Diss. ETH No. 14710

Ballistic Random Motions in Random Media

A dissertation submitted to the
SWISS FEDERAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
ZURICH

for the degree of
Doctor of Mathematics

presented by
LIAN SHEN
Dipl. Phys. ETH-Zürich
born Oct. 13, 1971
citizen of P. R. China

accepted on the recommendation of
Prof. Dr. A.-S. Sznitman, examiner
Prof. Dr. E. Bolthausen, co-examiner

2002

Abstract

We consider two different types of random motions in random media (RMRM), which are Markov processes when the random medium is fixed. We study their asymptotic properties, esp. the strong law of large numbers and a functional central limit theorem.

The first type of RMRM is the discrete random walks in random bond environment on $\mathbb{Z}^d$; i.e. the random environment is realized through i.i.d. random variables on the nearest neighbor bonds of $\mathbb{Z}^d$, and the random walks are Markov chains on $\mathbb{Z}^d$ under fixed environment. We show that for any anisotropy strength the strong law of large numbers and functional central limit theorem hold.

The second type of RMRM is the continuous diffusion in random environment on $\mathbb{R}^d$, which is the distribution of the solution for some stochastic differential equations. In this case, the random environment is incorporated into the drift term and the diffusion matrix. We provide a sufficient condition, under which the strong law of large numbers and a functional central limit theorem hold. We also apply these results to an explicit class of gradient-type anisotropic diffusion in random environment, and show that the sufficient condition is fulfilled for this class of examples.

For both models, we apply a strategy of introducing certain regeneration times, which was developed by Sznitman and Zerner in their investigation of random walks in i.i.d. random environment. These regeneration times provide us a Markovian structure in the first model, and a renewal structure in the continuous diffusion model, which are the key tools for the investigation in this thesis.

Zusammenfassung

Wir betrachten zwei verschiedene Modelle für zufällige Bewegungen in zufälligen Umgebungen. Für eine feste Umgebung ist die Bewegung ein Markov Prozess. Wir studieren die asymptotischen Eigenschaften von diesen Prozessen, insbesondere beweisen wir das starke Gesetz der grossen Zahlen und ein funktionalen zentraler Grenzwertsatz.

Das erste Modell ist die diskrete Irrfahrt in zufälliger Kanten-Umgebung auf $\mathbb{Z}^d$, d.h. die zufällige Umgebung wird beschrieben durch unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen auf den Kanten in $\mathbb{Z}^d$. Wir zeigen das starke Gesetz der grossen Zahlen und einen funtionalen zentraler Grenzwertsatz für dieses Modell.

Das zweite Modell ist die stetige Diffusion in zufälliger Umgebung auf $\mathbb{R}^d$, welche Lösung von gewissen stochastischen Differentialgleichungen ist. In diesem Fall, ist die zufällige Umgebung durch den Driftterm und die Diffusionsmatrix repräsentiert. Wir geben eine hinreichende Bedingung, so dass das starkes Gesetz der grossen Zahlen und ein funktionaler zentraler Grenzwertsatz gelten. Wir wenden diese Resultate auf eine explizite Klasse von anisotropischen Diffusionen in zufälliger Umgebung an. Wir zeigen, dass die hinreichende Bedingung erfüllt ist.

Für beide Modelle führen wir Erneuerungszeiten ein. Diese Strategie wurde durch Sznitman und Zerner in ihrer Untersuchung von Irrfahrten in einer zufällign i.i.d. Umgebung eingeführt. Diese Erneuerungszeiten liefern eine Markov Struktur in dem ersten Modell und eine Erneuerungsstruktur in dem stetigen Modell.