Thèse EPFZ No 9528

Contribution à la résolution des équations de Navier-Stokes compressibles par la méthode des éléments finis adaptatifs; Développement d'un élément simple

présentée à
L'ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE ZURICH

pour l'obtention du titre de
Docteur ès sciences techniques

par

YVES F. SECRETAN

Ing. Mécanicien Dipl. EPFZ
Maître ès sciences (Université Laval, Québec)

né le 15 juin 1958
originaire de Lausanne (Vaud)

acceptée sur proposition
du professeur H.H. Thomann, rapporteur
du professeur R. Jeltsch, corapporteur

1991

Résumé

Nous avons développé un modèle numérique pour intégrer les équations de Navier-Stokes. Ces équations, qui décrivent l'écoulement compressible, laminaire et visqueux d'un fluide parfait et Newtonien, sont écrites en variables primitives (densité, vitesse et température). Le modèle discret est obtenu par la méthode des éléments finis et une pondération de type Galerkine. Nous avons déterminé une approximation simple et stable pour les inconnues du système. Couplée à des méthodes de résolution soit temporelles soit itératives, cette approximation autorise une structure de programmation très simple et bien adaptée aux ordinateurs vectoriels. L'élément triangulaire choisi permet d'utiliser facilement les techniques d'adaptation de maillage, ce qui offre une grande souplesse à l'utilisateur. Ce modèle a été utilisé pour la résolution d'écoulements externes, aussi bien bi-dimensionnels que tri-dimensionnels.

Une approximation identique pour toutes les variables fait apparaître des oscillations sur la densité (*checker-board pattern*), rappelant les problèmes de stabilité rencontrés pour les équations de Navier-Stokes incompressibles. Le plus simple des éléments vérifiant la condition de Babuška-Brezzi est un élément triangulaire d'approximation

- linéaire pour la densité et la température,
- augmentée d'un nœud d'approximation supplémentaire pour la vitesse, situé au barycentre de l'élément (la Bulle).

Cet élément Bulle s'est révélé stable pour nos équations. L'ajout de la Bulle se traduit principalement par un opérateur de dissipation agissant sur la pression dans l'équation de continuité. Partant de cette approximation, nous avons dérivé une simplification consistant à prendre une approximation linéaire sur toutes les variables, et à ajouter une dissipation inspirée de celle apportée par la Bulle. Nous obtenons un élément plus simple et moins coûteux en temps de calcul.

La discrétisation géométrique est faite à l'aide de triangles ou de tétraèdres, ce qui permet de décrire avec précision le domaine de calcul, quelle que soit sa forme, et sans éléments dégénérés.

Si l'on recherche une solution stationnaire, GMRES (*Generalized minimal residual*) est d'une grande stabilité. Son grand attrait tient à ce qu'il n'y a pas de condition de stabilité (comme la condition C.F.L.), donc pas de paramètres sur lesquels jouer. Parmi les méthodes temporelles, nous avons utilisé la méthode de Runge-Kutta rationnelle (RRK2) et la méthode de Runge-Kutta standard. Mais que ce soit pour GMRES, RRK2 ou Runge-Kutta, la vitesse de convergence est grandement améliorée par le pré-conditionnement. Le pré-conditionnement diagonal que nous avons développé est basé sur une analyse de stabilité du système linéarisé par la méthode des matrices. Il est simple et efficace.

La possibilité de travailler sur des maillages non structurés est un des atouts de la méthode des éléments finis, et autorise l'adaptation du maillage. Nous avons examiné

deux techniques d'adaptation du maillage à la solution. Le remaillage, qui cherche à déplacer les nœuds pour diminuer l'erreur de discrétisation, c'est révélé très dépendant de la topologie du domaine de calcul. Par contre, le raffinement de maillage, qui subdivise les éléments qui ont une erreur trop grande, est un processus stable, pour autant que la maillage original permette le déplacement des nœuds ajoutés sur la frontière. Le suivi de l'histoire du raffinement que nous avons utilisé évite les bisections successives d'un même angle, et n'autorise pas plus d'un niveau de raffinement de différence entre les éléments adhérants à un nœud.

La convergence en fonction de la taille du maillage de l'élément Bulle a été contrôlée. Nous avons comparé nos résultats à ceux d'autres sources pour deux écoulements bi-dimensionnels du GAMM Workshop de Nice (1985). Cette discrétisation a ensuite été appliquée à l'écoulement transsonnique tri-dimensionnel sur une aile rectangulaire de profil NACA-0012.

Summary

We have developed a numerical model to integrate the Navier-Stokes equations. These equations, which describe the compressible laminar viscous flow of a perfect Newtonian fluid, are written for the primitive variables (density, velocity and temperature). The discrete model is obtained by the use of the Finite Element Method and a standard Galerkin weighting. We have establish a stable and simple approximation for the unknowns of the system. Coupled with either iterative or time-marching schemes, this approximation leads to a very simple structure of the program, and is well adapted to vector processors. The selected triangular element permits an easy integration of mesh adaptation techniques, which in turn offers users extended flexibility. This model has been used for the solution of external flows, as well as in two dimensions and in three dimensions.

Equal approximations for the variables produce oscillations on the density (*checkerboard pattern*), reminiscent of the stability problems encountered for the incompressible Navier-Stokes equations. The simplest element fulfilling the Babuška-Brezzi stability condition is a triangular element with

- a linear approximation for the density and the temperature,
- a linear approximation enriched with a supplementary node for the velocity, a node situated at the barycenter of the element (Bubble).

This Bubble element is stable for our equations. The effect of the Bubble can be traced down to a dissipation operator acting on the pressure in the continuity equation. Starting with this approximation, we derived an even simpler one. We obtain a simpler element, which is less expensive in term of CPU-time.

The geometrical discretisation is made out of triangles or tetrahedrons, allowing a precise geometrical description of the computing domain, what ever its form is and without degenerated elements.

If one looks for a stationary solution, GMRES (*Generalized minimal residual*) has great stability. Its main advantage comes from the fact that there is no stability condition, like the C.F.L. condition. Therefore, there are no parameters to play with. Among the time-marching schemes, we used the rational Runge-Kutta scheme (RRK2) and the standard Runge-Kutta scheme. But for all this schemes, the convergence is greatly enhanced with preconditioning. The diagonal preconditioning we have developed is based on a stability analysis of the linearized system with a matrix method. It is simple and efficient.

One of the advantages of the Finite Element Method is the possibility to work on unstructured grids which allows grid adaptation. We examined two techniques to adapt the grid to the solution. Mesh moving, where the nodes are moved to diminish the discretisation error, showed to be very dependant on the topology of the domain. On the opposite, grid refinement, which subdivides elements with an error over a threshold, is a stable process if the original grid permits the moving of the boundary nodes. The

tracing of the refinement history we introduced, prevents the successive bi-section of the same angle and does not authorize more than one level of refinement between elements sharing a node.

The convergence of the Bubble element as a function of the grid size has been controlled. We compare our results with other sources for two bi-dimensional test cases of the GAMM-Workshop of Nice (1985). This discretisation has then been applied to the three dimensional transonic flow over a rectangular wing of NACA-0012 profile.