

# Numerische Berechnung von 2-dimensionalen stationären Strömungen mit der Finite- Elemente-Methode (FEM)

**Student Paper**

**Author(s):**

Dai, Zuxiang

**Publication date:**

1999

**Permanent link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-004354082>

**Rights / license:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

# Numerische Berechnung von 2-dimensionalen stationären Strömungen mit der Finite-Elemente-Methode (FEM)

Von Zuxiang Dai

**Betreuer:**        **Andreas Läuchli**  
                      **Matthias Troyer**

**Professoren:**   **Walter Hunziker**  
                      **Gian Michele Graf**

Proseminar Theoretische Physik	<b><i>ETH</i></b> Zürich
Hydrodynamik	Datum: 14. Juni 1999



## **Vorwort**

Das Hand-out konzentriert sich auf die Finite-Elemente-Methode, die wir bei der numerischen Berechnung von 2-dim. stationären Strömungen verwenden. Die Finite-Elemente-Methode ist eine ziemlich junge Methode. Sie ist erst seit Mitte 1950er Jahren existiert. Vor meiner Arbeit haben wir bei uns keine Spezialisten in dieser Methode. Deswegen muß ich die meisten Probleme selbst lösen. Das war eine große Herausforderung für mich. Auch darum möchte ich in diesem Hand-out die Methode ganz ausführlich erklären, damit alle sie gut verstehen können.

Herzlichen Dank für die ständigen Betreuung des Assistenz Andreas Läuchli und die große Leistung meines Kollegen Jan Michael Kratochvil, der mir bei der Rechtschreibkorrektur geholfen hat.

Z.D.



**INHALTSVERZEICHNIS**

<b>1</b>	<b>EINLEITUNG</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>DIE NAVIER-STOKESSCHE GLEICHUNG</b> .....	<b>1</b>
2.1	DIE NAVIER-STOKESSCHE GLEICHUNG.....	1
2.2	DIE REYNOLDS-ZAHL $Re$ .....	1
<b>3</b>	<b>DIE FINITE-ELEMENTE-METHODE</b> .....	<b>3</b>
3.1	EINFÜHRUNG .....	3
3.2	DAS GEWICHTET RESIDUUM UND DIE SCHWACHE FORMULIERUNG MIT DER GALERKIN-METHODE.....	4
3.3	DIE GESTALTFUNKTIONEN.....	6
3.4	DIE AUFGABENSTELLUNG.....	9
3.5	DAS TAYLOR-HOOD ELEMENT ( $P_2 - P_1$ ) .....	12
3.6	DIE BERECHNUNG.....	15
3.7	DAS RESULTAT .....	20
<b>4</b>	<b>LITERATURVERZEICHNIS</b> .....	<b>23</b>
<b>5</b>	<b>SACHVERZEICHNIS</b> .....	<b>24</b>



## 1 Einleitung

In diesem Hand-out beschäftigen wir uns für die numerische Berechnung von 2-dim. stationären Strömungen mit der Finite-Elemente-Methode. Am Anfang schauen wir schnell die Navier-Stokessche Gleichung und auch die Definition von der Reynolds-Zahl. Dann ist eine Einführung für die Finite-Elemente-Methode. Dann fangen wir an um die Navier-Stokessche Gleichung mit der Finite-Elemente-Methode zu lösen. Hier verwenden wir das Taylor-Hood Element ( $P_2 - P_1$ ). Es ist dreieckig mit 6 Knotenpunkten für die Geschwindigkeit (quadratisch) und 3 Knotenpunkten für den Druck (linear). Um die Navier-Stokessche Gleichung zu lösen, benützen wir hier die Galerkin-Formulierung, das heißt die Gewichtsfunktionen (weighting functions) sind gleich wie die Gestaltfunktionen (shape functions). Für das nicht-lineare Gleichungssystem benützen wir die Picard-Iterationsmethode. Am Ende werden wir das Ergebnis kurz diskutieren.

## 2 Die Navier-Stokessche Gleichung

### 2.1 Die Navier-Stokessche Gleichung

Die Navier-Stokessche Gleichung lautet wie folgt:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right] = - \text{grad } p + \eta \Delta \vec{v} + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \text{grad } \text{div } \vec{v} \quad (2,1)$$

wobei die Größen  $\eta$  und  $\zeta$  Zähigkeitskoeffizienten heißen ( $\zeta$  wird oft zweite Zähigkeit genannt),  $\rho$  ist die Dichte,  $p$  ist der Druck und  $\vec{v}$  ist die Geschwindigkeit. Die Gleichung (2,1) vereinfacht sich wesentlich, wenn man die Flüssigkeit als inkompressibel annehmen kann.

Dann ist  $\text{div } \vec{v} = 0$  (aus der Kontinuitätsgleichung  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ , wobei hier  $\rho = \text{Konstante}$ ),

und das letzte Glied auf der rechten Seite von (2,1) verschwindet. Wenn wir eine zähe Flüssigkeit betrachten, dann werden wir sie stets als inkompressibel annehmen und dementsprechend die Bewegungsgleichung in der Form

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} \quad (2,2)$$

schreiben. Jetzt definieren wir  $\nu := \frac{\eta}{\rho}$ ,  $\nu$  heißt kinematische Zähigkeit ( $\eta$  selbst wird dann als dynamische Zähigkeit bezeichnet).

### 2.2 Die Reynolds-Zahl $Re$

Beim Studium der Strömung von zähen Flüssigkeiten kann man eine ganze Reihe wesentlicher Ergebnisse aus einfachen Überlegungen über die Dimensionen der verschiedenen physikalischen Größen erhalten.

Von den Parametern, die die Flüssigkeit selbst charakterisieren, geht in die hydrodynamischen Gleichungen (die Navier-Stokessche Gleichung) nur die kinematische Zähigkeit  $\nu := \frac{\eta}{\rho}$  ein. Die unbekannt Funktionen, die durch Lösung der Gleichungen

bestimmt werden müssen, sind dabei die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und das Verhältnis  $p/\rho$  des Druckes  $p$  zu der Konstanten  $\rho$ . Außerdem hängt die Flüssigkeitsströmung über die Randbedingungen von der Gestalt und den Abmessungen des sich in der Flüssigkeit bewegend Körpers und von dessen Geschwindigkeit ab. Da die Gestalt des Körpers als vorgegeben angesehen wird, werden seine geometrischen Eigenschaften durch eine einzige, beliebig gewählte lineare Abmessung bestimmt, die wir mit  $l$  bezeichnen wollen. Die Geschwindigkeit der anströmenden Flüssigkeit sei  $U$ .

Jeder Strömungstyp wird auf diese Weise durch drei Parameter bestimmt:  $\nu, U$  und  $l$ . Diese Größen haben die Einheiten

$$[\nu] = \frac{m^2}{s}, \quad [l] = m \quad \text{und} \quad [U] = \frac{m}{s}.$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß man aus diesen Größen gerade eine dimensionslose Kombination bilden kann, nämlich  $Ul/\nu$ . Diese Kombination heißt Reynolds-Zahl und wird mit  $Re$  bezeichnet:

$$Re = \frac{\rho Ul}{\eta} = \frac{Ul}{\nu}. \quad (2,3)$$

Dabei wird  $U$  als charakteristische Geschwindigkeit und  $l$  als charakteristische Länge bezeichnet. Jeder andere dimensionslose Parameter kann als Funktion von  $Re$  geschrieben werden.

Wir können die Navier-Stokessche Gleichung (2,2) umschreiben als

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}\nabla)\vec{v} + \text{grad } p - \eta\Delta\vec{v} = 0 \quad (2,4)$$

Allgemein können wir schreiben:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}\nabla)\vec{v} + \text{grad } p - \eta\Delta\vec{v} = \rho\vec{f} \quad (2,5)$$

wobei  $\vec{f}$ : die Außenkraft pro Maßeinheit (body force per unit of mass) repräsentiert. Jetzt bemühen wir uns, die Navier-Stokessche Gleichung in dimensionsloser Form zu schreiben. In komponentenweiser Darstellung schreiben wir die Gleichung um zu:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3^2} \right) + \rho (v_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_i}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_i}{\partial x_3}) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho f_i$$

$$i = 1, 2, 3 \quad (2,6)$$

Jetzt definieren wir

$$x'_i = \frac{x_i}{l} \quad \vec{v}' = \frac{\vec{v}}{U} \quad p' = \frac{p}{\rho U^2} \quad \vec{f}' = \frac{\vec{f}}{(U^2/l)} \quad t' = \frac{U}{l} t \quad (2,7)$$

Ersetzen wir (2,7) in (2,6), dann erhalten wir:

$$\frac{\rho U^2}{l} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + \frac{\rho U^2}{l} (\vec{v}' \nabla) \vec{v}' + \frac{\rho U^2}{l} \text{grad } p' - \frac{\eta U}{l^2} \Delta \vec{v}' = \frac{\rho U^2}{l} \vec{f}' \quad (2,8)$$

Nun dividieren wir (2,8) durch  $\rho U^2/l$ , dann bekommen wir:

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}' \nabla) \vec{v}' + \text{grad } p' - \frac{\eta}{\rho U l} \Delta \vec{v}' = \vec{f}' \quad (2,9)$$

Wir wissen, daß  $Re = \frac{\rho U l}{\eta} = \frac{U l}{\nu}$ , und schreiben wir noch einmal schön um: Anstatt

$\vec{v}'$  verwenden wir  $\vec{v}$ , usw. D.h. von jetzt an sind alle  $\vec{v}$ ,  $p$ ,  $\vec{f}$ ,  $t$  dimensionslos. Wir erhalten somit

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \frac{1}{Re} \Delta \vec{v} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} + \text{grad } p = \vec{f} \quad (2,10)$$

und zusätzlich

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (2,11)$$

### 3 Die Finite-Elemente-Methode

#### 3.1 Einführung

Die Finite-Elemente-Methode ist eine Technik um die partielle differentialgleichungen zu lösen. Der wesentliche Vorteil oder Charakter der Finite-Elemente-Methode ist: Die Elemente brauchen nicht wie bei der Finite-Differential-Methode, daß die Masche Zeilen und Spalten orthogonal bleiben müssen. D.h. ein Element in der Finite-Elemente-Methode kann beliebige Form haben. z.B. dreieckig, (Eigentlich benützt die Finite-Elemente-Methode am Anfang eine dreieckige Form.<sup>1</sup>).

Die Finite-Elemente-Methode ist erst seit Mitte der 50er Jahre dieses Jahrhunderts aufgetaucht. Am Anfang versuchte man das kontinuierliche Problem in der Elastizität mit kleinen und diskreten "Elementen" zu lösen. Argyris (1954) und Turner *et al.* (1956) haben die Technik zuerst für die Flugzeugindustrie veröffentlicht. Der Name "finite element" wurde erst von Clough (1960) gegeben.

<sup>1</sup> Siehe *The Finite Element Method Basic: Concepts and Applications* Darrell W. Pepper / Juan C. Heinrich 1992 Hemisphere Publishing Corporation ( S. 55 )

Am Anfang benützte man diese Technik für Struktur- zusammenhängende Probleme. Später hat man wegen der Versalität dieser Methode bemerkt, daß man sie auch auf strukturlose Probleme anwenden kann.

Die Evolution der Finite-Elemente-Methode in der Hydrodynamik ist noch lange nicht abgeschlossen. Es ist wahrscheinlich sicher zu sagen, daß die einfachsten Probleme wie das Potential-Problem, kompressibel und inkompressibel sowie inkompressible Navier-Stokessche Probleme für niedrige bis mittel-hohe Reynolds-Zahlen die Finite-Elemente-Methode mehr oder weniger "ausgewachsen" ist. Hingegen ist die Entwicklung dieses Verfahrens für Navier-Stokessche Probleme immer noch am Voranschreiten. Für komplexere Probleme, wie z.B. kompressible Probleme von Euler oder diejenige der Navier-Stokesschen Gleichungen ist das Spektrum dieser Methode noch lange nicht ausgeschöpft. Dies ist selbstverständlich, wenn wir daran denken, daß für solche Probleme auch die *finite difference* und *finite volume* Methoden nicht vollständig sind.<sup>2</sup>

### 3.2 Das gewichtet Residuum und die schwache Formulierung mit der Galerkin-Methode

Nehmen wir zuerst ein Beispiel einer Differentialgleichung in einer Dimension:

$$-K \frac{d^2 u}{dx^2} = f, \quad 0 \leq x \leq L \quad (3,1)$$

dabei ist K eine Konstante ; die Randbedingungen sind gegeben durch

$$u(0) = u_0 \quad (3,2)$$

$$-K \frac{du}{dx}(L) = q \quad (3,3)$$

Dabei wird (3,2) oft als Dirichlet Randbedingungen bezeichnet, und (3,3) als Neumann Randbedingung.

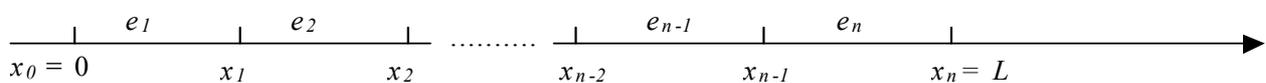


Abb. 3.1

Zuerst definieren wir ein Gitter im Intervall  $0 \leq x \leq L$ , mit einer beschränkten Anzahl von nicht überlappenden Intervallen, die das ganze Gebiet überdecken, wie in Abb. (3.1). Hier ist jedes Subintervall -Element genannt -

$$e_i = \{x : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \quad (3,4)$$

<sup>2</sup> Siehe *Computational Fluid Dynamics: An Introduction* With Contributions by J.D. Anderson, G. Degrez, E. Dick, and R. Grundmann 1992 Springer-Verlag (S. 224)

$x_i$  heißt ein "Knoten".

Jetzt suchen wir eine Lösung von der Form

$$\hat{u} = \psi + \sum_{i=0}^n \phi_i u_i \quad (3,5)$$

Dabei ist  $\psi$  eine Funktion, die die Randbedingungen (3,2) und (3,3) erfüllt; die  $\phi_i$ 's werden Basisfunktionen oder Gestaltfunktionen (shape functions) genannt. Weil die Dimension der Funktion  $\Phi = \{\phi_i; i = 0, 1, \dots, n\}$  beschränkt ist, ist (3,5) im allgemeinen nicht die Lösung von (3,1) in jeden Punkt in dem Gebiet. Das heißt die approximative Lösung  $\hat{u}$  ist normalerweise nicht identisch mit der exakten Lösung  $u$ . Natürlich müssen wir den Raum der Funktion  $\Phi$  groß genug wählen, d.h. wir lassen  $n$  anwachsen; damit kann (3,5) die exakte Lösung besser approximieren. Das heißt, die approximative Lösung  $\hat{u}$  konvergiert gegen die exakte Lösung  $u$ . Das ist die sogenannte Vollständigkeitsbedingung (completeness requirement) des Raums der Funktion.

Weil die Funktion  $\hat{u}$  von (3,5) nicht die Gleichung (3,1) erfüllen kann, wenn wir (3,5) in (3,1) einsetzen, gibt es ein Residuum

$$r_\Omega = -K \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} - f \quad \text{in } \Omega \quad (3,6)$$

Jetzt haben wir ein Weg gefunden um die approximative Lösung  $\hat{u}$  zu finden, nämlich in dem wir das Residuum so klein (gegen 0) wie möglich machen. In der Finite-Elemente-Methode wird dies erreicht durch Verlangen, daß die (geeignete Anzahl von) gewichteten Integralen des Residuums im Gebiet  $\Omega$  verschwinden:

$$\int_{\Omega} w_l r_\Omega d\Omega = 0; \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (3,7)$$

dabei ist  $W = \{w_l; l = 1, 2, \dots, n\}$  eine Reihe von Gewichtsfunktionen. Offensichtlich wird die Konvergenz von den Vollständigkeitsbedingungen des Raums der Gewichtsfunktionen verlangt, d.h. in der Gleichung (3,7) sollte  $r_\Omega \rightarrow 0$  falls  $n \rightarrow \infty$ .

Es gibt verschiedene mögliche Wahlen der Gewichtsfunktionen; z.B. man kann sich die Dirac-Delta Funktionen in  $n$  Punkte als Gewichtsfunktionen aussuchen. Ein weiteres einfaches Beispiel ist

$$\begin{cases} w_l = 1 & \text{falls } x_{l-1} \leq x \leq x_l \\ w_l = 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3,8)$$

Die in der Finite-Elemente-Methode meistens verwendeten Gewichtsfunktionen sind dieselben wie die Gestaltfunktionen, nämlich

$$w_l = \phi_l \quad (3,9)$$

Diese Auswahl heißt die Galerkin-Methode. Sie bedeutet, daß das Residuum orthogonal zum Raum der Gestaltfunktionen sein muß. In der Praxis ist sie von Vorteil in der nicht-regulären

Geometrie in großen Dimensionen und bei nicht-linearen Problemen, weil man nicht eine andere separate Gewichtsfunktion suchen muß, usw.

In den meisten Fällen ist es nicht praktisch, eine Funktion wie in (3,5), die alle Randbedingungen erfüllt, zu konstruieren.

Normalerweise kann eine approximative Lösung so schreiben werden:

$$\hat{u} = \sum_{i=0}^n \phi_i u_i \quad (3,10)$$

Um dies zu veranschaulichen, setzen wir jetzt (3,6) in (3,7) mit der Galerkin-Methode ein. Dann bekommen wir

$$\int_0^L \phi(x) \left[ -K \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} - f \right] dx = 0 \quad (3,11)$$

Weil

$$\int_0^L \phi(x) \left[ -K \frac{d^2 \hat{u}}{dx^2} \right] dx = \int_0^L K \frac{d\phi}{dx} \frac{d\hat{u}}{dx} dx - K \phi \frac{d\hat{u}}{dx} \Big|_0^L \quad (3,12)$$

ist dann (3,11) gleich

$$\int_0^L K \frac{d\phi}{dx} \frac{d\hat{u}}{dx} dx - K \phi \frac{d\hat{u}}{dx} \Big|_0^L - \int_0^L \phi f dx = 0 \quad (3,13)$$

Das ist die sogenannte schwache Form (weak form) in 1 Dimension mit nur einem Element.

### 3.3 Die Gestaltfunktionen

Das Gebiet  $\Omega$  kann in die nicht-überlappenden Untergebiete  $e_i$  unterteilt werden, wobei  $e_i$  das sogenannte "Element" ist. In diesem Fall ist  $e_i$  wie in der (3,4)

$$e_i = \{x : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \quad (3,14)$$

Dann können wir so schreiben:

$$\hat{u} = \sum_{i=0}^n \phi_i u_i. \quad (3,15)$$

Dabei ist es hier

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h_1} & \text{falls } x_0 \leq x \leq x_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3,16)$$

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_i} & \text{falls } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} & \text{falls } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3,17)$$

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{h_n} & \text{falls } x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3,18)$$

dabei ist es:

$$h_i = x_i - x_{i-1} \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3,19)$$

Eine Bemerkung dazu:  $\phi_i(x)$  ist im allgemeinen nicht  $\phi_{e(i)}(x)$  in Abb. (3.2).

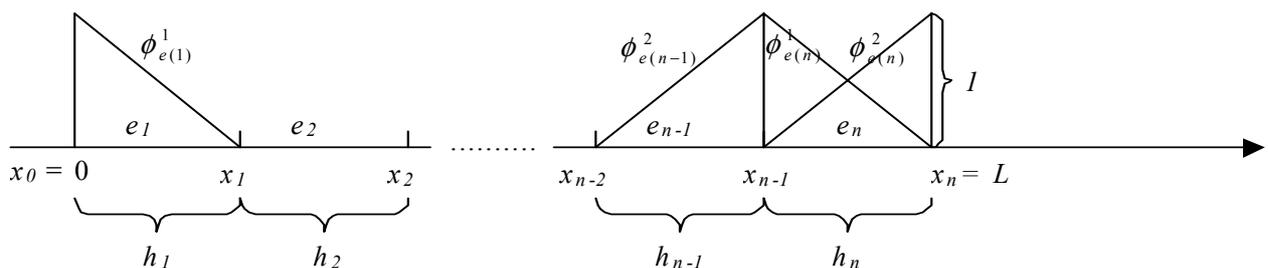


Abb. 3.2

Es gibt eine Methode, um die Gestaltfunktion zu rechnen: in einem Element  $e_i$  gibt es hier zwei Gestaltfunktionen, nämlich  $\phi_{e_i}^1$  und  $\phi_{e_i}^2$ . Anstatt  $\phi_{e_i}^1$  und  $\phi_{e_i}^2$  schreiben wir  $\phi^1$  und  $\phi^2$ . Weil  $\phi$  hier linear ist, dann können wir definieren

$$\hat{u} = \alpha_1 + \alpha_2 x. \quad (3,20)$$

Dabei sind  $\alpha_1, \alpha_2$  zwei Konstanten. Wir wissen:  $\hat{u}(x_1) = u_1$  und  $\hat{u}(x_2) = u_2$ . Das heißt:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 \\ u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 \end{cases} \quad (3,21)$$

Dann haben wir

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{h_1} \\ \alpha_2 = \frac{u_2 - u_1}{h_1} \end{cases} \quad (3,22)$$

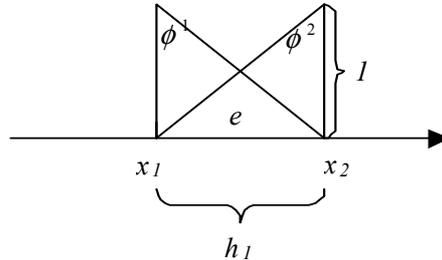


Abb. 3.3

Dann ist :

$$\hat{u}(x) = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{h_1} + \frac{u_2 - u_1}{h_1} x \quad (3,23)$$

Nach der Umschreibung erhalten wir:

$$\hat{u}(x) = \left[ \frac{x_2 - x}{h_1} \right] u_1 + \left[ \frac{x - x_1}{h_1} \right] u_2 \quad (3,24)$$

dabei sind

$$\phi^1 = \frac{x_2 - x}{h_1} \quad \text{und} \quad \phi^2 = \frac{x - x_1}{h_1} \quad (3,25)$$

Es ist einfacher, daß wir zuerst in Lokal wie oben für jedes Element arbeiten, dann können wir es wieder in Global zusammenbauen zu (3,15).

Teilen wir das Integral jetzt in kleine Intervalle auf

$$\int_{\Omega} ( \dots ) d\Omega = \sum_i \int_{e_i} ( \dots ) d\Omega \quad (3,26)$$

Wir wissen, in einem kleinen Intervall kann man sehr einfach mit numerischen Methoden integrieren. Nachdem wir alles in einer großen Matrix zusammengebaut haben, erhalten wir das Resultat durch das Lösen der linearen Gleichungen.

Außerdem müssen wir noch das nicht-lineare Problem lösen: zuerst linearisieren wir das Gleichung-System. Man muß dann einen Anfangswert geben, der normalerweise die Lösung des linearen Problems ist. Durch das Iterieren finden wir das endgültige Resultat.

Jetzt fangen wir an, sich mit dem Problem der 2-dimensionalen Navier-Stokesschen Gleichung zu befassen.

### 3.4 Die Aufgabenstellung

Am Anfang haben wir eine ruhende inkompressible zähe Flüssigkeit. Dann lassen wir eine Strömung mit einer konstantischen Geschwindigkeit  $u_0$  an den oberen Rand durchziehen. Alle anderen Rande sind fest.

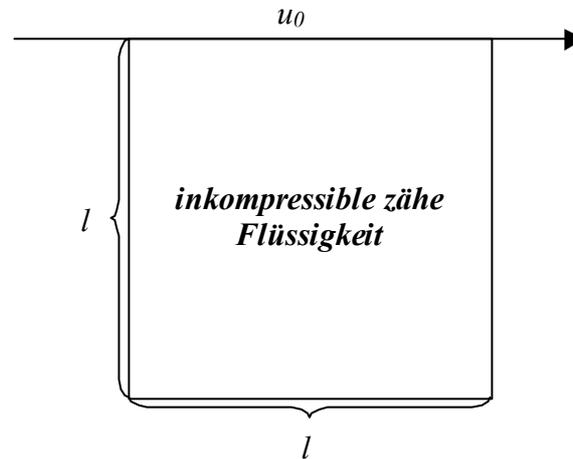


Abb. 3.4

Was passiert nach einem gewissen langen Zeit? d.h. nachdem die Flüssigkeit zu einem stabilen Zustand gelangen ist, die mathematische Beschreibung wird als

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \quad (3,27)$$

bezeichnet. Es gibt hier keine Außenkraft  $\vec{f}$ . Dann wird die Navier-Stokessche Gleichung wie folgendes vereinfacht,

$$-\frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} + \text{grad } p = 0 \quad (3,28)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (3,29)$$

Den konvektiven Term  $(\vec{v} \nabla) \vec{v}$  nennen wir nicht-linearen Term, weil es nicht-lineare Gleichung bildet. Jetzt schreiben wir die Gleichung in integraler Form mit der Gewichtsfunktion. Es wird komponentenweiser geschrieben, weil es sich hier um das 2-dimensionale Problem handelt, ist  $i = 1, 2$ .

$$\int_{\Omega} \phi^i \left[ -\frac{1}{\text{Re}} \Delta v_i + (\vec{v} \nabla) v_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] d\Omega = 0 \quad i = 1, 2 \quad (3,30)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega} \left( -\frac{\phi^i}{\text{Re}} \Delta v_i \right) d\Omega + \int_{\Omega} \phi^i (\vec{v} \nabla) v_i d\Omega + \int_{\Omega} \phi^i \frac{\partial p}{\partial x_i} d\Omega = 0 \quad (3,31)$$

Wir wissen

$$\phi^i \Delta v_i = \operatorname{div}(\phi^i \nabla v_i) - \nabla v_i \bullet \nabla \phi^i \quad (3,32)$$

und

$$\phi^i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (p \phi^i) - p \frac{\partial \phi^i}{\partial x_i} \quad (3,33)$$

Dann erhalten wir von (3,31)

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \frac{1}{\operatorname{Re}} \left[ \operatorname{div}(\phi^i \nabla v_i) - \nabla v_i \bullet \nabla \phi^i \right] d\Omega + \int_{\Omega} \phi^i (\bar{v} \nabla) v_i d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (p \phi^i) - p \frac{\partial \phi^i}{\partial x_i} \right] d\Omega = 0 \\ \Rightarrow & - \int_{\Omega} \frac{1}{\operatorname{Re}} \left[ \frac{\partial(\phi^i \nabla v_i)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\phi^i \nabla v_i)}{\partial x_2} - \nabla v_i \bullet \nabla \phi^i \right] d\Omega + \int_{\Omega} \phi^i (\bar{v} \nabla) v_i d\Omega + \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (p \phi^i) - p \frac{\partial \phi^i}{\partial x_i} \right] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3,34)$$

In Verbindung mit der Gaußschen Theorie (dabei ist  $\tau$  Rand und  $\bar{n}$  ist das normierte nach Außen zeigende Vektor)

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \bar{a} d\Omega = \int_{\tau} \bar{a} \bullet \bar{n} d\tau \quad (3,35)$$

und der Green'schen Form in 2-dim.

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{\tau} (f dx_2 - g dx_1) \quad (3,36)$$

haben wir

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\operatorname{Re}} (\nabla v_i \bullet \nabla \phi^i) d\Omega - \underbrace{\int_{\tau} \frac{1}{\operatorname{Re}} (\phi^i \nabla v_i dx_2 - \phi^i \nabla v_i dx_1)}_{=0 \text{ weil } \nabla v_i = 0} + \int_{\Omega} \phi^i (\bar{v} \nabla) v_i d\Omega + \underbrace{\int_{\tau} p \phi^i \bar{n}_i d\tau}_{=0 \text{ Weil am Rand } \phi^i = 0} - \int_{\Omega} p \frac{\partial \phi^i}{\partial x_i} d\Omega = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \frac{1}{\operatorname{Re}} (\nabla v_i \bullet \nabla \phi^i) d\Omega + \int_{\Omega} \phi^i (\bar{v} \nabla) v_i d\Omega - \int_{\Omega} p \frac{\partial \phi^i}{\partial x_i} d\Omega = 0 \quad (3,37)$$

Außerdem ist immer noch

$$\int_{\Omega} \psi \operatorname{div} \bar{u} d\Omega = 0. \quad (3,38)$$

dabei ist  $\psi$  eine andere Gewichtsfunktion.

Vergessen wir momentan den Term  $\int_{\Omega} \phi^i (\vec{v} \nabla) v_i d\Omega$  und untersuchen nur das lineare Problem.

Dann bekommen wir das Gleichungssystem :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\text{Re}} (\nabla v_i \bullet \nabla \phi^i) d\Omega - \int_{\Omega} p \frac{\partial \phi^i}{\partial x_i} d\Omega = 0 \quad i = 1, 2 \quad (3,39)$$

$$\int_{\Omega} \psi \text{div} \vec{u} d\Omega = 0 \quad (3,40)$$

Wir wählen  $\phi^i = \phi^j$  und schreiben es auf einfacher Weise als  $\phi$ . (Bitte beachten hier die Unterschiede zwischen  $\phi^i$  in (3,39) und  $\phi^i, \phi^j$  in den folgenden Gleichungen.) dann haben wir

$$\begin{cases} \tilde{v}_i = \sum_{j=1}^N \phi^j \tilde{v}_{ij} \\ \tilde{p} = \sum_{k=1}^M \psi^k \tilde{p}_k \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (3,41)$$

Setzen wir (3,41) in (3,39) und (3,40) ein und erhalten (Hier ist  $\Omega$  ein Element, d.h. Lokal.)

$$\sum_{j=1}^N \tilde{v}_{1j} \int_{\Omega} \frac{1}{\text{Re}} (\nabla \phi^j \bullet \nabla \phi^i) d\Omega - \sum_{k=1}^M \tilde{p}_k \int_{\Omega} \psi^k \frac{\partial \phi^i}{\partial x_1} d\Omega = 0 \quad (3,42)$$

$$\sum_{j=1}^N \tilde{v}_{2j} \int_{\Omega} \frac{1}{\text{Re}} (\nabla \phi^j \bullet \nabla \phi^i) d\Omega - \sum_{k=1}^M \tilde{p}_k \int_{\Omega} \psi^k \frac{\partial \phi^i}{\partial x_2} d\Omega = 0 \quad (3,43)$$

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Omega} (\tilde{v}_{1j} \frac{\partial \phi^j}{\partial x_1} + \tilde{v}_{2j} \frac{\partial \phi^j}{\partial x_2}) \psi^k d\Omega = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad k = 1, \dots, M \quad (3,44)$$

Jetzt haben wir eine Matrix:

$$\begin{bmatrix} S_{u_1 u_1} & 0 & L_{u_1 p}^T \\ 0 & S_{u_2 u_2} & L_{u_2 p}^T \\ L_{p u_1} & L_{p u_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3,45)$$

mit Untermatrizen:

$$S_{u_1 u_1}(i, j) = S_{u_2 u_2}(i, j) = \int_{\Omega} \frac{1}{\text{Re}} (\nabla \phi^i \bullet \nabla \phi^j) d\Omega,$$

$$L_{p u_k}(i, j) = L_{u_k p}^T(j, i) = \int_{\Omega} \psi^i \frac{\partial \phi^j}{\partial x_k} d\Omega,$$

Unbekannt sind :

$$\vec{v}_k^T = [v_{k1}, \dots, v_{kN}], \quad p^T = [p_1, \dots, p_M],$$

Das obengeschriebene Gleichungssystem ist ein vollständiges Gleichungssystem mit einem Element. Nach der Berechnung der einzelnen Gleichungen in einem lokalen System stellen wir alle Gleichungen zusammen (The Assembly). Am Ende haben wir eine globale Matrix zu berechnen, um das Resultat zu bekommen.

### 3.5 Das Taylor-Hood Element ( $P_2 - P_1$ )

Theoretisch haben wir schon das Gleichungssystem gelöst. Aber in der Realität müssen wir die Gestaltfunktion manuell suchen, natürlich, nachdem wir das Element bestimmt haben. Dafür verwenden wir das Taylor-Hood Element ( $P_2 - P_1$ ). Es gibt sehr viele Auswähle für das Element. Das Prinzip für die Auswähle der Elementen und der Funktionen ist:  $\phi$  muß stetig differenzierbar in jedem Element und stetig in dem ganzen Gebiet sein. [siehe (3,42), (3,43) und (3,44)]. Anders als  $\phi$  sollte  $\psi$  nur stetig in jedem Element, aber nicht unbedingt in dem ganzen Gebiet sein, d.h., sie sollte integralbel sein. Deswegen gibt es viele Methode, in denen man einfach annimmt, daß  $p$  in jedem Element ein Konstant ist. Es erleichtert die Arbeit zwar ein bißchen, ist aber hier nicht empfehlenswert, weil dann das Resultat weniger präzise wird, besonders wenn man nicht nur die Geschwindigkeit, sondern auch den Druck untersucht. Außerdem müssen wir genügend linear-unabhängige Gleichungen haben, damit wir ein eindeutiges Endresultat bekommen können. Erst jetzt bekommen wir die zulässige Elementen. In manchen Sinnen zu sagen ist die Auswählen des Elementstyp mehr oder weniger eine Kunst als eine rein wissenschaftliche Überlegung. Erfahrungen und Geschmack spielen hier eine große Rolle. Denjenigen an dieses Thema interessierten LeserInnen empfehle ich die Referenzen [1], [6] und [7] im Literaturverzeichnis für die ausführlicheren Informationen.

Jetzt fangen wir mit dem Taylor-Hood Element ( $P_2 - P_1$ ) an.

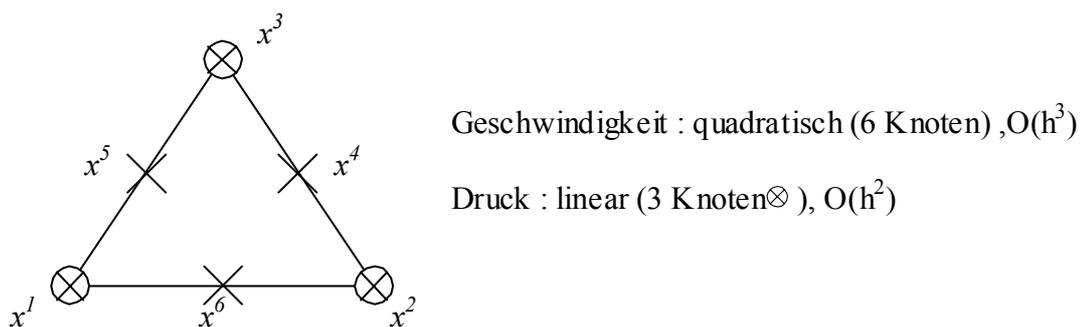


Abb. 3.5 Taylor-Hood Element ( $P_2 - P_1$ )

Bevor wir die Gestaltfunktion formulieren werden, führen wir hier das lokale Koordinatensystem mit den folgenden Definitionen der drei Variablen,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  ein.

$$\begin{cases} L_1 = \frac{A_1}{A} \\ L_2 = \frac{A_2}{A} \\ L_3 = \frac{A_3}{A} \end{cases} \quad (3,46)$$

Dabei sind  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  die Teilflächeninhalte [siehe in Abb. (3,6)] und  $A$  der gesamte Flächeninhalt. Dabei ist  $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ . Wir sehen, daß egal wie der Dreieck aussieht, sind  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  immer gültig, und wir haben deshalb immer dieselbe Gestaltfunktion in dem lokalen Koordinatensystem.

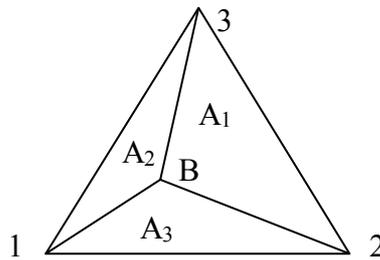


Abb. 3.6

Noch anschaulicher ist die Abb. (3.7) :

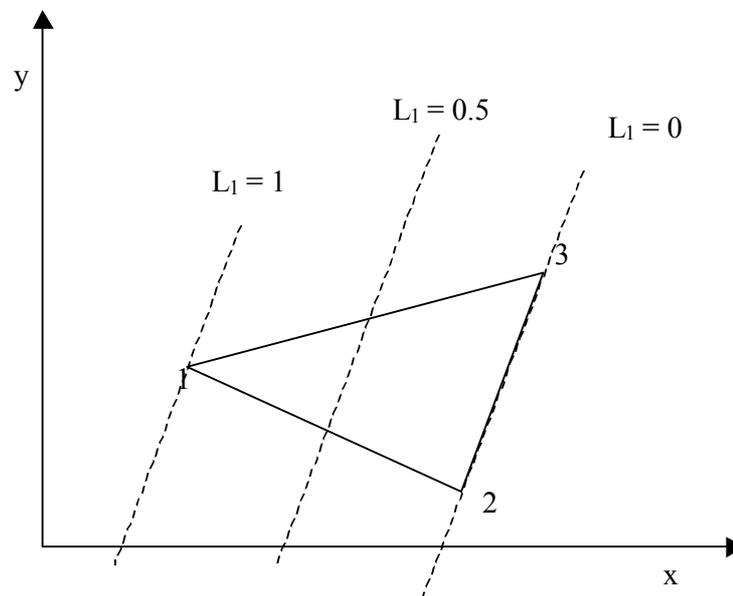


Abb. 3.7

Für den linearen Druck ist die Gestaltfunktion gleich wie diejenige der Variablen  $L$ , d.h.

$$\begin{cases} \phi^1 = L_1 \\ \phi^2 = L_2 \\ \phi^3 = L_3 \end{cases} \quad (3,47)$$

Deswegen ist für irgendeinen Punkt mit den Koordinaten  $(x, y)$  innert des Dreiecks haben wir die folgende Formel zu ausdrücken :

$$\begin{cases} x = L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 \\ y = L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 \\ 1 = L_1 + L_2 + L_3 \end{cases} \quad (3,48)$$

Die quadratische Gestaltfunktion der Geschwindigkeit können wir mit der in dem Schnitt 3.3 (Seite 7) eingeführten Methode rechnen, und erhalten wir

$$\begin{cases} \phi^1 = L_1(2L_1 - 1) \\ \phi^2 = L_2(2L_2 - 1) \\ \phi^3 = L_3(2L_3 - 1) \\ \phi^4 = 4L_2L_3 \\ \phi^5 = 4L_1L_3 \\ \phi^6 = 4L_1L_2 \end{cases} \quad (3,49)$$

Die Rechnungen hier ist ein bißchen komplizierter als vorher. Zuerst betrachten wir die Bedingung  $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ . In den praktischen Anwendungen nehmen wir immer an, daß  $L_1$  und  $L_2$  linear unabhängig sind, dann bekommen wir:

$$\begin{cases} \frac{d\phi^i}{dL_1} = \frac{d\phi^i}{dx} \frac{dx}{dL_1} + \frac{d\phi^i}{dy} \frac{dy}{dL_1} \\ \frac{d\phi^i}{dL_2} = \frac{d\phi^i}{dx} \frac{dx}{dL_2} + \frac{d\phi^i}{dy} \frac{dy}{dL_2} \end{cases} \quad (3,50)$$

Nach der Umschreibung in Matrix Form ergibt es

$$\begin{bmatrix} \frac{d\phi^i}{dL_1} \\ \frac{d\phi^i}{dL_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dL_1} & \frac{dy}{dL_1} \\ \frac{dx}{dL_2} & \frac{dy}{dL_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\phi^i}{dx} \\ \frac{d\phi^i}{dy} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{d\phi^i}{dx} \\ \frac{d\phi^i}{dy} \end{bmatrix} \quad (3,51)$$

Dabei ist  $J$  Jacobi Matrix . Mit anderen Wort ist (3,51) wie folgendes:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\phi^i}{dx} \\ \frac{d\phi^i}{dy} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{d\phi^i}{dL_1} \\ \frac{d\phi^i}{dL_2} \end{bmatrix} \quad (3,52)$$

Im allgemeinen ist für eine Funktion  $f$ ,

$$\frac{df}{dL_1} = \frac{\partial f}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial L_1} + \frac{\partial f}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial L_1} + \frac{\partial f}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial L_1} \quad (3,53)$$

Nach unserer Annahme sind  $L_1$  und  $L_2$  linear unabhängig und  $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ , das heißt nichts anders als  $L_3 = 1 - L_1 - L_2$ . Dann erhalten wir

$$\frac{\partial L_3}{\partial L_1} = \frac{\partial(1 - L_1 - L_2)}{\partial L_1} = \frac{\partial(1)}{\partial L_1} - \frac{\partial L_1}{\partial L_1} - \frac{\partial L_2}{\partial L_1} = 0 - 1 - 0 = -1 \quad (3,54)$$

und zum Schluß:

$$\begin{cases} \frac{df}{dL_1} = \frac{\partial f}{\partial L_1} - \frac{\partial f}{\partial L_3} \\ \frac{df}{dL_2} = \frac{\partial f}{\partial L_2} - \frac{\partial f}{\partial L_3} \end{cases} \quad (3,55)$$

### 3.6 Die Berechnung

Im Schnitt 3.6 haben wir die Gestaltfunktion in einem lokalen Koordinatensystem definiert, und auch gelernt, wie man sie in ein Globalsystem umwandelt. Wählen wir jetzt die Elemente wie folgendes:

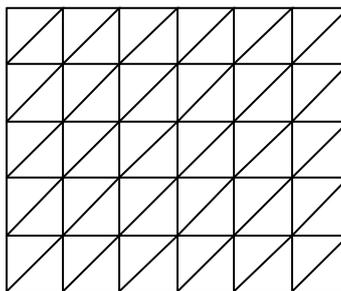


Abb. 3.8

Für die einzelnen Elemente haben wir das lokale System mit 2 Elementstypen, Typ ① und Typ ② [siehe in Abb. (3,9)].

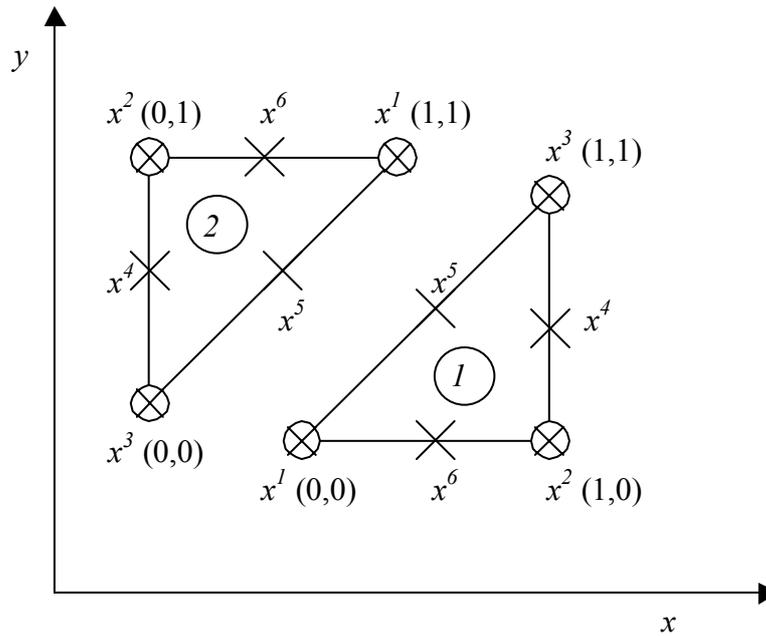


Abb.3.9

Zuerst rechnen wir die Jacobi Matrix für Typ ①. Wir wissen:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dL_1} = \frac{\partial x}{\partial L_1} - \frac{\partial x}{\partial L_3} = -1 \\ \frac{dx}{dL_2} = \frac{\partial x}{\partial L_2} - \frac{\partial x}{\partial L_3} = 0 \\ \frac{dy}{dL_1} = \frac{\partial y}{\partial L_1} - \frac{\partial y}{\partial L_3} = -1 \\ \frac{dy}{dL_2} = \frac{\partial y}{\partial L_2} - \frac{\partial y}{\partial L_3} = -1 \end{cases} \quad (3,56)$$

Dabei sind x, y wie in (3, 48):

$$\begin{cases} x = L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 \\ y = L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 \\ 1 = L_1 + L_2 + L_3 \end{cases} \quad (3,57)$$

Dann haben wir:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dL_1} & \frac{dy}{dL_1} \\ \frac{dx}{dL_2} & \frac{dy}{dL_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad J^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det(J) = 1 \quad (3,58)$$

Und

$$\begin{bmatrix} \frac{d\phi^i}{dx} \\ \frac{d\phi^i}{dy} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{d\phi^i}{dL_1} \\ \frac{d\phi^i}{dL_2} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi^i}{\partial L_1} & \frac{\partial\phi^i}{\partial L_3} \\ \frac{\partial\phi^i}{\partial L_2} & \frac{\partial\phi^i}{\partial L_3} \end{bmatrix} \quad (3,59)$$

Für die Geschwindigkeit ist

$$\begin{cases} \phi^1 = L_1(2L_1 - 1) \\ \phi^2 = L_2(2L_2 - 1) \\ \phi^3 = L_3(2L_3 - 1) \\ \phi^4 = 4L_2L_3 \\ \phi^5 = 4L_1L_3 \\ \phi^6 = 4L_1L_2 \end{cases} \quad (3,60)$$

Für den Druck haben wir:

$$\begin{cases} \psi^1 = L_1 \\ \psi^2 = L_2 \\ \psi^3 = L_3 \end{cases} \quad (3,61)$$

Konkreterweise berechnen wir wie folgendes:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\phi^1}{dx} \\ \frac{d\phi^1}{dy} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi^1}{\partial L_1} & \frac{\partial\phi^1}{\partial L_3} \\ \frac{\partial\phi^1}{\partial L_2} & \frac{\partial\phi^1}{\partial L_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4L_1 - 1 + 0 \\ 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 4L_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3,62)$$

.....

wie in (3,45) :

$$\begin{bmatrix} S_{u_1u_1} & 0 & L_{u_1p}^T \\ 0 & S_{u_2u_2} & L_{u_2p}^T \\ L_{pu_1} & L_{pu_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3,63)$$

$$S_{u_1u_1}(i, j) = S_{u_2u_2}(i, j) = \int_{\Omega} \frac{1}{\text{Re}} (\nabla\phi^i \cdot \nabla\phi^j) d\Omega := S_{u u}(i, j) \quad (3,64)$$

$$S_{uu}(i, j) = \int_{\Omega} \frac{1}{\text{Re}} \begin{bmatrix} \frac{d\phi^1}{dx} \frac{d\phi^1}{dx} + \frac{d\phi^1}{dy} \frac{d\phi^1}{dy} & \dots & \frac{d\phi^1}{dx} \frac{d\phi^6}{dx} + \frac{d\phi^1}{dy} \frac{d\phi^6}{dy} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d\phi^6}{dx} \frac{d\phi^1}{dx} + \frac{d\phi^6}{dy} \frac{d\phi^1}{dy} & \dots & \frac{d\phi^6}{dx} \frac{d\phi^6}{dx} + \frac{d\phi^6}{dy} \frac{d\phi^6}{dy} \end{bmatrix} = \int_{\Omega} \frac{1}{\text{Re}} \begin{bmatrix} (4L_1 - 1)^2 & \dots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$i, j = 1, \dots, 6 \quad (3,65)$$

Bei dem numerischen Integral benutzen wir die Form:

$$\int_{\Omega} f(\bar{x}) d\Omega = \frac{A}{3} [f(\bar{x}^4) + f(\bar{x}^5) + f(\bar{x}^6)] \quad (3,66)$$

Dabei ist A der Flächeninhalt des Dreieck. Wir benutzen hier die Einheit  $e=2A$  ( $e$  ist der Flächeninhalt des Vierecks), dann ergibt es

$$\int_{\Omega} f(\bar{x}) d\Omega = \frac{e}{6} [f(\bar{x}^4) + f(\bar{x}^5) + f(\bar{x}^6)] \quad (3,67)$$

Nach dem Integrieren bekommen wir:

$$S_{uu}(i, j) = \frac{1}{\text{Re}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \quad (3,68)$$

Auf analoger Weise können wir auch die anderen Komponenten in der Matrix (3,63) berechnen. Eine Nebenbemerkung: wir sollen den Typ ② separate rechnen. Hier kann man eindeutig sehen:  $S_{uu}$  im Typ ② ist identisch wie dasjenige im Typ ①, hingegen ist  $L_{pu}$  im Typ ② gleich  $-L_{pu}$  im Typ ①.

Nachdem wir alle einzelnen Elemente gerechnet haben, müssen wir jetzt sie zusammenbauen (The Assembly), und bekommen damit ein vollständiges Gleichungssystem.

Fangen wir jetzt mit der Lösung des Gleichungssystems an. Wir sehen, fast alle einzelnen Punkte gleichzeitig bei der Berechnung der verschiedenen Elemente beigezogen werden, das müssen wir berücksichtigen, indem wir die Einzelresultate entsprechend zusammenaddieren, wenn es sich um denselben Punkt handelt.

Bisher haben wir noch nicht über die Randbedingungen gesprochen. Wir sehen, es gibt einige bekannte Werte am Rand. Es darf nicht als unbekannt in der Matrix bezeichnet werden, sonst

kann der Computer nicht richtig rechnen. Um es zu vermeiden, verwenden wir die folgende Methode. Sei  $v_i$  ein bekannter Wert in dem  $n \times n$  lineare Gleichungssystem.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (3,69)$$

Dann machen wir die folgende Operation:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,i-1} & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - a_{1,i}v_i \\ \vdots \\ f_{i-1} - a_{i-1,i}v_i \\ f_{i+1} - a_{i+1,i}v_i \\ \vdots \\ f_n - a_{n,i}v_i \end{bmatrix} \quad (3,70)$$

Auf analoger Weise operieren wir alle bekannte Werte .

Wir haben nämlich das lineare Gleichungssystem gelöst. Aber das nicht-lineare Term  $\int_{\Omega} \phi^i(\vec{v}\nabla)v_i d\Omega$  in (3,37) bleibt bisher immer noch vernachlässigt. Einige Methode stehen dafür zur Verfügung wie z.B. Picard Iteration, Newton und Quasi-Newton usw. Ich wähle die Picard Methode, die zwar langsamer als Newton'sche Verfahren ist, aber relativ stabiler und robuster.

Die Grund Idee von Picard Methode lautet

$$\begin{cases} -\frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v}^n + \nabla p^n = -\vec{v}^{n-1} \bullet \nabla \vec{v}^{n-1} \\ \text{div}(\vec{v}^n) = 0 \end{cases} \quad (3,71)$$

Das bedeutet, in der  $n$ -te Iteration wird der nicht-lineare Term von dem Resultat der  $(n-1)$ -te Rechnungen ersetzt. An der ersten Iteration verwenden wir wie üblich das Resultat des linearen Gleichungssystem als Anfangswerte. Der Vorteil dieser Methode ist: man braucht die link-händige Matrix bei der Rechnung nichts zu ändern, sondern jedesmal nur den rechtsseitigen Vektor. Es ist aber allzu langsam und bei großer Reynolds-Zahl wird es sogar divergieren. In der Praxis verwenden wir normalerweise eine andere alternative Methode:

- i) wählen wir  $\vec{v}^{n-1}$  und  $\nabla \vec{v}$  als unbekannt in der neuen Iteration, oder umgekehrt
- ii) wählen wir  $\nabla \vec{v}^{n-1}$  und  $\vec{v}$  als unbekannt in der neuen Iteration.

Hier bevorzugen wir die erste Variante. Um das Problem des nicht-linearen Terms  $\int_{\Omega} \phi^i (\vec{v}\nabla)v_i d\Omega$  zu lösen, schreiben wir ihn auf Komponentenweise wie folgendes (Alle anderen Terme haben wir mal berechnet) :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (\tilde{v}_1^{n-1} \frac{dv_1^n}{dx_1} + \tilde{v}_2^{n-1} \frac{dv_1^n}{dx_2}) \phi^i d\Omega \\ \int_{\Omega} (\tilde{v}_1^{n-1} \frac{dv_2^n}{dx_1} + \tilde{v}_2^{n-1} \frac{dv_2^n}{dx_2}) \phi^i d\Omega \end{cases} \quad (3,72)$$

Weil  $\tilde{v}_1^{n-1}$  und  $\tilde{v}_2^{n-1}$  aus der letzten Iteration stammen, nämlich bekannt sind, ist (3,72) linear geworden, d.h. wir haben das nicht-lineare Problem linearisiert. Dann können wir (3,72) wie vorher rechnen und in das von uns schon berechnete lineare Gleichungssystem einbauen. Nach einigen Iterationen werden wir das Resultat bekommen. Für das Konvergenzkriterium verwenden wir die folgenden Regeln:

$$\sqrt{\sum_i (Err)^2} < \varepsilon \quad \text{wobei ist} \quad \begin{cases} Err := \frac{v_i^n - v_i^{n-1}}{1} & \text{falls } v_i^{n-1} = 0 \\ Err := \frac{v_i^n - v_i^{n-1}}{v_i^{n-1}} & \text{sonst} \end{cases} \quad (3,73)$$

Betrachten wir, daß die  $\vec{v}$  hier dimensionslos ist, und 1 die charakteristische Geschwindigkeit ist. Deshalb dürfen wir hier 1 bei  $v_i^{n-1} = 0$  anwenden.

Damit ist die Navier-Stokessche Gleichung vollständig gelöst. Um noch bessere Konvergenzradius haben zu können, verwenden wir zusätzliche Iterationen um die Reynolds-Zahl sukzessive zu erhöhen.

### 3.7 Das Resultat

Schauen wir wieder die Navier-Stokessche Gleichung in unserem Fall an

$$-\frac{1}{Re} \Delta \vec{v} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} + grad p = 0 \quad (3,74)$$

und sehen, außer dem konvektiven Term  $(\vec{v}\nabla)\vec{v}$  ist die Gleichung linear. Deswegen nennen wir immer  $(\vec{v}\nabla)\vec{v}$  den nicht-linearen Term. Ohne diesen Term haben wir eine schöne symmetrische Lösung wie in Abb. (3,10):

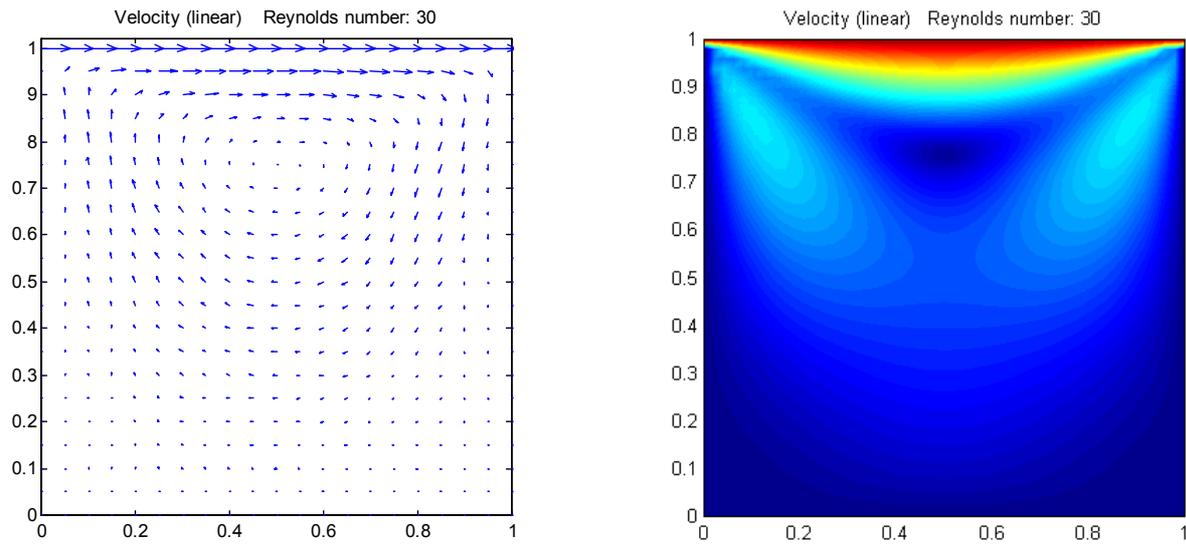


Abb. 3.10

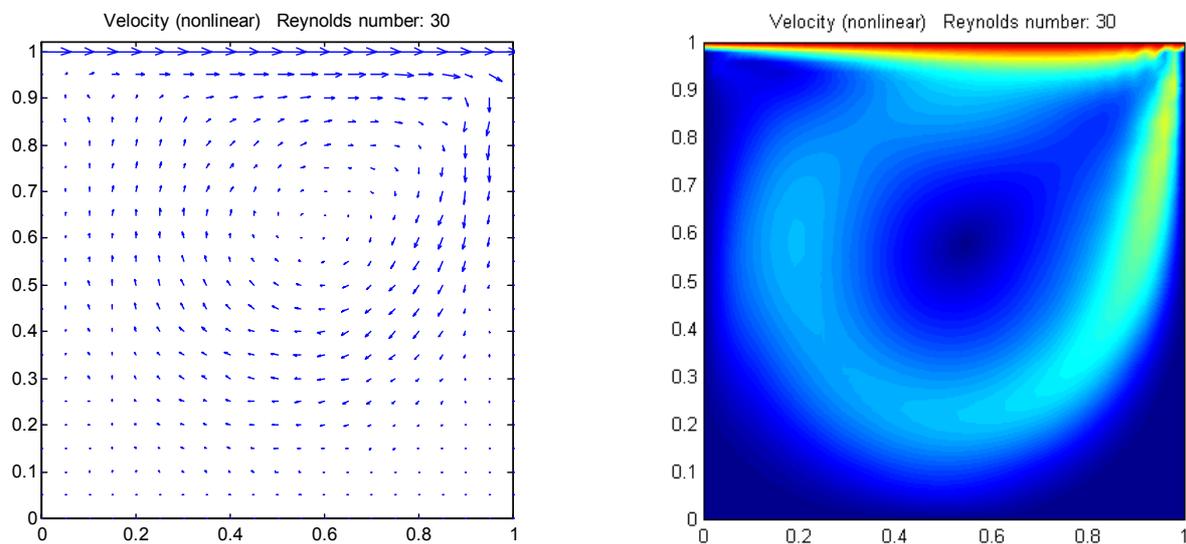


Abb. 3.11

Hingegen ist die Lösung der ganzen Navier-Stokesschen Gleichung nicht symmetrisch [siehe in Abb. (3.11)]. Wir sehen ganz deutlich, je größer die Reynolds-Zahl ist, desto kleiner ist der lineare Anteil in der Navier-Stokesschen Gleichung und desto mehr kommen nicht-symmetrische Bewegungen vor. Es bedeutet in numerischen Rechnungen, daß die Wahrscheinlichkeit für das Divergieren immer größer ist und die Stabilität des Systems sich verschlechtert.

Für den Druck sehen wir in Abb.(3.12) und Abb. (3.13).

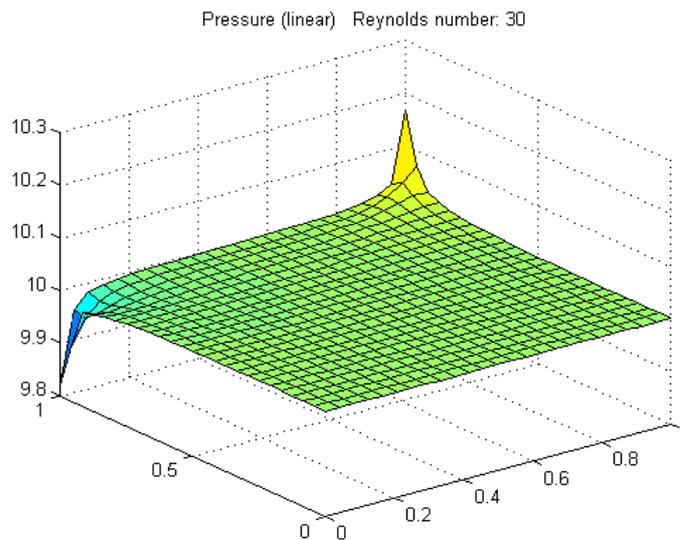


Abb. 3.12

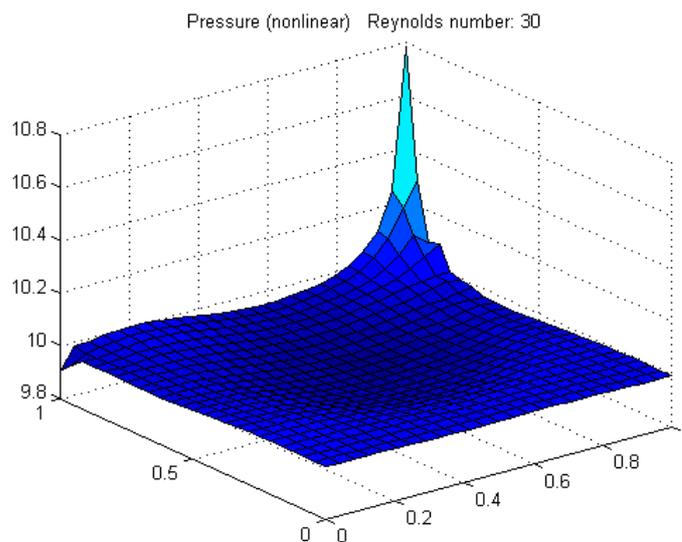


Abb. 3.13

In der linearen Navier-Stokesschen Gleichung ist der Druck beinahe konstant außer in den zwei Ecken. Es ist auch klar, denn in einer Ecke geht die Flüssigkeit immer weg und der Druck ist deshalb niedriger; hingegen haben wir in der anderen Ecke einen Hochdruck. In der Lösungsdarstellung der nicht-linearen vollständigen Navier-Stokesschen Gleichung sehen wir noch dazu Änderungen in Zentrumsgebiet, dort sinkt der Druck sukzessive nach Innern. Für sehr große Reynolds-Zahl (z.B.  $Re = 10'000$ ) sehen wir auch mehrere kleinen Wirbel in den drei verschiedenen Ecken [siehe Abb. (3.14)].

## 4 Literaturverzeichnis

- [1] Cuvelier, C. ; Segal, A. ;Steenhoven, A.A. van : Finite Element Methods and Navier-Stokes Equations , D. Reidel Publishing Company, 1986.
- [2] Landau, L.D.; Lifschitz, E.M. : Hydrodynamik (Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 6), Akademie-Verlag, Berlin 1991.
- [3] Anderson, J.D.; Degrez, G.; Dick, E.; Grundmann, R.: Computational Fluid Dynamics, An Introduction (A von Karman Institute Book), Springer-Verlag, 1992
- [4]Pepper, Darrell W.;Heinrich, Juan C.:The Finite Element Method: Basic Concepts and Applications, Hemisphere Publishing Corporation, 1992.
- [5] Girault, Vivette; Raviart, Pierre-Arnaud: Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms, Springer-Verlag, 1986.
- [6] Sani, R.L.; Gresho, P.M.;Lee, R.L.; Griffiths, D.F.; Engelman, M.:The cause and cure of the spurious preeures generated by certain Finite-Elemente-Methode solutions of the incompressible Navier-Stokes equations, Int. J. Num. Meth. In Fluids, Vol. 1, pp.17-43, 171-204, 1981.
- [7] Fortin, M.: Old and new finite element methods for incompressible flows, Int. J. Num. Meth. In Fluids, Vol. 1, pp.347-364, 1981.
- [8] Fletcher, C.A.J.:Computational Techniques for Fluid Dynamics 1, Fundamental and General Techniques, Springer-Verlag, 1988
- [9] Fletcher, C.A.J.:Computational Techniques for Fluid Dynamics 2, Specific Techniques for Different Flow Categories, Springer-Verlag, 1988

## 5 Sachverzeichnis

	<b>C</b>		<b>N</b>
completeness requirement	5	Navier-Stokessche Gleichung	1
		Neumann	4
	<b>D</b>		<b>P</b>
Dirichlet	4		
		Picard Iteration	19
	<b>E</b>		<b>R</b>
Element	6		
		Residuum	5
	<b>G</b>	Reynolds-Zahl	2
Galerkin Methode	5		<b>S</b>
		schwache Form	6
	<b>J</b>	Shape Function	5
Jacobi Matrix	14		<b>T</b>
		Taylor-Hood Element	12
	<b>K</b>	The Assembly	12
kinematische Zähigkeit	1		<b>W</b>
konvektiven Term	9		
	<b>L</b>	Weak Form	6
lokales Koordinatensystem	12		<b>Z</b>
		Zähigkeitskoeffizienten	1