Riemannschen Krümmungstensors über den 1. und 4. Index)

kovarianter:

$$R_{jk} = g^{il} R_{ijkl} = R^l_{jkl} \quad (\text{A 28})$$

kontravarianter:

$$R^{jk} = g^{jl} g^{km} R_{lm} \quad (\text{A 29})$$

Darstellung durch Terme mit partiellen Ableitungen:

$$R_{jk} = \frac{\partial^2 \ln \sqrt{g}}{\partial u^j \partial u^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^i} + \Gamma_{ji}^p \Gamma_{pk}^i - \Gamma_{jk}^p \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial u^p} \quad (\text{A 30})$$

Symmetrie:

$$R_{jk} = R_{kj} \quad (\text{A 31})$$

in der konformen Metrik:

kovariante Darstellung:

$$R_{jk} = - (N-2) \rho^{1/2} (\rho^{-1/2})_{,jk} + \frac{N-2}{4 \rho^2} |\nabla \rho|^2 \delta_{jk} + \Delta \ln \sqrt{\rho} \delta_{jk} \quad (\text{A 32})$$

$$R_{jk} = \frac{N-2}{2 \rho} \left(\rho_{,jk} - \frac{3}{2} \frac{\rho_{,j} \rho_{,k}}{\rho} \right) + \frac{1}{2 \rho} \left(\Delta \rho + \frac{N-4}{2 \rho} |\nabla \rho|^2 \right) \delta_{jk}$$

kontravariante Darstellung:

$$R^{jk} = \frac{R_{jk}}{\rho^2} \quad (\text{A 33})$$

Ricci-Tensor für R^2 :

$$R_{jk} = - g_{jk} K_G \quad (\text{Einsteinsche Mannigfaltigkeit}) \quad (\text{A 34})$$

in der konformen Metrik:

$$R_{jk} = \Delta \ln \sqrt{\rho} \delta_{jk} \quad (\text{A 35})$$

Differentiation:

kovariante Ableitung eines Skalars w:

$$w_{,i} = \frac{\partial w}{\partial u^i} \quad (w_{,i} \text{ ist ein kovarianter Tensor}) \quad (\text{A.36})$$

kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors t^i :

$$t^i_{,k} = \frac{\partial t^i}{\partial u^k} + \Gamma^i_{sk} t^s \quad (t^i_{,k} \text{ ist ein gemischter Tensor 2-ter Stufe}) \quad (\text{A.37})$$

kovariante Ableitung eines kovarianten Vektors t_i :

$$t_{i,k} = \frac{\partial t_i}{\partial u^k} - \Gamma^s_{ik} t_s \quad (t_{i,k} \text{ ist ein 2-fach kovarianter Tensor}) \quad (\text{A.38})$$

kontravariante Ableitung eines kontravarianten Vektors t^i :

$$t^{i,k} = g^{ks} t^i_{,s} \quad (\text{Heraufziehen eines Indexes}) \quad (\text{A.39})$$

zweite kovariante Ableitung eines Skalars w:

$$w_{,ik} = \frac{\partial^2 w}{\partial u^i \partial u^k} - \Gamma^s_{ik} w_{,s} \quad (\text{A.40})$$

Kovariante Ableitung des metrischen Tensors: (Satz von Ricci)

$$g_{ik',j} = 0; \quad g^{ik',j} = 0; \quad \delta_i^k{}_{,j} = 0 \quad (\text{A.41})$$

Bemerkung:

Kovariante (bzw. kontravariante) Differentiationen von Summen und Produkten gehen nach den Regeln der elementaren Differentialrechnung. Mehrmalige kovariante Differentiation hängt (von trivialen Ausnahmen abgesehen) von der Differentiationsreihenfolge ab. Es gilt die Identität von Ricci.

Identität von Ricci:

für kovariante Vektoren t_k :

$$t_{k'ij} - t_{k'ji} = R^s_{kij} t_s \quad (\text{A.42})$$

für 3-fach kovariante Ableitungen eines Skalars w :

$$w_{,kij} - w_{,kji} = R^s_{kij} w_{,s} \quad (\text{A.43})$$

Sonderfall: $R^N = E^N$ (Vertauschung von partiellen Ableitungen)

$$R^s_{kij} = 0, \quad w_{,kij} = w_{,kji} \quad (\text{A.44})$$

1. Beltramische Invariante für skalare Funktionen v und w :

$$\bar{\nabla} v \cdot \bar{\nabla} w = g^{ik} v_{,i} w_{,k} \quad (\text{A.45})$$

Sonderfall: $v = w$

$$|\bar{\nabla} w|^2 = g^{ik} w_{,i} w_{,k} \quad (\text{A.46})$$

2. Beltramische Invariante für eine skalare Funktion w :

(Laplace-Beltrami-Operator)

$$\bar{\Delta} w = g^{ik} w_{,ik} = (g^{ik} w_{,i})_{,k} \quad (\text{A.47})$$

Darstellung durch gewöhnliche partielle Ableitungen:

$$\bar{\Delta} w = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial u^k} \left(\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial w}{\partial u^i} \right), \quad g := \det(g_{ik}) \quad (\text{A.48})$$

Sonderfall: $R^N = E^N$

$$\bar{\Delta} w = \Delta w = \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 w}{(\partial u^k)^2} \quad (\text{A.49})$$

Geodätische Linien in R^N : (Autoparallele Kurven oder "kürzeste" Verbindungskurven)

Differentialgleichungssystem für die Koordinatenfunktionen $u^i = u^i(s)$ bezüglich einer beliebigen Metrik:

$$\frac{D\dot{u}^i}{ds} = \ddot{u}^i + \Gamma^i_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (\text{A.50})$$

mit Anfangsbedingungen

$$u^i(s_0) := u_0^i \quad \text{und} \quad g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k \Big|_{s=s_0} = 1 \quad (s_0 \text{ ist frei wählbar}).$$

$\frac{d}{ds}$ = Ableitung nach der Bogenlänge s , $\frac{D}{ds}$ = kovariante Ableitung in Richtung des kontravarianten Tangentenvektors \dot{x}^i (intrinsic derivative).

Für eine Lösung u^i des Systems (A.50) gilt

$$g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k = 1 \quad \text{für alle } s. \quad (\text{A.51})$$

Differentialgleichungssystem bezüglich einer konformen Metrik der Form (A.10):

$$\ddot{u}^i + \frac{\rho_{,j} \dot{u}^j}{\rho} \dot{u}^i - \frac{\rho_{,i}}{2\rho} \delta_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k = \ddot{u}^i + \frac{\rho_{,j} \dot{u}^j}{\rho} \dot{u}^i - \frac{\rho_{,i}}{2\rho^2} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (\text{A.52})$$

mit Anfangsbedingungen

$$u^i(s_0) := u_0^i \quad \text{und} \quad \rho \delta_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k \Big|_{s=s_0} = 1, \quad \left(\rho_{,i} = \frac{\partial \rho}{\partial u^i} \right).$$

Falls $\rho = \rho(r)$ gewählt wird mit $r = \sqrt{(u^1)^2 + \dots + (u^N)^2}$, so entsprechen den Geraden im Parameterraum (mit Koordinaten u^1, \dots, u^N) den geodätischen Linien in \mathbf{R}^N .

Hyperflächen $\partial\Omega$ in \mathbf{R}^N

Unter einer Hyperfläche $\partial\Omega$ verstehen wir eine $(N-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit, welche wir uns in einem Riemannschen Raum \mathbf{R}^N (bzw. euklidischen Raum E^N) eingebettet denken.

Bezeichnungen:

Lokale Koordinaten in \mathbf{R}^N : $x^j \quad j = 1, \dots, N$
 Lokale Koordinaten in $\partial\Omega$: $u^\alpha \quad \alpha = 1, \dots, N-1$

Lokale Parameterdarstellung von $\partial\Omega$:

$$x^j = x^j(u^1, \dots, u^{N-1}) = x^j(u^\alpha), \quad j = 1, \dots, N, \quad \alpha = 1, \dots, N-1. \quad (\text{A.53})$$

Rang der Funktionalmatrix:

$$\text{Rang} \left[\frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha} \right] = N-1, \quad (\text{Maximalrang}) \quad (\text{A.54})$$

Kovarianter metrischer Tensor für eine Hyperfläche $\partial\Omega$:

(von g_{ik} induzierte Metrik)

$$g_{\alpha\beta} = g_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial u^\beta} = g_{ik} x^i_{,\alpha} x^k_{,\beta} \quad (\text{A.55})$$

Konvention:

Summation über lateinische Summationsindizes von 1 bis N.

Summation über griechische Summationsindizes von 1 bis N-1.

Kontravarianter (inverser) metrische Tensor $g^{\alpha\lambda}$ für die Hyperfläche $\partial\Omega$:

$$g_{\gamma\alpha} g^{\alpha\lambda} = \delta_\gamma^\lambda \quad (\text{A.56})$$

Christoffel-Symbol 1.Art: (kein Tensor)

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} \right) \quad (\text{A.57})$$

Zusammenhang mit Γ_{ijk} :

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \left(\Gamma_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial u^\beta} + g_{jk} \frac{\partial^2 x^j}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right) \frac{\partial x^k}{\partial u^\gamma} \quad (\text{A.58})$$

$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$: bezüglich der (induzierten) Metrik $g_{\alpha\beta}$.

Γ_{ijk} : bezüglich der Metrik g_{ik} .

Christoffel-Symbol 2. Art: (kein Tensor)

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\epsilon = g^{\epsilon\mu} \Gamma_{\alpha\beta\mu} \quad (\text{A.59})$$

Symmetrien:

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma_{\beta\alpha\gamma}; \quad \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \quad (\text{A.60})$$

Sonderfall: $R^N = E^3$ (Fläche im euklidischen Raum E^3)

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\gamma} \quad (\text{Skalarprodukt}) \quad (\text{A.61})$$

Verallgemeinerte Ableitungsformeln von Gauss:

$$x^m_{;\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} v^m \quad (\text{A.62})$$

v^m : Komponenten des Normalenvektor von $\partial\Omega$ mit Länge: $g_{ik} v^i v^k = 1$.

$x^m_{;\alpha\beta}$: Mit dem Symbol ";" bezeichnen wir die verallgemeinerte zweite kovariante Ableitung. Sie wird definiert durch

$$x^m_{;\alpha\beta} := x^m_{,\alpha\beta} + \Gamma_{jk}^m x^j_{,\alpha} x^k_{,\beta}.$$

$x^m_{;\alpha\beta}$ sind die Komponenten eines Tensors 2-ter Stufe bezüglich den Koordinaten u^α .

Sonderfälle:

Ableitungsformeln von Gauss für eine Fläche in E^3 :

$$x^m_{;\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} n^m \quad (\text{A.63})$$

n^m : Komponenten des Normalenvektor von $\partial\Omega$ mit euklidischer Länge: $\delta_{ik} n^i n^k = 1$.

$x^m_{,\alpha\beta}$: (gewöhnliche) zweite kovariante Ableitung, welche durch die Beziehung

$$x^m_{;\alpha\beta} := \frac{\partial^2 x^m}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\partial x^m}{\partial u^\mu}$$

definiert wird.

Verallgemeinerte 2-te kovariante Ableitung einer skalarwertigen Funktion:

$$w_{;\alpha} = w_{,\alpha} = \frac{\partial w}{\partial u^\alpha} \quad (\text{gewöhnliche partielle Ableitung}) \quad (\text{A.64})$$

$$w_{;\alpha\beta} = w_{,\alpha\beta} \quad (\text{gewöhnliche zweite kovariante Ableitung}) \quad (\text{A.65})$$

2. Fundamentaltensor einer Hyperfläche $\partial\Omega$ in \mathbb{R}^N :

$$b_{\alpha\beta} = x^i{}_{;\alpha\beta} g_{im} v^m = \left(x^i{}_{,\alpha\beta} + \Gamma_{jk}^i x^j{}_{,\alpha} x^k{}_{,\beta} \right) g_{im} v^m \quad (\text{A.66})$$

Sonderfall: $\mathbb{R}^N = E^3$ (Fläche im euklidischen Raum E^3)

$$b_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{Skalarprodukt}) \quad (\text{A.67})$$

Bemerkung:

$b_{\alpha\beta}$ sind die Komponenten eines 2-fach kovarianten symmetrischen Tensors bezüglich der Gruppe der zulässigen Transformationen in den u^α -Koordinaten, bei denen der Richtungssinn des Normalenvektors von $\partial\Omega$ erhalten bleibt.

Verallgemeinerte Ableitungsformeln von Weingarten:

$$v^m{}_{;\beta} = \frac{\partial n^m}{\partial u^\beta} + \Gamma_{jk}^m v^j x^k{}_{,\beta} = -b_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} x^m{}_{,\mu} = -b^\mu{}_\beta x^m{}_{,\mu} \quad (\text{A.68})$$

Sonderfall: Ableitungsformeln von Weingarten für eine Fläche in E^3 :

$$\frac{\partial n^m}{\partial u^\beta} = -b^\mu{}_\beta \frac{\partial x^m}{\partial u^\mu} \quad (\text{A.69})$$

Hauptkrümmungen $\lambda_{(i)}$ der Hyperfläche $\partial\Omega$.

Die Lösungen (Wurzeln)

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{N-1}$$

der folgenden (charakteristischen) Polynomgleichung

$$\det (b_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}) = 0 = \det (b_{\alpha\mu} g^{\mu\gamma} - \lambda \delta_\alpha^\gamma) \quad (\text{A.70})$$

heissen Hauptkrümmungen. $g_{\alpha\beta}$ ist der 1. Fundamentaltensor (metrische Tensor) von $\partial\Omega$ (symmetrisch und positiv definit). $b_{\alpha\beta}$ ist der 2. Fundamentaltensor von $\partial\Omega$ (symmetrisch). Die Wurzeln $\lambda_{(i)}$ sind reell und invariant unter zulässigen Koordinatentransformationen in den lokalen Koordinaten u^α .

Wurzelsatz von Vieta:

a) Mittlere Krümmung κ einer Hyperfläche $\partial\Omega$:

$$\kappa = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{N-1} = -g^{\alpha\mu} b_{\alpha\mu} = -b_\alpha^\alpha \quad (\text{A.71})$$

(Spur des 2. Fundamentaltensors)

b) Eine weitere Invariante ("Gaussche Krümmung") einer Hyperfläche $\partial\Omega$:

$$K_G = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{N-1} = \frac{b}{g}, \quad b = \det(b_{\alpha\beta}), \quad g = \det(g_{\alpha\beta}) \quad (\text{A.72})$$

Sonderfall: $R^N = E^3$ (Fläche im euklidischen Raum E^3)

$$\kappa = \lambda_1 + \lambda_2 = H \quad \text{"mittlere" Krümmung einer Fläche} \quad (\text{A.73})$$

$$K_G = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{b}{g} \quad \text{Gaussche Krümmung einer Fläche} \quad (\text{A.74})$$

Bemerkungen:

a) Vorzeichenkonvention:

Der 2. Fundamentaltensor $b_{\alpha\beta}$ wird so definiert, dass für eine Hyperkugel in E^N mit Radius R gilt:

$$\kappa = -b_\alpha^\alpha = \frac{N-1}{R} \quad (\text{A.75})$$

b) Theorema egregium: (gilt nur für Flächen $\partial\Omega$ in R^2)

Die Gaussche Krümmung K_G einer Fläche in R^2 hängt nicht von der zweiten Grundform ab, sondern allein von den Koeffizienten g_{ik} der ersten Grundform und deren ersten und zweiten Ableitungen. (Beweis: siehe Gleichung A.26)

Hauptrichtungen $e_{(i)}^\alpha$ des 2. Fundamentaltensors $b_{\alpha\beta}$:

Die Lösungen $e_{(i)} = (e_{(i)}^1, e_{(i)}^2, \dots, e_{(i)}^{N-1})$ mit $\|e_{(i)}\| = 1$ von

$$(b_{\alpha\beta} - \lambda_{(i)} g_{\alpha\beta}) e_{(i)}^\alpha = 0, \quad \beta = 1, \dots, N-1; \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (\text{A.76})$$

($\lambda_{(i)}$ Wurzeln von A.70) definieren die Hauptrichtungen des 2. Fundamentaltensors $b_{\alpha\beta}$ (Hauptrichtungen der Normalkrümmungen einer Hyperfläche in einem festen Punkt). Die Hauptrichtungen $e_{(i)}$ entsprechen den stationären Werten $\lambda_{(i)}$ der folgenden Funktion für die Normalkrümmung κ_n :

$$\kappa_n = \frac{b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}{g_{\mu\nu} du^\mu du^\nu} \quad (du^\alpha = e_{(i)}^\alpha) \quad (\text{A.77})$$

Falls in (A.70) die Lösungen $\lambda_{(i)}$ alle einfach sind, so bilden

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{N-1}$$

ein orthonormiertes System von Einheitsvektoren. Die Hauptrichtungen $\mathbf{e}_{(i)}$ sind eindeutig bestimmt. Falls $\lambda_{(i)}$ eine q-fache Wurzel von Gleichung (A.70) ist, so lässt sich ein (nicht eindeutiges) orthonormales System von Hauptrichtungen

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_q$$

so wählen, dass

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_q, \mathbf{e}_{q+1}, \dots, \mathbf{e}_{N-1}$$

ein orthonormales System ist, welches die Funktion (A.77) für die Normalkrümmungen stationär macht.

Verallgemeinerte Formel von Bonnet für die mittlere Krümmung κ von $\partial\Omega$:

Sei $\partial\Omega$ durch folgende Relation implizit definiert:

$$\partial\Omega = \left\{ \mathbf{x} \mid \Psi(\mathbf{x}) = 0 \right\}, \quad (\Psi > 0 \text{ in } \Omega).$$

Dann gilt

$$\kappa = \overline{\text{div}} \mathbf{v}, \quad \text{mit } \mathbf{v} := - \frac{\overline{\nabla}\Psi}{|\overline{\nabla}\Psi|},$$

oder ausgerechnet

$$\kappa = - \left(\frac{\overline{\Delta}\Psi}{|\overline{\nabla}\Psi|} + \overline{\nabla}\Psi \cdot \overline{\nabla} \frac{1}{|\overline{\nabla}\Psi|} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ik} v_k \right). \quad (\text{A.78})$$

(Die Vorzeichenkonvention wird so festgelegt, dass obige Formel (A.78) für eine Hyperkugel einen positiven Wert ergibt.)

Spezialfälle:

Mittlere Krümmung κ einer Hyperfläche $\partial\Omega$ in R^N . R^N mit konformer Metrik $g_{ik} = \rho \delta_{ik}$:

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(H + (N-1) \frac{\partial \ln \sqrt{\rho}}{\partial n} \right) \quad (\text{A.79})$$

H ist die mittlere Krümmung der Hyperfläche $\partial\Omega$ mit der von $g_{ik} = \delta_{ik}$ induzierten Metrik. Falls $\partial\Omega$ eine Hyperkugel im euklidischen Raum E^N mit Radius R ist, so gilt $H = (N-1)/R$.

Geodätische Krümmung einer Kurve in R^2 . R^2 mit konformer Metrik $g_{ik} = \rho \delta_{ik}$:

$$\kappa = \kappa_g = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(k + \frac{\partial}{\partial n} \ln \sqrt{\rho} \right), \quad (\text{A.79}')$$

k ist die gewöhnliche Krümmung einer Kurve in der euklidischen Ebene E^2 .

Zerlegung der 1. und 2. Beltramischen Invarianten in R^N bezüglich einer Hyperfläche $\partial\Omega$

1. Beltramische Invariante:

Für einen festen Punkt in $\partial\Omega$ gilt die Zerlegung

$$g^{ik} \xi_i \xi_k = g^{\alpha\beta} x^i_{,\alpha} x^k_{,\beta} \xi_i \xi_k + v^i v^k \xi_i \xi_k \quad \text{für alle } \xi_i \in E^N. \quad (\text{A.80})$$

Beweis: siehe [8].

Anwendung von Beziehung (A.80):

Für eine skalarwertige Funktion w in R^N erhalten wir die Zerlegung der 1. Beltramischen Invariante bezüglich der Hyperfläche $\partial\Omega$ indem wir in (A.80) setzen

$$\xi_i := w_{,i} = \frac{\partial w}{\partial x^i}.$$

Es folgt:

$$|\nabla w|^2 = |\nabla_{N-1} w|^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)^2 \quad (\text{A.81})$$

mit $|\nabla w|^2 = g^{ik} w_{,i} w_{,k}$,

$$|\nabla_{N-1} w|^2 = g^{\alpha\beta} w_{,\alpha} w_{,\beta} = g^{\alpha\beta} x^i_{,\alpha} x^k_{,\beta} w_{,i} w_{,k} \quad [\text{Kettenregel für } w = w(x^k(v^\alpha))],$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = v^i v^k w_{,i} w_{,k}.$$

2. Beltramische Invariante:

Sei w eine skalarwertige Funktion in \mathbb{R}^N . Es gilt folgende Zerlegung bezüglich $\partial\Omega$

$$\bar{\Delta} w = \bar{\Delta}_{N-1} w + \kappa \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \tag{A.82}$$

Dabei wurde gesetzt:

$$\bar{\Delta} w = g^{ik} w_{,ik} \quad (w_{,ik} \text{ 2-fach kovariante Ableitung bezüglich } g_{ik}),$$

$$\bar{\Delta}_{N-1} w = g^{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} \quad (\text{Laplace - Beltrami Ausdruck auf } \partial\Omega),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = w_{,ik} v^i v^k \quad (\text{zweite Normalableitung in Richtung } v).$$

Die mittlere Krümmung κ der Hyperfläche $\partial\Omega$ ist in Gleichung (A.75) definiert und v ist der nach aussen gerichtete Normalenvektor von $\partial\Omega$. ($\partial \cdot / \partial v = \partial \cdot / \partial r$ für eine Hyperkugel)

Beweis: siehe [8].

Sonderfall: $\mathbb{R}^N = E^3$ (Rand $\partial\Omega$ im eulidischen Raum E^3)

Ersetze in Beziehungen (A.81) und (A.82)

$$\bar{\nabla} \rightarrow \nabla, \quad \bar{\Delta} \rightarrow \Delta, \quad \kappa \rightarrow H \quad \text{und} \quad v^k \rightarrow n^k.$$

Eine Identität: (gilt nur für $N = 2$)

Für eine genügend glatte Funktion w , welche in \mathbb{R}^2 definiert ist, gilt die folgende Identität:

$$|\nabla w|^2 w^{,ij} w_{,ij} = |\bar{\nabla} w|^2 (\bar{\Delta} w)^2 + 2 w^{,i} w_{,j} w_{,ik} w^{jk} - 2 \bar{\Delta} w w_{,i} w_{,j} w^{,ij} \tag{A.83}$$

Beweis:

Wir geben hier einen anderen Beweis als in [8]. Mit der Funktion w definieren wir den folgenden gemischten Tensor 2-ter Stufe (als "Matrix" geschrieben):

$$W := [w^i_j] .$$

Der Satz von Cayley - Hamilton liefert uns die Beziehung

$$W^2 = \text{tr}(W) W - \det(W) I, \quad \text{tr}(W) = \bar{\Delta}w \text{ (Spur von } W), \quad I = \text{Identität}.$$

Wir bilden die Spur in der obigen Gleichung und erhalten:

$$w^i_j w^j_i = w^{ij} w_{ij} = (\bar{\Delta}w)^2 - 2(w^1_{,1} w^2_{,2} - w^2_{,1} w^1_{,2}) .$$

Multiplikation mit $|\bar{\nabla}w|^2$ ergibt:

$$|\bar{\nabla}w|^2 w^i_j w^j_i = |\bar{\nabla}w|^2 (\bar{\Delta}w)^2 - 2 |\bar{\nabla}w|^2 (w^1_{,1} w^2_{,2} - w^2_{,1} w^1_{,2}) .$$

Mit einer einfachen Rechnung erhalten wir für den zweiten Term auf der rechten Seite der obigen Gleichung der folgende Ausdruck:

$$- |\bar{\nabla}w|^2 (w^1_{,1} w^2_{,2} - w^2_{,1} w^1_{,2}) = w^i w_j w_{,ik} w^{,jk} - \bar{\Delta}w w_i w_j w^{,ij} .$$

Somit ist die obige Identität (A.83) bewiesen.

◊

Bemerkung:

Die Beziehung (A.83) gilt für beliebige Tensoren t_k und T^i_j in R^2 .

$$t_k t^k T^{ij} T_{ij} = t_k t^k (g^{lm} T_{lm})^2 + 2 t^i t_j T_{ik} T^{jk} - 2 (g^{lm} T_{lm}) t_i t_j T^{ij} \quad (\text{A.84})$$

Zusammenstellung einiger Fortranroutinen mit kurzen Erläuterungen

Das ganze Programmpaket ist modular aufgebaut und besteht aus folgenden Teilen (Files):

Filename	Name der Subroutine	Verwendungszweck
MAIN.FOR	MAIN	Hauptprogramm, bestehend aus 3 Teilen: (i) Berechnung einer Lösung (<LOSG>) (ii) Berechnung eines Bifurkationsdiagramms (<BIFD>) (iii) Berechnung eines kritischen Punktes (<KRWE>)
BP1.FOR/ BP2.FOR	ASYMPT, DGL	Implementation der Differentialgleichungen in Subroutine DGL für die RKD-Routine und Implementation einer allfälligen asymptotischen Entwicklung in Subroutine ASYMPT. Gelfand-Gleichung: File BP1.FOR, Reaktionsgleichung: File BP2.FOR.
ANFBED.FOR	ANFBED, OUT	Setzen der Anfangsbedingungen. In OUT wird der Kontrolloutput für die RKD-Routine programmiert.
BIFUR1.FOR/ BIFUR2.FOR	BIFURK	Berechnung des Bifurkationsdiagramms; Gelfand-Gleichung: File BIFUR1.FOR, Reaktionsgleichung: File BIFUR2.FOR.
HORNER.FOR	HORNER	Auswertung eines Polynoms mit Ableitung mittels Horner Schema.
TABKPF.FOR	TABKPF	Ausdrucken eines Tabellenkopfs für Zwischenwerte während der Integration.
PARA2.FOR/ PARAN.FOR	PARAM	Berechnung der Hilfsgrößen w_{\max} und $\bar{\tau}_{\max}$ bzw. ihrer oberen Schranken für "Hilfsstor-

sionsproblem" (siehe (3.1.1/12)).

RKD.FOR	RKD	SAM Library Fortranroutine (double precision Version, 1984) zur Integration von Vektordifferentialgleichungen nach der Methode von Runge-Kutta 8. Ordnung mit Koeffizienten nach E. Fehlberg.
GRAPH.FOR	GRAPH1, GRAPH2	Graphischer Output von Lösungen bzw. Bifurkationsdiagrammen auf Terminal oder Plotter.

Weitere Hilfsroutinen:

RKDCON	Initialisierung der Fehlbergkonstanten für RKD-Routine (8. Ordnung).
DEFSCH, DEFDEZ	Initialisierungsroutinen für interaktiven Input / Output auf Terminal.
GETDBL, GETINT, GETSTR, PUTS	Subroutinen für den interaktiven Input / Output von double-precision oder integer Zahlen sowie von Textstrings auf den Terminal.

Kurze Benutzeranleitung:

In einem Commandfile PROG.COMD werden die benötigten (vorcompilierten) Module angegeben, so dass mit einem Aufruf

```
DO SAM: PLOT 2648, BP1,PARAN, @PROG
```

alle Programmteile hinzugelinkt und in den Hauptspeicher geladen werden. Mit kleinen Änderungen in den Files BP1.FOR bzw. BP2.FOR lassen sich nun alle Beispiele behandeln, die in dieser Arbeit vorkommen. Zugleich lassen sich auch die unteren Schranken für die kritischen Werte berechnen.

(Das PROG.COMD - File enthält: MAIN, ANFBED, BIFUR1 (oder BIFUR2), HORNER, PARAN (oder PARA2), TABKPF, GRAPH1 (oder GRAPH2), SAM: RKD.REL)

Kurzbeschreibung der SAM - Library Fortranroutine RKD: (Kernroutine)

Die Fortranroutine RKD ist eine Integrationsroutine für die Berechnung von Lösungen einer Vektordifferentialgleichung der Form (3.0.3). Sie ist auf einer Library der DEC10-Anlage für das Seminar für angewandte Mathematik mit Beschreibung installiert. Es gibt eine double-precision Version (1984), in welcher die Runge-Kutta-Formeln p -ter Ordnung implementiert sind mit $p = 5$ und $p = 8$. Der lokale Diskretisationsfehler ist von der Gröszenordnung $O(h^p)$. Eine Abschätzung des lokalen Fehlers wird dadurch erreicht, indem das Resultat nach einem Integrationsschritt mit einer Approximation $(p - 1)$ -ter Ordnung verglichen wird. Dabei sind keine weiteren Funktionsauswertungen der rechten Seite im System (3.0.3) notwendig. Man erhält die Approximation $(p - 1)$ -ter Ordnung durch eine etwas andere Linearkombination der Runge-Kutta-Grössen k_i , welche durch Funktionsauswertungen von F in (3.0.3) berechnet werden. Falls gilt: $\| \text{lokaler Fehler} \| < \text{TOL}$, so wird der Schritt H akzeptiert, andernfalls wird eine neue Schrittlänge berechnet. Die Fehlerbehandlung ist konservativ, d. h. programmintern wird TOL durch $\text{TOL}/20$ ersetzt. Die automatische Schrittweitensteuerung funktioniert jedoch nicht, falls wir mit dieser Routine ein gewöhnliches Quadraturproblem lösen wollen (z.B. $w''(x) + 2 = 0$ mit $w'(0) = w(1) = 0$)! Dies liegt daran, dass der Diskretisationsfehler bei diesem Verfahren nur von den partiellen Ableitungen von F nach der (abhängigen) Variablen x abhängt und somit alle Ausdrücke in der Fehlerformel identisch null sind.

Aufruf:

```
CALL RKD (TI, TF, N, ITER, X, H, TOL, ORD, SP, DGL, OUT)
```

Die folgende Kurzbeschreibung der Parameter enthält nur die für unsere Zwecke wesentlichen Angaben. Weitere Möglichkeiten, welche die RKD-Routine bietet, sind in der Beschreibung auf der Library enthalten.

Parameter:

TI	Double-precision Input-Variable, welche den Anfangspunkt der Integration definiert. (In den Beispielen ist $TI := 0$ oder $TI := r_z$)
TF	Double-precision Input-Variable, welche den Endpunkt der Integration bezeichnet.
N	Integer Input-Variable, welche die Anzahl der Differentialgleichungen 1. Ordnung enthält.
ITER	Integer Input-Variable, die für unsere Probleme nicht benutzt wird.

Es wird in allen Rechnungen $ITER=0$ gesetzt.

- X Double-precision Input und Output Array der Länge N.
Als Input-Array enthält X die Anfangsbedingungen der Differentialgleichung.
Am Ende der Integration, d.h. beim Rücksprung in das Hauptprogramm, enthält X die Lösung zur Zeit TF.
- H Double-precision Input-Variable, welche eine grobe Schätzung der Anfangsschrittweite enthält.
- TOL Falls diese Double-precision Input-Variable positiv ist, so bestimmt TOL die oberste Toleranz für den Abbruchfehler in jedem Integrationsschritt. Falls $TOL=0$ gesetzt wird, erfolgt keine automatische Schrittweitensteuerung. Dann wird mit konstanter Anfangsschrittweite H gerechnet.
- ORD ORD ist eine double-precision Variable, welche die Beziehung zwischen TOL und dem Abbruchfehler steuert. Falls $DABS(X(I)) \geq ORD$, $I=1, 2, \dots, N$ ist, so bestimmt TOL den relativen Fehler. Andernfalls wird der Fehler in jedem Schritt unterhalb der Schranke $TOL*ORD$ gehalten (Damit muss man nur eine Toleranz angeben). Eine gute Wahl von ORD ist die Grössenordnung des Lösungsvektors X. Wir haben in allen Rechnungen $ORD=1$ gesetzt.
- SP SP ist eine double-precision Input-Hilfsvariable, welche den approximativen Abstand der Werte der unabhängigen Variable T zwischen zwei aufeinanderfolgenden Aufrufen des vom Benutzer gelieferten Unterprogramms OUT angibt (Kontrolloutput). Im Falle $SP=0$ wird OUT nach jedem Integrationsschritt aufgerufen (wird zur Abspeicherung der Lösungspunkte für die grafische Darstellung benötigt). Falls $SP \geq DABS(TF-TI)$, so wird die Subroutine OUT nur am Anfang und am Ende des Integrationsintervalls aufgerufen.
- OUT Formaler Name einer Subroutine, welche während der Integration Zwischenresultate für den Lösungsvektor $X(I)$, $I=1, \dots, N$ sowie weiteren Grössen, wie das laufende Total der akzeptierten (Variable NSTP) und nicht akzeptierten (Variable NREJ) Integrationsschritte zur Verfügung stellt. Diese Subroutine wird über

den obigen Parameter *SP* gesteuert.

DGL

Formaler Name der Subroutine, in welcher die zu lösende Differentialgleichung als System definiert wird (System in Form (3.0.3)). Die Subroutine *DGL* hat die Form

```
SUBROUTINE DGL(T,X,DX)
DOUBLE PRECISION T,X(*),DX(*)
DOUBLE PRECISION NN,ALF,PP,LAM,UM
COMMON /DGLPA/ NN,ALF,PP,LAM,UM
DX(1) = ...      (= 1.Komponente von F(T,X))
.
.
.
DX(N) = ...      (= N.Komponente von F(T,X))
END
```

Allfällige Parameter in der Differentialgleichung werden über den benannten *COMMON* Block */DGLPA/* übertragen.

Speziell in dieser Arbeit gilt:

NN: Dimension der (Hyper-) Kugel im *N*-Dimensionalen euklidischen Raum,

ALF: Ein weiterer Hilfsparameter der Differentialgleichung,

PP: Ordnung *p* in der Reaktionsgleichung,

LAM: "Eigenwertparameter",

UM: Anfangswert der Lösung an der Stelle $T=0$.

C FILE: MAIN.FOR

C RAHMENPROGRAMM ZUR LOESUNG VON SEMILINEAREN DIRICHLETPROBLEMEN
C IN KREIS-/KUGELGEBIETEN

C *****

C PROGRAM MAIN

C INTEGER LOPKTE,BIPKTE,I,NGL,ITER
C PARAMETER (NGL=6,ITER=0)
C DOUBLE PRECISION TZ,TF,X(NGL),HTOS(4),TLOS(1010),YLOS(1010)
C DOUBLE PRECISION INPT(2),DELUM,KMIN,RG,DGP
C DOUBLE PRECISION UM1,UM2,UM3,F1,F2,KOR
C DOUBLE PRECISION NN,ALF,PP,LAM,UM
C REAL XPLT(1010),YPLT(1010)
C CHARACTER CH*4,OUTP,OUTP1

C COMMON /DGLPA/ NN,ALF,PP,LAM,UM
C COMMON /LOSNG/ TLOS,YLOS,LOPKTE,OUTP
C COMMON /ITOUT/ OUTP1

C EXTERNAL DGL,OUT

C INITIALISIERUNG
C *****

C "SCHIRM-PAKET", UNIT NR F. TERMINAL = 4, ANZ. DEZ. F. OUTPUT = 18
C *****

C CALL DEFSCH(4)
C CALL DEFDEZ(18)

C INITIALISIERUNG RKD-ROUTINE: RUNGE-KUTTA FEHLBERG 8. ORDNUNG
C *****

C CALL RKDCON(8)

C INPUT VON PARAMETERN
C *****

C CALL GETSTR('BERECHNUNG VON HILFSPARAMETERN ? ',OUTP1,2)
C IF (OUTP1.EQ.'Y') THEN
C CALL GETDBL('MIN KRUEMMUNG KMIN = ',1,KMIN,2)
C CALL GETDBL('GEOD. RADIUS RG = ',1,RG,2)
C CALL PARAM(KMIN,RG,TF,DGP)
C ALF=DGP
C END IF

C CALL GETDBL('ORDNUNG P IN REAKTIONS-GL = ',1,PP,2)
C CALL GETDBL('PARAMETER ALF IN DGL = ',1,ALF,2)
C CALL GETDBL('DIMENSION DES KUGELGEBIETES = ',1,NN,2)
C CALL PUTS('PARAMETER FUER RKD-INTEGRATOR:')
C CALL GETDBL('H, TOL = ',2,HTOS(1),2)
C HTOS(3)=1.D0
C CALL GETDBL('ORD, SP = ',2,HTOS(3),2)
C CALL GETDBL('ZWISCHENPKT. TZ FUER ASYMPT. ENTW. = ',1,TZ,2)
C CALL GETDBL('"ENDZEIT" TF = ',1,TF,2)
C TYPE*

1 CALL GETSTR(' <LOSG>, <BIFD>, <KRWE> ? ',CH,2)

```
C      BERECHNUNG DER LOSUNG
C      *****
C
      IF (CH.EQ.'LOSG') THEN
          CALL GETDBL('ANFANGSBED. U0 = ',1,UM,2)
          CALL GETDBL('"EIGENWERTPAR" LAM = ',1,LAM,2)
          OUTP='Y'
          CALL TABKPF
          CALL ANFBED(X,NGL)
          CALL ASYMP(TZ,X,NGL)
          CALL RKD(TZ,TF,NGL,ITER,X,HTOS(1),HTOS(2),HTOS(3),HTOS(4),
+           DGL,OUT)
          TYPE*
C
          DO 100 I=1,LOPKTE
              XPLT(I)=TLOS(I)
              YPLT(I)=YLOS(I)
100      CONTINUE
          CALL GRAPH1(XPLT,YPLT,LOPKTE)
      END IF
C
C      BERECHNUNG DES BIFURKATIONS DIAGRAMMS
C      *****
C
      IF (CH.EQ.'BIFD') THEN
          CALL GETDBL('[U01,U02]-INTERVALL = ',2,INPT,2)
          CALL GETINT('ANZ. KURVENPUNKTE = ',1,BIPKTE,2)
          CALL GETDBL('STARTWERT F. LAM-ITERATION = ',1,LAM,2)
          OUTP='N'
          CALL GETSTR('OUTPUT ZWISCHENWERTE LAM-ITERATION ? ',OUTP1,2)
          UM=INPT(1)
          DELUM=(INPT(2)-INPT(1))/DBLE(BIPKTE)
          CALL TABKPF
          TYPE*
          DO 110 I=1,BIPKTE
              CALL BIFURK(TZ,TF,NGL,ITER,X,HTOS)
              TYPE'(T35,A,F14.10,F14.10)', 'U0, LAM = ',UM,LAM
              XPLT(I)=LAM
              YPLT(I)=UM
              UM=UM+DELUM
110      CONTINUE
          CALL GRAPH2(XPLT,YPLT,BIPKTE)
      END IF
C
C      BERECHNUNG DES KRITISCHEN WERTES
C      *****
C
      IF (CH.EQ.'KRWE') THEN
          CALL GETDBL('STARTWERT FUER U0* = ',1,UM,2)
          CALL GETDBL('STARTWERT FUER LAM* = ',1,LAM,2)
          OUTP='N'
          CALL GETSTR('OUTPUT ZWISCHENWERTE LAM-ITERATION ? ',OUTP1,2)
          UM1=UM
          CALL BIFURK(TZ,TF,NGL,ITER,X,HTOS)
          F1=-X(3)/X(5)
          UM2=UM1+1.D-5
          UM=UM2
          CALL BIFURK(TZ,TF,NGL,ITER,X,HTOS)
          F2=-X(3)/X(5)
```

```
10      KOR=(F2-F1)/(UM2-UM1)
      KOR=F2/KOR
      TYPE'(T20,A,F22.18)', '****U0 = ',UM
      IF (ABS(KOR).LT.(ABS(UM)+1.D0)*HTOS(2)*1.D2) GOTO 20
      UM3=UM2-KOR
      UM1=UM2
      UM2=UM3
      F1=F2
      UM=UM3
      CALL BIFURK(TZ,TF,NGL,ITER,X,HTOS)
      F2=-X(3)/X(5)
      GOTO 10
20      CONTINUE
      TYPE*
      TYPE'(A,F22.18,F22.18)',
+      ' **KRITISCHER WERT U0*, LAM* = ',UM,LAM
      TYPE*
      END IF
C
      TYPE*
      STOP '          ***ENDE DER RECHNUNG***'
      END
```

```
C      FILE:  PARAN.FOR (BERECHNUNG VON HILFSPARAMETERN, FALL N > 1)
C
C      SUBROUTINE PARAM(KMIN, RG, E, DGP)
C
C      PARAMETER:  KMIN:  INPUT DOUBLE-PRECISION VARIABLE,
C                  MIN. GEODAETISCHE MITTLERE KRUEMMUNG.
C                  RG:   INPUT DOUBLE-PRECISION VARIABLE,
C                  GEODAETISCHER RADIUS DER (HYPER-) KUGEL
C                  E:    OBERE SCHRANKE FUER DEN ENDPUNKT DES INTE-
C                  GRATIONSINTERVALLS.
C                  DGP:  EIN WEITERER PARAMETER DER DIFF.- GLEICHUNG.
C
C      DOUBLE PRECISION KMIN, RG, P, HZ, Z, FKT, NULLST
C      DOUBLE PRECISION TAU, WMAX, E, DGP, BETA
C
C      EXTERNAL FKT, NULLST
C
C      P=KMIN*RG
C      HZ=DSQRT(0.5D0*P)
C      Z=NULLST(HZ, P, FKT)
C      HZ=Z*Z
C      TAU=4.D0/KMIN*HZ/(1.D0+HZ)
C      BETA=TAU/KMIN
C      WMAX=BETA*HZ
C      TYPE*
C      TYPE'(A, F12.8, F12.8, F12.8, F12.8)', ' *** WMAX, TAUQ, BETA, Z = ',
+      WMAX, TAU, BETA, Z
C      TYPE*
C      IF (BETA.LE.WMAX) THEN
C          DGP=1.D0/DSQRT(2.D0*WMAX)
C          E=0.7853981633974483096D0/DGP
C      ELSE
C          DGP=0.5D0*KMIN/Z
C          E=Z/KMIN*DASIN(2.D0*Z/(1.D0+HZ))
C      END IF
C
C      END
C
C      SUBROUTINEN
C      *****
C
C      DOUBLE PRECISION FUNCTION FKT(X, P)
C      DOUBLE PRECISION X, P, HI
C      FKT=X*DATAN(X)-P/2.D0
C      TYPE*, ' X = ', X
C      END
C
C      DOUBLE PRECISION FUNCTION NULLST(Z0, P, FKT)
C
C      DOUBLE PRECISION Z0, Z1, Z2, F0, F1
C      DOUBLE PRECISION DER, KOR, HI, TOL, P
C      PARAMETER(TOL=1.E-18)
C
C      EXTERNAL FKT
C
C      F0=FKT(Z0, P)
C      Z1=Z0+1.D-5
```

```
10  F1=FKT(Z1,P)
     DER=(F1-F0)/(Z1-Z0)
     KOR=F1/DER
     IF (DABS(KOR).LT.(Z1+1.D0)*TOL) GOTO 20
     Z2=Z1-KOR
     Z0=Z1
     Z1=Z2
     F0=F1
     GOTO 10
20  CONTINUE
     NULLST=Z1
     END
```

```
C      FILE: PARA2.FOR (BERECHNUNG VON HILFSPARAMETERN, FALL N = 2)
C
C      SUBROUTINE PARAM(KMIN, RG, E, DGP)
C
C      PARAMETER: SIEHE FILE PARAN.FOR
C
C      DOUBLE PRECISION KMIN, RG, P, HZ, Z, FKT, NULLST
C      DOUBLE PRECISION TAUQ, BETA, WMAX, E, DGP
C
C      EXTERNAL FKT, NULLST
C
C      P=KMIN*RG
C      HZ=0.95D0
C      Z=NULLST(HZ, P, FKT)
C      DGP=KMIN/Z
C      BETA=DGP*DGP
C      TAUQ=2.D0*Z/DGP
C      WMAX=-DLOG(1.D0-Z*Z)/BETA
C      E=DASIN(Z)/DGP
C      TYPE*
C      TYPE'(A, F12.8, F12.8, F12.8, F12.8)', ' *** WMAX, TAUQ, BETA, Z =',
+      WMAX, TAUQ, BETA, Z
C      TYPE*
C      END
C
C      SUBROUTINEN
C      *****
C
C      DOUBLE PRECISION FUNCTION FKT(X, P)
C      DOUBLE PRECISION X, P, HI
C      FKT=X*0.5*DLOG((1.D0+X)/(1.D0-X))-P
C      TYPE*, ' ***X =', X
C      END
C
C      DOUBLE PRECISION FUNCTION NULLST(Z0, P, FKT)
C
C      DOUBLE PRECISION Z0, Z1, Z2, F0, F1
C      DOUBLE PRECISION DER, KOR, HI, TOL, P
C      PARAMETER(TOL=1.E-18)
C
C      EXTERNAL FKT
C
C      F0=FKT(Z0, P)
C      Z1=Z0+1.D-5
C      F1=FKT(Z1, P)
C      DER=(F1-F0)/(Z1-Z0)
C      KOR=F1/DER
C      IF (DABS(KOR).LT.(Z1+1.D0)*TOL) GOTO 20
C      Z2=Z1-KOR
C      Z0=Z1
C      Z1=Z2
C      F0=F1
C      GOTO 10
C
C      CONTINUE
C      NULLST=Z1
C      END
```

FILE: BP1.FOR (IMPLEMENTATIONEN FUER DIE GELFANDGLEICHUNG GEMAESS
ABSCHNITT 3.2)

BERECHNUNG DER LOESUNG UM 0-PKT MITTELS ASYMPTOTISCHER ENTWICKLUNG

SUBROUTINE ASYMPT(TZ,X,NGL)

PARAMETER: TZ: INPUT DOUBLE-PRECISION VARIABLE,
ZWISCHENPUNKT, WO DIE ASYMPTOTISCH
ENTWICKLUNG ZU BERECHNEN IST.
X: INPUT/OUTPUT DOUBLE-PRECISION VARIABLE:
INPUT: ANFANGSWERTE
OUTPUT: LOESUNG AN DER STELLE TZ.
NGL: INPUT INTEGER VARIABLE,
ANZAHL GLEICHUNGEN DES DIFF.- GLEICHUNGSSYSTEMS.

INTEGER LOPKTE,I,GRAD,NGL
PARAMETER (GRAD=3)
DOUBLE PRECISION TZ,TTZ,X(NGL),AALF
DOUBLE PRECISION K1,K2,R1,R2,R3,NEN,E0,KOEF(0:GRAD)
DOUBLE PRECISION NN,ALF,PP,LAM,UM
DOUBLE PRECISION TLOS(1010),YLOS(1010)
CHARACTER OUTP

COMMON /DGLPA/ NN,ALF,PP,LAM,UM
COMMON /LOSNG/ TLOS,YLOS,LOPKTE,OUTP

IF (TZ.NE.0.D0) THEN

KOEF(0)=UM
E0=LAM*DEXP(UM)
KOEF(1)=-E0/2.D0/NN
AALF=ALF*ALF
NEN=4.D0*(NN+2.D0)
K1=AALF/2.D0/NEN
K2=1.D0/2.D0/NN/NEN
KOEF(2)=(K1+K2*E0)*E0
NEN=6.D0*(NN+4.D0)
R1=AALF*AALF/8.D0/NEN
R2=AALF*(3.D0*NN+4.D0)/(8.D0*NN)/(NN+2.D0)/NEN
R3=(NN+1.D0)/(4.D0*NN*NN)/(NN+2.D0)/NEN
KOEF(3)=- (R1+(R2+R3*E0)*E0)*E0
TTZ=TZ*TZ
CALL HORNER(KOEF,GRAD,TTZ,X(1),X(2))
X(2)=X(2)*2.D0*TZ
KOEF(0)=1.D0
KOEF(1)=-E0/2.D0/NN
KOEF(2)=(K1+2.D0*K2*E0)*E0
KOEF(3)=- (R1+(2.D0*R2+3.D0*R3*E0)*E0)*E0
CALL HORNER(KOEF,GRAD,TTZ,X(3),X(4))
X(4)=X(4)*2.D0*TZ
KOEF(0)=0.D0
DO 100 I=1,3
KOEF(I)=KOEF(I)/LAM
CONTINUE
CALL HORNER(KOEF,GRAD,TTZ,X(5),X(6))
X(6)=X(6)*2.D0*TZ

LOPKTE=LOPKTE+1
TLOS(LOPKTE)=TZ

```
YLOS(LOPKTE)=X(1)
IF (OUTP.EQ.'Y') THEN
  TYPE'(E11.2,E25.18,E26.18)',TFIT,X(1),X(2)
  TYPE*
END IF
```

C

```
END IF
```

C

```
END
```

C

C

C

C

C

```
IMPLEMENTATION DER GELFANDGLEICHUNG (INKL. VARIATIONSGL.)
*****
```

C

```
SUBROUTINE DGL(T,X,DX)
```

C

```
PARAMETER: SIEHE ERKLAERUNG IN KURZBESCHREIBUNG DER RK-ROUTINE.
```

C

```
DOUBLE PRECISION T,X(*),DX(*),HI,F,DF
DOUBLE PRECISION NN,ALF,PP,LAM,UM
```

C

```
COMMON /DGLPA/ NN,ALF,PP,LAM,UM
```

C

```
F=DEXP(X(1)-0.5D0*ALF*ALF*T*T)
DF=F
HI=(1.D0-NN)/T
DX(1)=X(2)
DX(2)=HI*X(2)-LAM*F
DX(3)=X(4)
DX(4)=HI*X(4)-LAM*DF*X(3)
DX(5)=X(6)
DX(6)=HI*X(6)-F-LAM*DF*X(5)
```

C

```
END
```

```
C FILE: BIFUR1.FOR
C
C SUBROUTINE ZUR BERECHNUNG DES BIFURKATIONSDIAGRAMMS (GELFANDGL.)
C *****
C
C SUBROUTINE BIFURK(TZ,TF,NGL,ITER,X,HTOS)
C
C PARAMETER: TZ: INPUT DOUBLE-PRECISION VARIABLE,
C              ZWISCHENPUNKT, WO ASYMPTOTISCHE
C              ENTWICKLUNG BERECHNET WERDEN SOLL.
C           TF: INPUT DOUBLE-PRECISION VARIABLE,
C              ENDPUNKT DES INTEGRATIONSINTERVALLS.
C           NGL: INPUT INTEGER VARIABLE,
C              ANZAHL DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DES SYSTEMS
C           ITER: (ITER = 0) WIRD FUER UNSERE BEISPIELE
C              NICHT GEBRAUCHT.
C           X: OUTPUT DOUBLE-PRECISION ARRAY,
C              LOESUNGSVEKTOR AN DER STELLE TF.
C           HTOS: INPUT DOUBLE-PRECISION ARRAY,
C              HTOS(1) = H = ANFANGSCHRITTWEITE
C              HTOS(2) = EINGEGEBENE TOLERANZ TOL
C              HTOS(3) = ORD = 1 (GROESSENORDNUNG DER LOESUNG)
C              HTOS(4) = SP = STEUERGROESSE FUER KONTROLLOUTPUT
C
C INTEGER NGL, ITER
C DOUBLE PRECISION TZ, TF, X(NGL), HTOS(4), KOR
C DOUBLE PRECISION NN, ALF, PP, LAM, UM
C CHARACTER OUTP1
C
C COMMON /DGLPA/ NN, ALF, PP, LAM, UM
C COMMON /ITOUT/ OUTP1
C
C EXTERNAL DGL, OUT
C
C CALL ANFBED(X, NGL)
C CALL ASYMPT(TZ, X, NGL)
C CALL RKD(TZ, TF, NGL, ITER, X, HTOS(1), HTOS(2), HTOS(3)
+           , HTOS(4), DGL, OUT)
10 KOR=X(1)/X(5)
   IF (OUTP1.EQ.'Y') TYPE'(A, F22.18)', ' ** LAM =', LAM
   IF (ABS(KOR).LT.(LAM+1.D0)*HTOS(2)*1.D1) GOTO 20
   LAM=LAM-KOR
   CALL ANFBED(X, NGL)
   CALL ASYMPT(TZ, X, NGL)
   CALL RKD(TZ, TF, NGL, ITER, X, HTOS(1), HTOS(2), HTOS(3)
+           , HTOS(4), DGL, OUT)
   GOTO 10
20 CONTINUE
C
END
```

```
C      FILE: BP2.FOR (IMPLEMENTATIONEN FUER DIE REAKTIONSGLEICHUNG P-TER
C      ORDERUNG GEMAESS ABSCHNITT 3.3)
C
C      ASYMPOTISCHE ENTWICKLUNG
C      *****
C
C      SUBROUTINE ASYMP(TZ,X,NGL)
C
C      PARAMETER:   SIEHE FILE BP1.FOR.
C
C      INTEGER LOPKTE,I,NGL
C      DOUBLE PRECISION TZ,TTZ,X(NGL),TLOS(1010),YLOS(1010)
C      DOUBLE PRECISION GAM,U0,U1,ZAEL,NENN,POT,HI
C      DOUBLE PRECISION NN,ALF,PP,LAM,UM
C      CHARACTER OUTP
C
C      COMMON /DGLPA/ NN,ALF,PP,LAM,UM
C      COMMON /LOSNG/ TLOS,YLOS,LOPKTE,OUTP
C
C      IF (UM.EQ.0.D0) THEN
C          GAM=2.D0/(1.D0-PP)
C          POT=1.D0/(PP-1.D0)
C          ZAEL=GAM*(NN-2.D0+GAM)
C          U0=(ZAEL/LAM/LAM)**POT
C          NENN=4.D0*(3.D0*GAM+2.D0*NN-2.D0)
C          U1=-ALF*ALF*ZAEL/NENN*U0
C          TTZ=TZ*TZ
C          POT=GAM-1.D0
C          HI=TZ**POT
C          X(1)=TZ*HI*(U0+U1*TTZ)
C          X(2)=HI*(GAM*U0+(GAM+2.D0)*U1*TTZ)
C          IF (OUTP.EQ.'Y') THEN
C              TYPE'(E11.2,E25.18,E26.18)',TZ,X(1),X(2)
C              TYPE*
C          END IF
C      END IF
C      END
C
C
C      IMPLEMENTATION DER REAKTIONSGLEICHUNG (INKL. VARIATIONSGL.)
C      *****
C
C      SUBROUTINE DGL(T,X,DX)
C
C      PARAMETER:   SIEHE KURZBESCHREIBUNG DER RK-ROUTINE
C
C      DOUBLE PRECISION T,X(*),DX(*),HI,F,DF
C      DOUBLE PRECISION NN,ALF,PP,LAM,UM
C
C      COMMON /DGLPA/ NN,ALF,PP,LAM,UM
C
C      IF (T.EQ.0) THEN
C          F=LAM*(X(1)**PP)
C          DF=PP*F/X(1)
C          DX(1)=X(2)
C          DX(2)=LAM*F/NN
C          DX(3)=X(4)
C          DX(4)=LAM*DF*X(3)/NN
C          DX(5)=X(6)
C          DX(6)=(2.D0*F+LAM*DF*X(5))/NN
C      ELSE
```

```
F=LAM*DEXP(-0.5D0*ALF*ALF*T*T)*X(1)**PP
DF=PP*F/X(1)
HI=(1.D0-NN)/T
DX(1)=X(2)
DX(2)=HI*X(2)+LAM*F
C   DX(3)=X(4)
C   DX(4)=HI*X(4)+LAM*DF*X(3)
DX(5)=X(6)
DX(6)=HI*X(6)+2.D0*F+LAM*DF*X(5)
END IF
C
END
```

```
C      FILE: BIFUR2.FOR
C
C      SUBROUTINE ZUR BERECHNUNG DES BIFURKATIONS DIAGRAMMS (REAKTIONSGL.)
C      *****
C
C      SUBROUTINE BIFURK(TZ,TF,NGL,ITER,X,HTOS)
C
C      PARAMETER:      SIEHE IN FILE BIFUR1.FOR.
C
C      INTEGER NGL,ITER
C      DOUBLE PRECISION TZ,TF,X(NGL),HTOS(4),KOR,POT
C      DOUBLE PRECISION NN,ALF,PP,LAM,UM
C      CHARACTER OUTP1
C
C      COMMON /DGLPA/ NN,ALF,PP,LAM,UM
C      COMMON /ITOUT/ OUTP1
C
C      EXTERNAL DGL,OUT
C
C      IF (UM.EQ.0.D0) THEN
C          CALL ANFBED(X,NGL)
C          CALL ASYMP(TZ,X,NGL)
C          CALL RKD(TZ,TF,NGL,ITER,X,HTOS(1),HTOS(2),HTOS(3)
+             ,HTOS(4),DGL,OUT)
C          POT=(PP-1.D0)/2.D0
C          LAM=X(1)**POT
C      ELSE
C          CALL ANFBED(X,NGL)
C          CALL RKD(0.D0,TF,NGL,ITER,X,HTOS(1),HTOS(2),HTOS(3)
+             ,HTOS(4),DGL,OUT)
C      10  KOR=(X(1)-1.D0)/X(5)
C          IF (OUTP1.EQ.'Y') TYPE'(A,F22.18)', '** LAM = ',LAM
C          IF (DABS(KOR).LT.(LAM+1.D0)*HTOS(2)*1.D1) GOTO 20
C          LAM=LAM-KOR
C          CALL ANFBED(X,NGL)
C          CALL RKD(0.D0,TF,NGL,ITER,X,HTOS(1),HTOS(2),HTOS(3)
+             ,HTOS(4),DGL,OUT)
C          GOTO 10
C      20  CONTINUE
C      END IF
C
C      END
```

C FILE ANFBED.FOR

C SETZEN DER ANFANGSBEDINGUNGEN
C *****
C

C SUBROUTINE ANFBED (X,NGL)

C PARAMETER: X: OUTPUT DOUBLE-PRECISION ARRAY,
C ENTHAELT DIE ANFANGSWERTE DES LOESUNGSVEKTORS
C NGL: INPUT INTEGER VARIABLE,
C ANZAHL DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DES SYSTEMS
C

C INTEGER NGL, I, LOPKTE
C DOUBLE PRECISION TLOS (1010), YLOS (1010)
C DOUBLE PRECISION X (NGL), NN, ALF, PP, LAM, UM
C CHARACTER OUTP

C COMMON /DGLPA/ NN, ALF, PP, LAM, UM
C COMMON /LOSNG/ TLOS, YLOS, LOPKTE, OUTP

C DO 100 I=1,NGL
C X(I)=0.D0
100 CONTINUE
C X(1)=UM
C X(3)=1.D0
C LOPKTE=1
C TLOS (LOPKTE)=0.D0
C YLOS (LOPKTE)=X(1)
C IF (OUTP.EQ. 'Y') THEN
C TYPE*
C TYPE' (E11.2, E25.18, E26.18) ', 0.D0, X(1), X(2)
C TYPE*
C END IF
C END

C HILFSROUTINE FUER KONTROLLOUTPUT
C *****
C

C SUBROUTINE OUT (T, X, DX, NGL, DELTAT, NREJ, NSTP)

C PARAMETER: T: UNABHAENGIGE (DOUBLE-PRECISION) VARIABLE
C DER DIFFERENTIALGLEICHUNG.
C X: LOESUNGSVEKTOR (DOUBLE-PRECISION-ARRAY)
C DX: ABLEITUNG DES LOESUNGSVEKTORS
C (DOUBLE-PRECISION-ARRAY)
C NGL: INTEGER VARIABLE, WELCHE DIE ANZAHL
C GLEICHUNGEN DES SYSTEMS ENTHAELT.
C DELTAT: DOUBLE-PRECISION VARIABLE, WELCHE DIE
C LETZTE BERECHNETE SCHRITTWEITE ENTHAELT.
C NREJ: INTEGER VARIABLE, WELCHE DAS LAUFENDE TOTAL
C DER NICHT AKZEPTIERTEN SCHRITTE ENTHAELT.
C NSTP: INTEGER VARIABLE, WELCHE DAS LAUFENDE TOTAL
C DER AKZEPTIERTEN SCHRITTE ENTHAELT.
C

C INTEGER NGL, NREJ, NSTP, LOPKTE
C DOUBLE PRECISION T, X (NGL), DX (NGL), DELTAT
C DOUBLE PRECISION TLOS (1010), YLOS (1010)
C CHARACTER OUTP
C

```
COMMON /LOSNG/ TLOS, YLOS, LOPKTE, OUTP
```

C

```
LOPKTE=LOPKTE+1
```

```
TLOS(LOPKTE)=T
```

```
YLOS(LOPKTE)=X(1)
```

```
IF (OUTP.EQ.'Y') TYPE'(E11.2,E25.18,E26.18,E10.2,I3,I5)'  
+ ,T,X(1),X(2),DELTAT,NREJ,NSTP
```

C

```
END
```

```
C FILE: HORNER.FOR
C
C POLYNOMIAUSWERTUNG UND BERECHNUNG DER ABLEITUNG (0 < GRAD < 11)
C *****
C
C SUBROUTINE HORNER(KOEF,GRAD,T,PWE,DPWE)
C
C PARAMETER: KOEF: INPUT DOUBLE PRECISION VARIABLE, WELCHE
C DEN ARRAY DER KOEFFIZIENTEN IN AUFSTIEGEN-
C DER REIHENFOLGE ENTHEALT.
C GRAD: INPUT INTEGER VARIABLE, WELCHE DEN GRAD
C DES POLYNOMS ( 0 < GRAD < 11 ) ENTHAELT.
C T: INPUT DOUBLE PRECISION VARIABLE FUER DIE
C UNABHAENGIGE VARIABLE DES POLYNOMS.
C PWE: OUTPUT DOUBLE PRECISION VARIABLE, WELCHE
C DEN WERT DES POLYNOMS AN DER STELLE T ENTHAELT.
C DPWE: OUTPUT DOUBLE PRECISION VARIABLE, WELCHE
C DEN WERT DER ERSTEN ABLEITUNG DES POLYNOMS
C AN DER STELLE T ENTHAELT.
C
C BEMERKUNG: DER ARRAY DER KOEFFIZIENTEN WIRD BEIM AUFRUF
C VOM HORNER NICHT VERAENDERT.
C
C INTEGER GRAD,I
C DOUBLE PRECISION KOEF(0:10),NKOEF(0:10),T,PWE,DPWE
C
C NKOEF(GRAD)=KOEF(GRAD)
C DO 100 I=GRAD-1,0,-1
C NKOEF(I)=T*NKOEF(I+1)+KOEF(I)
100 CONTINUE
C PWE=NKOEF(0)
C DO 110 I=GRAD-1,1,-1
C NKOEF(I)=T*NKOEF(I+1)+NKOEF(I)
110 CONTINUE
C DPWE=NKOEF(1)
C
C END
```

Literaturangaben

Lehrbücher und Monographien:

- [1] Adams, R. A.
Sobolev Spaces.
Pure Appl. Math. no. 65, Academic Press, New York - London, (1975).
- [2] Aris, R.
The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts.
Volume I: *The Theory of the Steady State.*
Volume II: *Questions of Uniqueness, Stability, and Transient Behaviour.*
Clarendon Press, Oxford, (1975).
- [3] Bandle, C.
Isoperimetric Inequalities and Applications.
Pitman Advanced Publishing Program, Boston - London - Melbourne, (1980).
- [4] Courant, R. & Hilbert, D.
Methoden der Mathematischen Physik I. 3. Auflage,
Methoden der Mathematischen Physik II. 2. Auflage,
Springer, Berlin - New York - Heidelberg, (1968).
- [5] Kreyszig, E.
Differentialgeometrie. 2. Auflage
Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.- G, Leipzig, (1968).
- [6] Markowich, P. A.
The Stationary Semiconductor Device Equations.
Springer, Wien - New York, (1986).
- [7] Protter, M. H. & Weinberger, H. F.
Maximum Principles in Differential Equations.
Springer, New York, (1984).
- [8] Sperb, R. P.
Maximum Principles and Their Applications.
Math. Sci. Engrg. no. 157, Academic Press, New York - London, (1981).

Lecture Notes in Mathematics und Proceedings:

- [9] Sattinger, D. H.
Topics in Stability and Bifurcation Theory.
Lecture Notes in Math. no. 309
Springer, Berlin - New York, (1973)

- [10] Stakgold, I.
Estimates for some Free Boundary Problems.
Lecture Notes in Math. no. 846 pp. 333 - 346
Ordinary and Partial Differential Equations, Proceedings, Dundee, Scotland 1980.
Springer, Berlin - New York, (1981).

Übersichtsarbeiten:

- [11] Amann, H.
Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces.
SIAM Rev. 18 (1976) no. 4 pp. 620 - 709.
- [12] Corbett, W. E., JR. & Luss, D.
The Influence of Non-Uniform Catalytic Activity on the Performance of a Single Spherical Pellet.
Chem. Engrg. Sci. 29 (1974) pp. 1473-1483.
- [13] Lions, P. L.
On the Existence of Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations.
SIAM Rev. 24 (1982) no. 4 pp. 441 - 467.

Originalarbeiten:

- [14] Bandle, C.
Existence Theorems, Qualitative Results and A Priori Bounds for a Class of Nonlinear Dirichlet Problems.
Arch. Rational Mech. Anal. 58 (1975) no. 3 pp. 219 - 238.
- [15] Bandle, C.
Bounds for the Solutions of Boundary Value Problems.
J. Math. Anal. Appl. 54 (1976) pp. 706 - 716.
- [16] Bandle, C. & Sperb, R. P. & Stakgold, I.
Diffusion and Reaction with Monotone Kinetics.
Nonlinear Anal. 8 (1984) no. 4 pp. 321 - 333.
- [17] Fujita, H.
On the Nonlinear Equations $\Delta u + e^u = 0$ and $\partial v / \partial t = \Delta v + e^v$.
Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969) pp 132 - 135.
- [18] Fujita, H.
On the Asymptotic Stability of Solutions of the Equation $v_t = \Delta v + e^v$.
Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics (Tokyo, 1969),
Univ. of Tokyo Press, Tokyo, (1970) pp. 252 - 259.

- [19] Gel'fand, I. M.
Some Problems in the Theorie of Quasilinear Equations.
Amer. Math. Soc. Transl. (2) 29 (1963) pp. 295 - 381.
- [20] Gidas, B. & Wei-Ming Ni & Nirenberg L.
Symmetry and Related Properties via the Maximum Principle.
Comm. Math. Phys. 68 (1979) pp. 209 - 243.
- [21] Hudjaev, S. I.
Test for Solvability of the Dirichlet Problem for Elliptic Equations.
Soviet Math. Dokl. 4 (1963) pp. 40 - 43.
- [22] Hudjaev, S. I.
Boundary-Value Problems for Certain Quasilinear Elliptic Equations.
Soviet Math. Dokl. 5 (1964) pp. 188 - 192.
- [23] Payne, L. E.
Bounds for Solutions of a Class of Quasilinear Elliptic Boundary Value Problems in Terms of the Torsion Function.
Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 88 (1981) pp. 251-265.
- [24] Payne, L. E. & Philippin, G. A.
Isoperimetric Inequalities in the Torsion and Clamped Membrane Problems for Convex Plane Domains.
SIAM J. Math. Anal. 14 (1983) no. 6 pp. 1154 - 1162.
- [25] Sattinger, D. H.
Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems.
Indiana Univ. Math. J. 21 (1972) no. 11 pp. 979 - 1000.
- [26] Schaefer, P. W. & Sperb, R. P.
Maximum Principles and Bounds in some Inhomogeneous Elliptic Boundary Value Problems.
SIAM J. Math. Anal. 8 (1977) no. 5 pp. 871 - 878,
incl. *Corrigendum and Addendum*: SIAM J. Math. Anal. 10 (1979) no. 6 pp. 1326.
- [27] Sperb, R. P.
Maximum Principles and Nonlinear Elliptic Problems.
J. Analyse Math. 35 (1979) pp. 236 - 263.
- [28] Sperb, R. P.
Isoperimetric Inequalities in a Boundary Value Problem on a Riemannian Manifold.
Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP) 31 (1980) pp. 740 - 753.
- [29] Sperb, R. P.
Optimal Bounds for the Critical Value in a Semilinear Boundary Value Problem on a Surface.
Internat. Schriftenreihe Numer. Math. (ISNM) 80 (1987) pp. 391 - 400.
(5th Intern. Conference on General Inequalities, Oberwolfach 1986)

Zitate zum numerischen Teil:

- [30] Waldvogel, J.
Der Tayloralgorithmus.
Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP) 35 (1984) pp. 780 - 789.
- [31] Abramowitz, M. & Stegun, I. A.
Handbook of Mathematical Functions.
Dover Publications, Inc., New York (1970, 9th printing).
- [32] Brent, R. P.
A Fortran Multiple-Precision Arithmetic Package.
ACM Trans. Math. Software 4 (1978) no. 1 pp. 57 - 81.
- [33] Fehlberg, E.
Classical 5th, 6th, 7th, 8th Order Runge-Kutta-Formulas with Stepsize Control.
NASA Technical Report R-287 (1968).

{Dieses Dokument wurde auf dem Personalcomputersystem (PC) Apple Macintosh™ SE mit Apple LaserWriter® II NT erstellt.

Verwendete Software: Für Textverarbeitung MacWrite™, Version 4.5 D (1985),
für mathematische Formeln MacΣqn™, Version 2.1 (1987),
("The Equation Processor"),
für Zeichnungen MacDraw™, Version 1.7 (1985). }

Lebenslauf

Am 21. September 1947 wurde ich in Luzern geboren, wo ich auch aufwuchs.

- 1956 - 1965 Besuch der Primar- und Sekundarschulen in Luzern und Appenzell
- 1965 - 1969 Berufslehre als Fernmelde- und Elektronikapparatemonteur (FEAM) bei Firma Landis & Gyr AG, Zug
- 1969 - 1970 Berufstätigkeit als Laborant bei Landis & Gyr AG, Zug und Geräte-mechanikerschulen in Bern (Militärdienstpflicht)
- 1970 - 1973 Besuch des Zentralschweizerischen Technikums in Luzern mit Diplom-Abschluss als Elektroingenieur HTL
- 1973 - 1974 Berufstätigkeit als Entwicklungsingenieur bei Landis & Gyr AG, Zug und Sprachaufenthalt in England (3 Monate)
- 1974 - 1975 Vorbereitung bei AKAD (Akademikergesellschaft für Erwachsenenbil-dung AG, Zürich) auf die reduzierte ETH-Aufnahmeprüfung (allge-meinbildende Fächer)
- 1975 - 1980 Mathematikstudium an der ETH Zürich mit Diplom-Abschluss (Diplomarbeit bei Prof. Dr. J. Hersch / Prof. Dr. U. Kirchgraber)
- 1980 - 1981 Hilfsassistent am Mathematischen Seminar der ETH Zürich und Prüfung für Befähigungsausweis für das höhere Lehramt
- 1981 - 1989 Unterrichtsassistent am Seminar für angewandte Mathematik der ETH Zürich

Seit dem 5. Oktober 1985 bin ich mit Erika Meyer, geborene Rieser, verheiratet.