

DISS. ETH. Nr. 10375

EXISTENZ VON PREISGLEICHGEWICHTEN

UND

VERHALTEN DER INVESTOREN

BEI

NICHTLINEAREN RISIKOALLOKATIONEN

ABHANDLUNG

Zur Erlangung des Titels

DOKTOR DER MATHEMATIK

der

EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von

Eric Chevallier

DIPL. MATH. ETH

geboren am 6. Mai 1966

von Valeyres-sous-Rances (VD)

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. Hans Bühlmann, Referent

Prof. Dr. Heinz H. Müller, Korreferent

1994

Kurzfassung

Man betrachte eine Börse mit n Investoren. Die Marktteilnehmer befinden sich im Zeitpunkt t_0 , und sie können nur in diesem Zeitpunkt t_0 handeln. Jeder Investor i besitzt einen positiven Anteil s_i an der Börsenkaptalisierung und bewertet sein Endvermögen in einem Zeitpunkt t_1 , $t_1 > t_0$, mit einer Neumann/Morgenstern-Nutzenfunktion u_i . Die n Investoren haben einen einheitlichen Planungshorizont t_1 und betrachten das totale Vermögen des Marktes als eine Zufallsvariable \tilde{W} . Ausgehend von einer Anfangsallokation

$$(s_1 \tilde{W}, \dots, s_n \tilde{W}), \quad \sum_{i=1}^n s_i = 1,$$

ist es das Ziel der Investoren, eine Neuallokation

$$(\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_n), \quad \text{wobei } \sum_{i=1}^n \tilde{Z}_i = \tilde{W},$$

des Börsenrisikos zu finden, so dass auf dem Markt ein Preisgleichgewicht herrscht.

Das heisst: wir können eine Preisdichte ϕ und eine Neuallokation $(\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_n)$ finden, welche das Optimierungsproblem

$$\max_{\tilde{Z}_i} E_i[u_i(\tilde{Z}_i^*)]$$

löst unter der Budgetrestriktion

$$\text{Wert von } \tilde{Z}_i^* := E[\tilde{Z}_i^* \cdot \phi(\tilde{W})] \leq \text{Wert von } s_i \tilde{W} := E[s_i \tilde{W} \cdot \phi(\tilde{W})],$$

wobei E_i den Erwartungswert der Zufallsvariablen \tilde{W} bezüglich einer subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilung des i -ten Investors bezeichnet und E den Erwartungswert der Zufallsvariablen \tilde{W} bezüglich der objektiven oder "wahren" Wahrscheinlichkeitsverteilung. Falls die Marktteilnehmer die Verteilung von \tilde{W} kennen, so existiert ein Marktgleichgewicht, bestehend aus einer Preisdichte ϕ und

einer Neuallokation $(\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_n)$. Der Existenzbeweis beruht auf dem Satz von Borch und dem Fixpunktsatz von Brouwer. Sind die Investoren jedoch unterschiedlicher Meinung oder kennen sie die exakte Verteilung von \tilde{W} nicht, so lässt sich mit Hilfe eines verallgemeinerten Satzes von Borch das obige Optimierungsproblem lösen. Zudem sind die Preisgleichgewichte Pareto optimal und mit dem Fixpunktsatz von Brouwer, unter geeigneten Voraussetzungen, lässt sich immer noch die Existenz eines Preisgleichgewichtes nachweisen.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Existenz von Preisgleichgewichten und mit dem Verhalten der Investoren bei nichtlinearen Risikoallokationen. Als erstes wird der

Fall untersucht, in dem die subjektiven Bewertungen der Zufallsvariablen \tilde{W} mit der objektiven Bewertung übereinstimmen. In einem weiteren Schritt wird der allgemeine Fall untersucht.

Abstract

A market with n investors is considered. The participants in the market are situated at a time t_0 and can trade only at the moment t_0 . Each investor i is endowed with positive shares s_i in total financial wealth and evaluates his claims on financial wealth at the end of the period, therefore at a time t_1 , $t_1 > t_0$, with a Neumann/Morgenstern utility function u_i . The n investors have the same planning horizon t_1 and consider the value of total financial wealth at the end of the period as a random variable \tilde{W} . Starting with an initial allocation of claims on financial wealth:

$$(s_1 \tilde{W}, \dots, s_n \tilde{W}), \quad \sum_{i=1}^n s_i = 1,$$

the goal is to determine a reallocation

$$(\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_n), \quad \text{where } \sum_{i=1}^n \tilde{Z}_i = \tilde{W},$$

of the market risk, such that the market will be in a price equilibrium. This means it is possible to find a price density ϕ and a reallocation $(\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_n)$ which solve the following optimization problem:

$$\max_{\tilde{Z}_i^*} E_i[u_i(\tilde{Z}_i^*)]$$

under the budget constraint

$$\text{Value of } \tilde{Z}_i^* := E[\tilde{Z}_i^* \cdot \phi(\tilde{W})] \leq \text{Value of } s_i \tilde{W} := E[s_i \tilde{W} \cdot \phi(\tilde{W})],$$

where E_i denotes expected value of the random variable \tilde{W} with respect to a subjective probability distribution of the i -th investor and E denotes expected value of the random variable \tilde{W} with respect to an objective or "true" probability distribution of \tilde{W} . If the participants in the market know the probability distribution of \tilde{W} , then it is possible to find a market equilibrium with a price density ϕ and a reallocation $(\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_n)$. For the proof of the existence we need the theorem of Borch and the Brouwer Fixed Point Theorem. We treat also the more general case where the investors have different expectations of the probability distribution of \tilde{W} . Even in this case, with the help of the generalized theorem of Borch and the Brouwer Fixed Point Theorem, it is possible to prove the existence of a price equilibrium. It turns out that the solution of the problem is Pareto optimal.

The present work deals with the existence of price equilibria, and with the behaviour of the investors, by non linear risk allocations in capital markets. Firstly the case is

investigated where the subjective assessments of the random variable \tilde{W} coincides with the objective one. In a second step the generalized case is considered.