

Dissertation ETH Nr. 14874

# **Biegetragverhalten und Mindestbewehrung von Stahlbetonbauteilen**

Abhandlung  
zur Erlangung des Titels  
Doktor der Technischen Wissenschaften  
der  
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von  
Albin Kenel Lüthold  
dipl. Bauingenieur ETH  
geboren am 26. Juni 1969  
Bürger von Arth SZ

angenommen auf Antrag von  
Prof. Dr. Peter Marti, Referent  
Prof. Dr. Aurelio Muttoni, Korreferent

2002



## Vorwort

In Betonbauten sind Risse im allgemeinen nicht zu vermeiden. Aus Tragsicherheitsgründen muss ein Versagen ohne Vorankündigung bei Erstrissbildung vermieden werden. Über diese Forderung hinaus sollte mit einer ausreichend fein verteilten und gut verankerten Bewehrung ein den jeweiligen Umständen angepasstes Verformungsvermögen von Betonbauteilen gewährleistet sein. Aus Gebrauchstauglichkeitsgründen sollten Risse verteilt auftreten und genügend klein bleiben.

Auf der Grundlage von bruchmechanischen Modellvorstellungen wird ein einfacher Ansatz zur Bestimmung der Mindestbewehrung zur Gewährleistung der Tragsicherheit hergeleitet. Ausgehend von der Rissabstandsberechnung in Biegeträgern lassen sich die Verformungen unter bestimmten Annahmen sowohl im Gebrauchszustand als auch im Bereich von plastischen Stahl- und Betondehnungen mit analytischen Beziehungen ermitteln.

Die vorliegende Promotionsarbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter von Prof. Dr. Peter Marti am Institut für Baustatik und Konstruktion der ETH Zürich. Die Arbeit gliedert sich in das Forschungsprojekt "Verformungsvermögen von Massivbautragwerken" ein, welches zum Ziel hat, eine widerspruchsfreie, auf klaren physikalischen Grundlagen basierende und experimentell abgestützte Theorie des Verformungsvermögens von Massivbautragwerken zu entwickeln. Die im Rahmen dieses Projektes bereits durchgeführten und noch geplanten Arbeiten sollen zu einer Ergänzung der früheren, primär auf die Frage nach der Tragfähigkeit ausgerichteten plastizitätstheoretischen Untersuchungen beitragen und deren langfristige praktische Anwendung sicherstellen.

Mein aufrichtiger Dank gilt Herrn Prof. Dr. Peter Marti, der mir die Durchführung des Doktorats ermöglichte und mir bei der Ausarbeitung der vorliegenden Arbeit grosse Freiheit liess. Herrn Prof. Dr. Aurelio Muttoni danke ich herzlich für seinen Einsatz in der Begleitung dieser Arbeit, seine konstruktiven Denkanstösse und die Übernahme des Korreferats.

Allen Kolleginnen und Kollegen des Instituts danke ich für das angenehme Arbeitsumfeld. Besonderer Dank geht an Thomas Pfyl und Karel Thoma für die schöne Zusammenarbeit und die anregenden fachlichen Diskussionen. Joost Meyboom, Pierino Lestuzzi und Roberto Siccardi danke ich für die Übersetzungen der Kurzfassung. Schliesslich richtet sich mein innigster Dank an meine Frau Petra Lüthold und ihre Familie, sowie an meine Eltern und Geschwister für ihre Zuneigung und ihren Rückhalt.

Zürich, im Dezember 2002

Albin Kenel Lüthold



## Kurzfassung

Mit der vorliegenden, in vier Teile gegliederten Arbeit soll ein Beitrag zum besseren Verständnis des Trag- und Verformungsverhaltens von Massivbautragwerken, insbesondere von biegebeanspruchten Tragwerkelementen, geleistet werden. Im Vordergrund steht die einheitliche Behandlung gerissener Biegeträger sowohl im Gebrauchszustand als auch im Bereich von plastischen Stahl- und Betondehnungen unter Berücksichtigung der Verbundtragwirkung zwischen Stahl und Beton.

Im ersten Teil der Arbeit werden die wichtigsten bruchmechanischen Versagensmodelle zur Beschreibung des Entfestigungsverhaltens von Beton dargelegt und Grundlagen der linear elastischen und nicht linearen Bruchmechanik eingeführt. Im Zentrum des Interesses stehen dabei kohäsive Rissmodelle. Der Einfluss der Bauteilgrösse auf Versagen und Stabilität des Entfestigungsvorgangs wird erläutert. Unter Verwendung des Modells fiktiver Risse wird anhand des Biegezugversuchs gezeigt, dass die Biegezug- und Zugfestigkeit von Beton mit einfachen analytischen Beziehungen in guter Näherung angegeben werden kann. Im weiteren wird aufgezeigt, dass die unter Voraussetzung der starr-ideal plastischen Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung des Zuggurtmodells ermittelten Dehnungs- und Spannungsverläufe eine mindestens gleichwertige Übereinstimmung mit faseroptisch ermittelten Messwerten aufweisen wie die mit viel Rechenaufwand verbundenen Vergleichsrechnungen anderer Modelle.

Der zweite Teil der Arbeit befasst sich mit der Mindestbewehrung unter Verwendung bruchmechanischer Modellvorstellungen. Die erforderlichen Mindestbewehrungsgehalte werden mit einer analytischen Funktion approximiert, welche die Grenzen für plastisches und ideal sprödes Materialverhalten beinhaltet. Der Verlauf zwischen diesen Grenzen wird in guter Näherung abgebildet. Diese Vereinfachung wird mit auf Bruchmechanik basierenden Ansätzen und Normvorschriften verglichen. Zur Festlegung einer Bewehrungsreduktion infolge Schwindeigenspannungen werden grobe Anhaltspunkte angegeben.

Nach einem Abriss der geschichtlichen Entwicklung verschiedener Berechnungsmethoden für gerissene Stahlbetonquerschnitte befasst sich der dritte Teil der Arbeit mit dem Gebrauchsverhalten von Biegeträgern. Unter Berücksichtigung des Verbundverhaltens der Bewehrung wird der maximale Rissabstand für Biegeträger mit rechteckigem Querschnitt analytisch ermittelt. Für verschiedene Belastungsgeometrien und statische Systeme werden einfache Gleichungen zur Verformungsberechnung bereitgestellt. Der Mindestbewehrungsgehalt zur Begrenzung der Rissbreiten im Gebrauchszustand wird angegeben.

Im vierten Teil der Arbeit werden vereinfachte Beziehungen zum Verformungsverhalten von Biegeträgern im plastischen Bereich hergeleitet. Unter Verwendung einer vereinfachten Krümmungsberechnung lassen sich Verformungen analytisch berechnen. Für verschiedene Belastungsgeometrien und statische Systeme werden einfache Gleichungen zur Verformungsberechnung entwickelt. Aufbauend auf der vereinfachten Berechnung der Mittendurchbiegung wird das Verformungsvermögen plastischer Gelenkbereiche ermittelt. Im Rahmen einer Parameterstudie werden die wichtigsten Einflüsse, denen das Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern unterliegt, behandelt.

## **Abstract**

This thesis is organized in four parts and is aimed at making a contribution to the better understanding of the load-carrying and deformation behaviour of reinforced concrete structures, in particular those subjected to bending. Central to the approach taken in this work is the consistent treatment of cracked reinforced concrete bending elements regardless of whether they are at service load levels or undergoing plastic deformations. This consistent approach is afforded by the consideration of the behaviour of the bond between steel and concrete.

In the first part of the work, key fracture mechanics models that describe the softening behaviour of concrete are presented and the fundamentals of linearly-elastic and non-linear fracture mechanics are introduced. Of prime interest in this discussion are the cohesive crack models. The influence of scale on the failure caused by and stability of softening effects are clarified. Using the Fictitious Crack Model and the results of bending tests, it is shown that simple analytical models can be used to approximate the modulus of rupture as well as the tensile strength of the concrete. It is further shown that deformations calculated using the simple rigid-plastic bond-slip relationship of the Tension Chord Model are as good as deformations calculated using much more complicated and computational intensive models when compared with fibre optic-measured deformations.

The second part of the work is concerned with minimum reinforcement requirements as derived from fracture mechanics models. Minimum reinforcement requirements are approximated using an analytical function that includes a definition for the limits of plastic and ideally brittle material behaviour. A good approximation is made of the transition between these two boundaries. The results of this simplification are compared with fracture mechanics-based conclusions and building code requirements. The amount by which reinforcement can be reduced as a result of shrinkage stresses is indicated using simple criteria.

In the third part of the work the historical development of crack calculation methods for reinforced concrete cross-sections is outlined and the service level behaviour of reinforced concrete beams is considered. The maximum crack spacing for a beam with a rectangular cross-section is determined by considering bond. For different load arrangements and static systems, simple equations are presented to estimate deflections. The minimum reinforcement content required to control crack widths is given.

In the fourth part of the work, simplified relationships are derived to predict the deflections of beams undergoing plastic deformation. Deformations are determined analytically using a simplified curvature calculation. Simple equations are developed to calculate deformations for various load arrangements and static systems. Based on a simplified calculation of the centre deflection, the deformation capacity of a plastic hinge is determined. A parametric study is used to treat the most important influences on the deformation capacity of a reinforced concrete beam.

## Résumé

Ce travail de thèse, organisé en quatre parties, contribue à une meilleure compréhension de la capacité portante et de la déformabilité des structures en béton armé, particulièrement de celles soumises à la flexion. L'approche adoptée considère les éléments de poutres en béton armé fissurés de manière unifiée, tant au niveau des charges de service que des déformations plastiques, et tient compte de l'adhérence entre l'armature et le béton.

La première partie de la thèse introduit les fondements linéaires et non-linéaires de la mécanique de la rupture et présente les modèles clés qui décrivent le radoucissement du béton. Dans cette discussion, les modèles de fissuration sont d'un intérêt primordial. L'influence de la dimension des éléments sur la rupture et sur la stabilité des effets de radoucissement est exposée. Le fait que des modèles analytiques simples peuvent évaluer la résistance à la traction du béton est montré en utilisant le modèle des fissures fictives et les résultats d'essais en flexion. De plus, la comparaison avec des déformations mesurées par fibres optiques montre que les déformations calculées en utilisant la relation idéalisée rigide-plastique des contraintes d'adhérence dans le modèle de membrure en traction sont au moins aussi bonnes que celles calculées avec des modèles plus complexes.

La deuxième partie de la thèse concerne l'armature minimale déduite de la mécanique de la rupture. L'armature minimale requise est estimée analytiquement par une fonction qui contient une définition des limites, plastique et idéalement fragile, du comportement matériel. Une bonne approximation est proposée pour la transition entre ces deux limites. Les résultats de cette simplification sont ensuite comparés à ceux de la mécanique de la rupture et aux prescriptions des normes. Des critères simples permettent de déterminer la réduction envisageable de l'armature due aux contraintes de retrait.

Après un aperçu du développement historique des différentes méthodes de calcul des sections fissurées en béton armé, la troisième partie de la thèse examine le comportement à l'état de service des poutres en béton armé. L'espacement maximum des fissures d'une poutre de section rectangulaire est déterminé analytiquement en considérant l'adhérence des barres d'armature. Des équations simples sont proposées pour l'estimation des déformations pour différents cas de charge et différents systèmes statiques. L'armature minimale nécessaire au contrôle de l'ouverture des fissures est exprimée.

Dans la quatrième partie de la thèse, des relations simplifiées sont développées afin de prédire les déformations des poutres dans le domaine plastique. Les déformations sont déterminées analytiquement en utilisant une expression simplifiée des courbures. Des équations simples sont développées afin de calculer les déformations pour différents cas de charge et différents systèmes statiques. La capacité de déformation d'une rotule plastique est déterminée sur la base du calcul simplifié de la flèche centrale. Les influences les plus importantes sur la capacité de déformation d'une poutre en béton armé sont ensuite mises en évidence dans le cadre d'une étude paramétrique.

## Riassunto

Nel presente lavoro si analizza la capacità portante e la deformabilità delle strutture in calcestruzzo armato, in particolar modo di quelle sollecitate a flessione. L'interesse principale concerne la trattazione del comportamento di travi fessurate allo stato di servizio e nella fase plastica, prendendo in considerazione gli effetti dell'aderenza tra le armature e il calcestruzzo.

Nella prima parte del lavoro sono presentati i fondamenti della meccanica della rottura lineare e non lineare, ed vengono esposti i modelli principali atti a descrivere il softening del calcestruzzo. Particolare attenzione è dedicata ai modelli di fessurazione che tengono conto della coesione. L'influenza delle dimensioni dell'elemento strutturale sul comportamento a rottura e sulla stabilità della fase di softening del calcestruzzo sono esposti. Attraverso un modello di fessurazione fittizia sulla scorta delle prove di trazioflessione si mostra che le resistenza a trazione e trazioflessione del calcestruzzo possono essere determinate in buona approssimazione con l'ausilio di semplici modelli analitici. Inoltre, le tensioni e deformazioni calcolate sul modello di tirante in base ad un comportamento rigido-plastico per la relazione tra tensioni e scorrimento, ben corrispondono a quelle misurate con l'ausilio delle fibre ottiche al pari di risultati ottenuti con modelli d'aderenza assai più complessi.

La seconda parte si occupa della determinazione dell'armatura minima utilizzando i modelli della meccanica della rottura. L'armatura minima necessaria è determinata impiegando una funzione analitica, che permette di descrivere i casi limite di comportamento a rottura, quello di tipo plastico e quello idealmente fragile, del materiale. Un comportamento compreso tra questi due limiti può essere descritto in buona approssimazione. Le conseguenze di questa semplificazione sono giudicate confrontandole con altri approcci della meccanica della rottura e con la normativa. Sono infine esposte considerazioni generali sulle possibilità di ridurre il contenuto di armatura in conseguenza dello stato di autensione indotto dal ritiro della struttura del calcestruzzo.

Dopo una breve descrizione storica dello sviluppo dei metodi di calcolo delle sezioni fessurate di strutture in calcestruzzo armato, la terza parte analizza il comportamento allo stato di servizio delle travi sollecitate a flessione. La distanza massima tra le fessure in una trave a sezione rettangolare è determinata tenendo conto dell'aderenza tra armatura e calcestruzzo. Semplici equazioni per il calcolo delle deformazioni sono proposte per diverse configurazioni di carico e differenti sistemi statici, di cui è determinato il contenuto di armatura minima necessaria per il controllo dell'apertura delle fessure.

Nella quarta parte sono esposte semplici relazioni che permettono di determinare il comportamento delle travi in calcestruzzo armato nella fase plastica. Le deformazioni sono calcolate analiticamente utilizzando un calcolo semplificato della curvatura. Sono proposte relazioni matematiche semplici per il calcolo delle deformazioni in differenti sistemi statici e per diverse configurazioni di carico. La capacità di deformazione di una cerniera plastica è calcolata a partire dalla freccia della struttura. Le grandezze principali che influenzano la capacità di deformazione di una trave in calcestruzzo armato, sono infine evidenziate mediante un'analisi parametrica.



# Inhaltsverzeichnis

## 1 Einleitung

1.1 Problemstellung	1
1.2 Zielsetzung	2
1.3 Übersicht	3
1.4 Abgrenzung	4

## 2 Grundlagen

2.1 Bruchmechanische Versagensmodelle	5
2.1.1 Allgemeines	5
2.1.2 Linear elastische Bruchmechanik	5
2.1.3 Nicht lineare Bruchmechanik	7
2.1.4 Fiktives Rissmodell nach Hillerborg	9
2.1.5 Rissbandmodell	11
2.2 Einfluss der Bauteilgrösse auf das Versagen	11
2.2.1 Statistische Modelle	11
2.2.2 Linear elastische Bruchmechanik	13
2.2.3 Massstabsgesetz von Bazant	13
2.3 Stabilität fiktiver Risse	15
2.4 Entfestigungsverhalten von Beton	17
2.4.1 Allgemeines	17
2.4.2 Biegezugversuch	19
2.4.3 Einfluss von Eigenspannungen	25
2.5 Zusammenwirken von Beton und Stahl	27
2.5.1 Allgemeines	27
2.5.2 Vergleich mit Versuchen	29
2.5.3 Entfestigungsstabilität schwach bewehrter Stahlbetonkörper	34

## 3 Mindestbewehrung von Biegeträgern

3.1 Allgemeines	37
3.2 Bruchmechanisches Modell für bewehrte Biegeträger	37
3.2.1 Modellannahmen	37
3.2.2 Gleichgewicht im Rissquerschnitt	38
3.2.3 Maximaler Biege widerstand schwach bewehrter Biegeträger	39
3.3 Mindestbewehrung bei Biegebeanspruchung	41
3.3.1 Bestimmungsgleichung	41
3.3.2 Vereinfachte Berechnung der Mindestbewehrung	42
3.4 Vergleich mit auf Bruchmechanik basierenden Ansätzen	44

3.5	Einfluss von Eigenspannungen	47
3.6	Mindestbewehrung bei Biegung und Normalkraft	49
3.6.1	Allgemeines	49
3.6.2	Vereinfachte Berechnung der Mindestbewehrung	50
3.6.3	Vergleich mit weiteren Modellen	51
<b>4</b>	<b>Gebrauchsverhalten von Biegeträgern</b>	
4.1	Allgemeines	53
4.2	Ungerissenes Verhalten	53
4.3	Rissabstand in Biegeträgern	55
4.3.1	Einleitung	55
4.3.2	Gleichgewicht	57
4.3.3	Rissabstand in Biegeträgern	60
4.3.4	Vergleich der Biegerissabstandsberechnung mit anderen Ansätzen	64
4.4	Biegesteifigkeit im gerissenen Zustand	67
4.4.1	Erweiterte Verformungsbedingung	67
4.4.2	Krümmung	70
4.4.3	Vereinfachte Berechnung der Krümmung	72
4.5	Verformungsberechnung	74
4.5.1	Allgemeines	74
4.5.2	Analogie von Mohr	74
4.5.3	Einfluss der verformungsreduzierenden Effekte	76
4.6	Versuchsergebnisse	79
4.7	Mindestbewehrung zur Rissbreitenbeschränkung	81
<b>5</b>	<b>Verformungsvermögen von Biegeträgern</b>	
5.1	Allgemeines	84
5.2	Nichtlineares Werkstoffverhalten von Stahl und Beton	85
5.3	Vereinfachte Momenten-Krümmungs-Beziehung	87
5.4	Verformungsberechnung	90
5.5	Versuchsergebnisse	93
5.6	Verformungsvermögen von Biegeträgern	95
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Folgerungen</b>	
6.1	Zusammenfassung	100
6.2	Folgerungen	103
6.3	Ausblick	104
	Literatur	105
	Bezeichnungen	113
	Lebenslauf	115

# 1 Einleitung

## 1.1 Problemstellung

Die Rissausbreitung in Betonkörpern kann mit Modellen der nicht linearen Bruchmechanik beschrieben werden. Im Unterschied zur linear elastischen Bruchmechanik wird bei den Modellen der nicht linearen Bruchmechanik nicht vorausgesetzt, dass beim Bruch eines Körpers eine vollständige Umsetzung der von aussen zugeführten Energie in die Oberflächenenergie der Bruchflächen erfolgt. Damit wird der experimentell hinreichend untersuchten Eigenschaft des Betons, dass es in sogenannten Bruchprozesszone zur Bildung von Mikrorissen und damit zu einer Energiedissipation in dem die endgültige Bruchfläche umgebenden Material kommt, Rechnung getragen. Die in der Bruchprozesszone stattfindenden strukturellen Änderungen sind mit Änderungen der lokalen mechanischen Eigenschaften verbunden. Mit zunehmender Schädigung werden sowohl die Steifigkeit als auch die Zugfestigkeit kleiner.

Die für den Werkstoff Beton vorgeschlagenen Modelle der nicht linearen Bruchmechanik können nach der Art der Schadenslokalisierung in fiktive Rissmodelle, Rissbandmodelle und kontinuumsmechanische Schädigungsmodelle unterteilt werden. Beim fiktiven Rissmodell wird angenommen, dass die Umsetzung der gesamten Bruchenergie in der Rissfläche erfolgt. Das Entfestigungsverhalten wird daher als Spannungs-Rissöffnungs-Kurve formuliert, wobei diese Rissöffnung die Summe der Öffnungen aller in der Bruchprozesszone vorhandenen Mikrorisse repräsentiert.

Die Freisetzung von Dehnungsenergie aufgrund des Risswachstums, welches örtliche Schädigungen und Instabilitäten hervorruft, führt zu einer Grössenabhängigkeit im Widerstand eines Bauteils. Bei einem grösseren Bauteil wird die Dehnungsenergie aus einem grösseren Bereich freigesetzt. Dadurch ist die Gesamtenergie, die pro Einheit des Rissfortschritts frei wird, grösser, obwohl die Nennspannung gleich bleibt. Da jedoch die Energie, die erforderlich ist, um eine einheitliche Bruchausdehnung hervorzurufen, näherungsweise von der Grösse des Tragwerkes unabhängig ist, muss die Bruchspannung eines grösseren Bauteils niedriger sein als bei einem kleineren.

Zu Beginn der achtziger Jahre wurden systematisch experimentelle Studien an Betonbauteilen verschiedener Art durchgeführt. Zu den ersten Studien, in denen vorgeschlagen wurde, dass die Grössenabhängigkeit des Bruchwiderstandes nicht nur für Probekörper mit Kerben, sondern auch für Betonbauteile mit Hilfe der Bruchmechanik erklärt werden sollte, gehört jene von Hillerborg, Modéer und Petersson [62]. Die experimentellen Daten sind inzwischen sehr umfangreich. Versuchsdaten für grössere Bauteile diverser Anwen-

dungen fehlen jedoch, und eine Extrapolation aufgrund der Versuchsergebnisse, die für einen begrenzten Grössenbereich erzielt wurden, ist mit Schwierigkeiten verbunden.

In Stahlbetonbauten sind Risse im allgemeinen nicht zu vermeiden. Bereits während des Erhärtens entstehen im jungen Beton meist feine Risse. Schwinden, Lasteinwirkung, aufgezwungene oder behinderte Verformungen können zu weiterer Rissbildung führen. Eine beschränkte Rissbildung ist für die Dauerhaftigkeit in der Regel nicht nachteilig. Die Anforderungen an Tragsicherheit, Gebrauchstauglichkeit und Erscheinungsbild können im Rahmen der vorgesehenen Nutzung und der vorhersehbaren Einwirkung ohne unvorhergesehenen Aufwand für Instandhaltung und Instandsetzung erfüllt werden.

Aus Tragsicherheitsgründen muss ein Versagen ohne Vorankündigung bei Erstrissbildung vermieden werden. Diese Forderung wird in der Regel mit der Anordnung einer ausreichend starken, fein verteilten und gut verankerten Bewehrung und einem den jeweiligen Umständen angepassten Verformungsvermögen von Betonbauteilen gewährleistet. Aus Gebrauchstauglichkeitsgründen sollten Risse verteilt auftreten und genügend klein bleiben. Je nach den zu berücksichtigenden Einwirkungen und Anforderungen kann dies eine Verstärkung der hinsichtlich Tragsicherheit und konstruktiver Durchbildung nötigen Mindestbewehrung erfordern.

Die Verbundwirkung zwischen der Bewehrung und dem umgebenden Beton ermöglicht die Verankerung und den Aufbau der Bewehrungskräfte. Die Verbundeigenschaften bestimmen die Grösse der Rissbreiten und -abstände sowie das Mass der Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen. Die Steifigkeiten im gerissenen Zustand und die Tragwerksverformungen werden somit von der Verbundwirkung massgeblich beeinflusst. Die Mitwirkung des Betons auf Zug herrscht bis im Bruchzustand vor. Die dadurch verursachte Reduktion der mittleren Stahldehnung hat zur Folge, dass im Verbund eingelegte Bewehrungen nicht in der Lage sind, ihr plastisches Dehnvermögen voll zu entfalten. Diese Tatsache wirkt sich auf wichtige Qualitätsmerkmale von Stahlbetontragwerken aus, insbesondere auf das plastische Verformungsvermögen.

## **1.2 Zielsetzung**

Mit der vorliegenden Arbeit soll versucht werden, einen Beitrag zum besseren Verständnis des Trag- und Verformungsverhaltens von Massivbautragwerken, insbesondere von biegebeanspruchten Tragwerkelementen, zu leisten. Ein Ziel ist, die bestehenden theoretischen Grundlagen zur Bestimmung der Mindestbewehrung durch bruchmechanische Modellvorstellungen zu erweitern. Das Schwergewicht liegt bei einer mechanisch sauberen Beschreibung des Rissbildungsprozesses.

Im weiteren sollen Schranken für Rissabstände in biegebeanspruchten Bauteilen erarbeitet werden. Anknüpfend an vorhergehende Arbeiten zum Verformungsvermögen wird das Schwergewicht auf das Gebrauchsverhalten gelegt. Die Erkenntnis der Unter-

suchungen soll eine einfach zu handhabende Grundlage bilden, um Steifigkeiten und das Last-Verformungsverhalten in biegebeanspruchten Bauteilen zutreffend vorherzusagen.

Schliesslich soll das Verformungsverhalten von Biegeträgern im plastischen Bereich untersucht werden, um daraus einfache Beziehungen zur Ermittlung des Verformungsvermögens abzuleiten. Für die Bemessungspraxis sollen damit Hilfsmittel zur Beurteilung des Verformungsvermögens von biegebeanspruchten Tragwerkselementen bereitgestellt werden.

### 1.3 Übersicht

Im ersten Teil (Kapitel 2) werden die wichtigsten bruchmechanischen Versagensmodelle zur Beschreibung des Entfestigungsverhaltens von Beton in Rissen dargelegt und Grundlagen der linear elastischen und nicht linearen Bruchmechanik eingeführt. Es werden die Einflüsse der Spannungs-Rissöffnungs-Kurve des Betons im Rissquerschnitt und der Belastungsgeometrie auf das Last-Durchbiegungsverhalten aufgezeigt und der Einfluss der Bauteilgrösse auf Versagen und Stabilität des Entfestigungsvorgangs erläutert. Das Zusammenwirken zwischen Beton und Bewehrungsstahl wird auf der Grundlage des Zuggurtmodells erläutert.

Der zweite Teil (Kapitel 3) befasst sich mit der Mindestbewehrung zur Gewährleistung der Tragsicherheit. Unter Verwendung bruchmechanischer Modellvorstellungen und der starr-ideal plastischen Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung wird ein Modell zur Berechnung der Mindestbewehrung in Biegeträgern hergeleitet. Anhand einer Analyse verschiedener Berechnungen der erforderlichen Bewehrungsgehalte wird eine einfache Beziehung abgeleitet, welche ein Abschätzen der Mindestbewehrung ermöglicht. Zur Bewehrungsreduktion infolge Schwindeigenspannungen wird ein grössenabhängiger Abminderungsfaktor vorgeschlagen. Der Einfluss einer Normalkraftbeanspruchung wird erläutert.

Nach einem Abriss der geschichtlichen Entwicklung der Berechnungsmethoden für gerissene Stahlbetonquerschnitte wird im dritten Teil (Kapitel 4) das Gebrauchsverhalten von Biegeträgern behandelt. Für reine Biegung wird eine Näherung zur Bestimmung des Rissabstandes abgeleitet. Für verschiedene Belastungsgeometrien und statische Systeme werden einfache Gleichungen zur Verformungsberechnung unter Berücksichtigung von ungerissenen Trägerbereichen und Zugversteifung bereitgestellt. Die Resultate der vereinfachten Verformungsberechnungen werden experimentell ermittelten Last-Verformungs-Kurven gegenübergestellt.

Im vierten Teil (Kapitel 5) werden vereinfachte Beziehungen zum Last-Verformungsverhalten von Biegeträgern im plastischen Bereich hergeleitet. Unter Verwendung der eingeführten Momenten-Krümmungs-Beziehung werden für verschiedene Belastungsgeometrien und statische Systeme einfache Gleichungen zur Verformungsberechnung angegeben. Das Verformungsvermögen plastischer Gelenkbereiche wird anhand eines

Rechenmodells diskutiert. In einer Parameterstudie werden verschiedene Einflüsse untersucht, und die Auswirkung einer Variation der Rechenannahmen auf die Ergebnisse wird aufgezeigt.

## 1.4 Abgrenzung

Es ist nicht die Absicht dieser Arbeit, mit dem kohäsiven Rissmodell die Mikrostruktur des Betons möglichst wirklichkeitsnah abzubilden. Ziel ist es vielmehr, die wesentlichen Zugfestigkeitsgrößen, welche durch die Sprödigkeit bzw. die Balkengröße, das Entfestigungsverhalten des Betons im Riss und die Belastungsgeometrie beeinflusst werden, mit einfachen Annahmen zu erfassen.

Im Rahmen dieser Arbeit werden in erster Linie schlaff bewehrte Biegeträger mit rechteckigem Querschnitt behandelt. Die Untersuchungen basieren auf dem Verbundverhalten von stabförmigen Bewehrungseinlagen; die Verbundwirkung von Klebebewehrungen sowie das Verbundverhalten zwischen Betonbauteilen und Stahlprofilträgern werden nicht behandelt. Wo möglich werden aber Hinweise auf vorgespannte Bauteile gegeben. Die Ausführungen beziehen sich ausschliesslich auf Beanspruchungssituationen mit monotoner Laststeigerung. Dynamische und zyklische Einwirkungen sowie Langzeiteffekte werden nicht berücksichtigt. Es wird zudem davon ausgegangen, dass die Gleichgewichtsbedingungen am unverformten System formuliert werden können; Effekte 2. Ordnung werden vernachlässigt.

Die Berechnungen beziehen sich in der Regel auf angenommene mittlere Materialkennwerte. Verschiedene der verwendeten Kenngrößen basieren auf Versuchsergebnissen.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Bruchmechanische Versagensmodelle

#### 2.1.1 Allgemeines

Während der Herstellung und der Nutzung von Bauteilen ergeben sich im allgemeinen Risse. Diese können stationär sein oder sich langsam im Bauteil ausbreiten. Sie können sich aber auch sehr schnell ausbreiten und zur schlagartigen Zerstörung des Bauteils führen.

Die Aufgabe der Bruchmechanik liegt darin, das Entstehen von Rissen und die Art ihrer Ausbreitung in festen Körpern zu untersuchen. Man spricht von Bruch, wenn ein Kontinuum durch einen Riss in zwei oder mehr Teile zertrennt wird. Bei der Rissausbreitung bzw. beim Bruchvorgang unterscheidet man zwischen dem Spröbruch, der instabilen Rissausbreitung und dem kontrollierten, stabilen Risswachstum. In dieser Arbeit soll unter stabilem Bruch ein kontinuierliches, quasi-statisches Risswachstum verstanden werden; der Bruchvorgang ist dabei stets durch energetische Gleichgewichtszustände charakterisiert.

Der Bruch bzw. der Rissfortschritt kann von Fliesszonen, wie sie bei Stählen auftreten, oder von Bruchprozesszonen, die durch die Bildung von Mikrorissen gekennzeichnet sind, begleitet werden. Bruchprozesszonen treten z.B. bei zementgebundenen Werkstoffen oder Keramiken auf.

#### 2.1.2 Linear elastische Bruchmechanik

Die Begründung der linear elastischen Bruchmechanik wird im allgemeinen Griffith [51] zugeschrieben. Griffith versuchte, den Unterschied zwischen der theoretischen und der in Experimenten gemessenen Zugfestigkeit von Gläsern zu erklären.

Die theoretische Zugfestigkeit lässt sich auf die atomaren Bindungskräfte zurückführen. Die gemessene Festigkeit ist wegen Fehlstellen, die als kleine Risse aufgefasst werden können, geringer. Bei dieser Betrachtungsweise wird nicht auf die Entstehung der Risse eingegangen, sondern es wird ihr Stabilitäts- und Ausbreitungsverhalten untersucht.

An den Kerben der Risse kommt es zu Spannungskonzentrationen, welche von der Gestalt der Kerbe abhängen. Charakteristisch für die Grösse der Kerbspannung ist der Radius  $\rho$  im Kerbgrund. Für den Grenzfall  $\rho \rightarrow 0$  ergibt sich in unmittelbarer Umgebung

der Rissspitze ein  $1/\sqrt{r}$ -singuläres Spannungsfeld, wobei  $r$  den Abstand von der Rissspitze bezeichnet. Wäre das Festigkeitskriterium alleiniges Versagenskriterium, so würde sich ein Riss wegen dieser Singularität bei der geringsten Belastung ausbreiten und zum sofortigen Versagen des Bauteils führen.

Griffith [51] löste das Problem unter Verwendung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie [82]. Ausser dem Potential der äusseren Kräfte und der elastisch gespeicherten Formänderungsenergie  $U$  berücksichtigte er auch die Oberflächenenergie  $S$ . Bei einer Rissvergrösserung wird elastische Energie  $U$  freigesetzt, und durch die Bildung neuer Oberflächen die Oberflächenenergie  $S$  erhöht. Zur beidseitigen Rissverlängerung  $da$  eines Risses der Länge  $2a$  kommt es, sofern die Oberflächenenergie  $dS$  nicht grösser ist, als die freigesetzte elastische Energie  $-dU$ , d.h. das Stabilitätskriterium für einen Riss lautet

$$\frac{d}{da}(U+S) \leq 0 \quad (2.1)$$

Griffith versuchte den Zusammenhang zwischen der spezifischen Oberflächenenergie  $\gamma$ , der Zugfestigkeit  $f_t$  und dem Radius  $\rho$  an der Rissspitze herzuleiten. Dabei bestimmte er  $\rho$  einerseits durch interferometrische Messungen; andererseits ging er davon aus, dass  $\rho$  in der Grössenordnung der Moleküle liegen muss. Durch Abschätzung der Festigkeit einer Molekülkette, welche wesentlich über der Festigkeit eines grösseren Werkstoffvolumens liegt, gelang es ihm, die Grössenordnung der maximalen Spannung an der Rissspitze korrekt zu erfassen.

Unter Verwendung des Energieansatzes (2.1) lässt sich gemäss Hahn [56] für einen Griffith-Riss der Länge  $2a$  folgendes Bruchkriterium ableiten

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\frac{2E''\gamma}{\pi a}} \quad (2.2)$$

mit

$$E'' = E \quad (2.3)$$

für den ebenen Spannungszustand und

$$E'' = E/(1-\nu^2) \quad (2.4)$$

für den ebenen Verzerrungszustand, wobei  $\sigma_{cr}$  die Bruchspannung,  $\gamma$  die spezifische Oberflächenenergie und  $E$  den Elastizitätsmodul bezeichnet. Die Querkontraktionszahl von Beton beträgt  $\nu \approx 0.2$ . Daraus ergibt sich eine Differenz von lediglich 4 % zwischen dem ebenen Spannungszustand und dem ebenen Verzerrungszustand. Für die vorliegende Arbeit genügt die Beschränkung auf den ebenen Spannungszustand.

Irwin [65] zeigte, dass die spezifische Oberflächenenergie  $\gamma$  auch plastische, thermische, akustische, elektrische und andere Energieanteile beinhalten kann. Da beim



Bruchvorgang immer zwei Oberflächen gebildet werden, führte er die kritische Energiefreisetzungsrates

$$G_{cr} = 2\gamma \quad (2.5)$$

als Werkstoffkenngrösse ein. Somit lässt sich das Bruchkriterium (2.2) für den allgemeinen Fall wie folgt ausdrücken:

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\frac{EG_{cr}}{\pi a}} = \frac{K_{cr}}{\sqrt{\pi a}} \quad (2.6)$$

In (2.6) gibt der Spannungsintensitätsfaktor

$$K_{cr} = \sqrt{EG_{cr}} \quad (2.7)$$

die kritische ‘‘Stärke’’ der Spannungssingularität an der Risspitze an, bei der eine Rissverlängerung erfolgt. Er ist ein Mass für die Energie, welche im Moment der Rissverlängerung in der Umgebung der Risspitze gespeichert ist. In der experimentellen Bruchmechanik werden die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_{cr}$  anhand von Versuchen an genormten Proben bestimmt. Mit der Maximallast  $F_{max}$  beim Bruch gilt

$$K_{cr} = \frac{F_{max}}{t\sqrt{H}} Y\left(\frac{a_0}{H}\right) \quad (2.8)$$

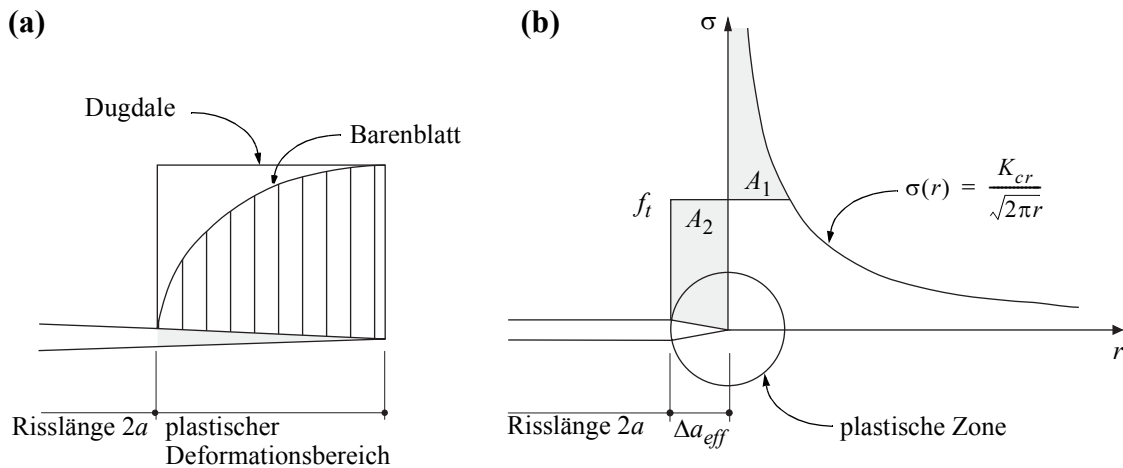
wobei  $t$  die Probendicke,  $H$  die charakteristische Probenabmessung,  $a_0$  die Anfangsrisslänge und  $Y(a_0/H)$  eine probentypabhängige Formfunktion bezeichnet. Wichtige Vertreter solcher bruchmechanischer Versuche sind der Dreipunkt- und Vierpunkt-Biegeversuch sowie der Kompaktzugversuch [56].

### 2.1.3 Nicht lineare Bruchmechanik

Das Verhalten von Werkstoffen, welche nur sehr kleine Zonen irreversibler Deformationen im Bereich der Risspitze aufweisen, kann mit Hilfe der linear elastischen Bruchmechanik mit hinreichender Genauigkeit beschrieben werden. Typische Beispiele dafür sind Glas und hochfeste Stähle. Die Modellierung inelastischer Deformationen im Bereich der Risspitze ist Gegenstand der nicht linearen Bruchmechanik.

Eine exakte Berechnung der Spannungen und Verschiebungen an Rissen bei unelastischem Verformungsverhalten gelingt im allgemeinen nicht und ist auch in Sonderfällen, unter idealisierten Annahmen, ausserordentlich schwierig. Lösungen für den unelastischen Fall liefert z.B. die Plastizitätstheorie [59], wobei dem wirklichen Materialverhalten näherungsweise durch verschiedene Formänderungsgesetze Rechnung getragen wird.

Bei der Annahme eines starr-plastischen Verhaltens werden die elastischen Formänderungen völlig vernachlässigt; hierfür existieren zahlreiche Lösungen der klassischen Plastizitätstheorie (Fließlinientheorie), welche für die Belange der Bruchmechanik jedoch nur geringe Bedeutung haben.



**Bild 2.1** – Spannungsverteilung an der Rissspitze: (a) Dugdale- [34] und Barenblatt-Modell [11] im plastischen Deformationsbereich; (b) näherungsweise Erfassung der plastischen Zonen bei konstanter Fließspannung.

Elastisch-plastische Probleme, bei denen teils elastisches, teils plastisches Verhalten auftritt, sind wesentlich schwieriger zu behandeln. Neben der Berechnung der Spannungen und Verschiebungen kommt hier noch die Bestimmung der Grenzen zwischen dem elastischen und plastischen Bereich hinzu. Sogenannte kohäsive Rissmodelle stehen dabei im Zentrum des Interesses.

Eines der bekanntesten kohäsiven Rissmodelle geht auf Dugdale [34] zurück. Das nach ihm benannte Modell berücksichtigt Fließbereiche mit konstanter Fließspannung an der Rissspitze. Die Fließbereiche werden als plastische Risserweiterungen, die zur vorhandenen, realen Risslänge addiert werden, abgebildet. An diesen zusätzlichen plastischen Risserweiterungen greifen gleichförmige, riss-schliessende Spannungen an. Diese Spannungen repräsentieren das Verhalten der plastischen Zone an der Rissspitze und stellen ein ideal plastisches Werkstoffverhalten mit konstanter Fließspannung dar. Dugdale überlagert die Lösung des Griffith-Problems unter einachsiger Zugbeanspruchung senkrecht zur Rissebene mit der Lösung mit symmetrischer Teilbelastung im Bereich der Rissenden, siehe Bild 2.1 (a).

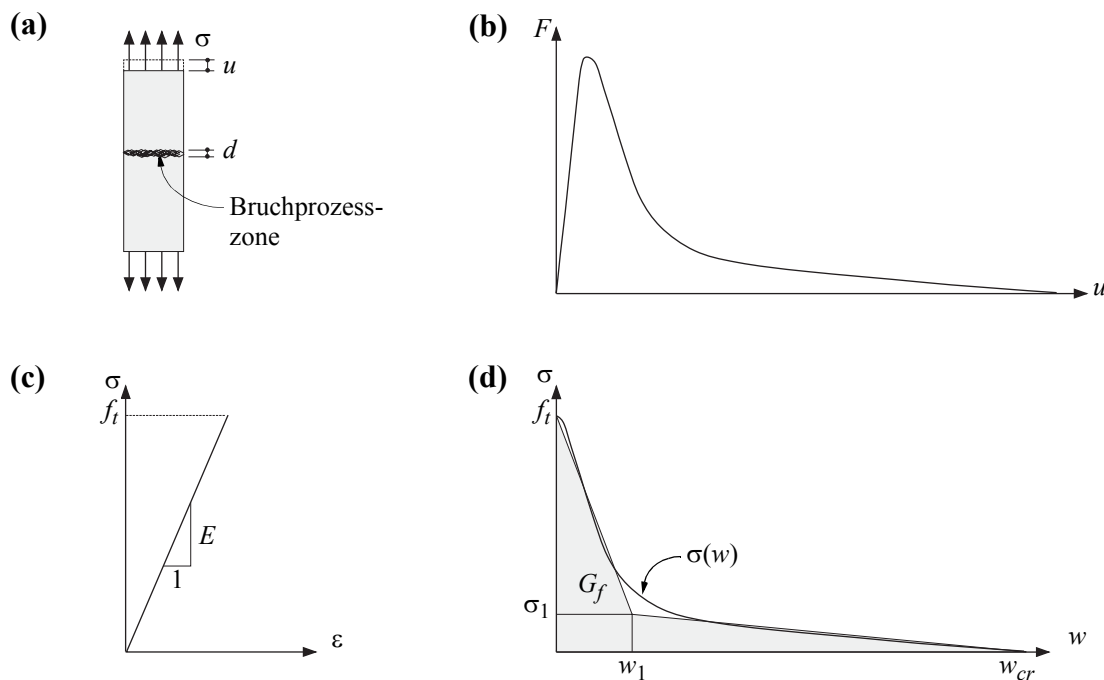
Auf einer ähnlichen physikalischen Grundidee basiert das Rissmodell von Barenblatt [11]. Die plastische Zone an der Rissspitze wird ebenfalls als zusätzliche Risslänge dargestellt. An den Rissufern des zusätzlichen plastischen Risses greifen kohäsive, riss-schliessende Spannungen an. Somit kommt es auch hier zu keiner Spannungssingularität an der Rissspitze und es treten keine Spannungen auf, die grösser als die Zugfestigkeit  $f_t$  sind. Unbekannt sind die Ausdehnung des plastischen Bereiches und der Verlauf der riss-schliessenden Spannungen. Es wird angenommen, dass die Ausdehnung und Verteilung der Kohäsivkräfte für einen gegebenen Werkstoff unter gleichen Belastungsbedingungen immer gleich sind.

Treten im Vergleich zu den Rissabmessungen kleine, plastische bzw. inelastische Verformungszonen an der Rissspitze auf, so kann das elastische Spannungsfeld ausserhalb

der plastischen Zone in einem Abstand zur Risspitze, der im Vergleich zur Rissabmessung klein ist, durch die Gleichungen der linear-elastischen Bruchmechanik beschrieben werden, siehe Bild 2.2 (b). Bei den hier auftretenden Spannungsintensitätsfaktoren spricht man von plastischen Spannungsintensitätsfaktoren. Ferner muss der reale Riss um einen sogenannten plastischen Korrekturriss, auch effektive Rissverlängerung  $\Delta a_{eff}$  genannt, erweitert werden. Die Länge der effektiven Rissverlängerung  $\Delta a_{eff}$  ist so zu wählen, dass sich im elastischen Bereich der gleiche Spannungsverlauf ergibt wie für den Riss mit plastischer Verformungszone. Die Länge des plastischen Korrekturrisses lässt sich aus der Gleichheit  $A_1 = A_2$  der Flächen unter den Spannungsverläufen für den plastischen und den linear elastischen Fall (korrigiert mit der effektiven Rissverlängerung  $\Delta a_{eff}$ ) ermitteln. Die Flächen unter den Spannungsverläufen sind ein Mass für die entsprechenden elastisch gespeicherten Energien. Sind der Spannungsverlauf im plastischen Riss und die Ausdehnung der plastischen Zone bekannt, so lassen sich die effektive Rissverlängerung  $\Delta a_{eff}$  und die Spannungsverteilung im elastischen Bereich bestimmen.

#### 2.1.4 Fiktives Rissmodell nach Hillerborg

Die Grundidee des fiktiven Rissmodells stammt von Hillerborg, Modéer und Petersson [62]. Es wird angenommen, dass sich der Werkstoff linear elastisch verhält, bis seine Festigkeit erreicht ist. Wird dann die Dehnung verformungsgesteuert weiter erhöht, so kommt es je nach Werkstoff zu einer bestimmten Entfestigung innerhalb der Bruchprozesszone bei gleichzeitiger elastischer Entlastung ausserhalb der Bruchprozesszone.

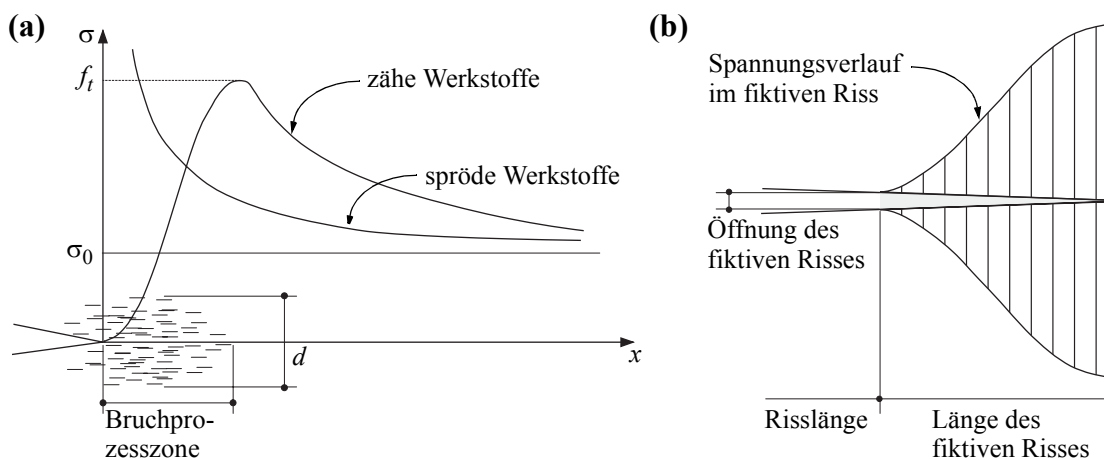


**Bild 2.2** – Fiktives Rissmodell: (a) Zugprobe mit Bruchprozesszone; (b) Kraft-Verlängerungs-Diagramm; (c) elastisches Verhalten ausserhalb der Bruchprozesszone; (d) Entfestigung in der Bruchprozesszone.

Dieser Gedanke lässt sich anhand des in Bild 2.2 (a) dargestellten dehnungsgesteuerten Zugversuchs verdeutlichen. Belastet man die Probe derart, dass die Zugfestigkeit  $f_t$  nicht erreicht wird, so verhält sich die Probe linear elastisch entsprechend Bild 2.2 (c). Wird an einer Stelle in der Probe, aufgrund statistisch verteilter Fehlstellen, die Festigkeit  $f_t$  überschritten, so kommt es unter Erhöhung der lokalen Dehnung zur Abnahme der Spannung gemäss Bild 2.2 (d), d.h. die Entfestigung setzt lokal ein. Der Rest der Probe verhält sich weiterhin linear elastisch und verkürzt sich dementsprechend. Insgesamt resultiert das in Bild 2.2 (b) dargestellte Kraft-Verlängerungsverhalten.

Bei den Vorgängen in der Bruchprozesszone kann es sich um plastische Fließbereiche oder um Schädigungsprozesse, die durch Mikrorissbildung gekennzeichnet sind, handeln. In beiden Fällen lässt sich das Entfestigungsverhalten als Spannungs-Rissöffnungs-Diagramm  $\sigma(w)$  gemäss Bild 2.2 (d) darstellen. Dabei bezeichnet  $w$  die Öffnung eines fiktiven Risses. Ist die Spannungsübertragungsfähigkeit des Werkstoffes ab einer kritischen fiktiven Rissöffnung  $w_{cr}$  nicht mehr vorhanden, so handelt es sich um einen realen Riss. Das mechanische Verhalten eines Werkstoffes lässt sich somit durch folgende Kenngrößen beschreiben: den Elastizitätsmodul  $E$ , die Festigkeit  $f_t$ , und die Spannungs-Rissöffnungs-Funktion  $\sigma(w)$  bzw. die spezifische Bruchenergie  $G_f$ , welche zur Durchtrennung eines Bauteils benötigt wird.

Die Dissipationsarbeit  $D$  entspricht der Fläche unter der Kraft-Verlängerungs-Kurve in Bild 2.2 (b). Die Bruchfläche bzw. Ligamentfläche  $A_L$  ergibt sich in der Regel aus der Ligamenthöhe multipliziert mit der Probendicke. Dieses Vorgehen, die Bruchenergie zu bestimmen, geht auf Nakayama [99] zurück und unterscheidet sich von der Methode, die spezifische Bruchenergie  $G_f$  bzw. die kritische Energiefreisetzungsrate  $G_{cr}$  aus der Maximallast  $F_{max}$  (z.B. mit den Gleichungen (2.6) bis (2.8)) zu bestimmen. In der Literatur geht man häufig davon aus, dass sich für sehr spröde Werkstoffe die kritische Energiefreisetzungsrate  $G_{cr}$  nur unwesentlich von der spezifischen Bruchenergie  $G_f$  unterscheidet. In der vorliegenden Arbeit wird die spezifische Bruchenergie  $G_f$  verwendet. Diese entspricht der Fläche unter dem Spannungs-Rissöffnungs-Diagramm in Bild 2.2



**Bild 2.3** – Spannungsverteilung am fiktiven Riss: (a) spröde und zähe Werkstoffe; (b) kohäsives Rissmodell.

(d). Das fiktive Rissmodell erfüllt gleichzeitig die Grundannahmen der Festigkeitslehre und den Energieansatz der linear elastischen Bruchmechanik.

In Bild 2.3 ist die Spannungsverteilung an einer Risspitze gemäss der linear elastischen Bruchmechanik und dem fiktiven Rissmodell dargestellt. Man erkennt, dass sich für das fiktive Rissmodell eine ähnliche Spannungsverteilung wie bei anderen kohäsiven Rissmodellen einstellt.

### 2.1.5 Rissbandmodell

Statt in Form eines Spannungs-Rissöffnungs-Diagramms lässt sich das Entfestigungsverhalten auch als Spannungs-Dehnungs-Diagramm darstellen. Hierfür muss, um die fiktiven Rissöffnungen auf eine Länge beziehen zu können, die Rissbandbreite  $d$  in Bild 2.3 (a) (d.h. die Ausdehnung der Bruchprozesszone senkrecht zur Rissebene) bekannt sein. Diese Formulierung des fiktiven Rissmodells, das sogenannte Rissbandmodell, geht auf Bazant und Oh [17] zurück. Das Rissbandmodell ist zwar physikalisch gesehen exakter als das fiktive Rissmodell, es ist aber sehr aufwendig und nur in wenigen Fällen möglich, die Rissbandbreite  $d$  zu bestimmen. Daher ist es wenig sinnvoll, das Rissbandmodell dem fiktiven Rissmodell vorzuziehen.

## 2.2 Einfluss der Bauteilgrösse auf das Versagen

### 2.2.1 Statistische Modelle

Die Versagenswahrscheinlichkeit eines Bauteils unter konstanter Belastung nimmt mit zunehmender Bauteilgrösse zu. Dies ist in den statistisch verteilten Werkstoffeigenschaften begründet. Weibull [144] entwickelte, von empirischen Überlegungen ausgehend, eine Theorie zur Beschreibung des spröden Werkstoffversagens in Abhängigkeit der Bauteilgrösse. Als grundlegende Idee setzte Weibull voraus, dass der Sprödbbruch von der lokalen Spannung an der grössten Fehlstelle bestimmt wird. Zur Modellierung dieses Sachverhalts unterteilte er das Volumen eines Bauteils in  $n$  Einzelelemente mit statistisch verteilten Festigkeiten.

Für eine auf Zug beanspruchte Probe betrachtete Weibull eine aus Volumenelementen zusammengesetzte Kette, siehe Bild 2.4 (a). Die Festigkeit der Kette wird durch das schwächste Glied bestimmt. Wenn das schwächste Volumenelement versagt, dann versagt die komplette Zugprobe. Man spricht daher auch vom Modell des schwächsten Kettengliedes. Aufgrund dieser Überlegungen leitete Weibull folgende Gleichung für die Versagenswahrscheinlichkeit  $P(\sigma, V)$  eines Bauteils in Abhängigkeit seines Volumens  $V$  her

$$P(\sigma, V) = 1 - e^{-\rho V \left( \frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^m} \quad (2.9)$$

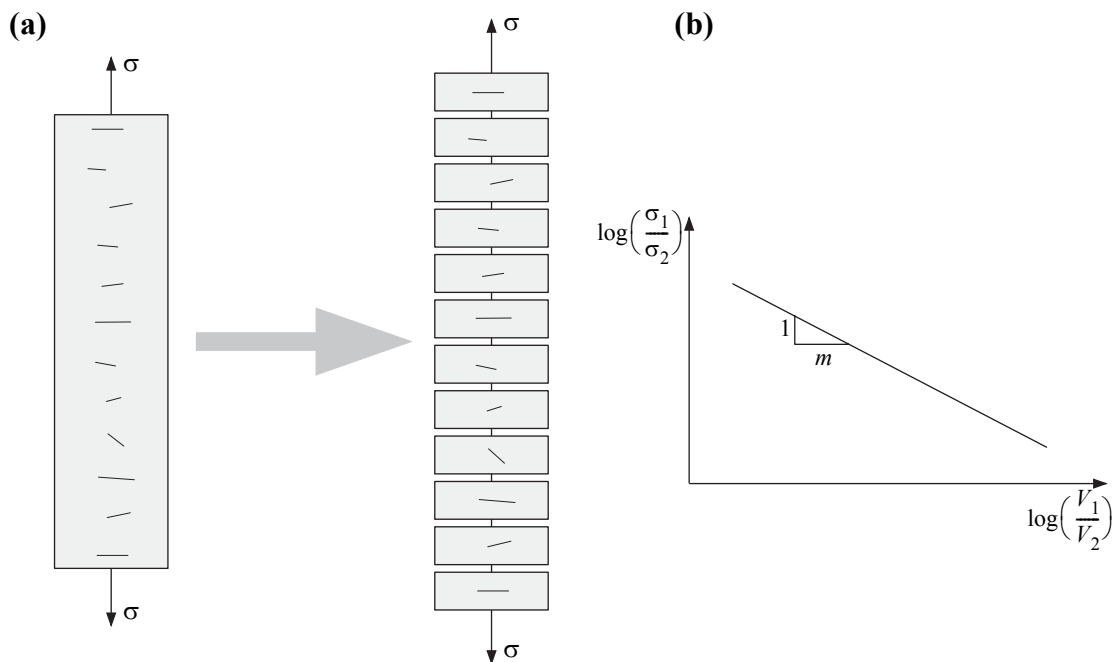
wobei  $\sigma$  die angelegte Spannung,  $\sigma_0$  die Referenzfestigkeit,  $\sigma_u$  die kleinste auftretende Festigkeit,  $\rho$  die Fehlstellendichte und  $V$  das Bauteilvolumen bezeichnet. Betrachtet man den Mittelwert der Festigkeit, d.h. eine Versagenswahrscheinlichkeit  $P(\sigma, V) = 0.5$  zweier Probekörper mit unterschiedlichem Volumen  $V_1$  und  $V_2$ , so ergibt sich aus (2.9) die Beziehung

$$\rho_1 V_1 \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^m = \rho_2 V_2 \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^m \quad (2.10)$$

Geht man davon aus, dass sich die Fehlstellendichte  $\rho$  nur unwesentlich mit dem Werkstoffvolumen ändert und dass  $\sigma_u$  vernachlässigbar klein ist, so folgt

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = m \sqrt[m]{\frac{V_2}{V_1}} \quad (2.11)$$

Aus (2.11) folgt für  $\sigma_1 > \sigma_2$ , dass  $V_1 < V_2$  sein muss, d.h. in Übereinstimmung mit experimentellen Beobachtungen [140] muss die Festigkeit mit zunehmendem Bauteilvolumen  $V$  abnehmen. Nach Auswertung verschiedener Biegeversuche an Betonproben erzielten Bazant und Novak [16] an einer modifizierten Weibull'schen Gleichung mit dem Exponenten  $m = 12$  die beste Übereinstimmung mit den experimentellen Werten. Unter Verwendung des fiktiven Rissmodells nach Hillerborg [62] untersuchten Cotterell et al. [29] den Einfluss der statistisch verteilten Spannungs-Entfestigungs-Parameter auf die Betonfestigkeit. Sie stellten nach analytischen Untersuchungen fest, dass der Exponent der modifizierten Weibull'schen Gleichung für Beton zwischen  $m = 10$  und  $m = 20$  liegen muss.



**Bild 2.4** – Statistisches Modell nach Weibull [144]: (a) Modell des schwächsten Gliedes einer Kette; (b) Einfluss der Bauteilgröße bzw. des Probenvolumens auf die Festigkeit.

Freudenthal [45] zeigte, dass sich die Theorie von Weibull mit dem Bruchkriterium von Griffith verbinden lässt. Mit statistischen Annahmen bewies er ausserdem, dass in einem ideal spröden Material, in welchem voneinander unabhängige Mikrorisse vorhanden sind, der Bruch von der schwächsten Stelle aus erfolgt.

Andere Aspekte ergeben sich, wenn man die Einzelvolumina nicht in Serie sondern parallel schaltet. Dieses Konzept geht auf Daniels [30] zurück. Hierbei ruft das Versagen eines Gliedes nicht unbedingt das Versagen des kompletten Bauteils hervor. Vielmehr kommt es zu einer Lastumlagerung in die parallelgeschalteten Glieder, bis das Gesamtsystem die Last nicht mehr aufnehmen kann.

### 2.2.2 Linear elastische Bruchmechanik

Während nach der linear elastischen Biegetheorie und der Kerbspannungslehre kein Einfluss der Bauteilgrösse auf die Nennfestigkeit  $\sigma_N$  vorliegt, nimmt diese bei geometrisch ähnlichen Proben gemäss der linear elastischen Bruchmechanik mit  $1/\sqrt{H}$  ab, wobei  $H$  die charakteristische Probenabmessung ist. Unter der Nennfestigkeit versteht man die mittels der linear elastischen Biegetheorie ermittelte Maximalbelastung in einem Bauteil. Zur Bestimmung der Maximalbelastung werden keine Spannungsüberhöhungen im Sinne der Kerbspannungslehre berücksichtigt. Die Maximalbelastung liegt in der Regel bei angerissenen und gekerbten Proben an der Rissspitze bzw. im Kerbgrund vor. Gemäss der linearen Biegetheorie berechnet sich die Nennfestigkeit  $\sigma_N$  für geometrisch ähnliche Proben wie folgt

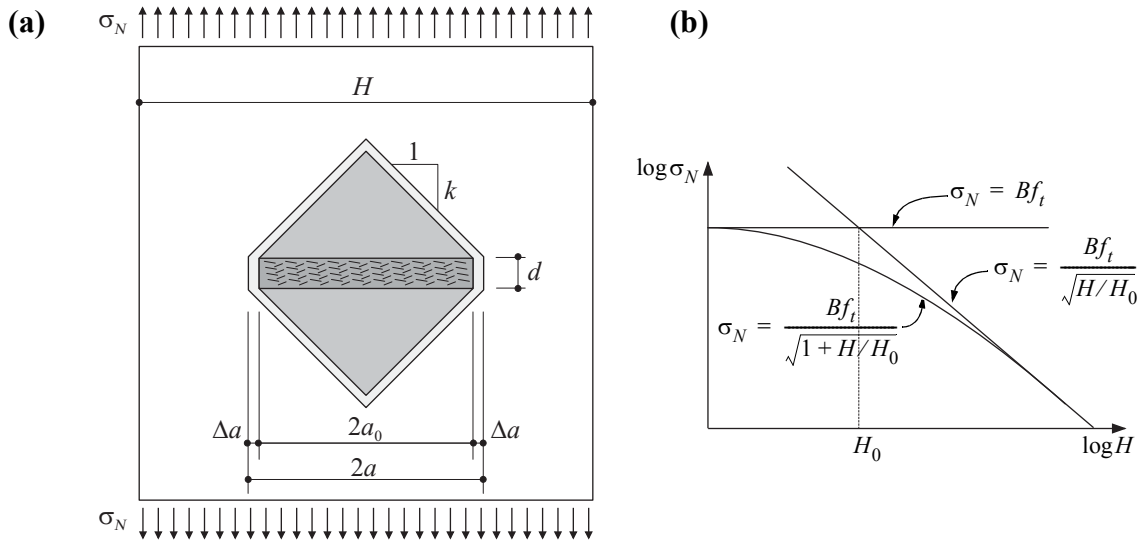
$$\sigma_N = L \frac{F_{max}}{tH} \quad (2.12)$$

wobei  $L$  ein von der Probengeometrie abhängiger, spezifischer Faktor ist, der mit Hilfe der linearen Biegetheorie bestimmt wird. Für übliche bruchmechanische Probekörper folgt die Maximallast hingegen aus (2.8) unter Verwendung des Spannungsintensitätsfaktors  $K_{cr}$  und der probentypabhängigen Formfunktion  $Y$ . Aus (2.8) und (2.12) ergibt sich somit folgende Abhängigkeit der Nennfestigkeit  $\sigma_N$  von der charakteristischen Probengrösse  $H$ :

$$\sigma_N = \frac{LK_{cr}}{\sqrt{H} \cdot Y(a_0/H)} \quad (2.13)$$

### 2.2.3 Massstabsgesetz von Bazant

Da bei fast allen Werkstoffen nicht lineare Deformationen der Rissbildung und -ausbreitung vorausgehen und es somit zu einer Schädigung des Werkstoffes und damit zu Abweichungen von der linear elastischen Bruchmechanik kommt, leitete Bazant [14] ein halbempirisches Gesetz her, das den Übergang von einem Festigkeitskriterium für kleine Proben zur linear elastischen Bruchmechanik für grosse Proben beschreibt.



**Bild 2.5** – Massstabsgesetz nach Bazant [14]: (a) Gedankenmodell der Rissausbreitung; (b) Einfluss der Bauteilgrösse auf die Nennfestigkeit  $\sigma_N$  gemäss linear elastischer Bruchmechanik und dem Massstabsgesetz nach Bazant.

Bei seiner Herleitung ging Bazant davon aus, dass sich in einem Werkstoffvolumen eine Schädigungszone der Bandbreite  $d$  senkrecht zur Rissfläche bildet. Diese Annahme entspricht dem in Kapitel 2.1.5 erwähnten Rissbandmodell [17]. Kommt es in diesem Rissband zu einer Rissverlängerung  $\Delta a$ , wie in Bild 2.5 (a) dargestellt, so wird in den rissumgebenden Bereichen (hellgraue Flächen) elastische Energie freigesetzt. Die dunkelgrauen Flächen stellen die bereits entlasteten Flächen dar. Die durch die Rissverlängerung  $\Delta a$  freigesetzte Energie  $\Delta U$  lässt sich wie folgt berechnen

$$\Delta U = \frac{d\Delta a + 2ka\Delta a}{2E} \sigma_N^2 \quad (2.14)$$

Setzt man diese Energie gleich der zur Rissverlängerung benötigten Energie  $G_f \Delta a$  so ergibt sich

$$\sigma_N = \frac{Bf_t}{\sqrt{1 + H/H_0}} \quad (2.15)$$

wobei  $f_t$  die Zugfestigkeit,  $H_0$  die Bezugsprobengrösse und  $B$  einen Festigkeitsfaktor bezeichnet:

$$H_0 = dH/2ak, \quad B = \sqrt{2EG_f/(df_t^2)} \quad (2.16)$$

Die Bezugsprobengrösse  $H_0$  kennzeichnet den Übergang vom Festigkeitskriterium zur linear elastischen Bruchmechanik. Betrachtet man die Grenzwerte von Gleichung (2.15), so ergibt sich für  $H \rightarrow 0$  die Nennfestigkeit  $\sigma_N = Bf_t$ , also ein konstanter Wert gemäss Festigkeitslehre; für  $H \rightarrow \infty$  ergibt sich hingegen  $\sigma_N = Bf_t/\sqrt{H/H_0}$ , d.h. die Nennfestigkeit nimmt mit  $1/\sqrt{H}$  analog der linear elastischen Bruchmechanik ab. Der Verlauf der



Nennfestigkeit  $\sigma_N$  in Abhängigkeit der charakteristischen Probenabmessung  $H$  mit den beiden Asymptoten ist in Bild 2.5 (b) dargestellt.

Sowohl das Massstabsgesetz von Bazant als auch die linear elastische Bruchmechanik zeigen, dass der Grösseneinfluss auf der Energiefreisetzung in der Rissumgebung basiert. Gemäss Bazant et al. [15] lässt sich mit Hilfe des Massstabsgesetzes die spezifische Bruchenergie  $G_f$  als Werkstoffkenngrösse bestimmen. Hierzu betrachtet man mit (2.15) den Fall  $H \rightarrow \infty$ , was zum gleichen Wert wie (2.13) führen muss. Setzt man die spezifische Bruchenergie  $G_f$  der kritischen Energiefreisetzungsrates  $G_{cr}$  gleich, und ersetzt man in Gleichung (2.13) die Bruchzähigkeit  $K_{cr}$  durch Gleichung (2.7), so ergibt sich

$$G_f = \left( \frac{B f_t Y(a_0/H)}{L} \right)^2 \frac{H_0}{E} \quad (2.17)$$

Die so bestimmte spezifische Bruchenergie  $G_f$  wird als Werkstoffkonstante betrachtet, die für alle Probendimensionen gilt. Dies steht allerdings im Widerspruch zu einer ganzen Reihe von experimentellen [139] und theoretischen [131] Untersuchungen.

### 2.3 Stabilität fiktiver Risse

Im folgenden wird auf das Stabilitätsverhalten fiktiver Risse eingegangen. Die Problematik beruht auf einer Energiebilanz zwischen der elastisch gespeicherten Energie  $U$  beim Überschreiten der Festigkeit  $f_t$  und der für das Durchtrennen des Bauteils benötigten Energie  $S$  bzw. der Dissipationsarbeit  $D$ . Das einfachste Beispiel stellt der zentrische Zugversuch an einem prismatischen Probekörper dar. Die elastisch gespeicherte Energie  $U$  beim Erreichen der Zugfestigkeit  $f_t$  beträgt

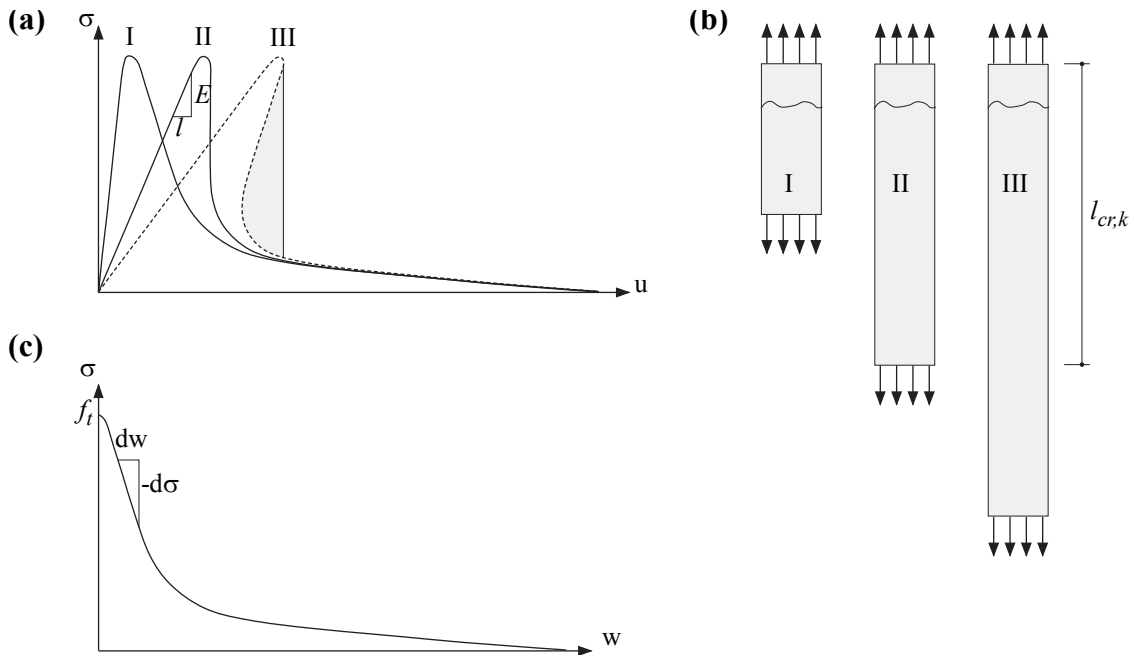
$$U = \frac{A_L f_t^2}{2E} l \quad (2.18)$$

wobei  $E$  den Elastizitätsmodul,  $A_L$  die Querschnittsfläche der Probe und  $l$  die Probenlänge bezeichnet. Die Dissipationsarbeit  $D$  beträgt

$$D = A_L G_f \quad (2.19)$$

Geht man davon aus, dass im grenzstabilen Fall die elastisch gespeicherte Energie  $U$  gleich der Dissipationsarbeit  $D$  ist, so erkennt man, dass für einen gegebenen Werkstoff die Stabilität nur von der Probenlänge  $l$  abhängt. Die kritische Probenlänge ergibt sich zu

$$l_{cr} = \frac{2 E G_f}{f_t^2} \quad (2.20)$$



**Bild 2.6** – Instabilität beim direkten Zugversuch: (a) Spannungs-Verlängerungs-Diagramm; (b) Zugproben; (c) Spannungs-Rissöffnungs-Diagramm.

Diese Betrachtung geht auf Petersson [107] und Hillerborg [61] zurück, welche die Hälfte der kritischen Länge  $l_{cr}$  als Werkstoffkenngrösse definieren und als charakteristische Länge  $l_{ch}$  bezeichnen:

$$l_{ch} = \frac{E G_f}{f_t^2} \quad (2.21)$$

Die charakteristische Länge  $l_{ch}$  ist ein Mass zur Beschreibung der Duktilität eines Werkstoffs. Sie erlaubt den Vergleich von Werkstoffen mit einem ähnlichen Entfestigungsverhalten.

Die bisher dargestellten Überlegungen stellen lediglich eine Grenzbetrachtung dar. Sie geben keine Auskunft darüber, ob bei einem bestimmten Entfestigungsverhalten schon bei kürzeren Probenlängen semistabiles Versagen auftreten kann. Um diese Frage zu beantworten, wird anhand von Bild 2.6 der Einfluss der Form des Spannungs-Rissöffnungs-Diagramms untersucht.

Die drei in Bild 2.6 (b) dargestellten Zugproben unterscheiden sich lediglich in ihrer Länge. Aus Bild 2.6 (a) und (c) ist ersichtlich, dass die Stabilität von der minimalen Steigung  $(d\sigma/dw)_{min}$  der Spannungs-Rissöffnungs-Kurve und der auf die Querschnittsfläche  $A_L$  bezogenen Steifigkeit  $E/l$  der unbeschädigten Probe abhängt. Stabiles Versagen ergibt sich für

$$l < l_{cr,k} = \frac{-E}{(d\sigma/dw)_{min}} \quad (2.22)$$

Bei Proben mit einer Länge  $l$  von  $l_{cr,k} \leq l \leq l_{cr}$  tritt semistabiles Versagen auf.

## 2.4 Entfestigungsverhalten von Beton

### 2.4.1 Allgemeines

Nachdem Kaplan [69] Bruchversuche an Betonträgern nach der Risstheorie von Griffith [51] untersuchte und deren Anwendung auf Beton bestätigte, wurden zahlreiche experimentelle und theoretische Arbeiten zur Grössenabhängigkeit der Bruchfestigkeit von Beton durchgeführt. Eine umfangreiche Literaturübersicht findet man in [105]. Zur analytischen Behandlung des Spannungs-Rissöffnungs-Verhaltens von Beton wurden die unterschiedlichsten Funktionen angegeben. Diese reichen von einfachen linearen [61] und bilinearen [62] Beziehungen über Potenzgesetze [115] bis zu zusammengesetzten, mehrparametrischen Funktionen [116]. In der vorliegenden Arbeit wird das von Foote et al. [44] vorgeschlagene Potenzgesetz

$$\sigma_c = f_{ct} \left(1 - \frac{w}{w_{cr}}\right)^k \quad (2.23)$$

verwendet. Dieser Potenzansatz enthält folgende Grenzfälle:  $k = 0$  führt zu konstanter Fließspannung analog dem Dugdale-Modell,  $k = 1$  entspricht einer linearen Entfestigungsfunktion, und  $k \rightarrow \infty$  modelliert ideal sprödes Verhalten, siehe Bild 2.7 (a). Aus

$$\int_0^{w_{cr}} \sigma_c dw = \int_0^{w_{cr}} f_{ct} \left(1 - \frac{w}{w_{cr}}\right)^k dw = \frac{f_{ct} w_{cr}}{1+k} = G_f \quad (2.24)$$

folgt

$$w_{cr} = \frac{G_f(1+k)}{f_{ct}} \quad (2.25)$$

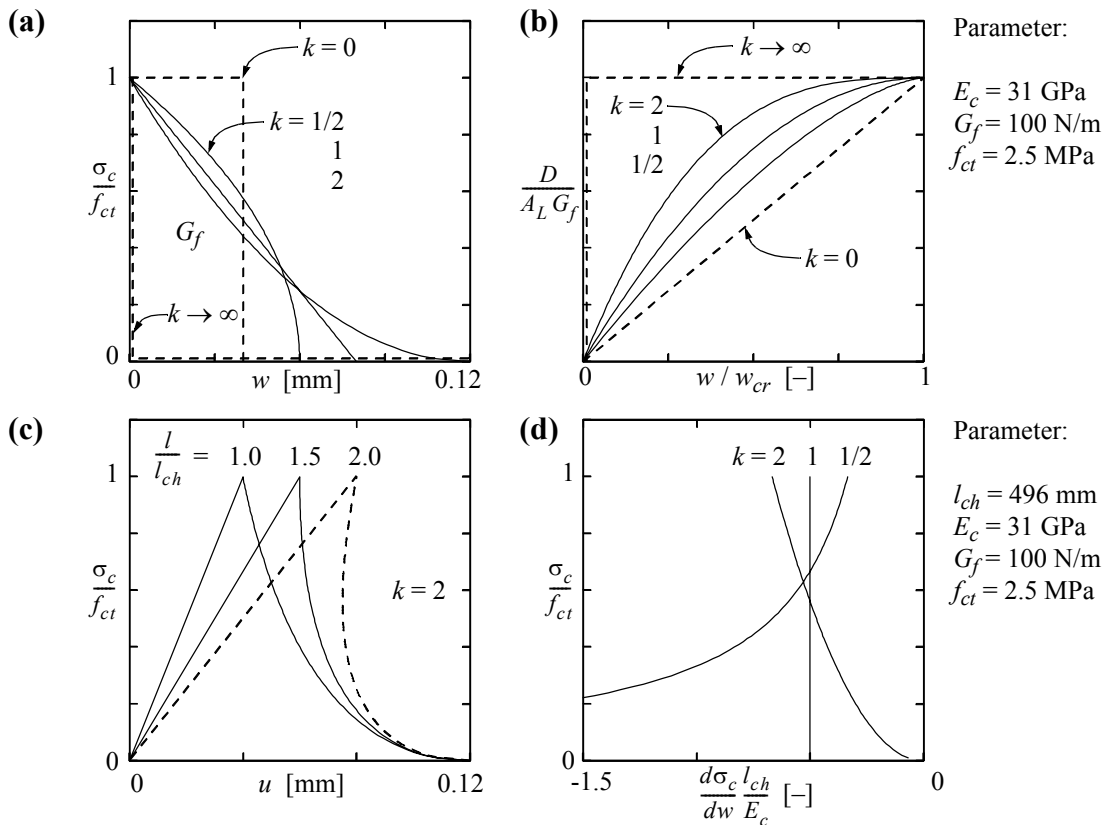
Die Steigung der Spannungs-Rissöffnungs-Kurve ergibt sich unter Verwendung von (2.23) und (2.25) zu

$$\frac{d\sigma_c}{dw} = \frac{-f_{ct}^2 k}{G_f(1+k)} \left(\frac{\sigma_c}{f_{ct}}\right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (2.26)$$

Das Minimum der Steigung,  $(d\sigma_c/dw)_{min}$ , ergibt sich für  $k > 1$  an der Stelle  $\sigma_c = f_{ct}$ , während es bei linearer Entfestigung ( $k = 1$ ) spannungsunabhängig ist, siehe Bild 2.7 (d). Für  $k \geq 1$  folgt aus (2.22), (2.26) und (2.21)

$$l_{cr,k} = l_{ch} \frac{1+k}{k} \quad (2.27)$$

Somit gilt bei linearer Entfestigung ( $k = 1$ )  $l_{cr,k} = 2l_{ch}$  und bei ideal sprödem Verhalten ( $k \rightarrow \infty$ )  $l_{cr,k} = l_{ch}$ . Bild 2.7 (c) zeigt das Verhalten von Proben mit unterschiedlicher



**Bild 2.7** – Entfestigungsabhängige Instabilität beim direkten Zugversuch: (a) Spannungs-Entfestigungs-Diagramm; (b) Dissipationsarbeit; (c) Spannungs-Verlängerungs-Diagramm; (d) Steigung der Spannungs-Rissöffnungs-Funktion.

Länge und identischem Spannungs-Rissöffnungs-Verhalten ( $k = 2$ ), bei welchem gemäss (2.27)  $l_{cr,k} = 1.5 \cdot l_{ch}$  ist.

Wird zur Beschreibung der Lastübertragungsfähigkeit des Werkstoffes eine bilineare Spannungs-Rissöffnungs-Funktion gemäss Bild 2.2 (d) verwendet, so folgt aus (2.22)

$$l_{cr,k} = \frac{E \cdot w_1}{f_{ct} - \sigma_1} \quad (2.28)$$

Unter Verwendung der Parameter aus [62] ergibt sich  $l_{cr,k} = 1.2 l_{ch}$ . Mit den Parametern aus dem CEB-FIP Model Code [23] folgt  $l_{cr,k} = (0.94 \dots 1.47) l_{ch}$  für Grösstkorndurchmesser  $d_{max} = (8 \dots 32) \text{ mm}$ .

Muttoni [97] definierte mit energetischen Überlegungen einen spannungsabhängigen Entfestigungsstabilitätsfaktor

$$\chi = \frac{dU/d\sigma}{dD/d\sigma} \quad (2.29)$$

welcher mit dem Potenzgesetz (2.23) zu

$$\chi = \frac{l}{l_{ch}} \frac{k}{1+k} \left( \frac{\sigma_c}{f_{ct}} \right)^{\frac{k-1}{k}} \quad (2.30)$$

wird. Für  $\chi < 1$  zeigt die Probe ein stabiles Verhalten,  $\chi = 1$  bedeutet den grenzstabilen Fall, und bei  $\chi > 1$  tritt im verformungsgesteuerten Versuch semi-, bzw. instabiles Versagen auf. Für  $\sigma_c = f_{ct}$  gilt mit (2.27)  $\chi = l/l_{cr,k}$ , unabhängig von  $k$ . Der Entfestigungsstabilitätsfaktor  $\chi$  enthält alle Grössen, die die Sprödigkeit eines Systems beeinflussen. Grosse Längen  $l$ , kleine Steifigkeiten  $E$ , ausgeprägte Entfestigung ( $k \gg 1$ ) sowie eine kleine spezifische Bruchenergie  $G_f$  sind gleicherweise für ein sprödes Verhalten verantwortlich.

Der Einfluss der Prüfmaschinen-Nachgiebigkeit kann durch eine Feder mit der Konstanten  $c_P$  berücksichtigt werden. Dies hat ein Verkippen der Spannungs-Verlängerungskurve, analog einer grossen Probenlänge zur Folge, vergleiche Bild 2.7 (c). Für  $k \geq 1$  folgt eine korrespondierende Probenlänge

$$l_{cr,k} = l_{ch} \frac{1+k}{k} - E_c A_L c_P \quad (2.31)$$

Für direkte Zugversuche mit einem Nebenschluss der Nachgiebigkeit  $c_N$  gemäss Evans und Marathe [38] gab Petersson [107] das Stabilitätskriterium bzw. die korrespondierende Probenlänge wie folgt an:

$$l_{cr,k} = l_{ch} C - \frac{E_c A_L}{1/c_P + 1/c_N} \quad (2.32)$$

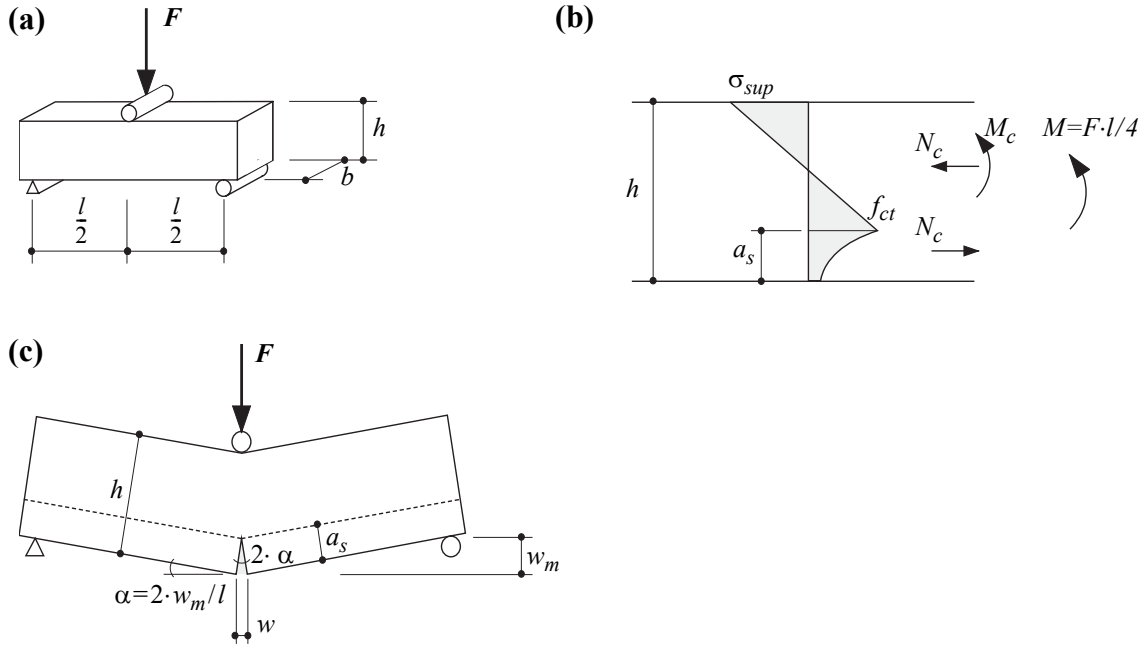
Der Formfaktor  $C$  ist vom Spannungs-Rissöffnungs-Verhalten abhängig, siehe auch (2.26) und (2.27). Die Reduktion der korrespondierenden Probenlänge wurde von Trunk et al. [140] experimentell bestätigt.

## 2.4.2 Biegezugversuch

Die Berücksichtigung des entfestigenden Rissverhaltens bei der Behandlung von Biegung bietet einige Schwierigkeiten. Die Berechnungen müssen im allgemeinen mittels numerischer Verfahren vorgenommen werden. In der Regel wird die Methode der Finiten Elemente verwendet. Zur Diskussion der Auswirkungen der Entfestigung im Riss auf das Last-Verformungsverhalten ist es jedoch sinnvoll, analytische Näherungslösungen zu erarbeiten. Für den Biegezugversuch wird im folgenden, aufbauend auf dem Vorschlag von Sigrist [137], eine solche Lösung entwickelt.

Bild 2.8 (a) zeigt einen Versuch, wie er zur Ermittlung der Biegezugfestigkeit üblicherweise durchgeführt wird. Entsprechend den Diagrammen in Bild 2.2 (c) und Bild 2.7 (a) wird davon ausgegangen, dass sich der Beton linear elastisch verhält, und dass die Entfestigung mit dem Potenzgesetz (2.23) beschrieben werden kann. Der Querschnitt wird als initial eigenspannungsfrei angenommen.

Nach dem Erreichen einer Randspannung von  $f_{ct}$  bildet sich unmittelbar unter der Last  $F$  eine Risszone. In Anlehnung an die Balkentheorie kann angenommen werden, dass sowohl die Querschnitte oberhalb des fiktiven Risses, als auch, entsprechend einem Vorschlag von Zhu [147], die Rissufer eben bleiben. Daraus ergibt sich entlang der Riss-



**Bild 2.8** – Biegezugversuch: (a) Versuchsaufbau und Abmessungen; (b) Gleichgewicht am Rissquerschnitt; (c) vereinfachte Kinematik der Rissöffnung.

zone  $a_s$  eine Entfestigungs-Spannung gemäss Bild 2.7 (a) bzw. Bild 2.8 (b). Gleichgewicht im Rissquerschnitt ergibt

$$N = \frac{b}{2}(f_{ct} - \sigma_{sup})(h - a_s) + ba_s f_{ct} \frac{1 - (1 - w/w_{cr})^{1+k}}{(1+k)w/w_{cr}} = 0 \quad (2.33)$$

$$M = \frac{b}{6}(2 \cdot \sigma_{sup} - f_{ct})(h - a_s)^2 + \frac{ba_s^2 f_{ct} (1 - w/w_{cr})^k}{(1+k)(2+k)w/w_{cr}} c_k = \frac{F \cdot l}{4} \quad (2.34)$$

wobei

$$c_k = (1+k) \frac{w}{w_{cr}} - \frac{w_{cr}}{w} \left( 1 - \left( 1 - \frac{w}{w_{cr}} \right)^{-k} \right) - k \quad (2.35)$$

Führt man die Normierungen

$$\mu = \frac{M}{f_{ct} b h^2 / 6}, \quad \eta = \frac{a_s}{h} \quad (2.36)$$

sowie die Abkürzungen

$$c_{w1} = \frac{1 - (1 - w/w_{cr})^{1+k}}{(1+k)w/w_{cr}}, \quad c_{w2} = \frac{w_{cr}}{(1+k)w} \quad (2.37)$$

ein, so kann (2.34) unter Verwertung von (2.33) wie folgt ausgedrückt werden:

$$\mu = 4(1-\eta)\left(\frac{1-\eta}{4} + \eta c_{w1}\right) + \frac{6\eta^2}{2+k}\left(1 - \frac{w}{w_{cr}}\right)^k c_{w2} c_k \quad (w \leq w_{cr}) \quad (2.38)$$

Für  $w > w_{cr}$  gilt statt (2.38)

$$\mu = 4(1-\eta)\left(\frac{1-\eta}{4} + \eta c_{w2}\right) + \frac{6\eta^2}{2+k} \frac{w_{cr}}{w} c_{w2} \quad (w > w_{cr}) \quad (2.39)$$

Die Krümmung im Rissquerschnitt kann gemäss [137] mit dem oberhalb des fiktiven Risses angreifenden Moment

$$M_c = \frac{f_{ct} b h^2}{12} (1-\eta)^2 \left(2 + \frac{2\eta}{1-\eta} c_{w1}\right) \quad (w \leq w_{cr}) \quad (2.40)$$

bzw.

$$M_c = \frac{f_{ct} b h^2}{12} (1-\eta)^2 \left(2 + \frac{2\eta}{1-\eta} c_{w2}\right) \quad (w > w_{cr}) \quad (2.41)$$

sowie der zugehörigen Biegesteifigkeit  $E_c b (h - a_s)^3 / 12$  ermittelt werden. Die Mittendurchbiegung  $w_m$  ergibt sich dann näherungsweise zu

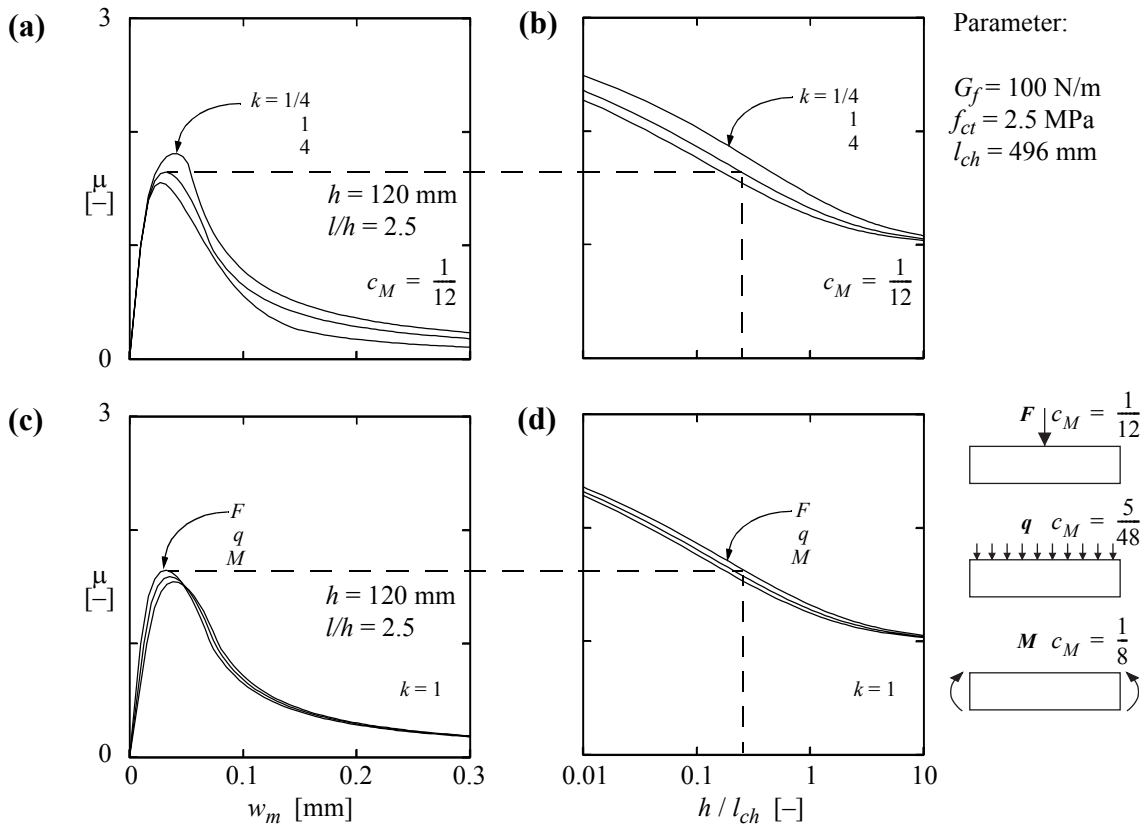
$$w_m = \frac{12 M_c l^2 c_M}{E_c b (h - a_s)^3} \quad (2.42)$$

wobei der Momentenformbeiwert  $c_M$  mit der Arbeitsgleichung zu bestimmen ist und für eine Belastung gemäss Bild 2.8 (a)  $1/12$  beträgt.

Mit (2.42) wird vereinfachend angenommen, dass die zur Berechnung der Durchbiegung relevante Krümmung affin zur Momentenlinie verläuft und zu den Auflagern hin abnimmt. Die Steifigkeit des Balkens wird damit etwas unterschätzt, was sich gemäss [137] auf die Rechenergebnisse aber nur wenig auswirkt. Die Rissöffnung am unteren Balkenrand kann näherungsweise mit der in Bild 2.8 (c) angedeuteten kinematischen Beziehung bestimmt werden:

$$w = \frac{4w_m a_s}{l} = \frac{4w_m \eta h}{l} \quad (2.43)$$

Die angenommene Kinematik der Rissöffnung entspricht der Vorstellung, dass sich die Verformungen des Balkens im Rissquerschnitt lokalisieren, was zumindest für Zustände mit grossen Risstiefen relativ gut zutrifft. Die Rissöffnung wird demnach mit Gleichung (2.43) überschätzt, wobei der dabei gemachte Fehler mit wachsender Risstiefe kleiner wird. Durch Einsetzen von (2.42) sowie den Beziehungen für  $M_c$  findet man einen nur vom System und der Rissöffnung  $w$  abhängigen Ausdruck, nämlich



**Bild 2.9** – Biegezugfestigkeit: (a) Momenten-Durchbiegungs-Diagramm und (b) Maximalmomente für unterschiedliche Entfestigungs-Funktionen; (c) Momenten-Durchbiegungs-Diagramm und (d) Maximalmomente für unterschiedliche Belastungskonfigurationen.

$$w_m = \frac{wl}{4\eta h} = \frac{f_{ct} l^2 c_\delta}{E_c h (1-\eta)} \left( 2 + \frac{2\eta}{1-\eta} c_{w1} \right) \quad (w \leq w_{cr}) \quad (2.44)$$

bzw.

$$w_m = \frac{wl}{4\eta h} = \frac{f_{ct} l^2 c_\delta}{E_c h (1-\eta)} \left( 2 + \frac{2\eta}{1-\eta} c_{w2} \right) \quad (w > w_{cr}) \quad (2.45)$$

welcher die bezogene Risstiefe  $\eta$  als Unbekannte enthält. Unter Verwendung der Abkürzung

$$c_l = \frac{w E_c}{8 c_M f_{ct} l} \quad (2.46)$$

folgt aus (2.44)

$$\eta = \frac{\sqrt{(1+2c_l)^2 + 4c_l(c_{w1} - c_l - 1)} - 1 - 2c_l}{2(c_{w1} - c_l - 1)} \quad (w \leq w_{cr}) \quad (2.47)$$

und aus (2.45)



$$\eta = \frac{\sqrt{(1+2c_l)^2 + 4c_l(c_{w2}-c_l-1)} - 1 - 2c_l}{2(c_{w2}-c_l-1)} \quad (w > w_{cr}) \quad (2.48)$$

Mit den Beziehungen (2.38) und (2.47) für  $w \leq w_{cr}$  sowie (2.39) und (2.48) für  $w > w_{cr}$  lassen sich für Biegezugversuche mit gegebenen Prüfkörperabmessungen und Betoneigenschaften die Last-Durchbiegungs-Kurven ermitteln. Die Resultate solcher Berechnungen sind in Bild 2.9 dargestellt. Die Schlankheit der Balken, der Elastizitätsmodul  $E_c$ , die spezifische Bruchenergie  $G_f$  und die Zugfestigkeit  $f_{ct}$  wurden für alle Berechnungen gleich gewählt; lediglich die Balkenhöhe  $h$  wurde variiert. In den Diagrammen ist die Beanspruchung durch das normierte Moment  $\mu$  angegeben, da damit direkt das Verhältnis der fiktiven Randspannung zur Zugfestigkeit ausgedrückt wird. Man erkennt, dass die in einem Biegezugversuch ermittelte fiktive Festigkeit wesentlich grösser ausfällt, als die aus einem direkten Zugversuch gewonnene Zugfestigkeit. Darüber hinaus zeigen die Diagramme in Bild 2.9 (a) und (b), dass durch die Form der Spannungs-Rissöffnungs-Funktion eine geringe Beeinflussung der maximalen Beanspruchung des Systems resultiert. Unter Verwendung bilinearer Spannungs-Rissöffnungs-Kurven haben Guinea et al. [52] den Einfluss des Entfestigungsverhaltens auf die Biegezugfestigkeit untersucht. Dabei stellten sie fest, dass die Maximalwerte für  $\mu$  für verschieden bilineare Spannungs-Rissöffnungs-Kurven durch paralleles Verschieben der Kurven auf der Abszisse (z.B. in Bild 2.9 (b)) erhalten werden können. Der Einfluss der Belastungsgeometrie ist deutlich geringer, siehe Bild 2.9 (c) und (d).

Die Maximalwerte für  $\mu$  und (somit die Biegezugfestigkeiten  $f_{ctb}$ ) können bestimmt werden, indem die Ableitung der Beziehung (2.38) gleich null gesetzt wird. Allerdings findet man dafür keine geschlossene Lösung. Für vorgegebene Systemwerte können die Biegezugfestigkeiten jedoch auf numerischem Weg gefunden werden. Mit zunehmender Sprödigkeit des Systems, d.h. zunehmender Balkenhöhe ( $h/l_{ch}$ ), nähert sich die Biegezugfestigkeit  $f_{ctb}$  asymptotisch der aus einem direkten Zugversuch gewonnenen Zugfestigkeit  $f_{ct}$ .

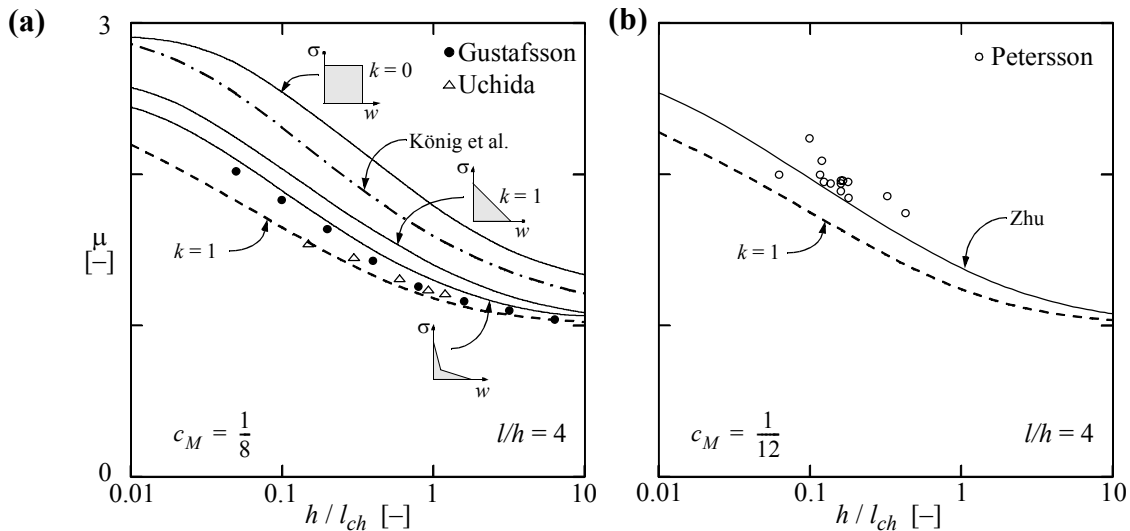
Aus der Analyse von Finite-Element-Rechnungen und Grenzwertbetrachtungen der theoretischen Zusammenhänge leitete Zhu [147] eine Formel zur näherungsweisen Berechnung der Maximalwerte für  $\mu$  her

$$\mu = \frac{1 + \eta_{cr} - 2\eta_{cr}^2 - 2\eta_{cr}^3 h/l_{cr,k}}{1 - \eta_{cr} + 2\eta_{cr}^2 h/l_{cr,k}} \quad (2.49)$$

wobei

$$\eta_{cr} \approx \frac{1}{2.6 + 8.6h/l_{cr,k}} + \frac{1}{\sqrt{4 + 80h/l_{cr,k}}} \quad (2.50)$$

Durch Einführen einer plastischen Zone nach dem Überschreiten der Zugbruchdehnung des Betons und anschliessender sukzessiver Entfestigung im Riss schlugen König et al.



**Bild 2.10** – Vergleichsrechnungen zur Biegezugfestigkeit: (a) Finite-Element-Berechnungen gemäss Gustafsson und Hillerborg [54] sowie Hawkins und Hjortset [57] ( $k=0$ ) für konstantes Biegemoment, Näherung gemäss König et al. [74]; (b) Analytische Näherung für Dreipunkt-Biegung gemäss Zhu [147]; Versuchsergebnisse von Gustafsson [53], Uchida [141] und Petersson [107].

[74] ein mechanisches Modell zur Beschreibung des Betonverhaltens in Zug- und Biegezugversuchen vor. Nach Auswertung von Parameterstudien zur Ermittlung der Bruchschnittgrössen [128] leiteten sie für reine Biegung für die Maximalwerte von  $\mu$  her:

$$\mu = 1 + \sqrt{\left(\frac{l_{ch}}{8h}\right)^2 + \frac{l_{ch}}{2h} - \frac{l_{ch}}{8h}} \quad (2.51)$$

Die von König et al. [74, 128] eingeführte plastische Zone bzw. die Spannungs-Rissöffnungs-Kurve entspricht der von Cedolin et al. mit interferometrischen Messmethoden [24, 25] ermittelten irreversiblen Phase mit anschliessendem Entfestigungsverhalten [26].

In Bild 2.10 (a) sind die Ergebnisse von Finite-Element-Berechnungen dargestellt, bei denen eine lineare bzw. bilineare Entfestigungscharakteristik (Gustafsson und Hillerborg [54]) sowie eine plastische Zone gemäss dem Dugdale-Modell (Hawkins und Hjortset [57]) zugrundegelegt wurden. Zum Vergleich sind die Maximalmomente der hier beschriebenen Näherungslösung sowie die Näherung von König et al. [74] für konstante Momentenbeanspruchung dargestellt. In Bild 2.10 (b) sind die Ergebnisse der Näherungslösung denjenigen der analytischen Näherung gemäss Zhu [147] für Dreipunkt-Biegung gegenübergestellt. Der Vergleich mit den Versuchsergebnissen von Gustafsson [53], Uchida [141] und Petersson [107] zeigt, dass mit der Näherungslösung der Einfluss der Sprödigkeit bzw. der Balkengrösse qualitativ richtig erfasst wird. Iyengar und Saviraj [67] erweiterten das analytische Rissbandmodell für Dreipunktbiegung von Ulfkjaer et al. [142]. Die Resultate ihrer analytischen Parameterstudie sind den Kurven aus Bild 2.9 (b) und (d) sowie Bild 2.10 sehr ähnlich. Hillerborg [60] und Bazant [13] stellten in einem direkten Vergleich zwischen dem fiktiven Rissmodell [62] und dem Massstabgesetz [14] bei Verwendung geeigneter Parameter eine gute Übereinstimmung fest.

Somit kann aus einer experimentell ermittelten Biegezugfestigkeit ein Näherungswert für die Zugfestigkeit des verwendeten Betons gefunden werden. Dabei ist allerdings zu beachten, dass Streuungen der Materialeigenschaften, Eigenspannungszustände, Querkrafteinflüsse und Einflüsse der Prüfeinrichtung mit dem hier besprochenen Modell nicht erfasst werden.

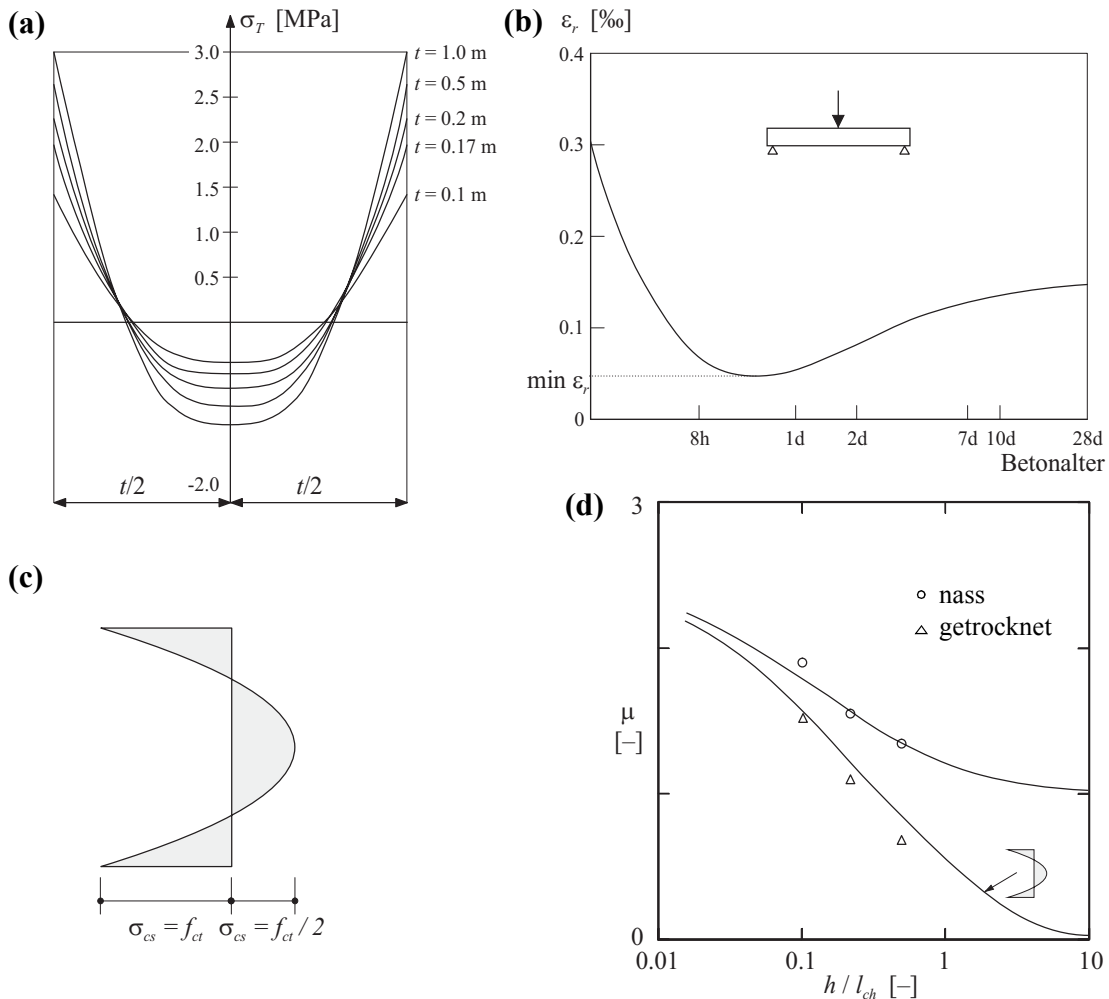
Die hier gezeigten Berechnungen belegen, dass die Biegezugfestigkeit von Beton unter Berücksichtigung der Sprödigkeit bzw. der Balkengrösse mit einfachen Beziehungen in guter Näherung angegeben werden kann. Das Entfestigungsverhalten des Betons im Riss kann mit der Variation des Exponenten des verwendeten Potenzgesetzes (2.23) berücksichtigt werden. Auf diese Weise wird der Vorschlag von Sigrist [137] erweitert. Der Momentenformbeiwert  $c_M$  erlaubt den Vergleich mit Resultaten unterschiedlicher Belastungskonfigurationen. Die in den Diagrammen in Bild 2.10 dargestellten Ergebnisse der Näherungslösung gelten für lineare Betonentfestigung ( $k = 1$ ). Eine Variation der Entfestigungsfunktion würde die numerischen Resultate zwar beeinflussen, die grundsätzlichen Folgerungen blieben aber die gleichen, siehe Bild 2.9 (a) und (b).

### 2.4.3 Einfluss von Eigenspannungen

Ist die Verformung einzelner Fasern innerhalb eines Querschnittes in einem Bauteil behindert, so spricht man von innerem Zwang. Die dabei entstehenden Spannungen werden Eigenspannungen genannt. Solche Spannungszustände treten z.B. bei jeder Erwärmung oder Abkühlung eines festen Körpers auf. Beim Wärmeaustausch zwischen unmittelbar benachbarten Körperteilen kommt es zu unterschiedlicher Temperaturverteilung über den Querschnitt und wegen der gegenseitigen Verformungsbehinderung zu innerem Zwang.

Unter Verwendung der Wärmeleitungsgleichung berechnete Falkner [39] die Eigenspannungszustände in Betonbauteilen unterschiedlicher Dicke und mit veränderlichen Wärmeübergangszahlen für eine Abkühlung der Betonaussenfläche. Für Bauteile normaler Festigkeit und Dicken  $t \leq 1$  m bleiben die Eigenspannungen bei atmosphärischen Bedingungen praktisch immer unterhalb der Betonzugfestigkeit, siehe Bild 2.11 (a). Die Maxima der Randzugspannungen treten bei dicken Bauteilen bald nach dem Ausschalen auf. Bei einer Beanspruchung infolge äusserer Last oder Zwang reisst das Bauteil im Randbereich. Wegen der geringen Rissbreite und -tiefe beeinflussen diese Risse die Temperaturverteilung über den Querschnitt nicht. Im noch ungerissenen Bereich entsteht eine neue Spannungsverteilung mit einer reduzierten Zugzone [118]. Puche [111] behandelte für ausgehärteten Beton die Eigenspannungsrisse mit Hilfe der Bruchmechanik.

Infolge der nicht synchronen Entwicklung der Betonzugfestigkeit und des Elastizitätsmoduls für Zugbeanspruchungen ist die Bruchdehnung des jungen Betons eine zeitveränderliche Grösse und stark von der Nachbehandlung abhängig. Beim Übergang von Frischbeton zum Festbeton im Alter von 6 bis 12 Stunden tritt ein Minimum der Bruchdehnung auf. Bild 2.11 (b) zeigt den Verlauf der Zugbruchdehnung nach Wierig [146].



**Bild 2.11** – Einfluss von Eigenspannungen: (a) Eigenspannungen bei verschiedenen Plattendicken  $t$  für eine Abkühlung am Aussenrand von  $20^\circ\text{C}$  [39]; (b) Zeitliche Entwicklung der Zugbruchdehnung von jungem Beton [146]; (c) Schwindspannungsverteilung [107] zur Berechnung der (d) Biegezugfestigkeit in Abhängigkeit der Schwindspannung.

Das Bruchdehnungsminimum erfolgt bei Druckbeanspruchung später, d.h. 1 bis 3 Tage nach dem Betonieren. Danach wächst die Bruchdehnung langsam an. Zwangsbeanspruchungen, d.h. Spannungen infolge ungleicher Temperaturverteilung innerhalb des Querschnittes aus dem Abfluss der Abbindewärme, treffen auf den ansteigenden Ast der Zugbruch-Dehnungs-Kurve des jungen Betons.

Die in Bild 2.11 (c) dargestellte Spannungsverteilung zur rechnerischen Erfassung der Beeinflussung durch Eigenspannungen infolge Schwinden wurde von Petersson [107] verwendet. Mit Finite-Element-Berechnungen ermittelte Petersson die Biegezugfestigkeit von Betonbalken unterschiedlicher Höhe unter Schwindbeanspruchung (getrocknet) und im nassen Zustand. Die rechnerischen Ergebnisse sind den experimentellen Werten in Bild 2.11 (d) gegenübergestellt. Mit zunehmender Trägerhöhe wird die Biegezugfestigkeit infolge von Schwindeigenspannungen massiv reduziert. Dabei gilt es allerdings zu beachten, dass die Schwindeigenspannungen auch von der Querschnittsform und nicht nur von der Querschnittshöhe abhängig sind.

## 2.5 Zusammenwirken von Beton und Stahl

### 2.5.1 Allgemeines

Für die Erfassung der Verbundwirkung bei der Berechnung des Trag- und Verformungsverhaltens von Stahlbetonbauteilen werden verschiedenste Methoden angewendet, die sich in den ihnen zugrundegelegten Modellvereinfachungen und in dem mit ihnen verbundenen Rechenaufwand zum Teil sehr stark unterscheiden. Zur analytischen Behandlung wird hier das Zuggurtmodell nach Alvarez [1] verwendet, welches auf der Grundlage eines linear elastischen Verhaltens des Betons, allgemeiner Stoffgesetze für den Bewehrungsstahl sowie eines starr-ideal plastischen Verbundgesetzes nach Sigrist [137] eine konsistente Beschreibung des Trag- und Verformungsverhaltens von Stahl- und Spannbetonzuggliedern gestattet.

Betrachtet man ein Element eines schlaff bewehrten Zuggliedes mit Bruttoquerschnitt  $A_c$ , so erhält man aus Gleichgewichtsgründen in jedem Querschnitt eines Verbundstabes

$$N = N_c + N_s = (A_c - A_s)\sigma_c + A_s\sigma_s \quad (2.52)$$

wobei  $N$  die Normalkraft und  $N_c$  bzw.  $N_s$  die Normalkräfte sowie  $\sigma_c$  bzw.  $\sigma_s$  die Spannungen im Beton bzw. im Betonstahl bezeichnen. Am differentiellen Element der Länge  $dx$  gemäss Bild 2.12 (a) gilt für  $N$ =konstant

$$\frac{dN_s}{dx} = -\frac{dN_c}{dx} = \tau_b\pi\varnothing \quad (2.53)$$

wobei eine über den Umfang  $\pi\varnothing$  des Betonstahls gleichmässig verteilte Verbundschubspannung  $\tau_b$  betrachtet wird. Unter der Annahme, dass sowohl die Querschnitte des Stahls als auch jene des Betons eben bleiben, gilt die kinematische Beziehung

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{du_s}{dx} - \frac{du_c}{dx} = \varepsilon_s - \varepsilon_c \quad (2.54)$$

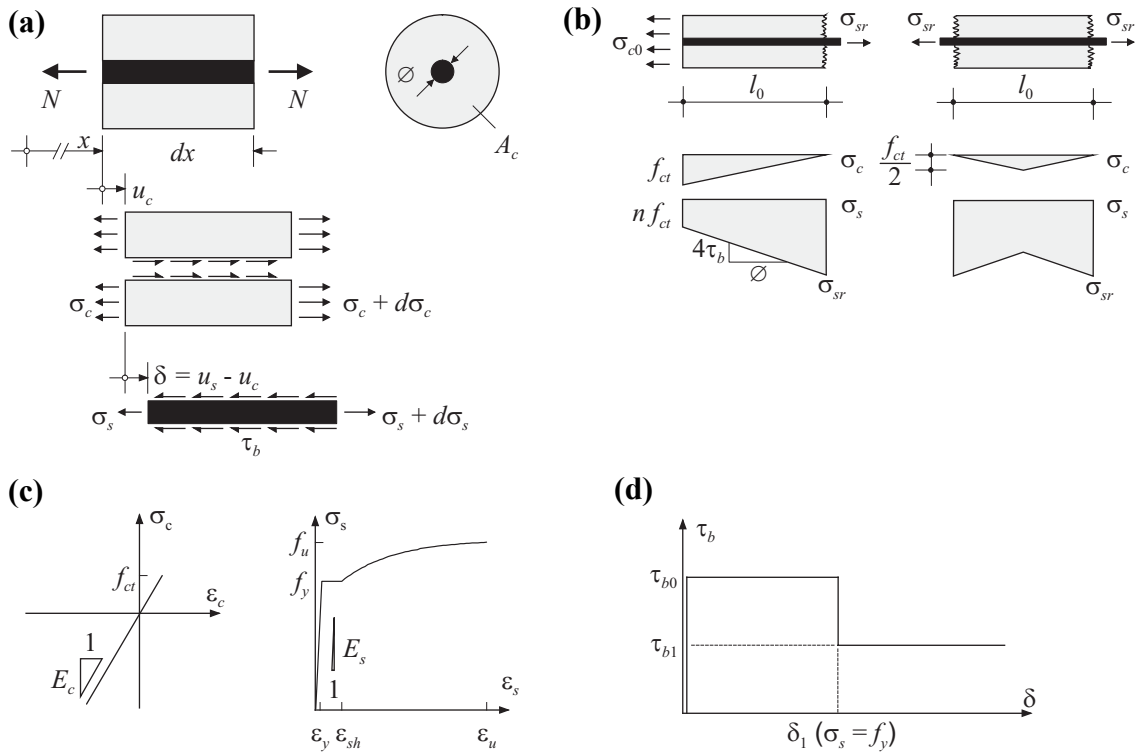
Unter Voraussetzung eines linear elastischen Verhaltens beider Materialien gemäss Bild 2.12 (c) erhält man durch Einsetzen von (2.53) und Ableiten von (2.54) die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = \tau_b\pi\varnothing \left( \frac{1}{E_s A_s} + \frac{1}{E_c (A_c - A_s)} \right) \quad (2.55)$$

des verschieblichen Verbundes [76]. Führt man

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} = \frac{\varnothing^2 \pi}{4A_c}, \quad n = \frac{E_s}{E_c} \quad (2.56)$$

ein, so kann (2.55) in die bekanntere Gleichung



**Bild 2.12** – Zuggurtmodell: (a) Differenzielles Element; (b) maximaler und minimaler Rissabstand; (c) Spannungs-Dehnungs-Diagramme für Beton und Stahl; (d) Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung.

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{4\tau_b[1 + \rho(n-1)]}{\varnothing E_s(1-\rho)} \quad (2.57)$$

nach Rehm [113] überführt werden. Eine analytische Integration von (2.57) ist nur für spezielle Funktionen  $\tau_b(\delta)$  möglich, beispielsweise bei stückweise linearen Funktionen [87].

Die von Sigrist [137] vorgeschlagene starr-ideal plastische Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung trägt der verminderten Verbundwirkung nach dem Fließbeginn der Bewehrung durch eine Abtreppung Rechnung, siehe Bild 2.12 (d). Für gerippten Bewehrungsstahl schlug Sigrist vor, die Verbundspannung vor dem Fließen durch

$$\tau_{b0} = 2f_{ct} \quad (2.58)$$

und nach dem Fließbeginn durch

$$\tau_{b1} = \frac{\tau_{b0}}{2} = f_{ct} \quad (2.59)$$

in Rechnung zu stellen. Die Zugfestigkeit des Betons kann für die praktische Anwendung in Anlehnung an [23] in Abhängigkeit der Zylinderdruckfestigkeit  $f_{cc}$  abgeschätzt werden mit

$$f_{ct} \approx 0.3 f_{cc}^{2/3} \quad (2.60)$$

Dadurch ergeben sich besonders übersichtliche Verhältnisse. Bild 2.12 (b) zeigt links die Hälfte eines von zwei Rissen im maximalen Abstand  $2l_0$  begrenzten Risselements und rechts ein Risselement mit dem minimal möglichen Rissabstand

$$l_0 = \frac{\sigma f_{ct}(1-\rho)}{4\tau_{b0}\rho} \quad (2.61)$$

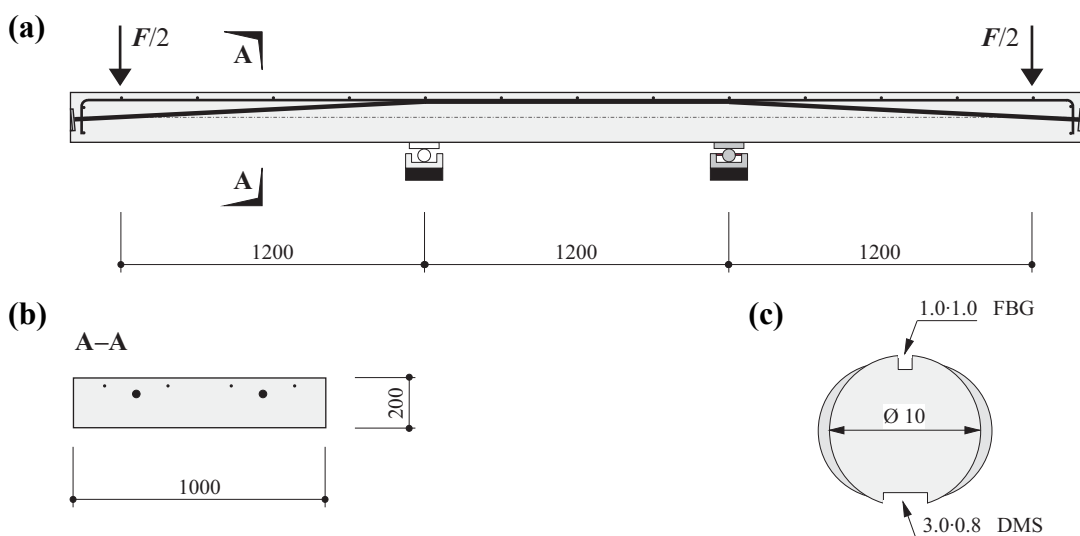
Der Rissabstand  $s_r$  eines schlaff bewehrten Zuggurtelementes kann sich allgemein zwischen den Grenzen

$$\frac{\sigma f_{ct}(1-\rho)}{4\tau_{b0}\rho} \leq s_r \leq \frac{\sigma f_{ct}(1-\rho)}{2\tau_{b0}\rho} \quad (2.62)$$

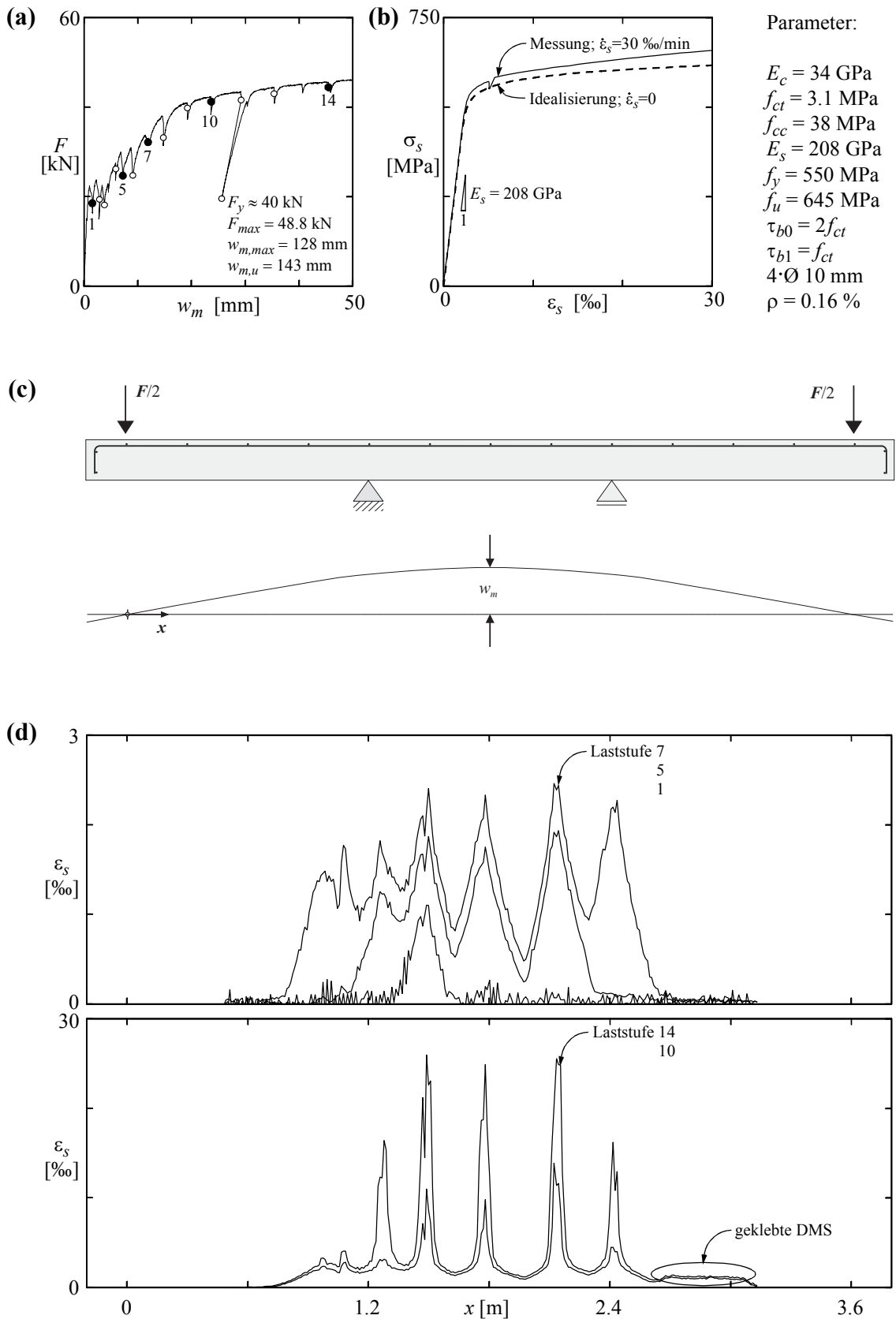
einstellen.

## 2.5.2 Vergleich mit Versuchen

Im Rahmen des Forschungsprojekts ‘‘Verformungsvermögen von Massivbautragwerken’’ wurden am Institut für Baustatik und Konstruktion der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich fünf Vierpunktbiegeversuche an Stahlbetonplattenstreifen mit identischen Abmessungen durchgeführt [70]. Der Verlauf der Stahldehnungen der schlaffen Bewehrung wurde mit auf Bragg-Gittern beruhenden, faseroptischen Dehnungssensoren erfasst. Damit wurde das Verbundverhalten zwischen Bewehrung und Beton so wenig wie möglich beeinträchtigt.



**Bild 2.13** – Konzept der Versuche von Kenel und Marti [70]: (a) Längsschnitt; (b) Querschnitt; (c) gehobelte Nuten im Bewehrungsstahl für den Einbau der elektrischen (DMS) und faseroptischen (FBG) Sensoren; Abmessungen in mm.



**Bild 2.14** – Versuchskörper B4: (a) Last-Durchbiegungs-Diagramm mit Kennzeichnung der Laststufen; (b) gemessene und idealisierte Stahlkennlinie; (c) Bestimmung der Mittendurchbiegung; (d) Faseroptisch gemessene Stahldehnungen.



Im folgenden wird gezeigt, dass mit den einfachen physikalischen Annahmen des Zuggurtmodells die Stahlspannungen und -dehnungen der Bewehrung in Stahlbetonbauteilen zutreffend berechnet werden können. Ein eingehender Vergleich von Rechenergebnissen und Versuchsergebnissen erfolgt für den Versuchskörper *B4*, welcher mit einem minimalen Längsbewehrungsgehalt von  $\rho = 0.16 \%$  gemäss der Norm [135] bewehrt war. Anschliessend wird kurz auf die Entlastung bzw. den entsprechenden Dehnungsverlauf bei Versuchskörper *B3* eingegangen.

Bild 2.13 zeigt das Versuchskonzept sowie den Querschnitt eines sensorbestückten Bewehrungsstabes. Die Bragg-Gitter waren in einem Abstand von 10.4 mm in die Fasern eingeprägt, d.h. es waren optische Sensoren im cm-Abstand angeordnet. Die Glasfaser mit einem Querschnitt von  $0.0123 \text{ mm}^2$ , als Träger der optischen Sensoren, wurde in eine gehobelte Nute mit einem Querschnitt von  $1.0 \cdot 1.0 \text{ mm}^2$  in Längsrichtung eines Bewehrungsstabes eingelegt und mit Epoxidharz vergossen, siehe Bild 2.13 (c).

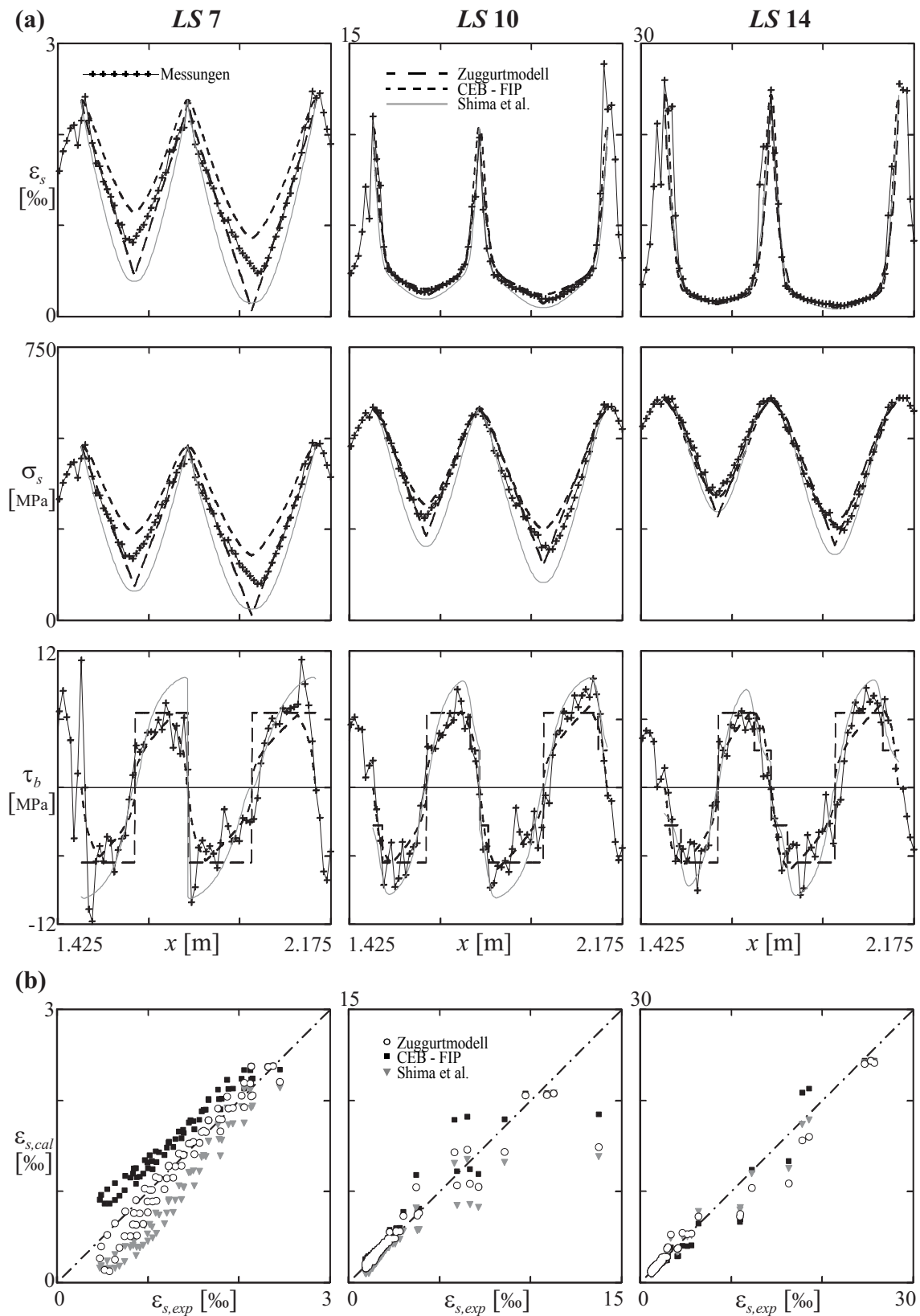
Die faseroptischen Messungen am Versuchskörper *B4*, welche zu Beginn jeder Laststufe durchgeführt wurden, sind für einige ausgewählte Laststufen gemäss Bild 2.14 (a) in Bild 2.14 (d) dargestellt. Die Risslage sowie die Abfolge der Rissentstehung lässt sich anhand der faseroptischen Dehnungsmessungen verfolgen. Die zur Kontrolle der faseroptischen Messungen angebrachten DMS beeinträchtigten den Verbund zwischen Bewehrung und umgebendem Beton in massiver Weise.

Die faseroptisch gemessenen Stahldehnungen werden im folgenden den rechnerischen Werten gemäss dem Zuggurtmodell [1], der von Shima et al. [134] vorgeschlagenen Verbundschubspannungs-Schlupf-Dehnungs-Beziehung sowie der im CEB-Model Code [23] vorgeschlagenen, ortsabhängigen Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung gegenübergestellt. Die Beziehung von Shima et al. berücksichtigt sowohl den Einfluss des auftretenden Schlupfes und die Betonfestigkeit  $f_{cc}$  als auch eine direkte Abhängigkeit der Verbundschubspannung vom Dehnungszustand des Bewehrungsstabes. Die im CEB-Model Code vorgeschlagene Beziehung richtet ein besonderes Augenmerk auf die im rissnahen Bereich vorliegende Störung der Verbundtragwirkung. Bei der Festlegung der Parameterwerte, welche die Kurvenschar zahlenmässig definieren, werden gewisse Bauteilrandbedingungen wie z.B. die Güte der Verbundbedingungen oder die Querbehinderung der Verbundfuge implizit einbezogen. Die Beziehungen von Shima et al. und CEB-Model Code müssen numerisch behandelt werden. Rechenbeispiele und Diskussionen der unterschiedlichen Resultate sind in [1] ausführlich dargestellt.

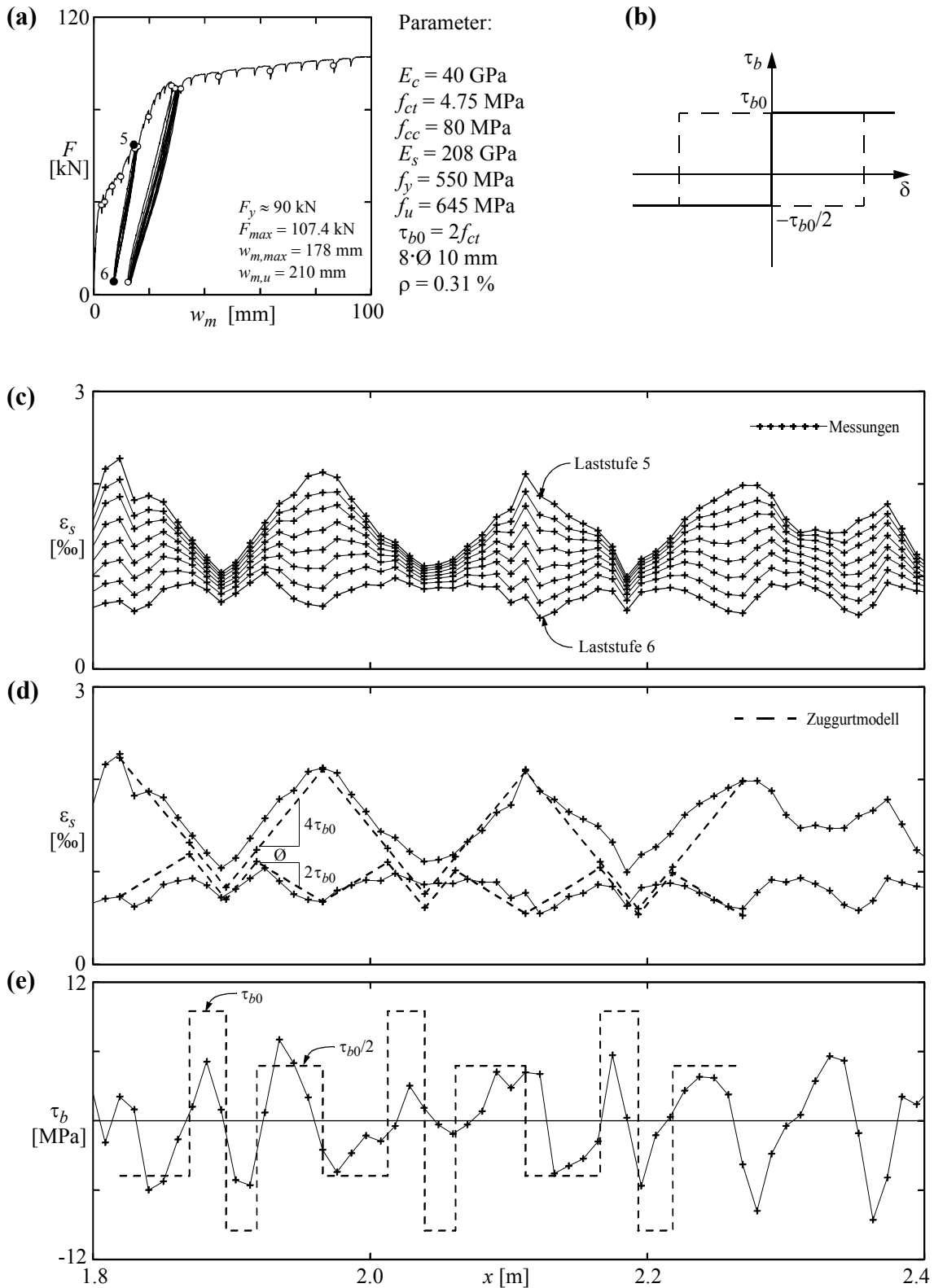
Mit einem idealisierten Spannungs-Dehnungs-Diagramm [32] eines kaltverformten Bewehrungsstahles gemäss Bild 2.14 (b), d.h.

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} + \left( \frac{\sigma_s}{k_s} \right)^{\lambda_s} \quad (2.63)$$

lassen sich die Stahldehnungen sowie die Stahl- und Verbundschubspannungen entlang von Risselementen berechnen. Für die Untersuchungen am Versuchskörper *B4* und *B3*



**Bild 2.15** – Versuchskörper *B4* — Vergleich unterschiedlicher Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehungen mit experimentellen Resultaten: (a) Stahldehnungen, Stahl- und Verbundschubspannungen entlang zwei Risselementen; (b) Vergleich der gemessenen und berechneten Stahl-Dehnungen.



**Bild 2.16** – Versuchskörper B3 — (a) Last-Durchbiegungs-Diagramm mit Kennzeichnung der Laststufen; (b) Verbundscherungs-Spannungs-Schlupf-Beziehung; (c) faseroptisch gemessene Stahldehnungen bei Entlastung in kleinen Lastschritten; (d) berechnete und gemessene Stahldehnungen (Laststufen 5 und 6); (e) aus Messwerten abgeleiteter und rechnerischer Verbundscherungsverlauf bei Entlastung (Laststufe 6).

wurden die Koeffizienten im Bereich  $0 \leq \varepsilon_s \leq 30 \%$  gemäss [1]  $k_s = 721.44$  und  $\lambda_s = 22.9$  gewählt. Die Resultate solcher Berechnungen sind in Bild 2.15 (a) für drei ausgewählte Laststufen dargestellt. Man erkennt, dass die faseroptisch gemessenen und berechneten Stahldehnungen sowohl im elastischen (Laststufe 7) als auch im plastischen Bereich (Laststufen 10 und 14) sehr gut übereinstimmen, siehe auch Bild 2.15 (b). Die unter Verwendung der Idealisierung (2.63) aus den gemessenen Stahldehnungen berechneten Stahlspannungen sowie die aus (2.53) ermittelten Verbundschubspannungen stimmen sehr gut mit den Resultaten der Modellrechnungen überein.

Die unter Verwendung der Beziehungen aus [134] und [23] berechneten Verbundschubspannungen folgen dem Verlauf der experimentelle Werte besser als die abgetrepte starr-ideal plastische Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung gemäss [137]. Allerdings ist der numerische Aufwand in Anbetracht der sehr guten Übereinstimmung der mit dem Zuggurtmodell berechneten Stahlspannungen und -dehnungen kaum zu rechtfertigen. Die Rechenergebnisse zeigen deutlich, dass die Verläufe der Stahlspannungen und -dehnungen mit ausreichender Genauigkeit mit den analytischen Beziehungen des Zuggurtmodells [1] bestimmt werden können.

Die faseroptischen Messungen am Versuchskörper *B3*, welche zu Beginn jeder Laststufe durchgeführt wurden, sind für die Laststufen 5 und 6 gemäss Bild 2.16 (a) (sowie den kleinen Entlastungsschritten dazwischen) in Bild 2.16 (c) dargestellt. Unter Verwendung der in Bild 2.16 (b) dargestellten, gegenüber dem Zuggurtmodell [1] modifizierten Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung können die Stahldehnungen bei einer Entlastung und der damit verbundenen Verbundspannungsumkehr in Teilbereichen analytisch bestimmt werden. Die Annahme einer um 50 % reduzierten Verbundschubspannung bei einer Schlupfumkehr führt zu einer guten Übereinstimmung mit den faseroptisch gemessenen Stahldehnungen und den aus den Stahlspannungen abgeleiteten Verbundschubspannungen, siehe Bild 2.16 (d) und (e).

### 2.5.3 Entfestigungsstabilität schwach bewehrter Stahlbetonkörper

Im folgenden wird auf die Stabilität des Entfestigungsverhaltens von schwach bewehrten Stahlbetonkörpern als Folge des Überschreitens der Zugfestigkeit  $f_{ct}$  und der anschließenden Entfestigung des Betons unter Mitwirkung einer eingelegten Bewehrung eingegangen. Analog den drei in Bild 2.6 (b) dargestellten Zugproben unterscheiden sich die bewehrten Zugglieder lediglich in ihrer Länge  $l$ .

Bild 2.17 (d) zeigt die Stahl- und Betonspannungen bei Erstrissbildung eines gerissenen Stahlbetonzugglieds. Aus der Bedingung konstanter Normalkraft entlang dem Zugglied folgt die Gleichgewichtsbedingung

$$\rho \sigma_{sr} + (1 - \rho) \sigma_c = [1 + \rho(n - 1)] \sigma_{c0} \quad (2.64)$$

und daraus die Betonspannung

$$\sigma_{c0} = \frac{\rho\sigma_{sr} + (1-\rho)\sigma_c}{1 + \rho(n-1)} \quad (2.65)$$

im ungerissenen und schlupffreien Bereich. Die Eintragungslänge  $l_e$  der Verbundspannung ergibt sich aus dem Verlauf der Stahlspannungen zu

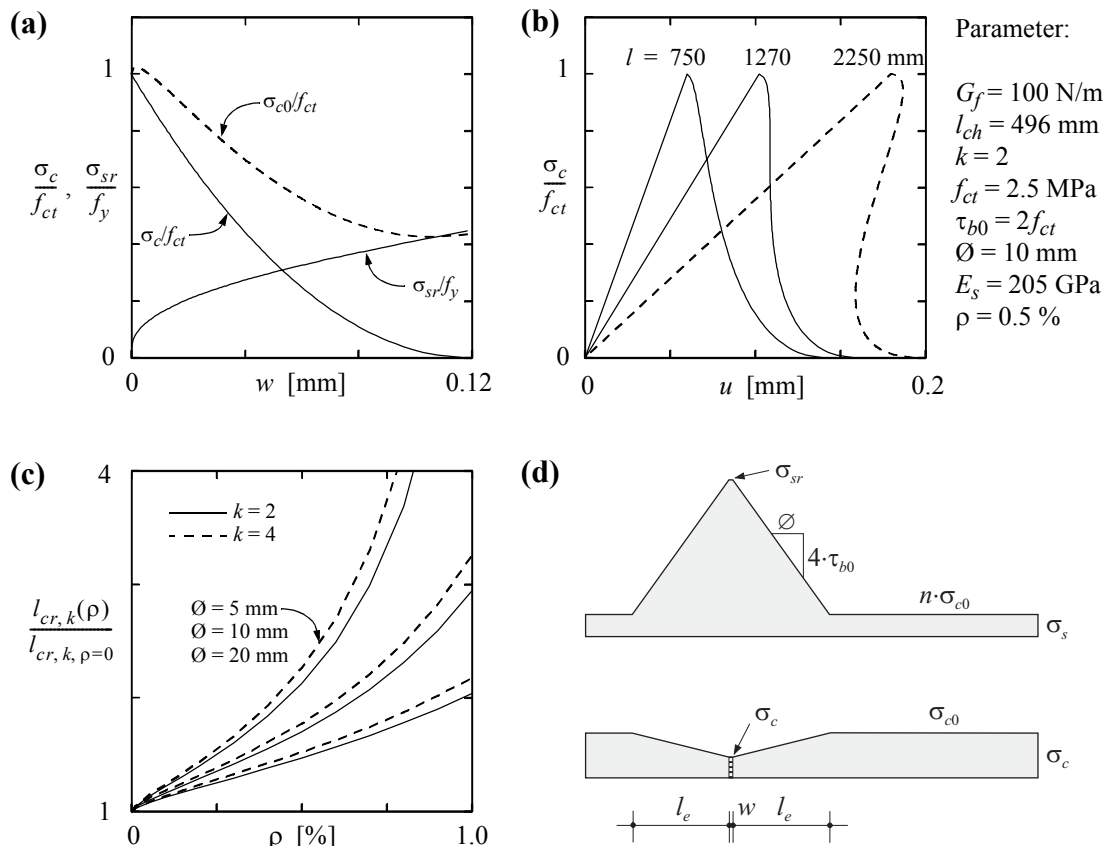
$$l_e = \frac{\varnothing}{4\tau_{b0}}(\sigma_{sr} - n\sigma_{c0}) \quad (2.66)$$

Die Rissbreite berechnet sich aus der Integration der Spannungsverläufe entlang der Eintragungslänge  $l_e$  zu

$$w \approx \frac{\varnothing}{4E_s\tau_{b0}}(\sigma_{sr}^2 - n^2\sigma_{c0}^2) + \frac{\sigma_{sr}}{E_s}w - \frac{n\varnothing}{4E_s\tau_{b0}}(\sigma_{sr} - n\sigma_{c0})(\sigma_c + \sigma_{c0}), \quad (2.67)$$

woraus die Stahlspannung  $\sigma_{sr}$  im Riss berechnet werden kann. Die Stabverlängerung ergibt sich zu

$$u \approx \frac{\varnothing}{4E_s\tau_{b0}}(\sigma_{sr}^2 - n^2\sigma_{c0}^2) + \frac{\sigma_{sr}}{E_s}w + (l - 2l_e - w)\frac{n\sigma_{c0}}{E_s} \quad (2.68)$$



**Bild 2.17** – Entfestigungsverhalten gerissener Stahlbetonzugglieder: (a) Spannungs-Rissbreiten-Kurven; (b) Spannungs-Verlängerungskurven; (c) korrespondierende Probenlänge; (d) Stahl- und Betonspannungen im Bereich der Eintragungslänge  $l_e$ .

Wird das Potenzgesetz (2.23) nach  $w$  aufgelöst und in (2.68) eingesetzt, erhält man eine von der Entfestigungsspannung  $\sigma_c$  abhängige Beziehung für die Stabverlängerung  $u$ .

Aus den Last-Verformungs-Diagrammen in Bild 2.17 (b) kann man erkennen, dass die Probe I ein stabiles Versagen zeigt. Bei der Probe II handelt es sich um den grenzstabilen Fall, und bei der Probe III tritt im verformungsgesteuerten Versuch semi-, bzw. instabiles Versagen auf. Es ist ersichtlich, dass sich für den Grenzfall der Stabilität eine vertikale Tangente im Wendepunkt der Spannungs-Verlängerungskurve ergibt. Aufgrund des nichtlinearen Last-Verformungs-Verhaltens des Zuggliedes wird die korrespondierende Probenlänge nicht über die Rissöffnung sondern über die zugehörige Betonspannung im Rissquerschnitt  $\sigma_c$  bestimmt. Der grenzstabile Fall ergibt sich, falls die Bedingungen

$$\frac{du}{d\sigma_c} = 0, \quad \frac{d^2u}{d\sigma_c^2} = 0 \quad (2.69)$$

erfüllt sind. Falls nur die erste Bedingung erfüllt wird, tritt semistabiles Versagen ein. Dies würde sich experimentell mit einem ‘snap-back’ zeigen. Allerdings findet man dafür keine geschlossene Lösung. Für vorgegebene Systemwerte können die korrespondierenden Probenlängen auf numerischem Weg gefunden werden. Die Resultate solcher Berechnungen sind in Bild 2.17 dargestellt. Die Abmessungen der Proben, der Elastizitätsmodul  $E_c$ , die spezifische Bruchenergie  $G_f$  und die Zugfestigkeit  $f_{ct}$  wurden für alle Berechnungen gleich gewählt; lediglich die Probenlänge  $l$  wurde variiert. In Bild 2.17 (c) sind die korrespondierenden Probenlängen der bewehrten Probe normiert bezüglich der korrespondierenden Probenlänge der unbewehrten Probe angegeben. Damit kann direkt die Zunahme der korrespondierenden Probenlänge in Abhängigkeit des Bewehrungsgehaltes und der Betonentfestigung im Riss ausgedrückt werden. Man erkennt die starke Zunahme der korrespondierenden Probenlänge  $l_{cr,k}$  mit zunehmendem Bewehrungsgehalt  $\rho$ . Die verbundversteifende Wirkung kleiner Bewehrungsdurchmesser  $\emptyset$  beeinflusst das Stabilitätsverhalten deutlich stärker als das Entfestigungsverhalten des Betons im Riss.

Infolge der Nachgiebigkeit der Prüfmaschinen können korrespondierende Probenlängen gemäss Bild 2.17 (c) bei direkten Zugversuchen nicht stabil entfestigt werden. Aufgrund gleicher Überlegungen wie bei (2.31) und (2.32) hat die Nachgiebigkeit der Prüfmaschinen ein Verkippen der Spannungs-Verlängerungskurve nach rechts zur Folge. Diese Feststellung wurde bei direkten Zugversuchen an Stahlbetonscheiben experimentell bestätigt [2, 42].

## 3 Mindestbewehrung von Biegeträgern

### 3.1 Allgemeines

Die Mindestbewehrung von Stahlbetonbauten dient in erster Linie der Vermeidung eines Versagens ohne Vorankündigung bei Erstrissbildung. Sie muss die während des Rissbildungsprozesses auftretenden Zugkräfte in den Rissquerschnitten übertragen. In vielen Fällen wird eine Erhöhung der aus Tragsicherheitsgründen unabdingbaren Mindestbewehrung verlangt, um im Gebrauchszustand eine den gestellten Anforderungen genügende Begrenzung der Rissbreiten zu gewährleisten. Eine Übersicht zum Themenkreis der Mindestbewehrung einschliesslich entsprechender Normvorschriften findet man in [88].

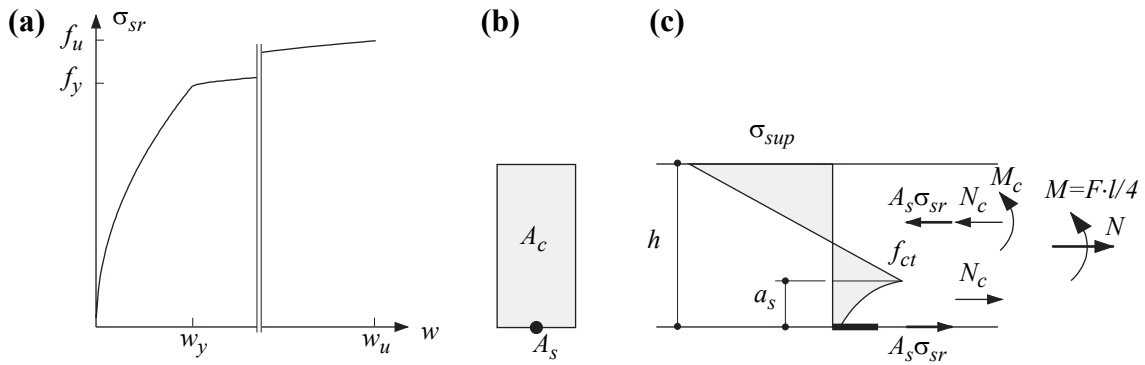
Im folgenden werden auf der Grundlage von Kapitel 2 Beziehungen entwickelt, welche der Bestimmung einer Mindestbewehrung zur Begrenzung der Stahlspannung auf zulässige Werte bei Biegung und Normalkraftbeanspruchung dienen.

### 3.2 Bruchmechanisches Modell für bewehrte Biegeträger

#### 3.2.1 Modellannahmen

Die Berücksichtigung des entfestigenden Rissverhaltens von Beton in Kombination mit Bewehrung bei der Behandlung von Problemen der Mindestbewehrung bietet einige Schwierigkeiten. Die Berechnungen zu den in der Literatur vorgeschlagenen Modellen müssen meist mittels numerischer Verfahren vorgenommen werden. Zur Diskussion der Auswirkungen der Spannungs-Entfestigung im Riss auf das Last-Verformungs-Verhalten ist es jedoch sinnvoll, analytische Näherungslösungen zu erarbeiten. Unter den selben vereinfachenden Annahmen wie für die Ermittlung der Biegezugfestigkeit wird im folgenden, aufbauend auf dem Zuggurtmodell, eine solche Lösung entwickelt.

Entsprechend den Diagrammen in Bild 2.2 (c) und Bild 2.7 (c) wird davon ausgegangen, dass sich der Beton linear elastisch verhält und dass die Spannungs-Entfestigung mit dem Potenzgesetz (2.23) beschrieben werden kann. Der Querschnitt wird als initial eigenspannungsfrei angenommen. Weiter wird vorausgesetzt, dass sich nur ein Riss öffnet und dass sich die Verformungen des Balkens im Rissquerschnitt lokalisieren. Diese Vorstellung der Rissöffnungs-Kinematik trifft zumindest für grosse Risstiefen relativ gut zu. Zur Vereinfachung der Beziehungen wird die Bewehrung modellhaft an der Trägerunterseite eingelegt, d.h. der Querschnitt wird ohne Überdeckung modelliert.



**Bild 3.1** – Rissquerschnitt: (a) Stahlspannungs-Rissbreiten-Funktion; (b) Querschnitt; (c) Gleichgewicht am Rissquerschnitt.

Analog zum bewehrungsfreien Träger bildet sich nach dem Erreichen einer Randspannung  $f_{ct}$  unmittelbar unter der Last  $F$  eine Risszone. In Anlehnung an die Balkentheorie kann angenommen werden, dass sowohl die Querschnitte oberhalb des fiktiven Risses, als auch die Rissufer eben bleiben. Daraus ergibt sich entlang der Risszone  $a_s$  eine Entfestigungs-Spannung gemäss Bild 3.1 (c) sowie eine bestimmte Stahlspannung  $\sigma_{sr}$  in der Bewehrung. Für die Formulierung der Stahlspannungs-Rissbreiten-Beziehung werden zur Vereinfachung gegenüber (2.67) die Betonverformung sowie die Stahldehnung im Riss vernachlässigt. Weiter wird vorausgesetzt, dass die Stahlspannungen durch die Verbundwirkung auf  $n f_{ct}$  statt  $n \sigma_{c0}$  abgebaut werden. Der damit verbundene Fehler wird für Stahlspannungen im Bereich der Fließgrenze verschwindend klein, nämlich im Maximum

$$\frac{\Delta w}{w} \approx \left( \frac{n f_{ct}}{f_y} \right)^2 \quad (3.1)$$

Die Rissbreite berechnet sich unter den getroffenen Annahmen zu

$$w \approx \frac{\varnothing (\sigma_{sr}^2 - n^2 f_{ct}^2)}{4 E_s \tau_{b0}} \quad (3.2)$$

und somit gilt für die Stahlspannung im Riss  $\sigma_{sr}$

$$\sigma_{sr} = \sqrt{4 \tau_{b0} E_s w / \varnothing + n^2 f_{ct}^2} \quad (3.3)$$

siehe Bild 3.1 (a).

### 3.2.2 Gleichgewicht im Rissquerschnitt

Führt man die Normierungen

$$\kappa = \frac{\sigma_{sr}}{f_{ct}}, \quad \nu = \frac{N}{A_c f_{ct}} \quad (3.4)$$



ein und formuliert man die Gleichgewichtsbedingungen im Rissquerschnitt unter Berücksichtigung der Stahlspannung  $\sigma_{sr}$  und der Normalkraft

$$N = \frac{b}{2}(f_{ct} - \sigma_{sup})(h - a_s) + b a_s f_{ct} \frac{1 - (1 - w/w_{cr})^{1+k}}{(1+k)w/w_{cr}} + \sigma_{sr} A_s = v f_{ct} A_c \quad (3.5)$$

so können die Beziehungen (2.38) und (2.47) für  $w \leq w_{cr}$  wie folgt erweitert werden:

$$\mu = 4(1 - \eta) \left( \frac{1 - \eta}{4} + \eta c_{w1} + \kappa \rho - v \right) + \frac{6\eta^2}{2+k} \left( 1 - \frac{w}{w_{cr}} \right)^k c_{w2} c_k + 6\eta \left( \kappa \rho - v + \frac{v}{2\eta} \right) \quad (3.6)$$

Analog erhält man statt (2.39) und (2.48) für  $w > w_{cr}$  die Beziehungen

$$\mu = 4(1 - \eta) \left( \frac{1 - \eta}{4} + \eta c_{w2} + \kappa \rho - v \right) + \frac{6\eta^2}{2+k} \frac{w_{cr}}{w} c_{w2} + 6\eta \left( \kappa \rho - v + \frac{v}{2\eta} \right) \quad (3.7)$$

In (3.6) und (3.7) bezeichnet  $\rho$  den auf die Trägerhöhe  $h$  bezogenen Bewehrungsgehalt, und es gilt

$$\eta = \frac{\sqrt{(1 + \kappa \rho - v + 2c_l)^2 + 4c_l(c_{w1} - c_l - 1)} - 1 - \kappa \rho + v - 2c_l}{2(c_{w1} - c_l - 1)} \quad (w \leq w_{cr}) \quad (3.8)$$

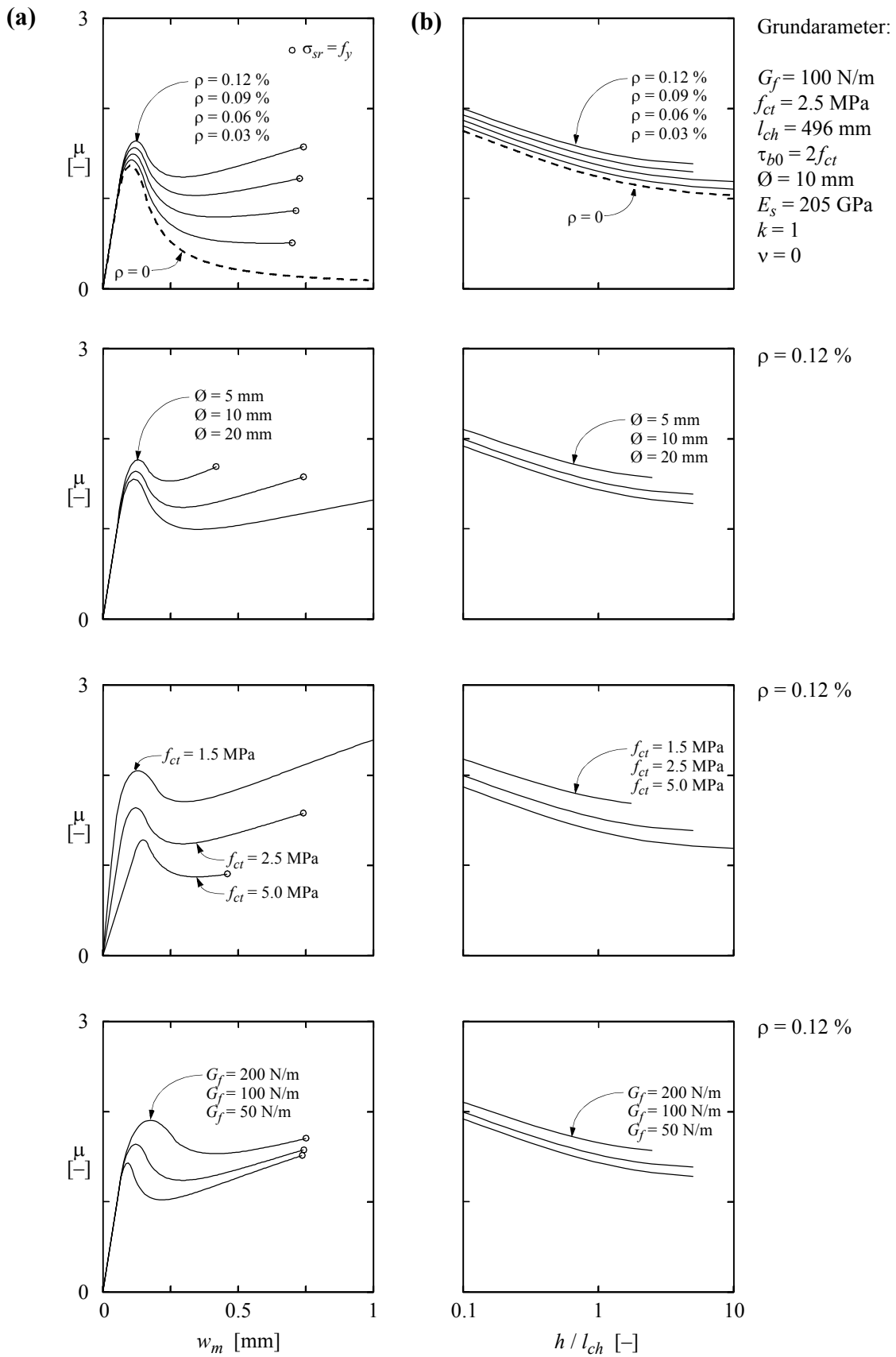
$$\eta = \frac{\sqrt{(1 + \kappa \rho - v + 2c_l)^2 + 4c_l(c_{w2} - c_l - 1)} - 1 - \kappa \rho + v - 2c_l}{2(c_{w2} - c_l - 1)} \quad (w > w_{cr}) \quad (3.9)$$

Mit den Beziehungen (3.6) und (3.8) für  $w \leq w_{cr}$  sowie (3.7) und (3.9) für  $w > w_{cr}$  lassen sich für Biegeträger mit gegebener Geometrie, Betoneigenschaften und Bewehrung die Last-Durchbiegungs-Kurven ermitteln. Die Resultate solcher Berechnungen sind in Bild 3.2 (reine Biegung) und in Bild 3.3 (Biegung mit Normalkraft) dargestellt. Die Schlankheit der Balken wurde für alle Berechnungen gleich gewählt; nur die Balkenhöhe  $h$  wurde variiert. In den Diagrammen ist die Beanspruchung durch das normierte Moment  $\mu$  angegeben.

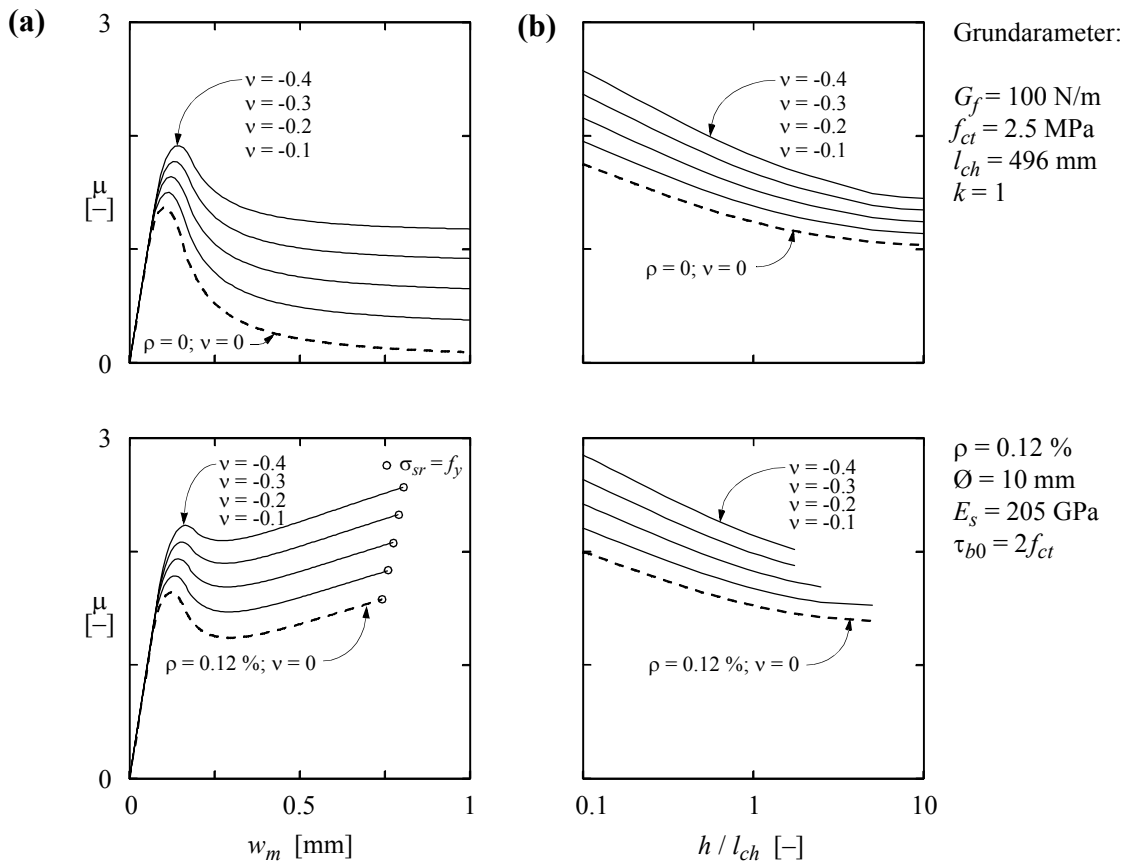
### 3.2.3 Maximaler Biege­widerstand schwach bewehrter Biegeträger

Die Maximalwerte für  $\mu$  können bestimmt werden, indem die Ableitung der Beziehung (3.6) gleich null gesetzt wird. Allerdings findet man dafür keine geschlossene Lösung. Für vorgegebene Systemwerte und Bewehrungseigenschaften können die Maximalwerte für  $\mu$  jedoch auf numerischem Weg gefunden werden.

Die Diagramme in Bild 3.2 und Bild 3.3 zeigen den Einfluss des Bewehrungs­gehaltes  $\rho$ , des Bewehrungs­durchmessers  $\varnothing$ , der Betonzugfestigkeit  $f_{ct}$  und der spezifischen Bruchenergie  $G_f$  auf das Maximalmoment schwach bewehrter Stahlbetonbalken. Entsprechend den in Kapitel 2.4.2 entwickelten Beziehungen nimmt mit zunehmender Sprö-



**Bild 3.2** – Verhalten schwach bewehrter Biegeträger: (a) normierte Momenten-Durchbiegungs-Kurven für  $h = 0.25\text{ m}$  und  $l/h = 4$ ; (b) Maximalmomente bei Variation verschiedener Parameter.



**Bild 3.3** – Verhalten schwach bewehrter Biegeträger unter Normalkraftbeanspruchung:  
 (a) normierte Momenten-Durchbiegungs-Kurven für  $h = 0.25 \text{ m}$  und  $l/h = 4$ ;  
 (b) Maximalmomente bei Variation verschiedener Parameter.

digkeit des Systems, d.h. zunehmender Balkenhöhe ( $h/l_{ch}$ ) der Maximalwert für  $\mu$  ab, siehe die strichlierten Linien für bewehrungslose Betonquerschnitte in Bild 3.2 (b).

Die Druckkraft hat einen versteifenden Einfluss auf das Verformungsverhalten der Biegeträger. Einerseits wird das Rissmoment proportional zur Druckkraftzunahme erhöht, und andererseits ist das Nachrissverhalten weniger stark entfestigend, siehe Bild 3.3 (a). Die Maximalwerte von  $\mu$ , dargestellt in Bild 3.3 (b), erfahren durch die Druckkraft eine erhebliche Steigerung.

### 3.3 Mindestbewehrung bei Biegebeanspruchung

#### 3.3.1 Bestimmungsgleichung

Bei Stahlbetonträgern mit Bewehrung (einheitlicher Stabdurchmesser  $\varnothing$ ) werden die bei Lasteinwirkung oder bei Beanspruchung aus äusserem Zwang [88] während des Rissbildungsprozesses im Rissquerschnitt auftretenden grösstmöglichen Stahlspannungen  $\sigma_{s,max} = \sigma_{sr}$  auf ein zulässiges Mass  $\sigma_{s,adm}$  begrenzt. Die zulässige Stahlspannung könnte theoretisch, unter Vernachlässigung jeglicher Sicherheitsmarge, gleich der Bruch-

festigkeit des Bewehrungsstahles  $f_u$  gewählt werden. In der Regel wird jedoch  $\sigma_{s,adm} \leq f_y$  angesetzt.

Das Diagramm in Bild 3.4 (a) zeigt für einen Biegeträger mit Bewehrung am unteren Querschnittsrand und Rechteckquerschnitt gemäss Bild 3.1 (b) normierte Last-Durchbiegungskurven mit unterschiedlichen Bewehrungsgehalten. Es wirkt keine äussere Normalkraft. Mit der Begrenzung der Stahlspannung im Riss auf

$$\sigma_{sr} = f_y \quad (3.10)$$

sowie der Bedingung, dass das Biegemoment beim Erreichen der Fliessspannung gleich dem ersten Maximum der Last-Durchbiegungskurve ist, lässt sich die Mindestbewehrung bestimmen.

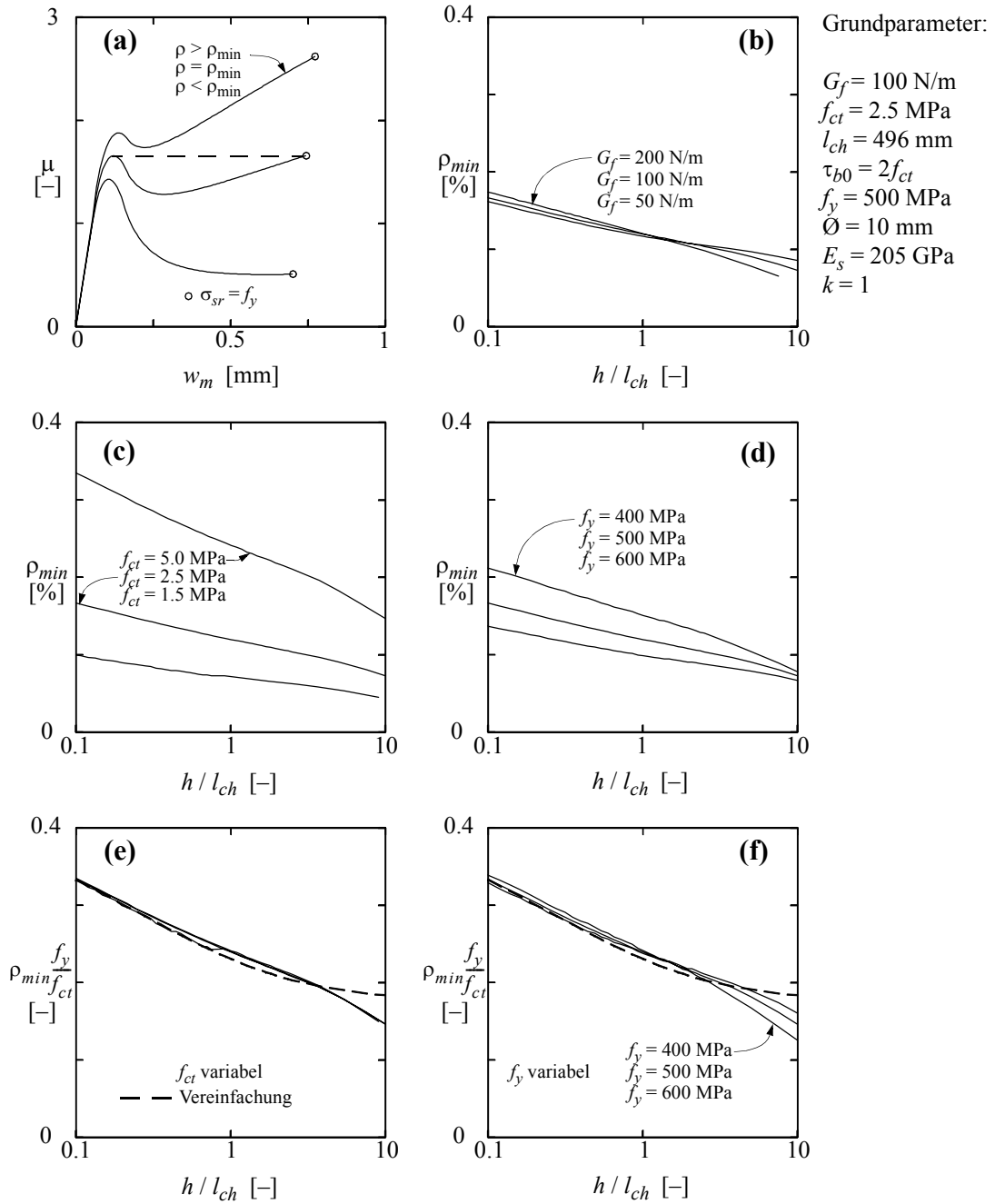
Allerdings findet man dafür keine geschlossene Lösung. Für vorgegebene Systemwerte und Bewehrungseigenschaften können die Mindestbewehrungsgehalte  $\rho_{min}$  jedoch auf numerischem Weg gefunden werden. Die Resultate solcher Berechnungen sind in Bild 3.4 (b) bis (d) dargestellt. Die Schlankheit der Balken wurde für alle Berechnungen gleich gewählt, und nur die Balkenhöhe  $h$  wurde variiert. Es ist ersichtlich, dass die Betonzugfestigkeit  $f_{ct}$  und die Fliessgrenze  $f_y$ , nicht aber die spezifische Bruchenergie  $G_f$  einen signifikanten Einfluss auf den Mindestbewehrungsgehalt haben. Entsprechend (3.6) und (3.7) nimmt mit zunehmender Sprödigkeit des Systems, d.h. mit zunehmender Balkenhöhe ( $h/l_{ch}$ ) die erforderliche Mindestbewehrung  $\rho_{min}$  ab.

### 3.3.2 Vereinfachte Berechnung der Mindestbewehrung

Werden die Mindestbewehrungsgehalte  $\rho_{min}$  auf das Verhältnis der Festigkeiten  $f_y/f_{ct}$  bezogen, sind die berechneten Kurven beinahe deckungsgleich und können in guter Näherung wie folgt vereinfacht werden

$$\rho_{min} \frac{f_y}{f_{ct}} = 0.175 \left( 3 - \frac{2}{\sqrt[4]{1 + l_{ch}/h}} \right) \quad (3.11)$$

Der Klammerausdruck in Gleichung (3.11) ist aus bruchmechanischen Überlegungen abgeleitet; er erreicht für  $h \rightarrow 0$  den Wert drei und für  $h \rightarrow \infty$  den Wert eins. Dies entspricht im wesentlichen den Grenzwerten der grössenabhängigen Biegezugfestigkeit für plastisches und ideal sprödes Materialverhalten, wie in Kapitel 2.4.2 dargestellt und in [54] diskutiert. Der der Klammer vorangestellte Faktor ergibt sich aus der klassischen Stahlbetontheorie [96, 114] für den Fall, dass die Stahlspannung im Rissquerschnitt gerade die Fliessgrenze erreicht ( $\sigma_{sr} = f_y$ ), die Bewehrung an der Trägerunterseite eingelegt wird und das Entfestigungsverhalten des Betons im Rissquerschnitt als ideal spröd modelliert wird. Wird der Hebelarm der inneren Kräfte zu  $0.95d$  angenommen, ergibt sich der Faktor zu



**Bild 3.4** – Mindestbewehrung von Rechteckquerschnitten: (a) Bestimmungbedingung gemäss Gleichung (3.10); (b), (c) und (d) Mindestbewehrungsgehalte für variable spezifische Bruchenergie  $G_f$ , Betonzugfestigkeit  $f_{ct}$  und Fließgrenze  $f_y$ ; (e) und (f) auf  $f_{ct}$  und  $f_y$  bezogene Mindestbewehrungsgehalte.

$$\frac{1}{6 \cdot 0.95} \approx 0.175 \quad (3.12)$$

Führt man die Normierung

$$\psi = d/h \quad (3.13)$$

für die Bewehrungsanordnung bzw. die statische Höhe ein, so kann (3.11) unter Verwendung von (3.13) und (2.21) wie folgt ausgedrückt werden

$$\rho_{min} = \frac{0.175}{\Psi} \left( 3 - \frac{2}{\sqrt[4]{1 + E_c G_f / (h f_{ct}^2)}} \right) \frac{f_{ct}}{f_y} \quad (3.14)$$

Der Ausdruck (3.14) enthält die signifikanten Grössen, welche die Mindestbewehrungsgehalte  $\rho_{min}$  beeinflussen. Kleine Balkenhöhen  $h$ , kleine bezogene statische Höhen  $\psi$  der Bewehrung, grosse charakteristische Längen  $l_{ch}$  sowie ein grosses Festigkeitsverhältnis  $f_{ct}/f_y$  sind für eine erhöhte Mindestbewehrung  $\rho_{min}$  verantwortlich.

Die Vereinfachung (3.14) bildet den Verlauf der Mindestbewehrung für kleine und mittlere Trägerhöhen befriedigend gut ab. Bei grossen Trägerhöhen nähert sich die Vereinfachung asymptotisch dem Grenzwert der klassischen Stahlbetontheorie, während die Resultate der numerischen Berechnung stets kleinere Mindestbewehrungsgehalte ergeben. Bei grossen Abmessungen fallen Unsicherheiten der Modelle aus Kapitel 2.4.2 sowie Gleichung (3.2) bzw. (3.3) stärker ins Gewicht, da die Entfestigungszone des Rissquerschnittes gegenüber der Trägergrösse immer kleiner wird.

### 3.4 Vergleich mit auf Bruchmechanik basierenden Ansätzen

Basierend auf experimentellen Untersuchungen, schlugen Bosco und Carpinteri [22] eine Formel vor, welche die Systemsprödigkeit bzw. die Spannungsintensität  $K_{cr}$  beinhaltet und mit der Betonzylinderdruckfestigkeit  $f_{cc}$  korreliert

$$\rho_{min} = \frac{K_{cr}}{f_y \sqrt{h}} \left( 0.1 + 0.23 \frac{f_{cc}}{\sigma_1} \right), \quad \sigma_1 = 100 \text{ MPa} \quad (3.15)$$

wobei  $K_{cr}$  bzw.  $f_y$  in  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  bzw.  $\text{MPa}$  und  $h$  in  $\text{m}$  einzusetzen sind. Allerdings ist diese Beziehung empirisch entstanden, und es kann damit keine adäquate Aussage über das Maximalmoment des Rissbildungsprozesses gemacht werden.

Baluch, Azad und Ashmawi [10] verglichen die experimentellen Daten von Bosco und Carpinteri [22] mit ihrem linear elastischen bruchmechanischen Modell und leiteten folgende Beziehung her

$$\rho_{min} = \frac{1.9134 K_{cr}^{0.82}}{f_y^{0.9922} (2.6 d/h - 0.9)} \quad (3.16)$$

wobei für die Bewehrungsüberdeckung in  $\text{m}$ ,  $K_{cr}$  bzw.  $f_y$  in  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  bzw.  $\text{MPa}$  einzusetzen sind.

Gerstle et al. [47] leiteten unter der Voraussetzung einer monoton steigenden Last-Durchbiegungs-Kurve, wie in Bild 3.5 (a) dargestellt, eine von der Bewehrungsfestigkeit unabhängige Beziehung her

$$\rho_{min} = \frac{E_c}{E_s} \sqrt{\sqrt{0.0081 + 0.0148 \frac{h f_{ct}}{E_c w_{cr}}} - 0.09} \quad (3.17)$$

Diese Beziehung liefert viel grössere Mindestbewehrungsgehalte  $\rho_{min}$  als die anderen Modelle sowie die aktuellen Normen, siehe Bild 3.5.

Auf der Grundlage eines kohäsiven Rissmodells und der Beziehung von Bosco und Carpinteri [22] sehr ähnlich, gelangten Hawkins und Hjortset [57] zur Näherung

$$\rho_{min} = \frac{0.175 f_{ctb}}{\psi f_y} \quad (3.18)$$

wobei  $f_{ctb}$  der Biegezugfestigkeit eines nichtbewehrten Balkens mit identischen Abmessungen des bewehrten Balkens entspricht:

$$f_{ctb} = c_\zeta f_{ct} \left[ 1 + \left( 0.85 + 2.3 \cdot \frac{h}{l_1} \right)^{-1} \right], \quad l_1 = \frac{E_c w_1}{2 f_{ct}} \quad (3.19)$$

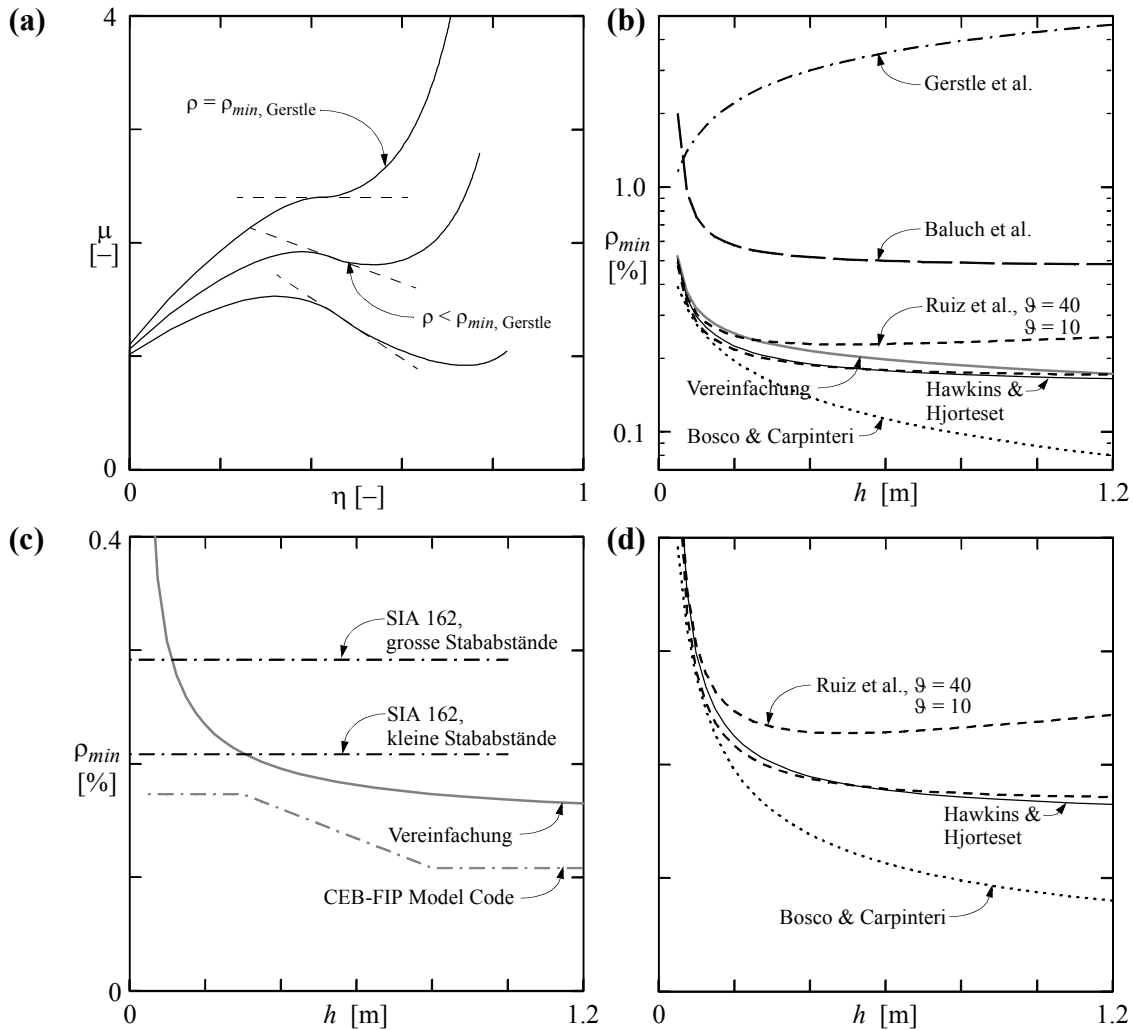
Hierbei ist  $c_\zeta = 1.046$  bei Dreipunkt-Biegung bzw.  $c_\zeta = 1$  bei Vierpunkt-Biegung.

Ruiz, Planas und Elices [121] berücksichtigten im Gegensatz zu den vorhin erläuterten Modellen die Verbundschubspannung der Bewehrung. Durch Analyse der Rissuferverformungen infolge der kohäsiven Spannungen am Riss und den Verbundschubspannungen im Innern einer Halbscheibe [92] berechneten sie auf numerischem Weg Last-Durchbiegungs-Kurven. Ausgehend vom ersten Maximum der Last-Durchbiegungs-Kurve leiteten sie aus dem Momenten-Gleichgewicht im Kollapszustand und unter Verwendung der Biegezugfestigkeit  $f_{ctb}$  gemäss Gleichung (3.19) und einem Verbundparameter  $\vartheta$  folgende Beziehung her

$$\rho_{min} = \frac{1}{6\psi} \frac{f_{ctb}/f_{ct}}{f_y/f_{ct} - \vartheta(4\sqrt{h/l_1} - 3.61 c_s/l_1)} \quad (3.20)$$

Ein direkter Vergleich der verschiedenen Modelle ist nicht ohne weiteres möglich, da sie auf unterschiedlichen Annahmen und Modellparametern basieren. Bild 3.5 zeigt den erforderlichen Mindestbewehrungsgehalt  $\rho_{min}$  in Abhängigkeit der Trägerhöhe  $h$  für die beschriebenen Modelle und folgende Annahmen:

- Der Beton wird charakterisiert durch  $f_{ct} = 4 \text{ MPa}$ ,  $f_{cc} = 40 \text{ MPa}$ ,  $E_c = 30 \text{ GPa}$  und  $G_f = 160 \text{ N/m}$ ; für die Modelle von Bosco und Carpinteri [22] sowie Baluch et al. [10] wird angenommen, dass Irwins [65] Relation (2.7) zu  $K_{cr} = \sqrt{E_c G_f} = 2.19 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  wird. Für die Formel von Gerstle et al. [47] wird eine lineare Entfestigung mit  $w_{cr} = w_1 = 2G_f/f_{ct} = 80 \text{ }\mu\text{m}$  angenommen. Dem Modell



**Bild 3.5** – Vergleich unterschiedlicher Ansätze zur Berechnung der Mindestbewehrung: (a) Modellannahme von Gerstle et al. [47]; (b) Übersicht (im logarithmischen Massstab); (c) Vereinfachung (3.14) und Normbestimmungen; (d) auf Bruchmechanik basierende Ansätze.

von Hawkins und Hjortset [57] wird Peterssons [107] bilineare Entfestigung mit  $w_1 = G_f/f_{ct} = 48 \mu\text{m}$  zugrunde gelegt. Für das Modell von Ruiz et al. [121] wird eine bilineare Entfestigung mit  $w_1 = G_f/f_{ct} = 40 \mu\text{m}$  verwendet.

- Der Stahl wird charakterisiert durch  $f_y = 480 \text{ MPa}$  und  $E_s = 205 \text{ GPa}$ .
- Die Bewehrungsüberdeckung ist konstant,  $h - d = 25 \text{ mm}$ .
- Für das Modell von Ruiz et al. [121] wird ein konstanter Verbundparameter  $\vartheta$  vorausgesetzt. Dies wird durch Verwendung von konstanten Bewehrungsdurchmessern  $\varnothing$  für alle Trägerhöhen erreicht. Zwei Werte werden betrachtet:  $\vartheta = 10$  entspricht einem schwachen Verbund mit  $\varnothing = 16 \text{ mm}$  und  $\tau_b \approx 0.4f_{ct}$ ;  $\vartheta = 40$  entspricht einem starken Verbund mit  $\varnothing = 8 \text{ mm}$  und  $\tau_b \approx 3f_{ct}$ .
- Zum Vergleich mit der Norm SIA 162 – Betonbauten [135] werden zwei Werte für die Stababstände der Bewehrung betrachtet. Dabei werden gemäss [135] für grosse



Stababstände gegenüber kleinen Stababständen im Maximum 40 % mehr Bewehrung erforderlich.

Bild 3.5 (b) zeigt, dass die Formeln von Baluch et al. [10] sowie Gerstle et al. [47] viel zu grosse Werte liefern. Im Ausschnitt von Bild 3.5 (c) und (d) mit linearer Skalierung sind die Resultate der Modellrechnungen mit der Norm SIA 162 [135], dem CEB-FIP Model Code [23] sowie die Vereinfachung (3.14) dargestellt. Für kleine Trägerhöhen ergeben die Modellrechnungen von Bosco und Carpinteri [22], Hawkins und Hjortset [57], Ruiz et al. [121] sowie die Vereinfachung (3.14) sehr ähnliche Resultate; die Werte liegen etwas höher als nach der Norm [135]. Für mittlere und grosse Trägerhöhen liefert das Modell von Bosco und Carpinteri [22] deutlich kleinere Bewehrungsgehalte als die übrigen Modelle und die Norm, während die Modelle von Hawkins und Hjortset [57] sowie von Ruiz et al. [121] im Falle des schwachen Verbundes den Werten der Vereinfachung (3.14) sehr ähnlich sind. Bei starkem Verbund liefert das Modell von Ruiz et al. [121] bei kleinen Trägerhöhen und wachsendem  $h$  zunächst abnehmende  $\rho_{min}$  und ab ca.  $h = 0.5$  m wieder leicht zunehmende Mindestbewehrungsgehalte. Mit zunehmender Trägerhöhe ( $h/l_{ch}$ ) nimmt die erforderliche Bewehrung gemäss der Vereinfachung (3.14) ab, siehe Bild 3.5 (b) und (c).

### 3.5 Einfluss von Eigenspannungen

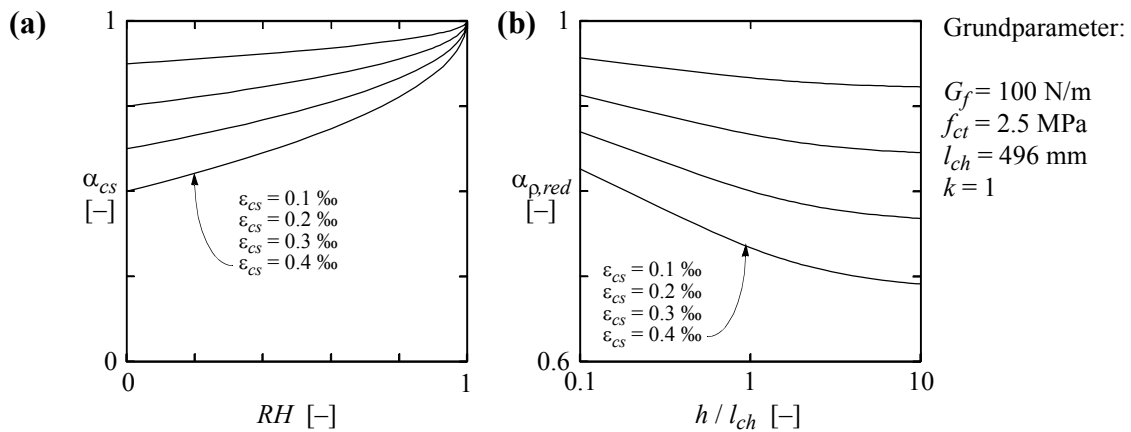
Eigenspannungen in Betonquerschnitten infolge unterschiedlicher Temperaturverteilung über den Querschnitt oder behinderter Schwindverkürzung durch den Kernbeton führen im Randbereich zu einer Abnahme der möglichen Rissbeanspruchung, da sich die entstandenen Randzugspannungen der äusseren Beanspruchung überlagern. Die Reduktion nimmt mit zunehmender Querschnittsgösse zu, vergleiche Bild 2.11 (a). Der CEB-FIP Model Code [23] berücksichtigt den Einfluss von Eigenspannungen durch eine Reduktion für Trägerhöhen  $h \geq 0.3$  m, wie in Bild 3.5 (c) dargestellt.

Neben dem Kernbeton stellt auch die Bewehrung eine Schwindbehinderung dar und ruft Eigenspannungen hervor. Dieser Einfluss wurde theoretisch vereinfacht untersucht [39] und kann auch in Versuchen beobachtet werden. In Anlehnung an [117] kann die Schwindspannung für Rechteckquerschnitte unter Berücksichtigung des Bewehrungsgehaltes  $\rho$  und des Schwinddehnmasses  $\varepsilon_{cs}$  abgeschätzt werden zu

$$\sigma_{cs} \approx 20\rho E_c \varepsilon_{cs} \quad (3.21)$$

Zur Berücksichtigung des Schwindeinflusses schlug Mayer [90] einen Abminderungsfaktor der Biegezugfestigkeit  $\alpha_{cs}$  in Abhängigkeit des Schwinddehnmasses  $\varepsilon_{cs}$  und der Umgebungsfeuchte  $RH$  vor:

$$\alpha_{cs} = \frac{f_{ctb}(\varepsilon_{cs}, RH)}{f_{ctb}} \approx 1 - 1250\varepsilon_{cs}\sqrt{1 - RH} \quad (3.22)$$



**Bild 3.6** – Abminderungsfaktor infolge Schwindeinfluss: (a) In Abhängigkeit der Umgebungsfeuchte  $RH$ ; (b) In Abhängigkeit der Querschnittshöhe ( $h/l_{ch}$ ) bei einer Umgebungsfeuchte  $RH = 0.6$ .

In Anlehnung an (3.11) bzw. (3.14) und unter Verwendung von (3.22) kann ein Abminderungsfaktor für die Mindestbewehrung eingeführt werden

$$\alpha_{\rho,red} = 1 - \frac{1 - \alpha_{cs}}{\sqrt[4]{1 + l_{ch}/h}} = 1 - \frac{1250 \varepsilon_{cs} \sqrt{1 - RH}}{\sqrt[4]{1 + E_c G_f / (h f_{ct}^2)}} \quad (3.23)$$

Gleichung (3.23) ist aus bruchmechanischen Überlegungen abgeleitet; der Abminderungsfaktor erreicht für  $h \rightarrow 0$  den Wert eins und für  $h \rightarrow \infty$  den Wert von  $\alpha_{cs}$ . Dies entspricht im wesentlichen den Beobachtungen von Petersson [107], dargestellt in Bild 2.11 (d).

Die Resultate solcher Berechnungen sind in Bild 3.6 dargestellt. Die Kurven für die unterschiedlichen Schwinddehnmasse  $\varepsilon_{cs}$  berücksichtigen indirekt die Austrocknungsgeschwindigkeit durch die Abhängigkeit von der Umgebungsfeuchte  $RH$ , siehe Bild 3.6 (a). Der Abminderungsfaktor  $\alpha_{\rho,red}$  gemäss (3.23) infolge der Überlagerung der Schwindspannung mit der äusseren Beanspruchung ist in Bild 3.6 (b) für eine trockene Umgebung ( $RH = 0.6$ ) dargestellt und entspricht tendenziell der abgetrepten Reduktion gemäss CEB-FIP Model Code [23].

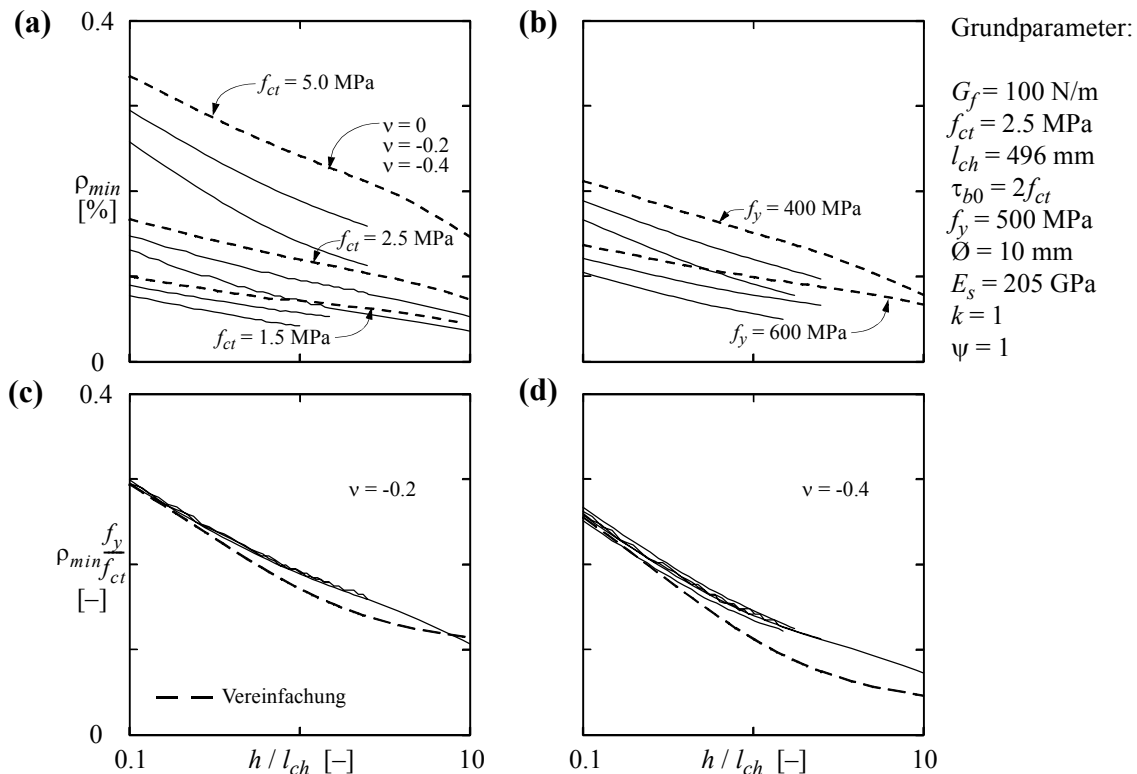
Die Mindestbewehrung gemäss (3.14) kann infolge Schwindeigenspannungen mit dem Abminderungsfaktor  $\alpha_{\rho,red}$  reduziert werden. Ausreichende Versuche zur Bestätigung dieser Methode liegen nicht vor, und es ist bei Wechsel der klimatischen Verhältnissen mit grossen Unsicherheiten zu rechnen. Weiter gilt es zu beachten, dass die Schwindeigenspannungen nicht nur von der Querschnittshöhe, sondern vor allem von der kleinsten Querschnittsabmessung abhängig sind. Die angegebenen Beziehungen zum Eigenspannungseinfluss geben nur einen groben Anhaltspunkt. Dies ist bei der Festlegung einer Bewehrungsreduktion zu berücksichtigen.

### 3.6 Mindestbewehrung bei Biegung und Normalkraft

#### 3.6.1 Allgemeines

Im folgenden werden auf der Grundlage von Kapitel 3.2 die Beziehungen von Kapitel 3.3, welche der Bestimmung einer Mindestbewehrung zur Begrenzung der Stahlspannung auf zulässige Werte dienen, zur Berücksichtigung der Normalkraft erweitert. Zwecks übersichtlicher Darstellung wird die auf die Betonzugfestigkeit und die Betonquerschnittsfläche normierte Normalkraft  $v$  verwendet.

Mit der Begrenzung der Stahlspannung im Riss auf  $\sigma_{sr} = f_y$  (3.10) sowie der Bedingung, dass das Biegemoment beim Erreichen der Fließspannung gleich dem ersten Maximum der Last-Durchbiegungskurve ist, lässt sich die Mindestbewehrung  $\rho_{min}$  auf numerischem Weg bestimmen. Die Resultate solcher Berechnungen sind in Bild 3.7 dargestellt. Die Schlankheit der Balken wurde für alle Berechnungen gleich gewählt; nur die Balkenhöhe  $h$  wurde variiert. Es ist ersichtlich, dass die Betonzugfestigkeit  $f_{ct}$  und die Fließgrenze  $f_y$  einen signifikanten Einfluss auf den Mindestbewehrungsgehalt haben. Entsprechend (3.6) und (3.7) nimmt mit zunehmender Sprödigkeit des Systems, d.h. zunehmender Balkenhöhe ( $h/l_{ch}$ ) die erforderliche Mindestbewehrung  $\rho_{min}$  ab. Mit zunehmender äusserer Druckkraft wird dieser Effekt zusätzlich verstärkt.



**Bild 3.7** – Mindestbewehrung von Rechteckquerschnitten unter Normalkraftbeanspruchung: (a) und (b) Mindestbewehrungsgehalte für variable Betonzugfestigkeit  $f_{ct}$  und Fließgrenze  $f_y$ ; (c) und (d) auf  $f_{ct}$  und  $f_y$  bezogene Mindestbewehrungsgehalte für eine bezogene Normalkraft von  $v = -0.2$  bzw.  $v = -0.4$ .

### 3.6.2 Vereinfachte Berechnung der Mindestbewehrung

Werden die Mindestbewehrungsgehalte  $\rho_{min}$  auf das Verhältnis der Festigkeiten  $f_y/f_{ct}$  bezogen, sind die berechneten Kurven beinahe deckungsgleich und können in guter Näherung, analog der Gleichung (3.14), vereinfacht werden:

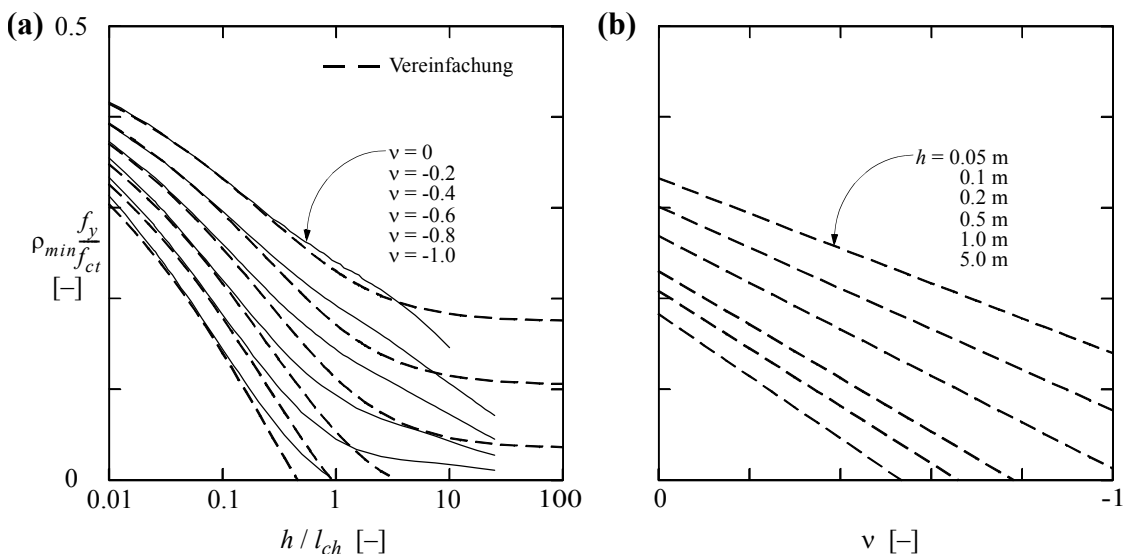
$$\rho_{min} = \frac{0.175}{\psi} \left( 3 - \frac{2(1-\nu)}{\sqrt[4]{1 + E_c G_f / (h f_{ct}^2)}} \right) \frac{f_{ct}}{f_y} \quad (3.24)$$

Der Klammerausdruck in (3.24) erreicht für  $h \rightarrow 0$  den Wert drei. Bei grossen Trägerhöhen ( $h \rightarrow \infty$ ) nähert sich die Vereinfachung asymptotisch dem Grenzwert der klassischen Stahlbetontheorie

$$\rho_{min} = \frac{1+2\nu}{6 \cdot 0.95} \frac{f_{ct}}{f_y} \approx 0.175(1+2\nu) \frac{f_{ct}}{f_y} \quad (3.25)$$

Die Vereinfachung (3.24) bildet den Verlauf der Mindestbewehrung für kleine und mittlere Trägerhöhen befriedigend gut ab, siehe Bild 3.8 (a). Bei grossen Trägerhöhen ergeben die numerischen Berechnungen etwas grössere Mindestbewehrungsgehalte. Bei grossen Abmessungen fallen Unsicherheiten der Modelle aus Kapitel 2.4.2 sowie Gleichung (3.2) bzw. (3.3) stärker ins Gewicht, da die Entfestigungszone des Rissquerschnittes gegenüber der Trägergrösse immer kleiner wird.

Aus (3.24) bzw. (3.25) und Bild 3.8 (b) ist ersichtlich, dass für eine bezogene Druckkraft von  $\nu \leq -0.5$  und grosse Trägerhöhen keine Mindestbewehrung erforderlich ist.



**Bild 3.8** – Erforderliche Mindestbewehrung von Rechteckquerschnitten unter Biegung und Normalkraft: (a) Vergleich der numerischen Resultate mit der Vereinfachung (3.24); (b) in Abhängigkeit der bezogenen Normalkraft; Grundparameter gemäss Bild 3.7.

### 3.6.3 Vergleich mit weiteren Modellen

Mit Hilfe von Gleichgewichtsbedingungen bestimmte Ritz [120] einen für eine Rissverteilung notwendigen schlaffen Bewehrungsgehalt für Platten mit Vorspannung ohne Verbund. Die Betonspannungen am unteren Rand, welche durch die schlaffe Bewehrung beeinflusst werden, erreichen die Zugfestigkeit bei einem Bewehrungsgehalt

$$\rho_{erf} = \frac{c_f f_{cc}}{\sigma_{s,adm}} \left[ 1 - \rho_p \frac{d_p}{d} \frac{\sigma_p}{c_f f_{cc}} - \sqrt{1 - \frac{1}{3\psi^2} \frac{f_{ct}}{c_f f_{cc}} - 2 \left(1 - \frac{1}{3\psi}\right) \rho_p \frac{d_p}{d} \frac{\sigma_p}{c_f f_{cc}}} \right] \quad (3.26)$$

wobei  $c_f$  einen Formfaktor der Betondruckzone,  $\rho_p$  den Spannstahlgehalt,  $d_p$  die statische Höhe und  $\sigma_p$  die Spannung im Spannstahl bezeichnen.

Den zur Vermeidung einer Verformungslokalisierung bei Rissbildung notwendigen minimalen Bewehrungsgehalt ermittelte Muttoni [97] aus der Gleichsetzung der Widerstände im ungerissenen und gerissenen Zustand. Mit der Normierungsgrösse

$$c_N = \frac{N}{bdf_{cc}} = \frac{\nu f_{cc}}{\psi f_{ct}} \quad (3.27)$$

ergibt sich

$$\rho_{min} = \left( 1 + c_N - \sqrt{1 + 2c_N \left(1 - \frac{1}{3\psi}\right) - \frac{f_{ct}}{f_{cc}} \frac{1}{3\psi^2}} \right) \frac{\psi f_{cc}}{f_y} \quad \left( c_N \leq \frac{\rho}{\psi} \frac{f_y}{f_{cc}} \right) \quad (3.28)$$

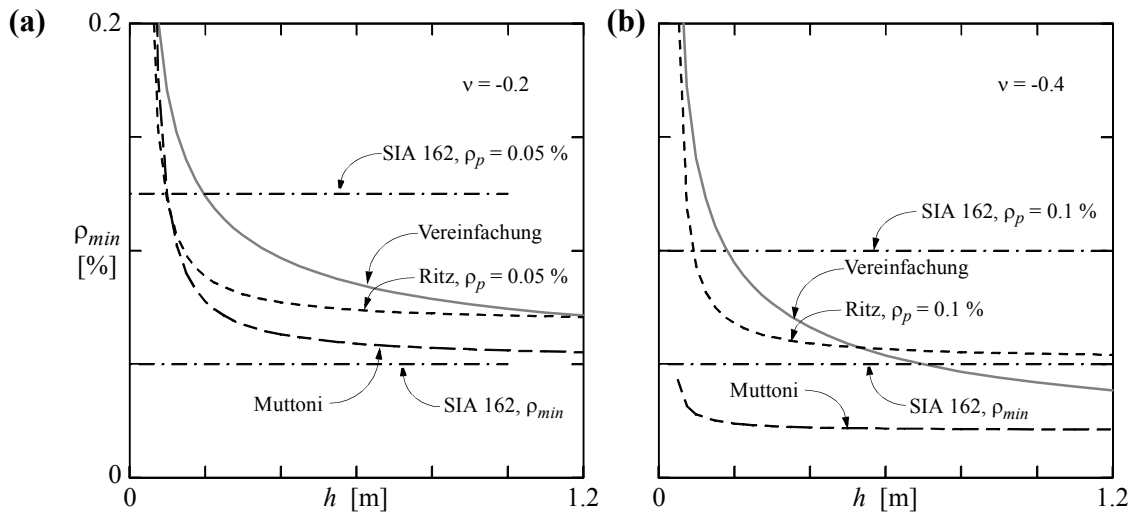
$$\rho_{min} = \frac{\frac{f_{ct}}{f_y} \frac{1}{6\psi} + c_N \left( \psi - \frac{2}{3} \right) \frac{f_{cc}}{f_y}}{2 - 1/\psi} \quad \left( c_N > \frac{\rho}{\psi} \frac{f_y}{f_{cc}} \right) \quad (3.29)$$

Die Norm SIA 162 – Betonbauten [135] verlangt für vorgespannte Platten ohne Verbund

$$\rho_{min} = 0.0015 - \frac{1}{2} \rho_p \geq 0.0005 \quad (3.30)$$

Bild 3.9 zeigt  $\rho_{min}$  in Abhängigkeit der Trägerhöhe  $h$  für die beschriebenen Modelle und folgende Annahmen:

- Der Beton wird charakterisiert durch  $f_{ct} = 2.5$  MPa,  $f_{cc} = 30$  MPa,  $E_c = 31$  GPa und  $G_f = 100$  N/m.
- Der Stahl wird charakterisiert durch  $\sigma_{s,adm} = f_y = 500$  MPa und  $E_s = 205$  GPa.
- Der Spannstahl wird zentrisch ( $d_p = h/2$ ) und mit einer Spannung von  $\sigma_p = 1000$  MPa eingelegt.
- Die Bewehrungsüberdeckung ist konstant,  $h - d = 25$  mm.
- Für das Modell von Ritz [120] wird ein Formfaktor der Betondruckzone  $c_f = 1$  vorausgesetzt. Der Spannstahlgehalt von  $\rho_p = 0.05$  % bzw.  $\rho_p = 0.1$  % entspricht bei



**Bild 3.9** – Vergleich der Vereinfachung (3.24) mit der zur Rissverteilung notwendigen Bewehrung nach Ritz [120] sowie den Bestimmungen der Norm [135] für vorgespannte Platten ohne Verbund und der zur Vermeidung der Verformungslokalisierung erforderlichen Mindestbewehrung nach Muttoni [97]: (a) bezogene Normalkraft  $\nu = -0.2$ ; (b) bezogene Normalkraft  $\nu = -0.4$ .

der vorausgesetzten Spannstahlspannung  $\sigma_p$  sowie der Betonzugfestigkeit  $f_{ct}$  einer bezogenen Normalkraft von  $\nu = -0.2$  bzw.  $\nu = -0.4$ .

Für kleine Trägerhöhen ergeben die Modellrechnungen von Ritz [120] und die Vereinfachung (3.24) sehr ähnliche Resultate; die entsprechenden Werte liegen etwas höher als jene der Norm [135]. Für mittlere und grosse Trägerhöhen liefern die Modelle Bewehrungsgehalte, die nur unwesentlich über der Minimalforderung der Norm [135] liegen. Die Resultate nach dem Modell von Muttoni [97] liegen im Fall der kleineren Druckkraft ( $\nu = -0.2$ ) im Bereich der Minimalforderung der Norm und bei grösserer Druckkraft ( $\nu = -0.4$ ) deutlich darunter. Eine weitere Druckkraftzunahme würde zur Vermeidung der Verformungslokalisierung nach Muttoni keine Bewehrung mehr erfordern. Dies bestätigt die Annahme in Gleichung (3.24) bzw. (3.25).

Die hier gezeigten Berechnungen belegen, dass die zur Vermeidung eines Versagens ohne Vorankündigung bei Erstrissbildung erforderliche Mindestbewehrung  $\rho_{min}$  mit einfachen Beziehungen in guter Näherung sowohl für reine Biegung als auch für Biegung mit Normalkraft angegeben werden kann. Die in Bild 3.9 dargestellten Ergebnisse gelten für Bewehrungsstäbe mit einem Durchmesser von 10 mm und basieren auf (3.14) bzw. (3.24). Eine Variation der Entfestigungsfunktion, der spezifischen Bruchenergie  $G_f$ , des Stabdurchmessers  $\varnothing$  oder der Belastungskonfiguration beeinflusst zwar die numerischen Resultate, die grundsätzlichen Folgerungen bleiben aber die gleichen. Der Einfluss der Druckkraft zeigt sich in der deutlichen Reduktion der erforderlichen Bewehrung.

## 4 Gebrauchsverhalten von Biegeträgern

### 4.1 Allgemeines

In der Bemessungspraxis muss nachgewiesen werden, dass sich ein Bauteil im Gebrauchszustand, d.h. unter Nutzlast und anderen Einflüssen, einwandfrei verhält. Unter anderem muss kontrolliert werden, dass nicht zu breite Risse entstehen und dass die Verformungen nicht zu gross werden. Man verwendet dazu Berechnungsformeln, mit denen Rissabstand und Rissbreite sowie die Steifigkeit eines Balkenabschnitts angenähert ermittelt werden können.

Verschiedene halbempirische Formeln wurden aufgrund von Beobachtungen an Versuchsbalken hergeleitet [23, 40, 93]. Andererseits ermöglichte Rehms Arbeit über den verschieblichen Verbund [113] die Herleitung von Berechnungsformeln aufgrund klarer Berechnungsmodelle. Aufbauend auf [113] entstand eine Reihe von Arbeiten, die sich mit der genaueren Berechnung von Stahlbeton-Balkenabschnitten befassten, wobei Rissbildung, Verbundverhalten, Betonverformung usw. zutreffend berücksichtigt wurden [100].

Im folgenden wird für Nachweise im Gebrauchszustand ein einfaches Berechnungsmodell vorgestellt, bei dem das Verbundverhalten der Bewehrung gemäss Kapitel 2.5 berücksichtigt wird.

### 4.2 Ungerissenes Verhalten

Im vorliegenden Abschnitt wird das Verhalten eines im Querschnitt rechteckigen Biegeträgers mit der Bruttoquerschnittsfläche  $A_c = bh$  idealisiert. Die Bewehrung ist durch den geometrischen Bewehrungsgehalt  $\rho = A_s/A_c$  und die Lage  $\psi = d/h$  festgelegt. Ebenbleiben des Querschnittes wird angenommen. Die äussere Beanspruchung soll im Schwerpunkt des ideellen Querschnittes angreifen, dessen Lage sich zu

$$h_{sup} = \frac{h}{2} \frac{1 + 2\psi\rho(n-1)}{1 + \rho(n-1)} = \eta_{sup} h \quad (4.1)$$

ergibt. Die ideelle Querschnittsfläche beträgt

$$A_{id} = bh[1 + \rho(n-1)] \quad (4.2)$$

Das ideelle Trägheitsmoment des bewehrten Querschnittes berechnet sich zu

$$I_{id} = \frac{bh_{sup}^3}{3} + \frac{b(h-h_{sup})^3}{3} + A_s(n-1)(d-h_{sup})^2 \quad (4.3)$$

oder in guter Näherung zu

$$I_{id} \approx \frac{bh^3}{12} [1 + 3\rho(n-1)(2\psi-1)^2] \quad (4.4)$$

Das Widerstandsmoment des ideellen Querschnittes ergibt sich mit (4.1) und (4.3) zu

$$W_{inf} = \frac{I_{id}}{h-h_{sup}} \quad (4.5)$$

oder in guter Näherung zu

$$W_{inf} \approx \frac{bh^2}{6} [1 + 4\rho(n-1)(2\psi-1)^2] \quad (4.6)$$

Die Spannungen im Querschnitt berechnen sich nach der bekannten Formel

$$\sigma(z) = \frac{N}{A_{id}} + \frac{M}{I_{id}}z \quad (4.7)$$

und die Biegesteifigkeit des Trägers ergibt sich zu

$$EI_I = E_c I_{id} \quad (4.8)$$

Angesichts der Unsicherheit bei der Bestimmung des Elastizitätsmoduls  $E_c$  und dessen Streuung rechtfertigt es sich allerdings oft nicht, das ideale Trägheitsmoment zu berechnen, und es kann mit genügender Genauigkeit  $EI_I = E_c I_c$  gesetzt werden. Im folgenden wird das ideale Trägheitsmoment gemäss (4.3) verwendet.

Aus (4.7), (4.5) und (4.1) sowie der Annahme, dass am unteren Querschnittsrand die Betonzugfestigkeit  $f_{ct}$  erreicht wird, berechnet sich das Rissmoment zu

$$M_r = W_{inf} f_{ct} \left(1 - \nu \frac{A_c}{A_{id}}\right) \quad (4.9)$$

oder in guter Näherung zu

$$M_r \approx \frac{bh^2}{6} f_{ct} (1 - \nu) [1 + 4\rho(n-1)(2\psi-1)^2] \quad (4.10)$$

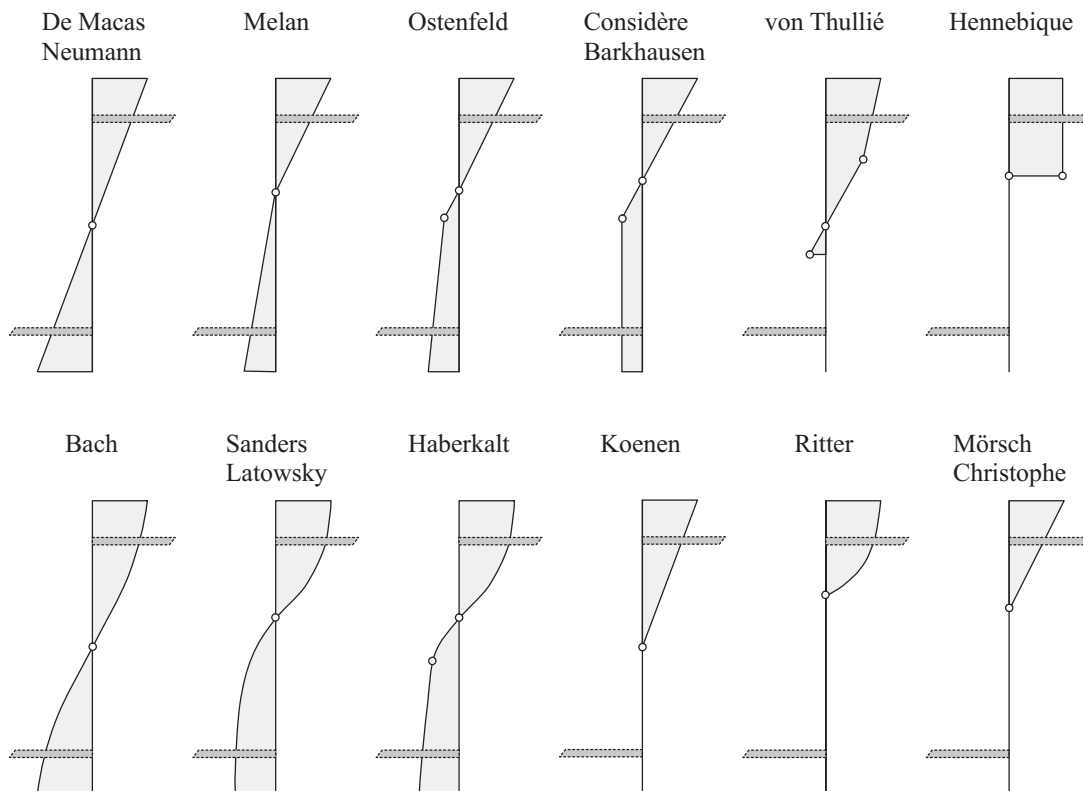


## 4.3 Rissabstand in Biegeträgern

### 4.3.1 Einleitung

Nach dem Überschreiten der Betonzugfestigkeit stellt sich im Querschnitt des Biegeträgers ein Zustand ein, der am Ende des 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts mit viel experimentellem und theoretischem Aufwand untersucht wurde, vergleiche z.B. Considère [27].

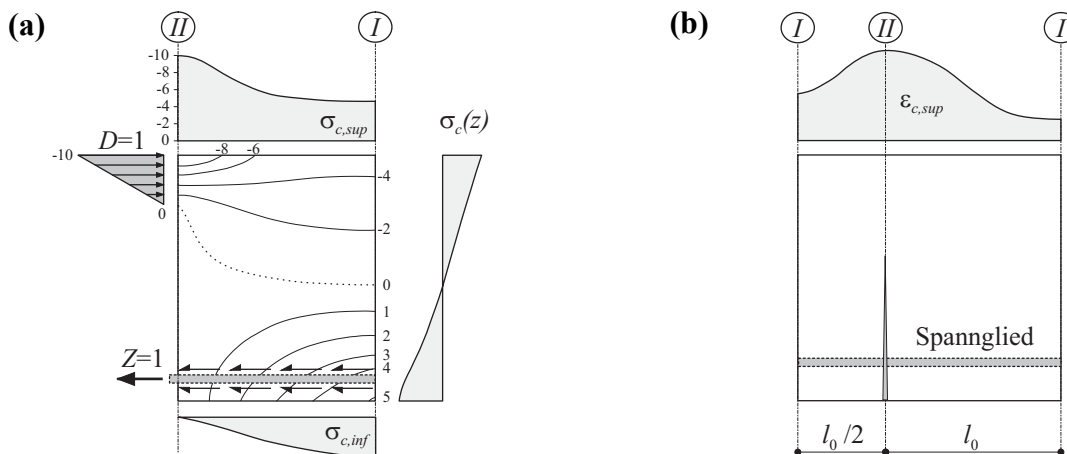
Bei Beanspruchung durch ein äusseres Moment im gerissenen Zustand spielt die Aufnahme der Zugkraft die entscheidende Rolle. Ansätze und Rechenverfahren unterscheiden sich untereinander – soweit sie überhaupt einer wissenschaftlichen Wertung standhalten – nur durch die Rolle, die dem Beton hinsichtlich der Aufnahme von Zugspannungen zugewiesen wird, sowie durch die Annahme der Spannungsverteilung über den Querschnitt, siehe Bild 4.1. Nach Koenens [72, 143] Bemessungsregel wurden noch weitere, zum Teil sehr komplizierte Spannungsverteilungen vorgeschlagen. Fast alle dieser Vorschläge demonstrierten ihren Genauigkeitsanspruch durch Einbezug der Betonzugspannungen. Neben den in [106] beschriebenen Bemessungsregeln existierten verschiedene Berechnungsvorschriften, welche meist auf rein empirischer Basis oder aber auf falschen Rechnungsansätzen aufbauten.



**Bild 4.1** – Spannungsverteilungen über die Querschnittshöhe – Zusammenstellung aus [37, 55, 126].

Infolge der Kritik durch Ritter [119] wurden die Berechnungsvorschriften verbessert. Mit der Festlegung auf fortschreitende Bruchstadien [133] gab es eine Reihe von Vorschlägen, die bei einer unterschiedlich angenommenen Verteilung der Betondruckspannungen die Zugspannungen als unwirksam annahmen, namentlich jene von Ritter [119] und Mörsch [96] (Bild 4.1). Das einfache Bemessungskonzept von Mörsch [96], welches sich, unter Berücksichtigung zwischenzeitlicher Erkenntnis, jenem von Koenen [72, 143] anlehnte und den Übergang vom Potenzgesetz nach Bach [3] bzw. Latowsky [78] zum linear elastischen Betongesetz beinhaltete, setzte sich durch. Pauser [106] stellte die unterschiedlichen Ansätze und deren geschichtliche Entwicklung dar und erschloss den Themenkreis mit einem umfangreichen Literaturverzeichnis.

Koch [71] untersuchte mit Finite-Element-Berechnungen den Spannungszustand einer Stahlbetonscheibe bei reiner Biegung. Im Rissquerschnitt *II* in Bild 4.2 (a) greifen die normierten Druck- und Zugkräfte  $D = Z = 1$  an, welche mit der Betonspannung  $\sigma_c(z)$  im Symmetriequerschnitt *I* im Gleichgewicht sind. Der veränderliche Stahlspannungsverlauf wird mittels einer idealisierten Verbundwirkung berücksichtigt. In Bild 4.2 (a) sind einerseits die Linien gleicher Spannungen innerhalb der Scheibe und andererseits der Verlauf der Biegespannungen entlang der Scheibenränder aufgezeichnet. Bild 4.2 (b) zeigt den Verlauf der Dehnungen im Beton am Rand einer ohne Verbund vorgespannten Platte nach Untersuchungen von Iványi und Buschmeyer [66]. Zahlreiche Finite-Element-Berechnungen sowie Versuche ergaben geometrie- und beanspruchungsabhängige Verläufe der Randdehnung  $\varepsilon_{c,sup}$ . Diese Finite-Element-Analysen machen deutlich, dass die Betonrandspannungen sowie die Betonspannung  $\sigma_c(z)$  im Symmetriequerschnitt *I* in guter Näherung mit einem linearen Verlauf approximiert werden dürfen.

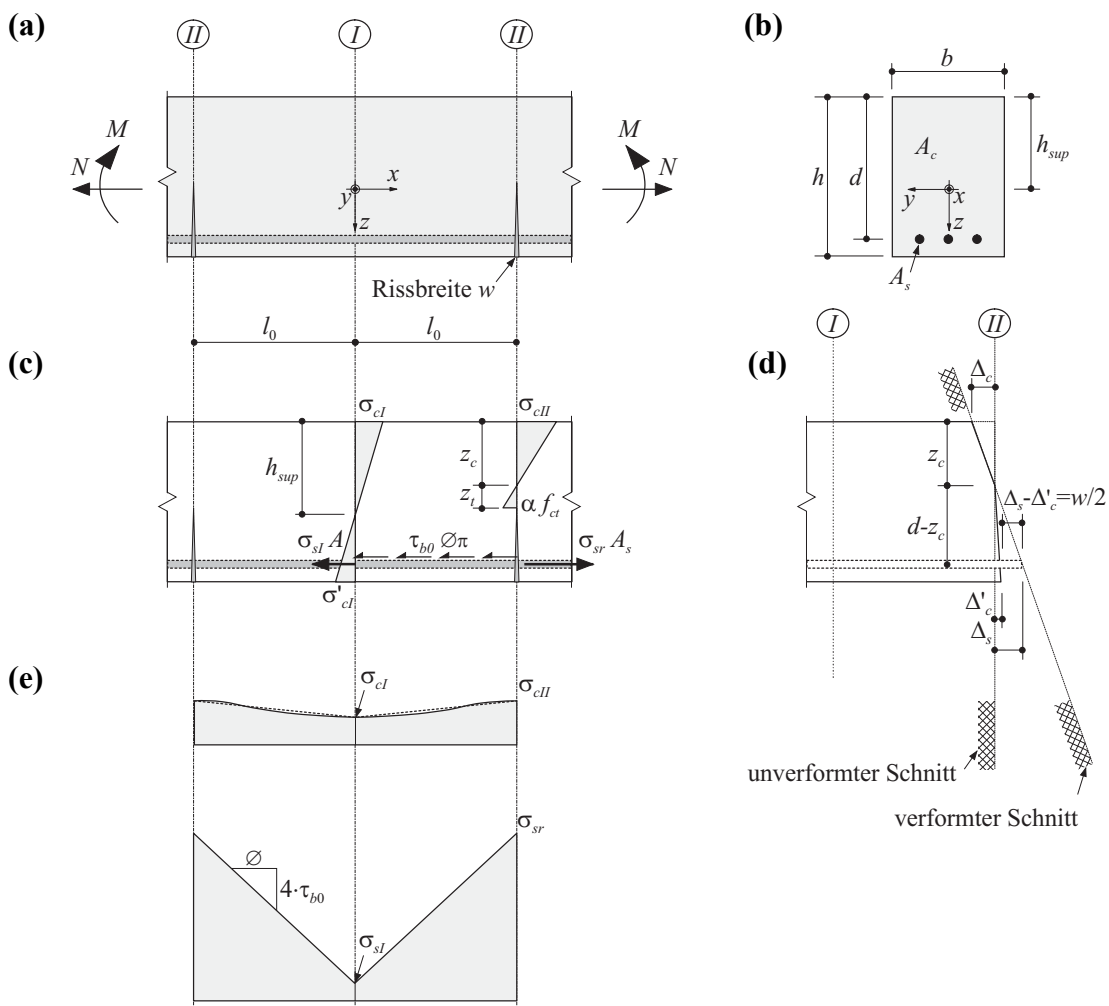


**Bild 4.2** – Spannungszustand in Stahl- und Spannbeton-Scheiben: (a) Finite-Element-Berechnung einer Stahlbetonscheibe mit schlaffer Bewehrung [71]; (b) Verlauf der Dehnungen im Beton am Rand einer ohne Verbund vorgespannten Platte [66].

### 4.3.2 Gleichgewicht

In Bild 4.3 (a) ist, in Anlehnung an eine Arbeit von Birkenmaier [19], ein unter konstanter Momentenbeanspruchung  $M$  sowie unter Normalkraftbeanspruchung  $N$  stehender Balkenabschnitt dargestellt, der Risse im Abstand  $2l_0$  aufweist. Im gerissenen Querschnitt  $II$  treten am oberen Rand Betondruckspannungen  $\sigma_{cII}$  und in der Bewehrung Zugspannungen  $\sigma_{sr}$  auf. Da der Balken im Gebrauchszustand betrachtet wird, kann zwischen Spannungen und Verformungen sowohl für den Beton als auch für den Stahl ein linearer, elastischer Zusammenhang angenommen werden.

Der ungerissene Querschnitt  $I$  liegt in der Mitte zwischen zwei Rissen. Die äussere Beanspruchung bewirkt in diesem Schnitt am oberen Rand Betondruckspannungen  $\sigma_{cI}$ , am unteren Rand Betonzugspannungen  $\sigma'_{cI}$  und in der Bewehrung Zugspannungen  $\sigma_{sI}$ , siehe Bild 4.3 (c). Es wird angenommen, dass die Betonspannungen linear über die Balkenhöhe verteilt sind. Obwohl besonders bei engerem Rissabstand eine nichtlineare Verteilung der Betonspannung (Scheiben-Spannungszustand) möglich ist, wird für das nachfolgend entwickelte Modell der lineare Verlauf beibehalten.



**Bild 4.3** – Spannungen und Verformungen im Balkenabschnitt: (a) Balkenabschnitt; (b) Querschnitt; (c) Spannungen; (d) Verformungen; (e) Verlauf der Betondruckspannungen am oberen Rand und Verlauf der Stahlspannungen.

Das Entfestigungsverhalten von Beton im Riss infolge Zugbeanspruchung wird als ideal spröd, wie in Kapitel 2.4 beschrieben, idealisiert. Zur analytischen Behandlung wird die maximal erreichbare Betonzugspannung mit  $\alpha f_{ct}$  definiert. Die Höhe der Zugzone  $z_t$  ergibt sich aus der Druckzonenhöhe  $z_c$  und der Betondruckspannung  $\sigma_{cII}$  aus Bild 4.3 (c).

Normalkraft-Gleichgewicht im Rissquerschnitt ergibt

$$N = \frac{b}{2}(\alpha^2 f_{ct}^2 - \sigma_{cII}^2) \frac{z_c}{\sigma_{cII}} + \sigma_{sr} A_s = \nu f_{ct} A_c \quad (4.11)$$

und Momenten-Gleichgewicht, bezogen auf die Resultierende der Druckspannungen, verlangt

$$M + N \left( h_{sup} - \frac{z_c}{3} \right) = \frac{b}{3} z_c \alpha^2 f_{ct}^2 (\alpha f_{ct} + \sigma_{cII}) \frac{z_c}{\sigma_{cII}} + \sigma_{sr} A_s \left( d - \frac{z_c}{3} \right) \quad (4.12)$$

Die Rissbreite  $w$  im Schnitt  $II$  zeigt an, dass zwischen der Bewehrung und dem umgebenden Beton eine relative Verschiebung von der Grösse  $\delta_{II}$  stattgefunden hat. Der durch die Verbundspannung  $\tau_{b0}$  bewirkte Abbau der Stahlspannung von  $\sigma_{sr}$  im Schnitt  $II$  auf  $\sigma_{sI}$  im Schnitt  $I$  ergibt sich aus Gleichgewicht zu

$$\sigma_{sI} = \sigma_{sr} - \frac{4\tau_{b0}}{\varnothing} l_0 \quad (4.13)$$

Die Druckzonenhöhe  $z_c$  muss aus einer Verformungsbedingung abgeleitet werden, welche für den Balkenabschnitt  $I - II$  zu formulieren ist. Aus Bild 4.3 (d) folgt

$$\frac{\Delta_c}{z_c} = \frac{\Delta_s}{d - z_c} \quad (4.14)$$

Die Betonrandverformung  $\Delta_c$  folgt aus

$$\Delta_c = \int_0^{l_0} \frac{\sigma_c}{E_c} dx \quad (4.15)$$

Ohne grossen Fehler auf das Endergebnis kann vereinfachend, wie in Bild 4.3 (e) dargestellt, ein linearer Verlauf der Betonrandspannung angenommen werden, somit

$$\Delta_c = \frac{\sigma_{cI} + \sigma_{cII}}{2E_c} l_0 \quad (4.16)$$

Für die Stahlverformung wird der lineare Abbau infolge der Verbundspannung berücksichtigt. Somit ist

$$\Delta_s = \frac{\sigma_{sI} + \sigma_{sr}}{2E_s} l_0 \quad (4.17)$$

(4.16) und (4.17) liefern zusammen mit (4.14)

$$\sigma_{cI} + \sigma_{cII} = (\sigma_{sI} + \sigma_{sr}) \frac{E_c z_c}{E_s (d - z_c)} \quad (4.18)$$

Die Gleichungen (4.11), (4.12), (4.13) und (4.18) für die Unbekannten  $\sigma_{cII}$ ,  $\sigma_{sr}$ ,  $z_c$  und  $l_0$  können numerisch gelöst werden. Die Resultate solcher Berechnungen für reine Biegung sind in Bild 4.4 (a) dargestellt. Der Einfluss der Betonzugspannungen auf  $z_c$  wird über einem Bewehrungsgehalt von  $\rho = 0.5\%$  beträchtlich.

Wird die Betonzugspannung im Rissquerschnitt *II* vernachlässigt, d.h.  $\alpha = 0$ , vereinfachen sich die Gleichgewichtsbedingungen (4.11) und (4.12) unter Verwendung der Normierungen

$$\xi = \frac{z_c}{d}, \quad c_{cII} = \frac{\sigma_{cII}}{f_{ct}} \quad (4.19)$$

sowie  $\kappa$ ,  $\psi$ ,  $\rho$  und  $\mu$  gemäss (3.4), (3.13), (2.56) und (2.36) wie folgt:

$$\kappa\rho - \frac{\xi\psi c_{cII}}{2} = \nu \quad (4.20)$$

$$\frac{\mu}{6} + \nu \left( \eta_{sup} - \frac{\xi\psi}{3} \right) = \kappa\rho\psi \left( 1 - \frac{\xi}{3} \right) \quad (4.21)$$

(4.14) führt mit  $n = E_s/E_c$  zu

$$n(c_{cI} + c_{cII})(1 - \xi) = (\kappa + n c_{sI})\xi \quad (4.22)$$

wobei

$$c_{cI} = \frac{\sigma_{cI}}{f_{ct}} = \frac{\eta_{sup}}{1 - \eta_{sup}}, \quad c_{sI} = \frac{\sigma_{sI}}{f_{ct}} = \frac{\psi - \eta_{sup}}{1 - \eta_{sup}} \quad (4.23)$$

für die normierten Spannungen am ideellen Querschnitt bei Rissbeanspruchung ( $M = M_r$ ) stehen.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen (4.20) und (4.21) sowie der Verformungsbedingung (4.22) ergibt sich folgende kubische Gleichung für die bezogene Druckzonenhöhe  $\xi$ :

$$c_3 \xi^3 + c_2 \xi^2 + c_1 \xi + c_0 = 0 \quad (4.24)$$

wobei

$$c_0 = 6n\rho \left[ \frac{\mu}{6} - \nu(\psi - \eta_{sup}) \right] \quad (4.25)$$

$$c_1 = 6n\rho \left[ \nu(\psi - \eta_{sup}) - \frac{\mu}{6} + \frac{\psi^2 c_{cI}}{2} \right] \quad (4.26)$$

$$c_2 = -6n\rho\psi^2\left(\frac{2c_{cI}}{3} + \frac{nc_{sI}}{2}\right) - 3\psi\left(\frac{\mu}{6} + v\eta_{sup}\right) \quad (4.27)$$

$$c_3 = \psi^2[v + n\rho(c_{cI} + c_{sI})] \quad (4.28)$$

Wird die Zugversteifung vernachlässigt, so wird (4.14) auf

$$\sigma_{cII} = \sigma_{sr} \frac{E_c z_c}{E_s(d - z_c)} \quad (4.29)$$

reduziert, und mit den Gleichgewichtsbedingungen (4.11) und (4.12) resultiert die bekannte kubische Gleichung für die Druckzonenhöhe [96].

Neben der analytischen Lösung der Gleichung existieren verschiedene Tabellenwerke wie z.B. [64] zur Berechnung von Konstruktionselementen mit Rechteck-, Kreis- und Plattenbalkenquerschnitt.

Für den Fall reiner Biegung resultiert eine quadratische Gleichung für  $\xi$ , deren Lösung mit den normierten Grössen wie folgt angegeben werden kann:

$$\xi_0 = \frac{n\rho}{\psi} \left( \sqrt{1 + \frac{2\psi}{n\rho}} - 1 \right) \quad (4.30)$$

Für die Stahlspannung im Riss erhält man aus (4.21)

$$\sigma_{sr} = f_{ct} \frac{\mu}{6\rho\psi \left(1 - \frac{\xi_0}{3}\right)} \quad (4.31)$$

### 4.3.3 Rissabstand in Biegeträgern

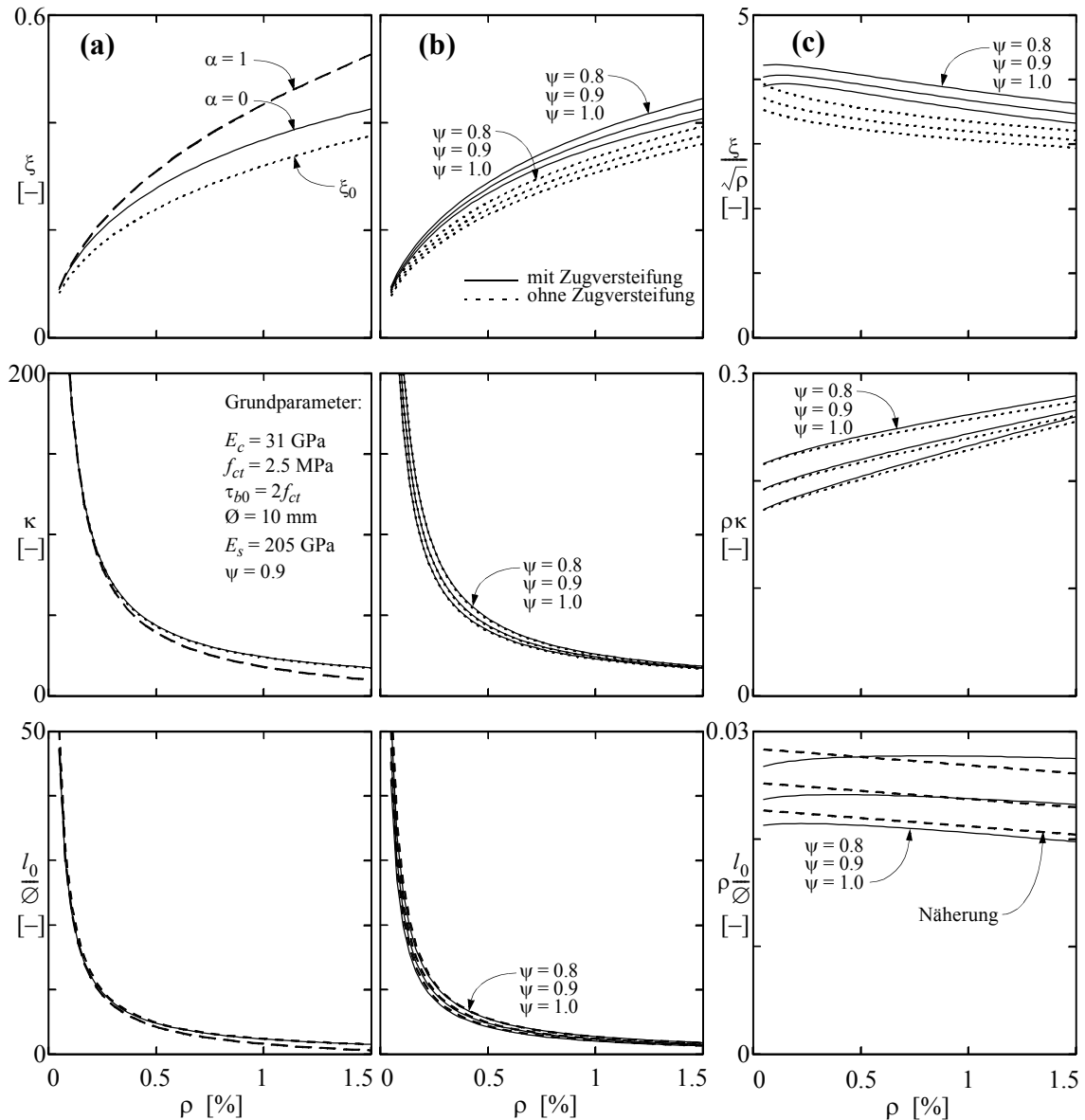
Durch Einsetzen des Rissmomentes in (4.24) sowie (4.13) lässt sich der Rissabstand bestimmen. Der Rissabstand  $s_r$  eines schlaff bewehrten Biegeträgers kann sich allgemein zwischen den Grenzen

$$l_0 \leq s_r \leq 2l_0 \quad (4.32)$$

einstellen oder gleichbedeutend  $0.5 \leq \lambda \leq 1.0$ , wobei

$$\lambda = \frac{s_r}{2l_0} \quad (4.33)$$

Gemäss Meier [91] beträgt der wahrscheinlichste bezogene Rissabstand  $\lambda \approx 0.67$ . Die Eintragungslänge  $l_0$  kann in guter Näherung (siehe Bild 4.4 (b<sub>3</sub>) und (c<sub>3</sub>)) angegeben werden durch



**Bild 4.4** – Druckzonenhöhe, Stahlspannung im Riss bei maximalem Rissabstand und Rissabstand von Rechteckquerschnitten: (a) Einfluss der Betonzugspannung ( $\psi = 0.9$ ); (b) Einfluss der Bewehrungslage; (c) auf den Bewehrungsgehalt bezogene Werte.

$$l_0 \approx \frac{\varnothing f_{ct}(1 - n\rho\psi)}{22\tau_{b0}\rho\psi} \quad (4.34)$$

Die Näherung (4.34) ergibt sich aus dem Zuggurtmodell für zentrischen Zug [Gleichung (2.61)] durch Ergänzung der für reine Biegung relevanten Parameter. Dabei werden die Bewehrungsanordnung, die Wertigkeit der Baustoffe (Annahme homogener Verhältnisse im ungerissenen Querschnitt  $I$ ) sowie ein Skalierungsfaktor für den Biegeeinfluss ( $5.5 \approx 0.9 \cdot 6$ ) berücksichtigt.

Die Diagramme in Bild 4.4 zeigen den Einfluss des Bewehrungsgehaltes  $\rho$ , der Betonzugfestigkeit  $\alpha f_{ct}$  und der Bewehrungslage  $\psi$  auf Druckzonenhöhe, Stahlspannung

im Riss und Rissabstand. Zur übersichtlicheren Darstellung der Beeinflussung durch die Bewehrungslage werden die verschiedenen Werte in Bild 4.4 (c) auf den Bewehrungsgehalt bezogen. Es zeigt sich, dass sich der Einfluss der Zugversteifung in einer grösseren Druckzonenhöhe ausdrückt. Die Stahlspannung im Riss wird durch die Zugversteifung nur unwesentlich beeinflusst.

Birkenmaier [19] vereinfachte in seinem ‘erweiterten Berechnungsmodell’ den Verlauf der Betonrandverformung und nahm eine konstante Betondruckspannung  $\sigma_{c,sup}(x) = \sigma_{cII}$  an. Unter Verwendung der Gleichgewichtsbedingung (4.20) vereinfacht sich (4.22) damit zu

$$\frac{4n\rho\kappa}{\psi}(1-\xi) = (\kappa + nc_{sI})\xi^2 \quad (4.35)$$

woraus eine quadratische Gleichung für die Druckzonenhöhe resultiert

$$\xi^2 - \frac{2n\rho}{\psi} \frac{2\kappa}{\kappa + nc_{sI}}(1-\xi) = 0 \quad (4.36)$$

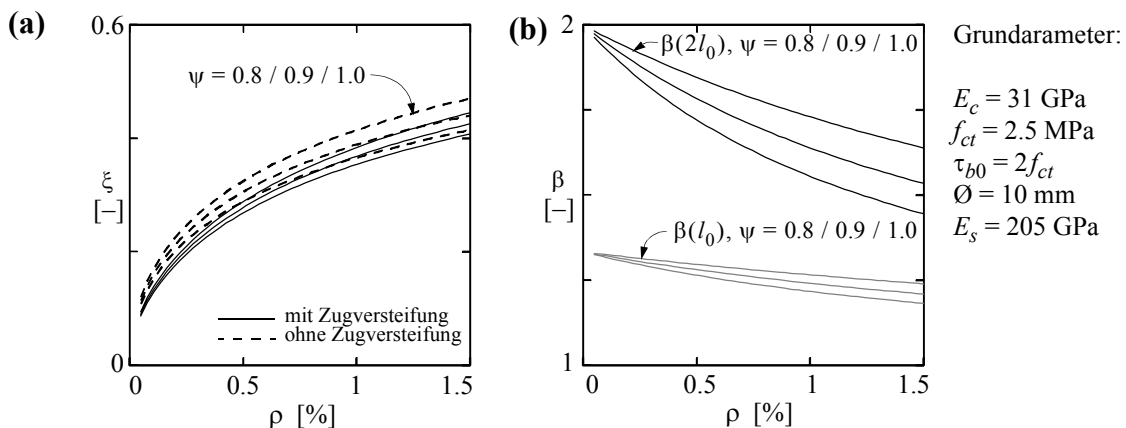
Substituiert man unter Verwendung von (4.13), (4.32) und (4.33) einen Zugversteifungsfaktor

$$\beta = \frac{2\sigma_{sr}}{\sigma_{sr} + \sigma_{sI}} = \frac{nc_{sI} + \frac{4\tau_{b0}}{fct} \frac{l_0}{\varnothing}}{nc_{sI} + \frac{4\tau_{b0}}{fct} \frac{l_0}{\varnothing} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)} \quad (4.37)$$

kann die Lösung von (4.36) wie folgt angegeben werden

$$\xi = \frac{n\rho\beta}{\psi} \left( \sqrt{1 + \frac{2\psi}{n\rho\beta}} - 1 \right) \quad (4.38)$$

Bei sehr kleinem Rissabstand oder verschwindender Verbundspannung  $\tau_{b0}$  ist  $\beta = 1$ ; Gleichung (4.38) stimmt in diesem Falle mit der Gleichung (4.30) der klassischen Stahl-

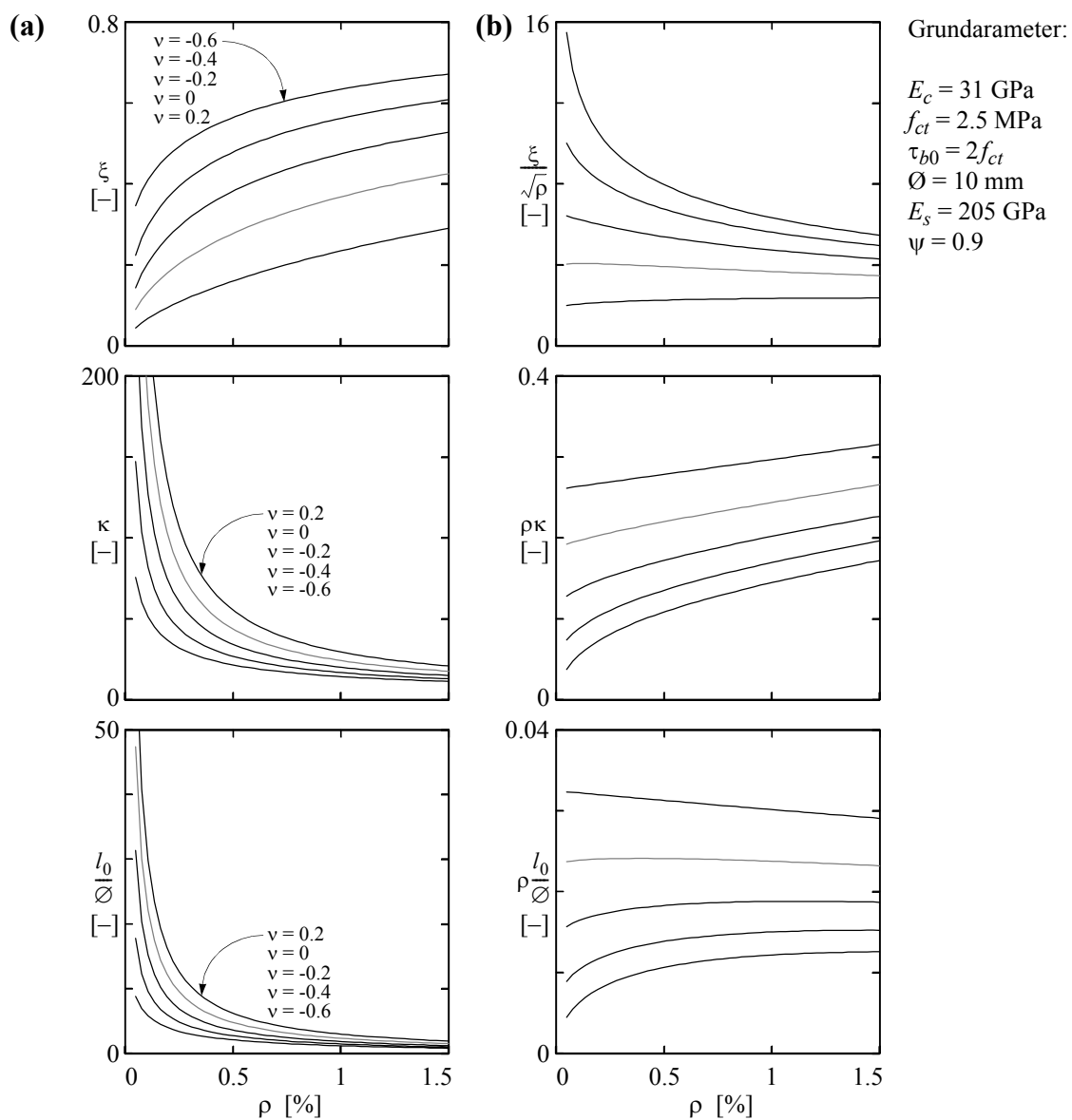


**Bild 4.5** – Reine Biegung von Rechteckquerschnitten: (a) Druckzonenhöhe ( $\lambda = 1$ ); (b) Zugversteifungsfaktor.



betontheorie [96] überein. Der Zugversteifungsfaktor  $\beta$  entspricht dem Kehrwert des Verbundkoeffizienten nach Bachmann [4]. Die von Sigrist [137] vorgeschlagene starr-ideal plastische Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung erlaubt eine direkte Bestimmung des Zugversteifungsfaktors  $\beta$  statt einer iterativen Berechnung z.B. gemäss [19]. Dies ermöglicht die Berechnung der Druckzonenhöhe unter Berücksichtigung der Zugversteifung bei reiner Biegung und damit die Spannungsberechnung in einfacher, analytischer Weise oder mit den existierenden verschiedenen Tabellenwerken, wie z.B. [64].

Die Diagramme in Bild 4.5 zeigen den Einfluss des Bewehrungsgebietes  $\rho$  und der Bewehrungslage  $\mu$  auf die Druckzonenhöhe  $\xi$  und den Zugversteifungsfaktor  $\beta$ . Infolge



**Bild 4.6** – Druckzonenhöhe, Stahlspannung im Riss bei maximalem Rissabstand und Rissabstand von Rechteckquerschnitten unter Biege- und Normalkraftbeanspruchung: (a) normierte Werte; (b) auf den Bewehrungsgehalt bezogene Werte.

der vereinfachten Verformungsbedingung, mit der die Betonverformung überschätzt wird, resultiert eine etwas grössere Druckzonenhöhe als gemäss (4.24). Die Stahlspannungen im Riss weichen aber nur unwesentlich von einer genaueren Berechnung ab, siehe auch Bild 4.4. Der Zugversteifungsfaktor  $\beta$  wird mit zunehmendem Bewehrungsgehalt kleiner. Durch die kleineren zu erwartenden Rissabstände gemäss Bild 4.4 bzw. (4.34) nähert sich das Mittel der Stahlspannung im Riss und der Spannung im Schnitt  $I$  der Rissspannung  $\sigma_{sr}$  und somit der Lösung nach der klassischen Stahlbetontheorie. Im Fall minimaler Rissabstände tendiert der Zugversteifungsfaktor  $\beta$  mit zunehmendem Bewehrungsgehalt schneller gegen eins.

Wird der Träger durch Biegung und Normalkraft beansprucht, können die Gleichgewichtsbeziehungen und Verformungsbedingungen auch bei Vernachlässigung der Zugversteifung (4.30) oder vereinfachter Berücksichtigung mit einem Zugversteifungsfaktor (4.38) nicht auf eine quadratische Gleichung für die Druckzonenhöhe reduziert werden.

Lösungen der kubischen Gleichung (4.24) sind für verschiedene Normalkraftbeanspruchungen in den Diagrammen in Bild 4.6 dargestellt. Die Druckzonenhöhe nimmt erwartungsgemäss mit zunehmender Druckkraft zu. In der auf den Bewehrungsgehalt normierten Darstellung in Bild 4.6 (b) wird die Veränderung im Vergleich zur reinen Biegung besonders deutlich. Die Stahlspannung im Riss sowie die Rissabstände nehmen mit zunehmender Druckkraft ab.

#### 4.3.4 Vergleich der Biegerissabstandsberechnung mit anderen Ansätzen

Als einer der ersten leitete Bächtold [7] analytisch den Rissabstand

$$s_r = \frac{2\lambda A_{c,eff} f_{ct}}{\sum \emptyset \pi \tau_b} = \frac{\lambda(1-\psi \xi_0)}{\rho} \frac{\emptyset f_{ct}}{4 \tau_b} \quad (4.39)$$

in Stahlbetonbiegeträgern her, indem er eine konstante Verbundschubspannung entlang der Bewehrung annahm. Als zu berücksichtigende Betonfläche  $A_{c,eff}$  wählte er die halbe Betonzugfläche.

Unter Verwendung eines sinusförmigen Verbundschubspannungsverlaufes zwischen zwei Biegerissen bestimmte Saliger [127] den Rissabstand zu

$$s_r = \frac{0.157\psi}{\rho} \frac{\emptyset f_{cc}}{4 \tau_b} \quad (4.40)$$

während Johnson [68] unabhängig vom Verbundspannungsverlauf mit einer mittleren Verbundspannung zu folgendem Rissabstand gelangte:

$$s_r = \frac{0.16\psi \emptyset f_{ct}}{\rho \tau_b} \quad (4.41)$$

Maldague [85] untersuchte den gerissenen bzw. ungerissenen Querschnitt *II* bzw. *I* unter Annahme von elastischem Materialverhalten und bestimmte die Stahlspannungen in diesen Schnitten. Durch die Integration der untersuchten, ortsabhängigen Verbundschubspannungen und Gleichgewicht der Kräfte gelangte er zum Ausdruck

$$s_r = \frac{\lambda n \varnothing f_{ct}}{24 \psi^2 \tau_{b,max} k_\tau} Y(n, \rho, \xi_0, \psi) \quad (4.42)$$

wobei bei konstantem, linearem bzw. sinusförmigen Verlauf der Verbundschubspannungen die Völligkeitskonstanten  $k_\tau = 1/2$ ,  $k_\tau = 1/4$  bzw.  $k_\tau = 1/\pi$  einzusetzen sind. In guter Näherung kann für die Formfunktion

$$Y(n, \rho, \xi_0, \psi) \approx \frac{0.09 \psi}{\rho} \quad (4.43)$$

angenommen werden.

Aus Vergleichen mit Versuchsergebnissen [6] und unter Verwendung der Beziehungen in [113] leitete Bachmann die folgende Formel zur Rissabstandsrechnung her

$$s_r = 0.18 \frac{\varnothing \psi}{\rho} \frac{(5 \dots 9.4)}{\sqrt{f_{cc}}} \quad (4.44)$$

Basierend auf der Auswertung sehr vieler Platten-, Rechteck- und Plattenbalkenversuche schlugen Rehm und Martin [114] in Anlehnung an [43] eine Formel zur Berechnung des Rissabstandes vor, welche den Einfluss der Bewehrungsüberdeckung ( $k_1$ ), der Oberflächenprofilierung der Bewehrung ( $k_2$ ) und den Einfluss der mitwirkenden Betonfläche ( $k_3$ ) beinhaltet

$$s_r = k_1(h-d) + k_2 k_3 \frac{\varnothing \psi}{\rho} = 4(h-d) + \frac{0.009}{0.2 + \sqrt[3]{f_R^2}} \frac{\varnothing \psi}{\rho} \quad (4.45)$$

wobei  $f_R$  die bezogene Rippenfläche gemäss [113] bedeutet.

In Anlehnung an [114] leitete Leonhardt [80] eine Formel unter Berücksichtigung der rissnahen Störung der Verbundtragwirkung ( $v_0$ ) her

$$s_r = \frac{l_{v0}}{2} + k_1 k_e + k_2 k_3 \frac{\varnothing}{\rho_{eff}} = \frac{\sigma_{sr} - \sigma_{sI}}{90} + 1.5 k_e + 0.4 \cdot 0.125 \frac{\varnothing(1 - \eta_{sup})}{\rho} \quad (4.46)$$

wobei  $\sigma_{sr}$  und  $\sigma_{sI}$  in MPa einzusetzen sind. Der Einfluss der Bewehrungsüberdeckung und des Stababstandes  $e$  wird mit dem Korrekturglied  $k_e$  erfasst:

$$k_e = h - d \quad \text{für } e \leq 2(h - d) \quad (4.47)$$

$$k_e = \frac{e + 2(h - d)}{4} \quad \text{für } e > 2(h - d) \quad (4.48)$$

Fellmann und Menn [41] leiteten durch verschiedene Umformungen von (4.45) und (4.46) folgende Beziehung her:

$$s_r = 2\left(h-d + \frac{e}{10}\right) + k_1 k_2 \frac{\varnothing}{\rho_{eff}} \approx 2(h-d) + \lambda_{sr} e \quad (4.49)$$

Mit  $\lambda_{sr} = 1.5$  ergibt sich gemäss [41] ein vorsichtiger und relativ zuverlässiger Richtwert zur Ermittlung des Rissabstandes. Unter Verwendung von (4.49) und verschiedenen Koeffizienten ( $k_i$ ) publizierte Leonhardt [79] eine aus (4.46) abgeänderte Beziehung.

Ausgehend vom Zuggurtmodell (2.62) leiteten Marti et al. [88] eine Formel zur Rissabstandsberechnung mit einem effektiven Bewehrungsgehalt der Zugzone eines Biegeträgers her

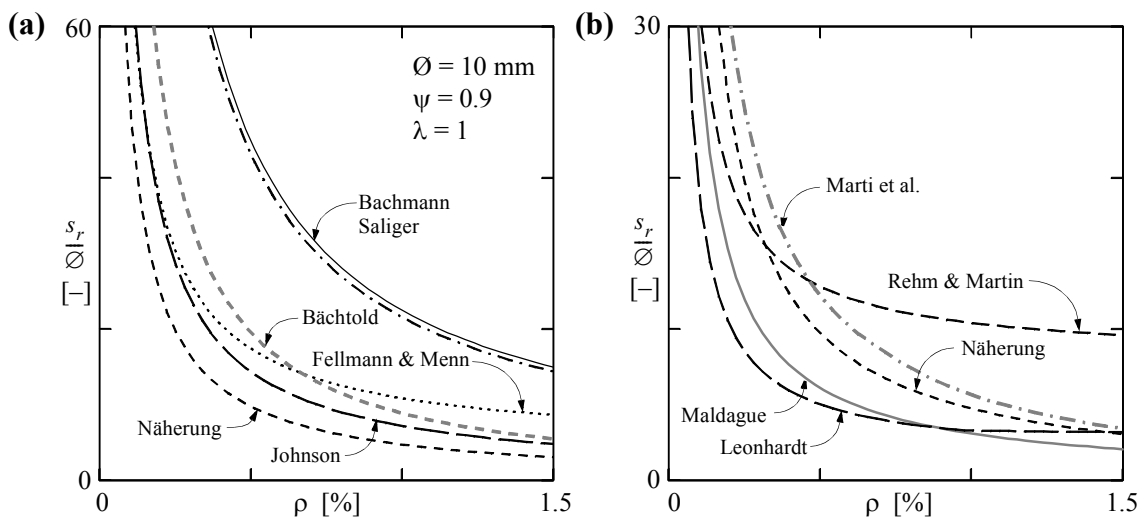
$$s_r = \frac{\lambda \varnothing f_{ct} (1 - \rho_{eff})}{2 \tau_{b0} \rho_{eff}} \quad (4.50)$$

wobei der effektive Bewehrungsgehalt

$$\rho_{eff} = \frac{A_s}{bh_{eff}} \quad (4.51)$$

nach einem Vorschlag von Schiessl [129] in Anlehnung an [114, 130] bestimmt und die mitwirkende Zugzone zu

$$h_{eff} = 2.5(h-d) \leq \frac{h-z_c}{3} \quad (4.52)$$



**Bild 4.7** – Vergleich unterschiedlicher Ansätze zur Rissabstandsberechnung in Biegeträgern: Näherung (4.34), Bächtold [7], Saliger [127], Maldague [68], Maldague [85], Bachmann [4], Rehm und Martin [114], Leonhardt [80], Fellmann und Menn [41] sowie Marti et al. [88].

angenommen wird. Für stahlfaserverstärkten Stahlbeton erweiterte Pfyf [108] die Beziehung (4.50) mit der Faserwirksamkeit  $\sigma_{cf0}$ , welche eine Funktion des Fasergehaltes  $\rho_f$  und der Faserschlantheit  $l_f/\varnothing_f$  ist, wie folgt

$$s_r = \frac{\lambda \varnothing f_{ct} (1 - \rho_{eff})}{2 \tau_{b0} \rho_{eff}} \left( 1 - \frac{\sigma_{cf0}}{f_{ct}} \right) \quad (4.53)$$

Bild 4.7 zeigt die berechneten Rissabstände in Abhängigkeit des Bewehrungsgehaltes für die beschriebenen Ansätze. Der Beton wird charakterisiert durch  $f_{ct} = 2.5 \text{ MPa}$ ,  $f_{cc} = 25 \text{ MPa}$ ,  $E_c = 31 \text{ GPa}$  und  $\tau_b = 2f_{ct}$ . Man erkennt in Bild 4.7 (a), dass die vor 1970 entwickelten Ansätze von Bächtold [7], Saliger [127], Johnson [68], Bachmann [4] sowie (für Bewehrungsgehalte  $\rho > 0.5 \%$ ) Rehm und Martin [114] deutlich grössere Rissabstände ergeben als nach der Näherung (4.34) berechnet. Demgegenüber liefern die Formeln von Maldague [85] und Leonhardt [80] wesentlich kleinere Rissabstände, siehe Bild 4.7 (b). Die Resultate der Formel von Marti et al. [88] sind den Werten der Näherung (4.34) am nächsten.

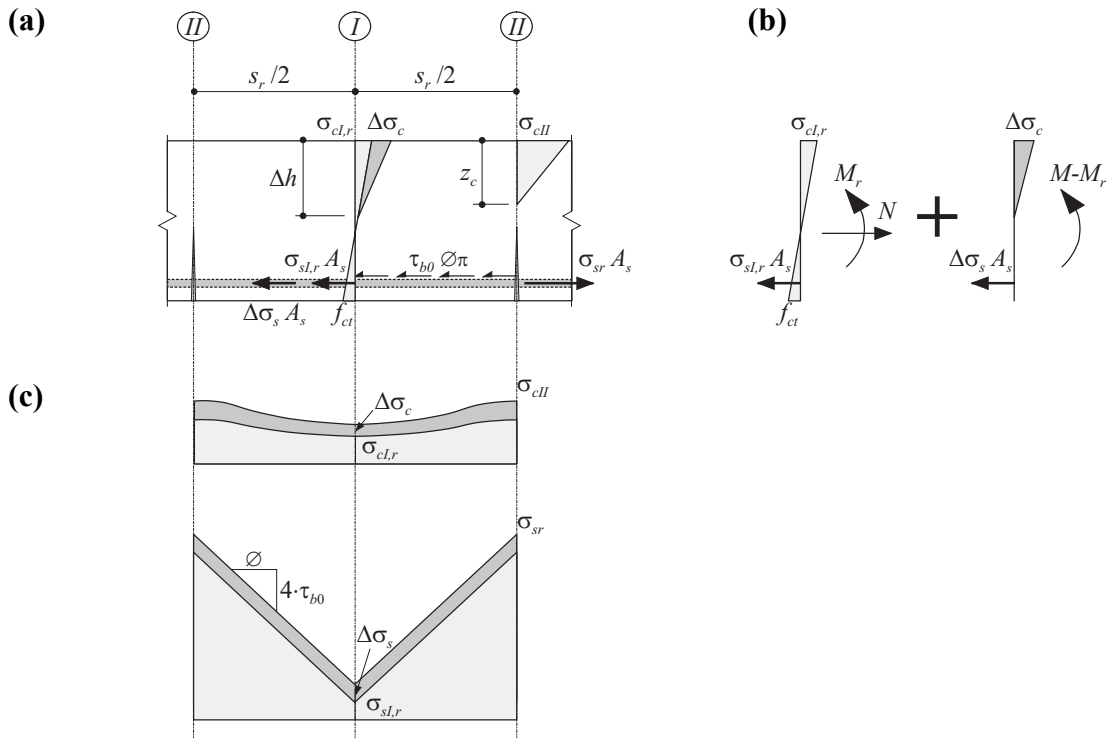
Generell ist, bedingt durch die unterschiedlichen Modellannahmen und die Auswertung verschiedener Versuchsergebnisse, eine grosse Bandbreite der Ergebnisse zu beobachten. In Anbetracht der grossen Unsicherheiten der Randbedingungen sowie der Tatsache, dass das Vorhandensein einer querschnittsmindernden Querbewehrung in der Regel die Lage der Rissquerschnitte vorgibt, kann die Abschätzung der Rissabstände in guter Näherung mit (4.34) vorgenommen werden.

## 4.4 Biegesteifigkeit im gerissenen Zustand

### 4.4.1 Erweiterte Verformungsbedingung

Krümmung und Biegesteifigkeit werden nach dem Überschreiten des Rissmomentes  $M_r$  wesentlich vom Dehnungsverlauf im Bewehrungsstahl bestimmt. Der Bestimmung des Verlaufs der Stahldehnungen bzw. der Stahlspannungen geht eine Berechnung der Stahlspannung im Rissquerschnitt voraus. Dazu wird die Verformungsbedingung für den Balkenabschnitt *I - II* aus Kapitel 4.3.2 für Beanspruchungszustände  $M \geq M_r$  erweitert.

Die Beziehungen aus Kapitel 4.3.2 setzen Ebenbleiben des Querschnittes *I* voraus. Wird nach der Rissbildung die Beanspruchung gesteigert, so nimmt die Stahlspannung zu, während die Betonzugspannung am unteren Rand konstant angenommen wird. Die Stahlspannungszunahme im Schnitt *I* ist mit (4.13) gleich der Spannungszunahme im Rissquerschnitt. Die Spannungen im Schnitt *I* (Symmetrieebene zwischen zwei Rissen) werden aus einer Superposition der Spannungsverteilung infolge des Rissmomentes  $M_r$  sowie der Normalkraft  $N$  und der Momentendifferenz  $M - M_r$  berechnet. Die Stahlspannung im Schnitt *I* wird infolge des Schlupfes entlang der Bewehrung um  $\Delta\sigma_s$  grösser als bei der Rissentstehung:



**Bild 4.8** – Spannungen im Stahlbeton-Balkenabschnitt nach Überschreiten des Rissmomentes: (a) Spannungen; (b) Superposition der Spannungen; (c) Betondruckspannungen am oberen Rand, Stahlspannungen.

$$\Delta\sigma_s = \sigma_{sr} - \frac{4\tau_{b0}}{\varnothing} l_0 - n c_{sI} f_{ct} \quad (4.54)$$

Diese Stahlspannungsdifferenz kann mit der in Bild 4.6 dargestellten Zusatzspannung  $\Delta\sigma_c$  im Beton mit der Momentendifferenz  $M - M_r$  ins Gleichgewicht gebracht werden:

$$\Delta\sigma_s A_s - \frac{b}{2} \Delta h \Delta\sigma_c = 0 \quad (4.55)$$

$$\Delta\sigma_s A_s \left( d - \frac{\Delta h}{3} \right) = M - M_r \quad (4.56)$$

Aus diesen Gleichgewichtsbedingungen kann die Zusatzspannung

$$\Delta\sigma_c = \frac{2\Delta\sigma_s A_s}{3b \left( \frac{M - M_r}{\Delta\sigma_s A_s} \right)} \quad (4.57)$$

berechnet und die Verformungsbedingung (4.22) erweitert werden:

$$n \left( c_{cI} + c_{cII} + \frac{\Delta\sigma_c}{f_{ct}} \right) (1 - \xi) = \left( 2\kappa - \frac{4\tau_{b0}}{\varnothing f_{ct}} l_0 \right) \xi \quad (4.58)$$

Die Gleichungen (4.20) und (4.21) für das Gleichgewicht im Rissquerschnitt II sowie die erweiterte Verformungsbedingung (4.58) für die Unbekannten  $\sigma_{cII}$ ,  $\sigma_{sr}$  und  $z_c$  können

nicht geschlossen gelöst werden. Die Resultate entsprechender numerischer Berechnungen für reine Biegung sind in Bild 4.10 (a) dargestellt.

Die Stahlspannungsdifferenz im Schnitt  $I$  kann mit der Erkenntnis, dass sich die Stahlspannung im Riss  $\sigma_{sr}$  infolge einer geringfügigen Veränderung der Druckzonenhöhe nur sehr wenig verändert (Bild 4.4), in guter Näherung angegeben werden zu

$$\sigma_{sI} = \sigma_{sI}(M_r) \cdot \frac{M}{M_r} + \frac{4\tau_{b0}}{\varnothing} l_0 \left( \frac{M}{M_r} - \lambda \right) \quad (4.59)$$

Der Zugversteifungsfaktor kann mit der vorangegangenen Annahme für Beanspruchungszustände  $M \geq M_r$  erweitert werden,

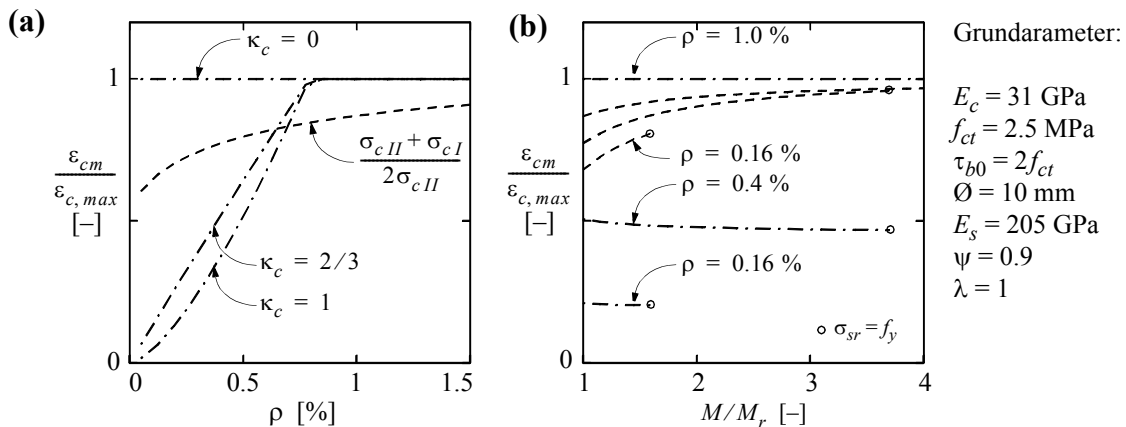
$$\beta = \frac{nc_{sI} + \frac{4\tau_{b0}}{f_{ct}} \frac{l_0}{\varnothing}}{nc_{sI} + \frac{4\tau_{b0}}{f_{ct}} \frac{l_0}{\varnothing} \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \frac{M_r}{M} \right)} \quad (4.60)$$

siehe auch Bild 4.10 (b). Mit zunehmender Beanspruchung vermindert sich der Zugversteifungsfaktor, und als Folge davon nähert sich die Druckzonenhöhe dem Wert  $\xi_0$  nach der klassischen Stahlbetontheorie, siehe Bild 4.10 (a). Die numerische Auswertung der Gleichungen (4.20), (4.21) und (4.58) zeigt, dass die Druckzonenhöhe  $\xi$  bei der Rissbeanspruchung etwas kleiner ist als nach der vereinfachten Berechnung mit dem Zugversteifungsfaktor, siehe auch Bild 4.5 (a). Die Differenz wird mit zunehmender Beanspruchung kleiner.

Zur Beschreibung der Variation der Betonrandstauchung entlang eines Risselementes führte Bachmann [4] den Stauchungskoeffizienten

$$k_c = \frac{\varepsilon_{cm}}{\varepsilon_{c,max}} = \left( \frac{z_c}{s_r} \right)^{\kappa_c} \quad \text{für } z_c \leq s_r \quad (4.61)$$

$$k_c = 1.0 \quad \text{für } z_c > s_r \quad (4.62)$$



**Bild 4.9** – Verhältnis der mittleren zur maximalen Betonrandstauchung: (a) Einfluss des Bewehrungsgehaltes ( $M = M_r$ ); (b) Einfluss der Beanspruchungshöhe ( $\kappa_c = 2/3$ ).

ein, wobei der Exponent  $\kappa_c$  zwischen den Grenzen null und eins variieren kann. Wird  $\kappa_c = 0$  gesetzt, so verschwindet die Variation der Betonrandstauchung entlang eines Risselementes. Diese Annahme entspricht der Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte, bzw. der Vereinfachung von Birkenmaier [19] in seinem 'erweiterten Berechnungsmodell'.  $\kappa_c = 1$  bedeutet, dass sich die maximale Betonrandstauchung zu

$$\varepsilon_{c,max} = \frac{w}{z_c} \quad (4.63)$$

ergibt, was einer Konzentration der Stauchungen über dem Riss auf einer Breite  $z_c$  gleichkommt. Aufgrund seiner Beobachtungen an Versuchen [5, 6] schlug Bachmann vor,  $\kappa_c = 2/3$  anzusetzen.

In den Diagrammen in Bild 4.9 sind die Stauchungskoeffizienten  $k_c$  dem Verhältnis der mittleren zur maximalen Betonrandstauchung gemäss der Verformungsbedingung (4.58) gegenübergestellt. Man erkennt in Bild 4.9 (a), dass der Stauchungskoeffizient  $k_c$  mit zunehmendem Bewehrungsgehalt  $\rho$  im Bereich  $z_c \leq s_r$  zwischen den Grenzen null und eins variiert, während das Verhältnis der mittleren zur maximalen Betonrandstauchung im Bereich 0.6...0.9 liegt. Bild 4.9 (b) zeigt den Einfluss des Bewehrungsgehaltes  $\rho$  auf den Stauchungskoeffizienten  $k_c$  bei zunehmender Momentenbeanspruchung.

#### 4.4.2 Krümmung

Der Balkenabschnitt aus Bild 4.3 (a) verformt sich unter der Momentenbeanspruchung  $M$  auf der halben Risslänge  $s_r/2$  um den Winkel

$$\frac{\Delta_s}{d-z_c} \quad (4.64)$$

Die mittlere Krümmung im betrachteten Abschnitt beträgt mit (4.17) und (4.13)

$$\chi = \frac{\sigma_{sr} - \frac{\tau_{b0}}{\varnothing} s_r}{E_s(d-z_c)} \quad (4.65)$$

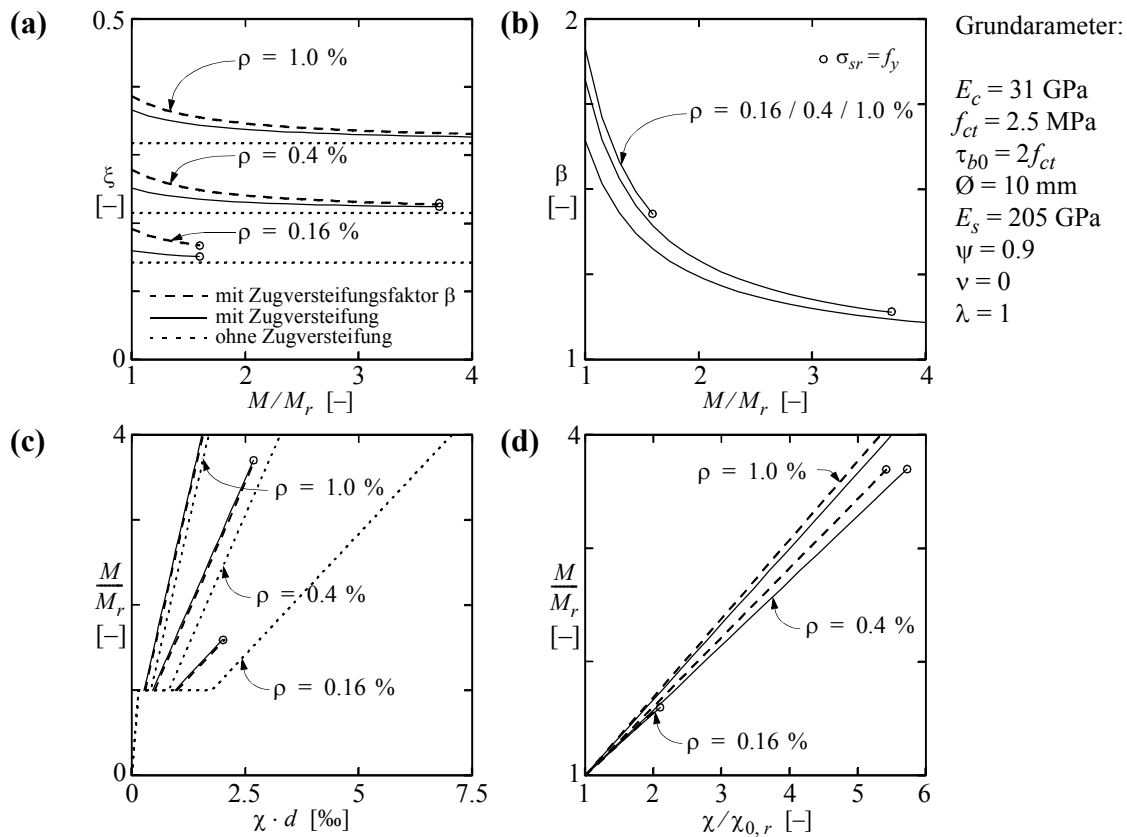
und wird im Falle einfacher Biegung

$$\chi = \frac{\frac{M}{bh^2 \rho \psi (1-\xi/3)} - \frac{\tau_{b0}}{\varnothing} s_r}{dE_s(1-\xi)} \quad (4.66)$$

bzw. unter Verwendung des Zugversteifungsfaktors  $\beta$  nach Gleichung (4.60) näherungsweise zu

$$\chi = \frac{M}{\beta E_s b h^3 \rho \psi^2 (1-\xi/3)(1-\xi)} \quad (4.67)$$





**Bild 4.10** – Steifigkeit von Rechteckquerschnitten mit unterschiedlichem Bewehrungsgehalt: (a) Druckzonenhöhe; (b) Zugversteifungsfaktor; (c) Momenten-Krümmungs-Diagramm; (d) auf Risszustand normiertes Momenten-Krümmungs-Diagramm.

Wird die Zugversteifung vernachlässigt, vereinfacht sich die Krümmungsberechnung nach der klassischen Stahlbetontheorie zu

$$\chi_0 = \frac{M}{E_s b h^3 \rho \psi^2 (1 - \xi_0/3)(1 - \xi_0)} = \frac{M}{EI_{II}} \quad (4.68)$$

Bild 4.10 (c) zeigt den Einfluss des Bewehrungsgehaltes  $\rho$  auf die mittlere Krümmung  $\chi$  bei zunehmender Momentenbeanspruchung. Mit zunehmendem Bewehrungsgehalt  $\rho$  kann die Beanspruchung um ein Vielfaches über das Rissmoment gesteigert werden, bis im Rissquerschnitt  $II$  die Fließspannung  $f_y$  in der Bewehrung erreicht wird. Die Krümmungsdifferenz zur Berechnung ohne Zugversteifung, welche im betrachteten Beanspruchungsbereich beinahe konstant ist, wird kleiner, und die gerissene Steifigkeit wird grösser, siehe auch [80]. Die Übereinstimmung der Näherung unter Verwendung des Zugversteifungsfaktors mit Resultaten der Gleichungen (4.20), (4.21) und (4.58) ist sehr gut. Die kleinen Differenzen lassen sich in dem auf den Risszustand normierten Momenten-Krümmungs-Diagramm ausmachen, siehe Bild 4.10 (d).

Der Einfluss einer Druckbewehrung in der Druckzone auf die anfängliche Krümmung bzw. Durchbiegung ist gering und beträgt nach [80] etwa 5 bis 15 %. Bei Verwendung von Beton mit hohen Festigkeiten wird der Einfluss geringer. Eine Druckbewehrung kann

dagegen die nachträgliche Durchbiegung infolge Schwinden und Kriechen gemäss [33, 46] wesentlich reduzieren.

#### 4.4.3 Vereinfachte Berechnung der Krümmung

Die Krümmung mit Berücksichtigung der Zugversteifung kann mit einer Korrektur aus der Krümmung nach der klassischen Stahlbetontheorie näherungsweise erfasst werden durch

$$\Delta\chi \approx \chi_0 - \chi \approx \chi_{0,r} \left(1 - \frac{1}{\beta_r}\right) \quad (4.69)$$

wobei mit (4.68)

$$\chi_{0,r} = \frac{M_r}{EI_{II}} \quad (4.70)$$

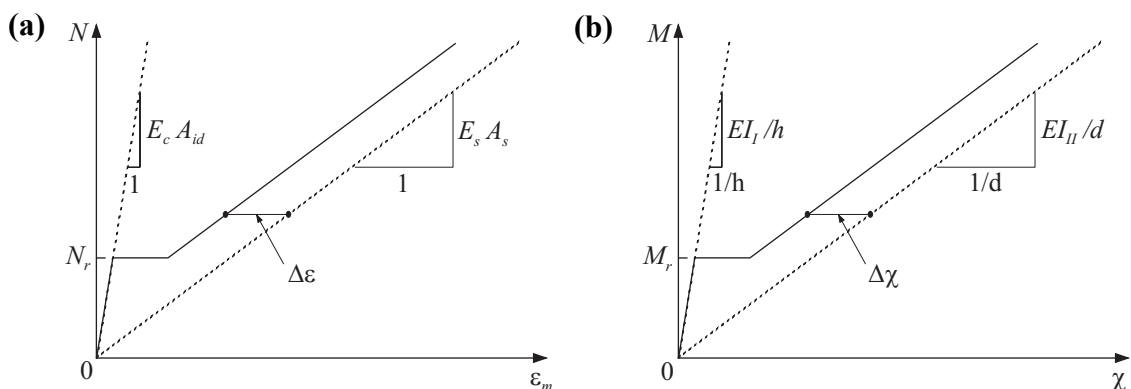
und unter Verwendung von (4.33) und (4.37)

$$\beta_r \approx \frac{11n\rho\psi(2\psi-1)+2}{11n\rho\psi(2\psi-1)+2-\lambda} \quad (4.71)$$

Ausgehend vom Zuggurtmodell [1] leitete Marti [86] eine Krümmungsdifferenz zur Berücksichtigung der Zugversteifung ab. Die Dehnung eines zentrisch beanspruchten Stahlbetonzuggliedes wird gegenüber der Dehnung ohne Berücksichtigung der Zugversteifung um

$$\Delta\varepsilon = \frac{\lambda f_{ct}(1-\rho_{eff})}{2\rho_{eff} E_s} \quad (4.72)$$

reduziert, siehe Bild 4.11 (a). Der effektive Bewehrungsgehalt der Zugzone eines Biegeträgers kann mit (4.51) und (4.52) bestimmt werden. Unter Verwendung der oberen Schranke der Gleichung (4.52) sowie der Näherung  $1-\rho_{eff} \approx 1$  folgt mit (4.65), wie in Bild 4.11 (b) dargestellt,



**Bild 4.11** – Kraft-Verformungs-Diagramme: (a) Zuggurtmodell [1]; (b) Biegung unter Berücksichtigung der Zugversteifung [86].

$$\Delta\chi = \frac{\lambda f_{ct}}{6h\rho E_s} \quad (4.73)$$

Muttoni und Burdet [98] legten die mitwirkende Zugzone zu

$$h_{eff} \approx \frac{h}{5} \quad (4.74)$$

fest und leiteten damit die Krümmungsdifferenz ab:

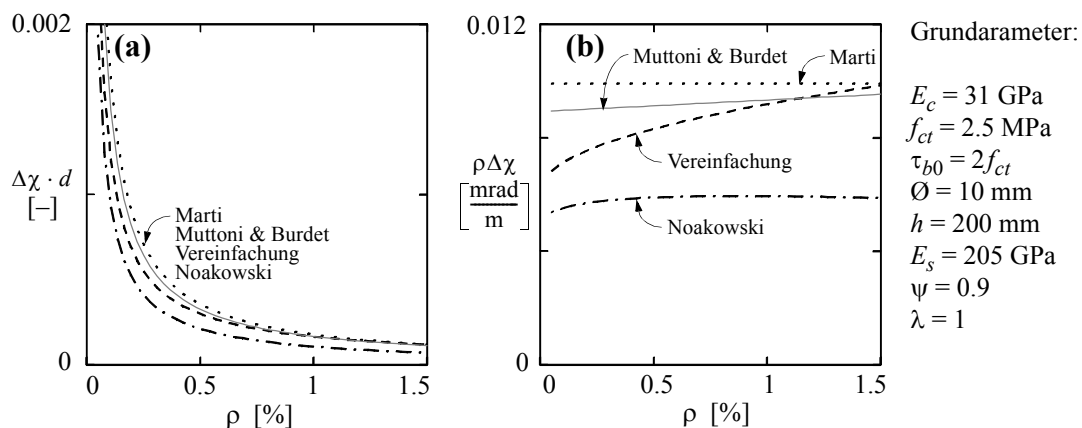
$$\Delta\chi = \frac{3}{40n\rho} \frac{M_r}{EI_I} \quad (4.75)$$

Als ‘Mitwirkungsmass des Betons auf Zug’ bezeichnet, leiteten Noakowski und Schäfer [103] in Anlehnung an [101, 102] eine lastunabhängige Krümmungsdifferenz her:

$$\Delta\chi = 0.4 \frac{M_r}{EI_{II}} \left(1 - \frac{EI_{II}}{EI_I}\right) \quad (4.76)$$

Basierend auf experimentellen Untersuchungen [50] schlug Giuriani ein Modell zur Berechnung des Last-Verformungs-Verhaltens unter Verwendung einer lastunabhängigen Krümmungsdifferenz [48] vor und verwendete dieses zur Berechnung von Durchlaufträgern [49].

Die Diagramme in Bild 4.12 zeigen den Einfluss des Bewehrungsgehaltes  $\rho$  auf die Krümmungsdifferenz  $\Delta\chi$  zur Berücksichtigung der Zugversteifung. Zur übersichtlicheren Darstellung werden die Werte in Bild 4.12 (b) auf den Bewehrungsgehalt bezogen. Es zeigt sich, dass die Krümmungsdifferenz mit zunehmendem Bewehrungsgehalt abnimmt, bzw. das Produkt  $\rho \cdot \Delta\chi$  nahezu konstant bleibt und für alle Ansätze dieselbe Grössenordnung aufweist. Die leichte Zunahme beim Modell von Muttoni und Burdet folgt aus dem Verhältnis von Widerstandsmoment und Flächenträgheitsmoment, wie aus den Gleichungen (4.4) und (4.6) ersichtlich ist, bzw. der Verschiebung der ideellen Schwerpunktslage gemäss Gleichung (4.1).



**Bild 4.12** – Krümmungsdifferenz zur Berücksichtigung der Zugversteifung: (a) Vergleich der vereinfachten Ansätze; (b) auf den Bewehrungsgehalt bezogene Werte.

## 4.5 Verformungsberechnung

### 4.5.1 Allgemeines

Kennt man die Krümmung jeden Elementes eines auf Biegung beanspruchten Balkens, so kann die Durchbiegung durch doppelte Integration ermittelt werden. Bei Stahlbetonträgern liegt die Schwierigkeit darin, dass die Biegesteifigkeit im gerissenen Zustand vom Beanspruchungsgrad und von der Bewehrungsführung abhängig ist. In Balken und Platten gibt es stets Teillängen, in denen  $M < M_r$  ist, also die Biegezugzone nicht reißt. Dort gelangt die ungerissene Biegesteifigkeit zur Anwendung. Die Grösse dieser Teillängen hängt von der Belastungsgeometrie, dem statischen System und somit vom Momentenverlauf ab.

Die Berücksichtigung der unterschiedlichen Biegesteifigkeiten, der Belastungsgeschichte sowie von Langzeiteffekten bietet einige Schwierigkeiten. Die Berechnungen nach den in der Literatur vorgeschlagenen Modellen müssen meist numerisch vorgenommen werden. Zur Diskussion der Auswirkung der unterschiedlichen Biegesteifigkeiten und der Berücksichtigung der Zugversteifung ist es jedoch sinnvoll, analytische Näherungslösungen zu erarbeiten. Im folgenden werden für einfache Balken unter Gleichlast, Vier- und Dreipunktbiegung sowie einen beidseitig eingespannten Balken unter mittiger Einzellast solche Lösungen entwickelt.

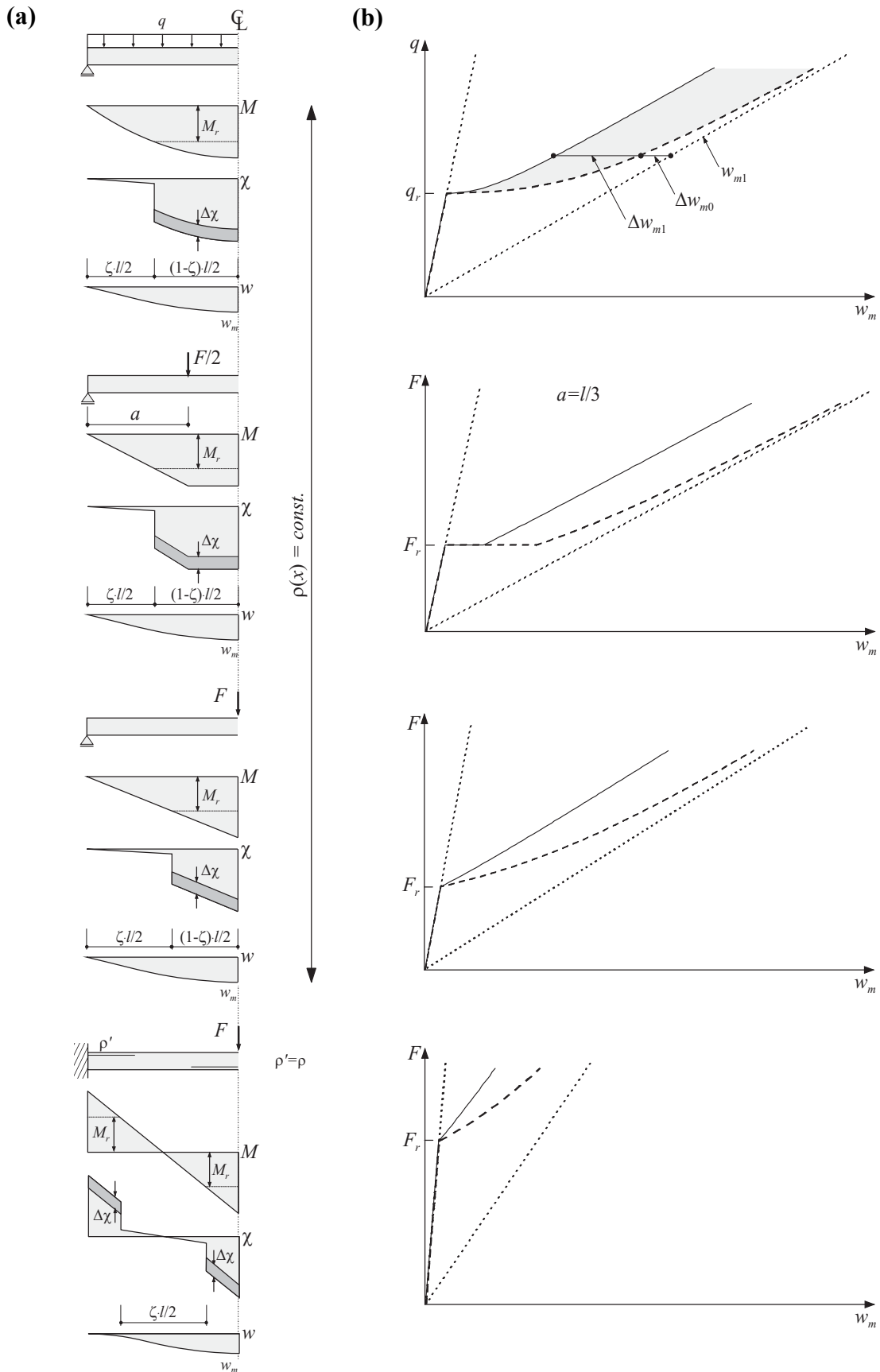
### 4.5.2 Analogie von Mohr

Entsprechend Bild 4.11 (b) wird davon ausgegangen, dass die Biegesteifigkeit bzw. die Krümmung in den gerissenen Teillängen mit einer belastungsunabhängigen Krümmungsdifferenz  $\Delta\chi$  gemäss Gleichung (4.69) berechnet werden kann. Weiter wird vorausgesetzt, dass die Belastung monoton gesteigert wird und keine gerissenen Teillängen entlastet werden. Langzeiteinflüsse wie Kriechen und Relaxation werden nicht berücksichtigt.

Die Mittendurchbiegung für die Systeme gemäss Bild 4.13 (a) wird unter Verwendung der Analogie von Mohr [95] wie folgt berechnet:

$$w_m = w_{m1} - \Delta w_{m0} - \Delta w_{m1} \quad (4.77)$$

wobei  $w_{m1}$  unter Annahme eines vollständig gerissenen Trägers mit der Biegesteifigkeit  $EI_{II}$  nach der klassischen Stahlbetontheorie aus (4.68) berechnet wird.  $\Delta w_{m0}$  berücksichtigt den Einfluss ungerissener Zonen der Länge  $\zeta \cdot l$ , und  $\Delta w_{m1}$  beinhaltet die Reduktion infolge der Zugversteifung (grau hinterlegt), siehe Bild 4.13 (b). Für die Behandlung des beidseitig eingespannten Trägers unter mittiger Einzellast wird eine symmetrische Bewehrung vorausgesetzt, d.h. im Einspannquerschnitt und in Feldmitte



**Bild 4.13** – Verformungsberechnung von Stahlbetonbalken unter verteilter Last, Vier- und Dreipunktbiegung sowie bei beidseitiger Einspannung: (a) Belastung, Moment, Krümmung und Durchbiegung; (b) Last-Durchbiegungskurven.

sind die Querschnittswerte identisch. Die einzelnen Komponenten der Gleichung (4.77) sind in Tabelle 4.1 zusammengestellt.

Belastung und System	$\zeta =$	$w_{m1} =$	$\Delta w_{m0} =$	$\Delta w_{m1} =$
Gleichlast	$1 - \sqrt{1 - \frac{8M_r}{ql^2}}$	$\frac{5ql^4}{384EI_{II}}$	$w_{m1} \frac{\zeta^3(8-3\zeta)}{5} \left(1 - \frac{EI_{II}}{EI_I}\right)$	$\Delta\chi(1-\zeta^2)\frac{l^2}{8}$
Vierpunkt	$\frac{4M_r}{Fl}$	$\frac{Fl^2a}{48EI_{II}} \left(3 - \frac{4a^2}{l^2}\right)$	$w_{m1} \frac{\zeta^3 l/a}{3-4(a/l)^2} \left(1 - \frac{EI_{II}}{EI_I}\right)$	$\Delta\chi(1-\zeta^2)\frac{l^2}{8}$
Dreipunkt	$\frac{4M_r}{Fl}$	$\frac{Fl^3}{48EI_{II}}$	$w_{m1} \zeta^3 \left(1 - \frac{EI_{II}}{EI_I}\right)$	$\Delta\chi(1-\zeta^2)\frac{l^2}{8}$
Eingespannt	$\frac{8M_r}{Fl}$	$\frac{Fl^3}{192EI_{II}}$	$w_{m1} \zeta^3 \left(1 - \frac{EI_{II}}{EI_I}\right)$	$\Delta\chi(1-\zeta^2)\frac{l^2}{16}$

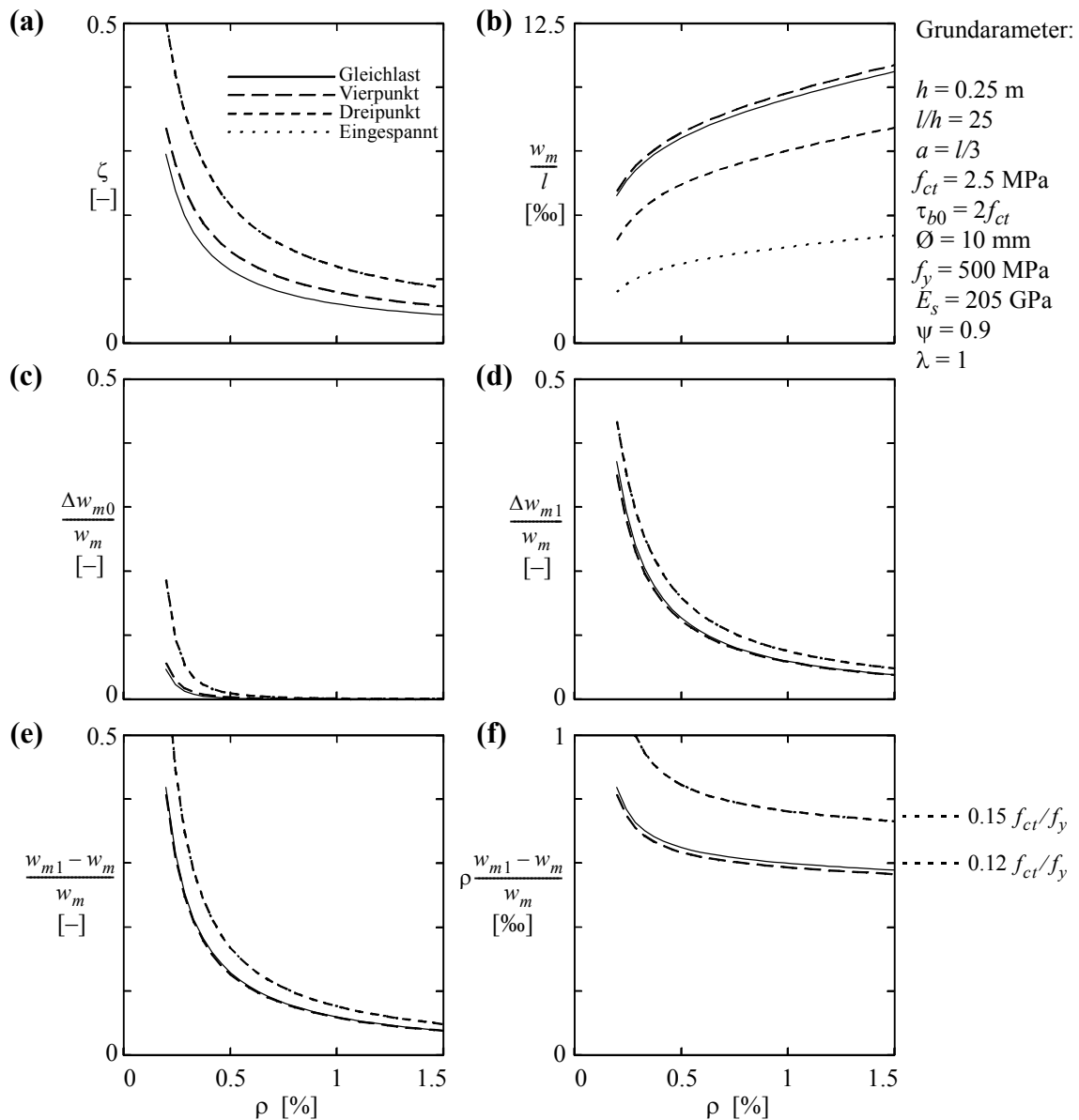
**Tabelle 4.1** – Zusammenstellung der Gleichungen zur Berechnung der Mittendurchbiegung von Stahlbetonträgern.

Die Diagramme in Bild 4.13 (b) zeigen den Einfluss der ungerissenen Zonen sowie der Zugversteifung bei der Berechnung von Mittendurchbiegungen. Nach dem Überschreiten der Risslast nimmt die Mittendurchbiegung bei Vierpunktbiegung infolge des konstanten Momentes zwischen den Lasten schlagartig, bei den übrigen Belastungsgeometrien sukzessive zu. Die Verformungskurve unter Berücksichtigung der ungerissenen Teillängen nähert sich asymptotisch der Berechnung mit ganz gerissenem Querschnitt. Der Einfluss der Zugversteifung wird mit zunehmendem Beanspruchungsgrad grösser, da der gerissene Bereich des Trägers wächst. Sowohl der Einfluss der Zugversteifung als auch jener der ungerissenen Teillängen sind von der Belastungsgeometrie, dem Beanspruchungsgrad, dem Bewehrungsgehalt und dem statischen System abhängig. Durch die Annahme einer belastungsunabhängigen Krümmungsdifferenz wird die analytische Berechnung der Verformungsreduktion durch die Zugversteifung besonders einfach, siehe Bild 4.13 (b) und Tabelle 4.1.

### 4.5.3 Einfluss der verformungsreduzierenden Effekte

Mit den Gleichungen in Tabelle 4.1 lassen sich die Last-Durchbiegungs-Kurven für die ausgewählten Belastungsgeometrien und statischen Systeme ermitteln. Um die Grössenordnung der verformungsreduzierenden Einflüsse bei unterschiedlichen Bewehrungsgehalten zu untersuchen, wird die Annahme getroffen, dass das Maximalmoment bzw. die Beanspruchung gerade die Fließgrenze erreicht. Vereinfachend wird von einem linear elastischen Materialverhalten der Betondruckzone zur Berechnung des Fließmomentes

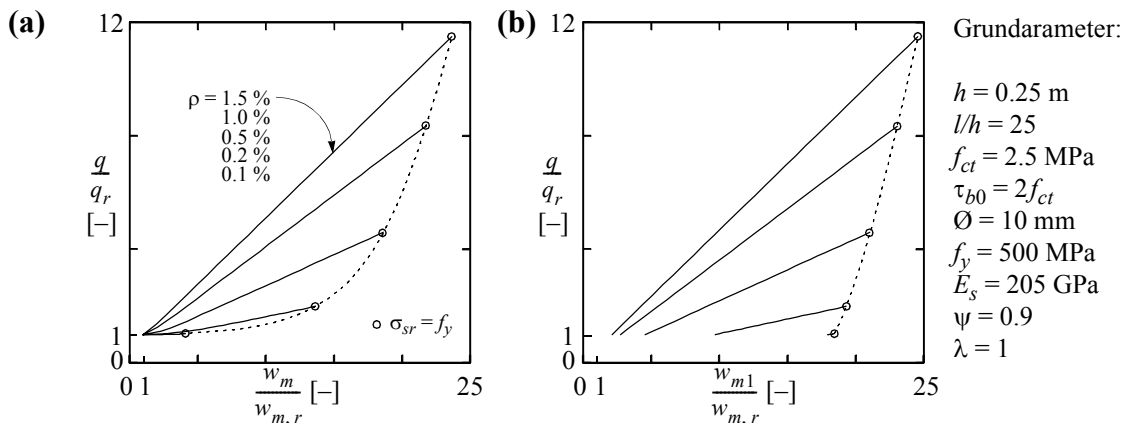
$$M_y = A_s f_y d \left(1 - \frac{\xi_0}{3}\right) \quad (4.78)$$



**Bild 4.14** – Verformungsberechnung von Stahlbetonbalken bei Fließbeginn der Bewehrung: (a) Ungerissene Teillängen; (b) Mittendurchbiegung; (c) Einfluss der ungerissenen Teillängen; (d) Einfluss der Zugversteifung; (e) und (f) Einfluss beider Effekte.

ausgegangen. Die Resultate solcher Berechnungen sind in Bild 4.14 dargestellt. Die Abmessungen der Balken, die Zugfestigkeiten  $f_y$  und  $f_{ct}$  sowie die Bewehrungslage wurden für alle Berechnungen gleich gewählt; lediglich der auf die Trägerhöhe  $h$  bezogene Bewehrungsgehalt  $\rho$  wurde variiert.

Die ungerissenen Teillängen, dargestellt in Bild 4.14 (a), werden mit zunehmendem Bewehrungsgehalt kleiner, da das Fließmoment  $M_y$  beinahe linear zum Bewehrungsgehalt anwächst und das Rissmoment  $M_r$  nur marginal zunimmt. Infolge der Völligkeit der Momentenlinie bei Gleichlast ist die bezogene ungerissene Teillänge  $\zeta$  kleiner als bei den übrigen Belastungsgeometrien. Im Fall der Dreipunktbiegung mit und ohne Einspannung fallen die Größen der Teillängen zusammen. Die Mittendurchbiegung ist beim ein-



**Bild 4.15** – Auf die Risslast und die Mittendurchbiegung bei der Risslast bezogene Last-Verformungs-Kurven bei Gleichlast: (a) Zugversteifung und ungerissene Teillängen berücksichtigt; (b) Berechnung mit durchgehend gerissener Biegesteifigkeit.

gespannten Träger erwartungsgemäss am kleinsten, während die Werte bei Gleichlast am grössten sind und, bedingt durch die Ähnlichkeit der Momentenlinien, denjenigen der Vierpunktbiegung am nächsten liegen, siehe Bild 4.14 (b).

Während die Berücksichtigung der ungerissenen Teillängen auf die Mittendurchbiegung in Bild 4.14 (c) nur einen geringen Einfluss zeigt, ist die Verformungsreduktion infolge der Zugversteifung beträchtlich, siehe Bild 4.14 (d). Ab einem Bewehrungsgehalt von 0.5 % beträgt der Anteil beider Effekte an der Mittendurchbiegung weniger als 10 %, mit abnehmender Tendenz, wie in Bild 4.14 (e) ersichtlich ist. Vereinfachend kann angenommen werden, dass die Verformungsreduktion  $\Delta w$  unter Berücksichtigung der Zugfestigkeiten  $f_y$  und  $f_{ct}$  etwa

$$\frac{\Delta w}{w_m} \approx \frac{0.12}{\rho} \frac{f_{ct}}{f_y} \quad (4.79)$$

für Gleichlast und Vierpunktbiegung und

$$\frac{\Delta w}{w_m} \approx \frac{0.15}{\rho} \frac{f_{ct}}{f_y} \quad (4.80)$$

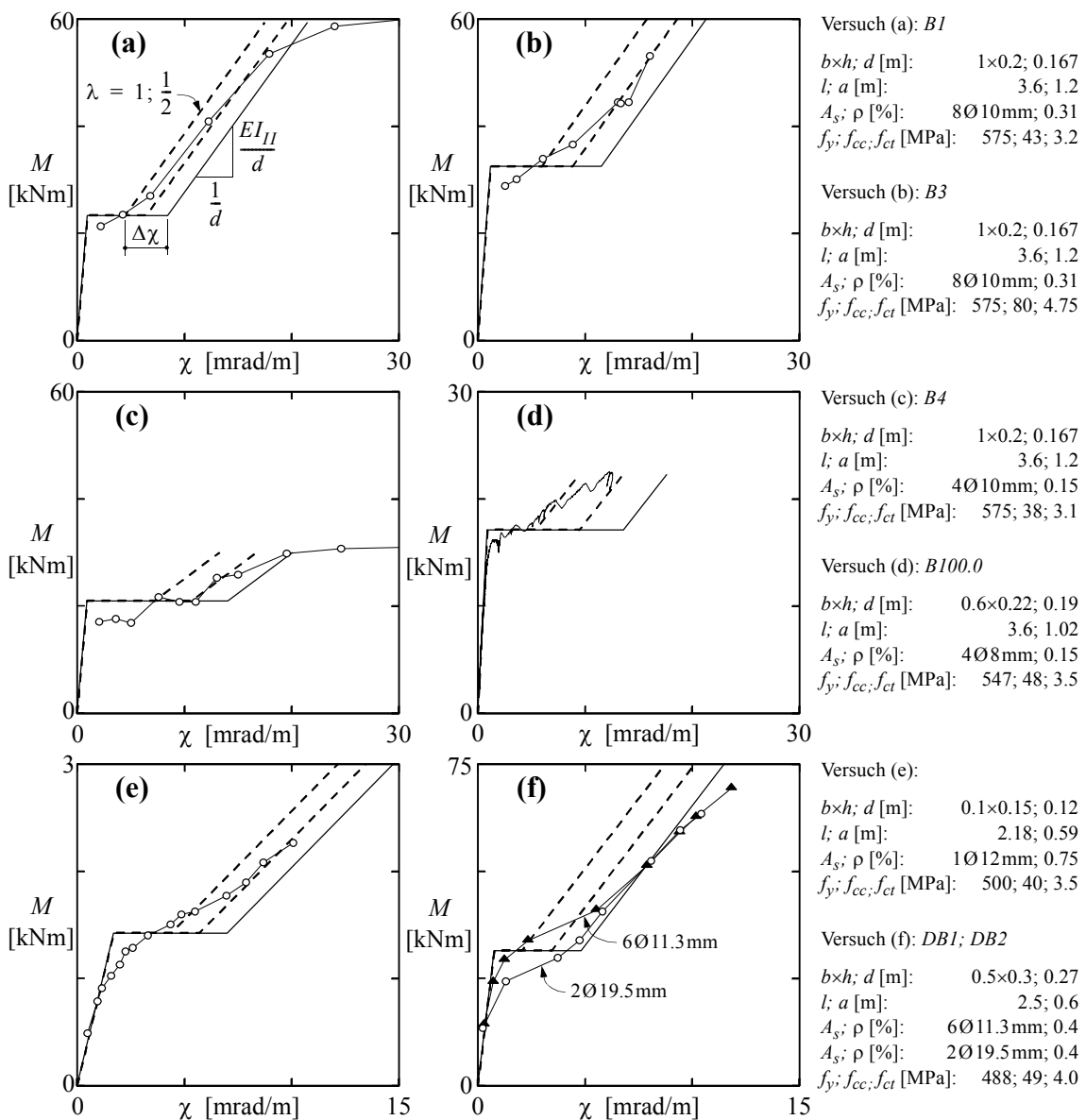
für Dreipunktbiegung und beidseitige Einspannung beträgt, siehe Bild 4.14 (f).

Die Diagramme in Bild 4.15 zeigen den Einfluss des Bewehrungsgehaltes auf das Last-Verformungsverhalten eines Biegeträgers unter Gleichlast bis zum Fließbeginn. Die Fließlast nimmt beinahe proportional zum Bewehrungsgehalt zu, da der Hebelarm der inneren Kräfte unter den verwendeten Annahmen nur um ca. 10 % abnimmt, siehe Bild 4.4 und (4.78). Die erreichte bezogene Mittendurchbiegung beim Fließbeginn nimmt bei Berücksichtigung der ungerissenen Teillängen und der Zugversteifung, dargestellt in Bild 4.15 (a), wesentlich stärker zu, als die mit durchgehend gerissener Steifigkeit (4.68) berechnete Verformung, siehe Bild 4.15 (b). Die Differenz ist vor allem bei kleinen Bewehrungsgehalten ( $\rho < 0.5\%$ ) beträchtlich, siehe auch Bild 4.14 (e).



## 4.6 Versuchsergebnisse

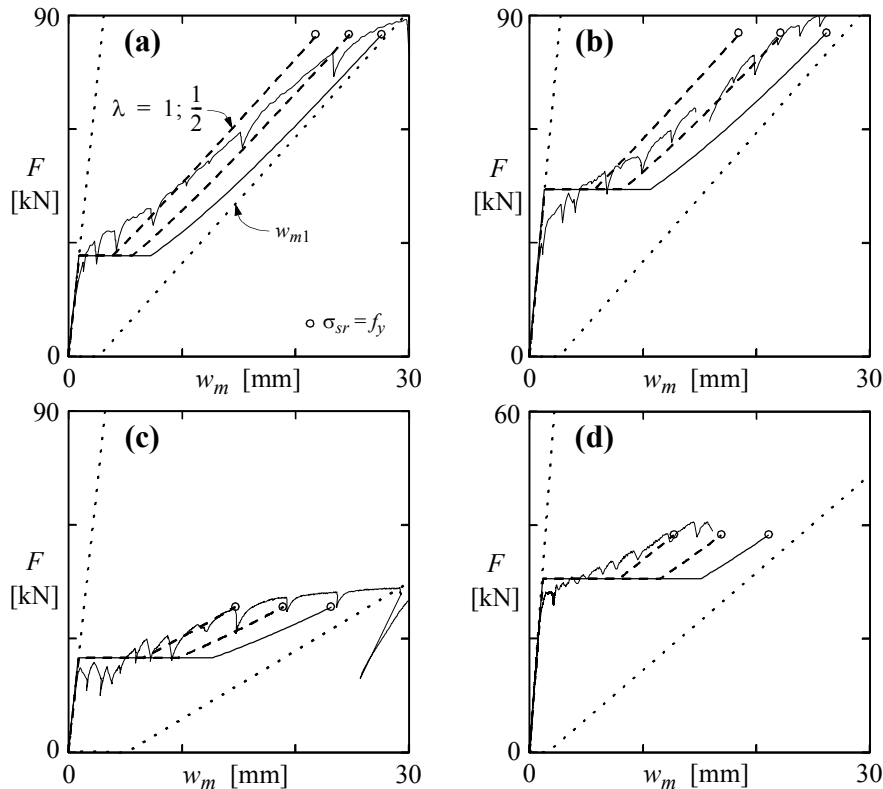
Mit dem in Kapitel 4.4 beschriebenen Rechenmodell zur Krümmungsberechnung und den in Kapitel 4.5 angegebenen Beziehungen zur Berechnung der Mittendurchbiegung steht ein Verfahren zur Verfügung, mit dem die Verformungen von Biegeträgern im Gebrauchszustand untersucht werden können. Die Resultate entsprechender Nachrechnungen verschiedener schwach bewehrter Biegeträger sind in Bild 4.16 gemessenen Momenten-Krümmungs-Werten und in Bild 4.17 gemessenen Last-Durchbiegungs-Kurven gegenübergestellt. Die aufgetragenen Messresultate in Bild 4.16 entsprechen mittleren Krümmungen von Vierpunkt-Biegeversuchen. In den Berechnungen wurden die in entsprechenden Materialversuchen festgestellten Festigkeitswerte ( $\tau_{b0} = 2f_{ct}$ ) verwendet.



**Bild 4.16** – Momenten-Krümmungs-Diagramme schwach bewehrter Biegeträger – Vergleich mit Versuchen: (a), (b) und (c) Kenel und Marti [70]; (d) Pfyl und Marti [109]; (e) Giuriani und Sforza [50]; (f) Polak und Killen [110].

Unter Verwendung der Beziehungen (4.68) und (4.69) können die Krümmungen berechnet werden. In den Diagrammen in Bild 4.16 sind die Krümmungen nach der klassischen Stahlbetontheorie sowie unter Berücksichtigung der Zugversteifung für maximale ( $\lambda = 1$ ) und minimale Rissabstände ( $\lambda = 1/2$ ) bis zum Erreichen der Fließspannung der Bewehrung eingezeichnet. Man erkennt, dass die Krümmungen nach dem Überschreiten der Risslast den Berechnungen mit maximalem Rissabstand ( $\lambda = 1$ ) entsprechen. Bei zunehmender Beanspruchung nähern sich die Versuchsergebnisse den Werten entsprechend dem minimalen Rissabstand ( $\lambda = 1/2$ ). Bei Verwendung kaltverformter Bewehrung (Versuche *B1*, *B3* und *B4*; Kenel und Marti [70]) nimmt die Biegesteifigkeit im Bereich der Fließspannung der Bewehrung überproportional ab. Die beiden Versuche von Polak und Killen [110] zeigen, dass die Biegesteifigkeit nach der Rissbildungsphase unabhängig vom Bewehrungsdurchmesser  $\varnothing$  ist und bestätigen die theoretischen Überlegungen.

Der Einfluss der Belastungseinrichtung und des Eigengewichts der Biegeträger wurde in den Last-Durchbiegungs-Diagrammen in Bild 4.17 durch eine Verschiebung des Ursprungs der berechneten Kurven berücksichtigt. Analog den Feststellungen zum Momenten-Krümmungs-Verhalten weichen die experimentellen Verformungskurven vom anfänglich verbundsteifen Verhalten ( $\lambda = 1$ ) bei zunehmender Beanspruchung sukzessive ab und nähern sich den mit minimalem Rissabstand ( $\lambda = 1/2$ ) berechneten Kurven.



**Bild 4.17** – Last-Mittendurchbiegungs-Diagramme schwach bewehrter Biegeträger – Vergleich mit Versuchen: (a) *B1*, (b) *B3* und (c) *B4*, Kenel und Marti [70]; (d) *B100.0*, Pfyl und Marti [109].

Der Vergleich der experimentellen und theoretischen Kurven unter Verwendung stark vereinfachender Annahmen zeigt eine befriedigende Übereinstimmung. In Anbetracht der geringen Unterschiede lohnen sich Berechnungen mit genaueren Modellen kaum. Die in den Kapiteln 4.3 bis 4.5 hergeleiteten Beziehungen erlauben eine einfache analytische Beschreibung des Last-Verformungsverhalten mit hinreichender Genauigkeit.

## 4.7 Mindestbewehrung zur Rissbreitenbeschränkung

Die Mindestbewehrung von Stahlbetonbauten dient in erster Linie der Vermeidung eines Versagens ohne Vorankündigung bei Erstrissbildung. Sie muss die während des Rissbildungsprozesses auftretenden Zugkräfte in den Rissquerschnitten übertragen. In vielen Fällen wird eine Erhöhung der aus Tragsicherheitsgründen unabdingbaren Mindestbewehrung verlangt, um im Gebrauchszustand eine den gestellten Anforderungen genügende Begrenzung der Rissbreiten zu gewährleisten.

Im folgenden werden auf der Grundlage von Kapitel 4.3 und 4.4 Beziehungen entwickelt, welche der Bestimmung einer Mindestbewehrung zur Begrenzung der Rissbreiten auf zulässige Werte bei Biegebeanspruchung dienen. Die Begrenzung der Rissbreiten erfolgt für die bei maximal möglichem Rissabstand sich einstellenden Verhältnisse. Für Biegeträger mit Rechteckquerschnitt werden die im Rissquerschnitt auftretenden grösstmöglichen Stahlspannungen gemäss (3.14), unter Vernachlässigung der bruchmechanischen Einflüsse, mit der Bedingung (3.10) auf ein zulässiges Mass begrenzt. Mindestbewehrungsgehalte zur Begrenzung der Rissbreiten können mit (4.13), (4.17) und (4.34) und unter Vernachlässigung der Betonverformungen in der Zugzone aus der Bedingung

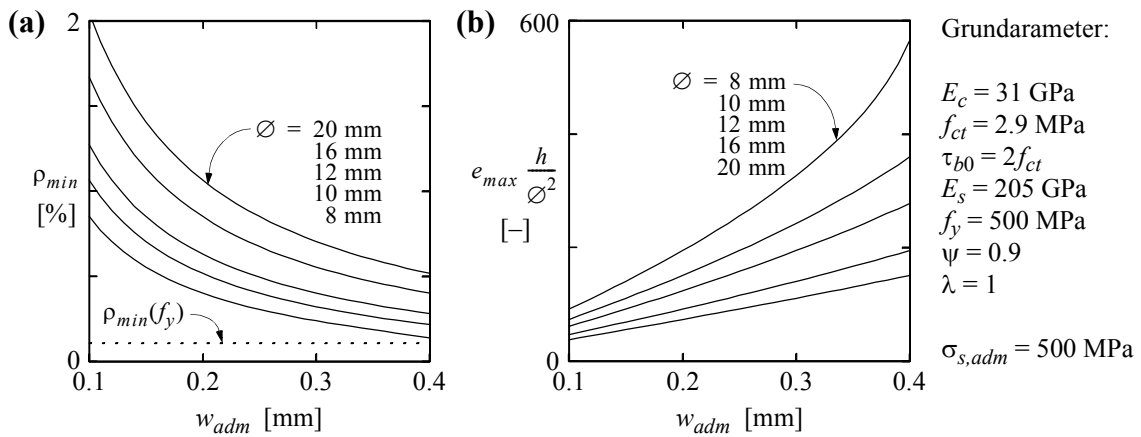
$$w_{adm} \approx 2\Delta_s = \frac{2l_0}{E_s} \left( \sigma_{s,adm} - 2\tau_{b0} \frac{l_0}{\emptyset} \right) \quad (4.81)$$

abgeleitet werden zu

$$\rho_{min} = \frac{\sigma_{s,adm} + \frac{nf_{ct}}{5.5} + \sqrt{\sigma_{s,adm}^2 - 4E_s\tau_{b0} \frac{w_{adm}}{\emptyset}}}{22\psi E_s \frac{\tau_{b0}}{f_{ct}} \frac{w_{adm}}{\emptyset} + 2n\psi \sigma_{s,adm} + \psi \frac{n^2 f_{ct}}{5.5}} \quad (4.82)$$

wobei  $\sigma_{s,adm}$  dem gewählten Beanspruchungsniveau entspricht. Resultate von Berechnungen der Mindestbewehrung  $\rho_{min}$  nach (4.82) sowie unter Verwendung von (2.56) berechnete Stababstände  $e$  sind in Bild 4.18 dargestellt. Der erforderliche Bewehrungsgehalt nimmt mit zunehmendem Stabdurchmesser  $\emptyset$  und abnehmender zulässiger Rissbreite  $w_{adm}$  zu. Dementsprechend nimmt der maximale Stababstand  $e_{max}$  mit zunehmendem Stabdurchmesser  $\emptyset$  zu.

Der Rissnachweis bei Lastbeanspruchung infolge Eigenlasten und ständigen Einwirkungen (Zwängungen sind nur in speziellen Fällen einzubeziehen) gemäss der Norm SIA

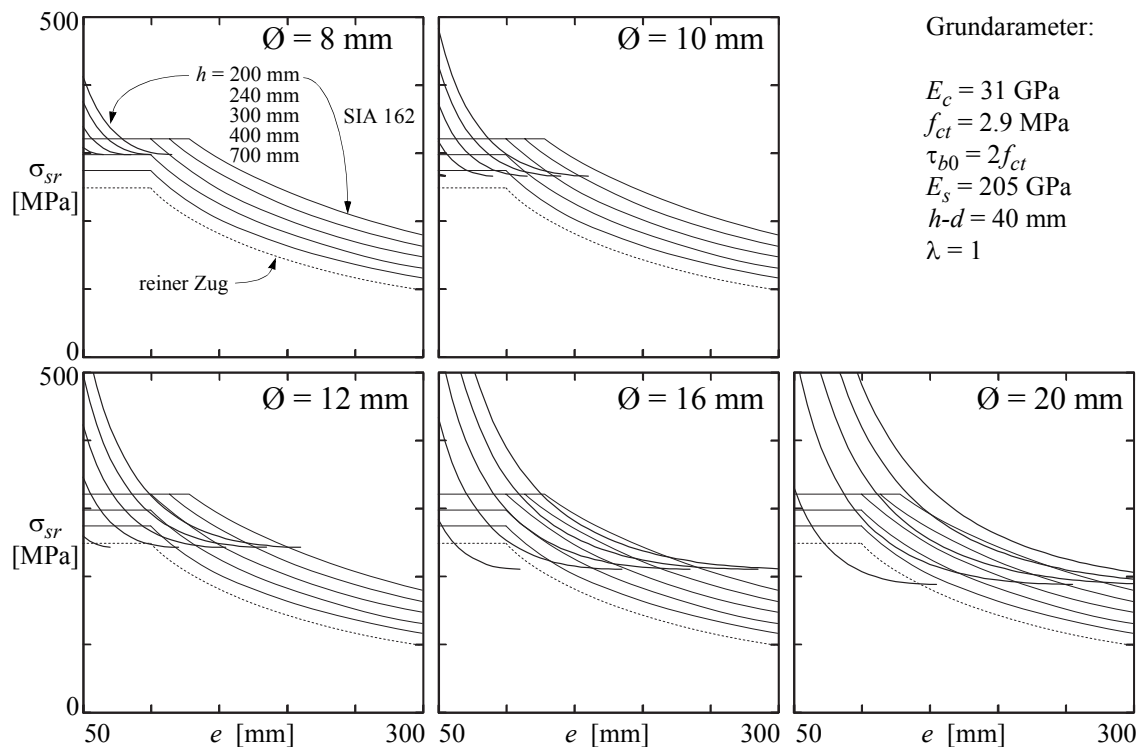


**Bild 4.18** – Mindestbewehrung in Rechteckquerschnitten: (a) Mindestbewehrung; (b) maximale Stababstände  $e_{max}$  der Bewehrung.

162 [135] stützt sich auf die Begrenzung der Stahlspannung im Rissquerschnitt. Die zulässigen Spannungen ergeben sich gemäss [104] zu

$$\sigma_{s,adm} = \frac{E_s w_{adm}}{0.8 s_{rm}} \quad (4.83)$$

Der Faktor 0.8 [104] entspricht einem Zugversteifungsfaktor  $\beta = 1.25$  und trägt dem Beanspruchungsniveau ( $M \geq 1.5 M_r$ ) Rechnung. Unter Annahme eines mittleren Rissabstandes



**Bild 4.19** – Rissnachweis bei Lastbeanspruchung gemäss (4.81) und SIA 162 [135] (zulässige Rissbreite  $w_{adm} = 0.15$  mm).

$$s_{rm} = 1.3e \left( 1 - \frac{h_{eff}}{h} \right) + 60 \text{ mm} \quad \text{mit } h_{eff} = 100 \text{ mm} \quad (4.84)$$

sowie  $w_{adm} = 0.15 \text{ mm}$  (entspricht einer charakteristischen Rissbreite von 0.25 mm) wurden die Kurven zulässiger Spannungen  $\sigma_{s,adm}$  in der Figur 20 der Norm SIA 162 [135] in Abhängigkeit der Querschnittshöhe  $h$  und des Stababstandes  $e$  bestimmt. Bei Biegung mit Druckkraft darf die Querschnittshöhe  $h$  reduziert werden, und bei der Festlegung des Stababstandes  $e$  dürfen Spannglieder im Verbund berücksichtigt werden.

Setzt man den Ausdruck linkerhand in (4.81) gleich einer bestimmten, maximal zulässigen Rissbreite  $w_{adm}$ , so erhält man mit gegebenen Querschnittswerten einen nur vom Stabdurchmesser  $\varnothing$  und dem Stababstand  $e$  abhängigen Ausdruck für  $\sigma_{sr}$  und damit eine vergleichbare Darstellung mit der in der Norm SIA 162 [135] enthaltenen Figur 20 zum Rissnachweis. Der Vergleich der Figuren zeigt, dass ein Rissnachweis gemäss (4.81) je nach Stabdurchmesser und Querschnittshöhe höhere oder tiefere Stahlspannungen zulassen würde als nach SIA 162.

Allerdings ist zu bemerken, dass im Rahmen der Festlegung eines Mindestbewehrungsgehaltes einer angemessenen Abschätzung der während des Rissbildungsprozesses vorliegenden Betonzugfestigkeit sehr grosse Bedeutung zukommt. Die Grösse der Betonzugfestigkeit beeinflusst den erforderlichen Bewehrungsgehalt sehr stark. Die Abschätzung des Zeitpunktes der Rissbildung und der zu diesem Zeitpunkt erreichten Betonzugfestigkeit ist in der Regel mit beträchtlichen Unsicherheiten verbunden.

# 5 Verformungsvermögen von Biegeträgern

## 5.1 Allgemeines

Parallel zur Entwicklung plastischer Berechnungsmethoden anfangs der sechziger Jahre setzte eine rege Forschungstätigkeit zur Klärung der Fragen bezüglich des Verformungsvermögens plastischer Gelenkbereiche von Stahlbetonträgern ein. In den theoretischen Arbeiten orientierte man sich mehrheitlich an der klassischen Biegelehre und erarbeitete Methoden zur Berechnung der Momenten-Krümmungs-Beziehung sowie der fiktiven Länge der plastischen Gelenke [9, 28, 89]. Macchi [83] schlug unter Verwendung experimenteller Untersuchungen [84] ein vereinfachtes Rechenverfahren für den Verformungsnachweis bei Durchlaufträgern vor. Für einen vorgängig gewählten Grad der Schnittkraftumlagerung ermittelte er den Verformungsbedarf des Systems und verglich diesen mit zulässigen Werten für den plastischen Gelenkwinkel gemäss [138].

Die bisher durchgeführten experimentellen und theoretischen Untersuchungen zeigen, dass bei Biegeversagen die Verformungsfähigkeit des Zuggurts von ausschlaggebender Bedeutung für das Verformungsvermögen eines Stahlbetonbauteils ist [137]. Der Zugbewehrungsgehalt bestimmt, ob der Querschnitt durch Reissen der Bewehrung oder durch Bruch der Betondruckzone versagt. Der Grenzbewehrungsgehalt, bei dem der Wechsel der Versagensart auftritt, wird von der Form der Stahlkennlinie und von der Betonbruchstauchung bestimmt. Die Verformungsfähigkeit des Zuggurtes hängt hauptsächlich von der Form der Stahlkennlinie ab [32, 36, 125]. So ergibt ein grösseres Verfestigungsverhältnis ( $f_u/f_y$ ) des Bewehrungsstahles einen Anstieg des Verformungsvermögens. Ein wichtiger Einflussfaktor ist auch die zugversteifende Wirkung des Betons zwischen den Rissen, die sich vor allem bei kleineren Bewehrungsgehalten auswirkt [112, 58].

Mit steigendem Bewehrungsgehalt nehmen die auftretenden Stahldehnungen und damit die maximalen Querschnittskrümmungen ab. Höhere Betonfestigkeiten und ein duktileres Verhalten der Betondruckzone [8] führen bei höheren Bewehrungsgehalten zu einem Anstieg der Verformungsfähigkeit. Der Einfluss der Querkraftbeanspruchung auf das Verformungsvermögen hängt bei Biegeversagen von dem sich einstellenden Schubrissbild [4] ab, das den Zugkraftverlauf im Zuggurt und damit dessen Verformungsfähigkeit beeinflusst [32, 73]. Tritt Schubversagen auf, so kann dies mit einer erheblichen Reduktion der Verformungsfähigkeit verbunden sein, da die Biegetrag- und Verformungsfähigkeit nicht voll genutzt wird.

Das Verformungsvermögen wird auch von der Trägerschlankheit, der Belastungsgeometrie und dem statischen System beeinflusst [12, 58, 75, 137]. In neueren Arbeiten versuchte man, insbesondere durch die Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Stoffgesetze,

die komplexen Verformungsvorgänge rechnerisch nachzuvollziehen [20, 21, 35, 81] und Massstabeffekte einzubeziehen [18, 31, 94].

Die für den Gebrauchszustand abgeleiteten linearen Beziehungen zwischen Moment und Krümmung gelten nach dem Überschreiten der Stahlflussspannung nicht mehr. Die rechnerische Erfassung der Biegesteifigkeit im plastischen Bereich ist mit einem erheblichen Aufwand verbunden. Im folgenden wird für die Verformungsberechnungen im plastischen Bereich ein einfaches Modell vorgestellt, bei dem das Verbundverhalten der Bewehrung gemäss Kapitel 2.5 berücksichtigt wird. Das nichtlineare Verhalten von Stahl und Beton wird in Anlehnung an [1] und [32] in Rechnung gestellt.

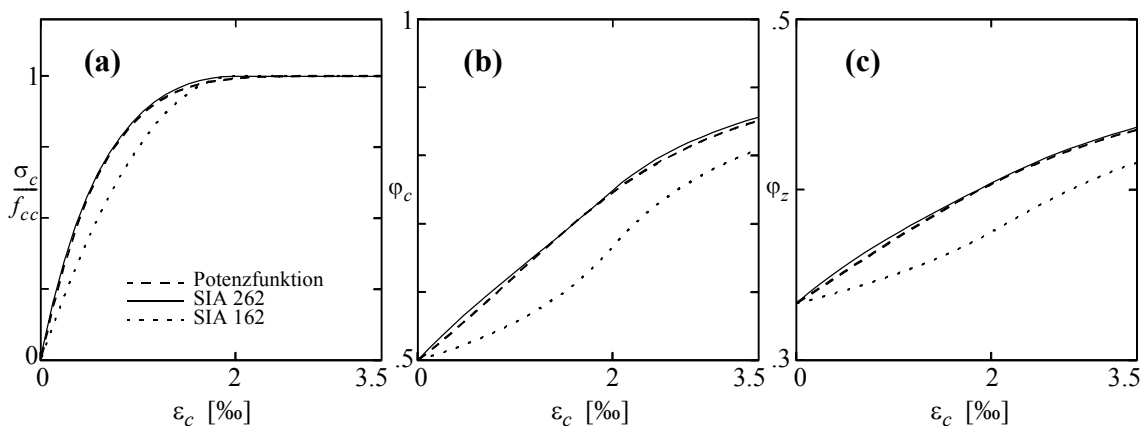
## 5.2 Nichtlineares Werkstoffverhalten von Stahl und Beton

Um im plastischen Bereich den Zusammenhang zwischen Moment und Krümmung erfassen zu können, müssen die nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Funktionen von Beton und Stahl herangezogen werden.

Viele experimentelle und theoretische Untersuchungen wurden zur Völligkeit [122, 132] und Festigkeit [63, 145] der Biegedruckzone und zur zulässigen Betonrandstauchung angestellt [5, 123, 124]. Zur analytischen Vereinfachung der Berechnungen wird eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung bevorzugt, die mit einer kontinuierlichen Beschreibung ohne Fallunterscheidungen auskommt. Dabei wird die Spannungsverteilung in der Betondruckzone in Anlehnung an [32] durch die Potenzfunktion

$$\sigma_c = f_{cc} \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c}{\varepsilon_{cu}} \right)^{\lambda_c} \right] \quad (5.1)$$

ausgedrückt. Durch die Wahl des Exponenten  $\lambda_c$  kann der Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kurve so gewählt werden, dass neben den experimentell ermittelten Spannungs-Dehnungs-Linien auch die Völligkeitswerte und die Schwerpunktswerte nach [135, 136]



**Bild 5.1** – Vergleich verschiedener Spannungs-Dehnungs-Funktionen ( $f_{cc} = 30$  MPa): (a) Spannungs-Dehnungs-Kurven; (b) Völligkeitsbeiwert  $\varphi_c$ ; (c) Schwerpunktsbeiwert  $\varphi_z$ .

zutreffend erfasst werden, siehe Bild 5.1. Eine gute Übereinstimmung ergibt sich, wie in Bild 5.2 (b) und (c) ersichtlich, mit der in Bild 5.2 (a) dargestellten Beziehung

$$\lambda_c = \frac{1}{0.1 + f_{cc}/400} \quad (f_{cc} \text{ in MPa}) \quad (5.2)$$

Die Völligkeit der Druckzone ergibt sich durch Integration der Spannung über die Druckzonenhöhe bzw. Dehnung zu

$$\varphi_c = \frac{1}{\sigma_c \varepsilon_c} \int_0^{\varepsilon_c} \sigma_c d\varepsilon_c = \frac{1 - \frac{\varepsilon_{cu}}{(\lambda_c + 1)\varepsilon_c} \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c}{\varepsilon_{cu}} \right)^{\lambda_c + 1} \right]}{1 - \left( \frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c}{\varepsilon_{cu}} \right)^{\lambda_c}} \quad (5.3)$$

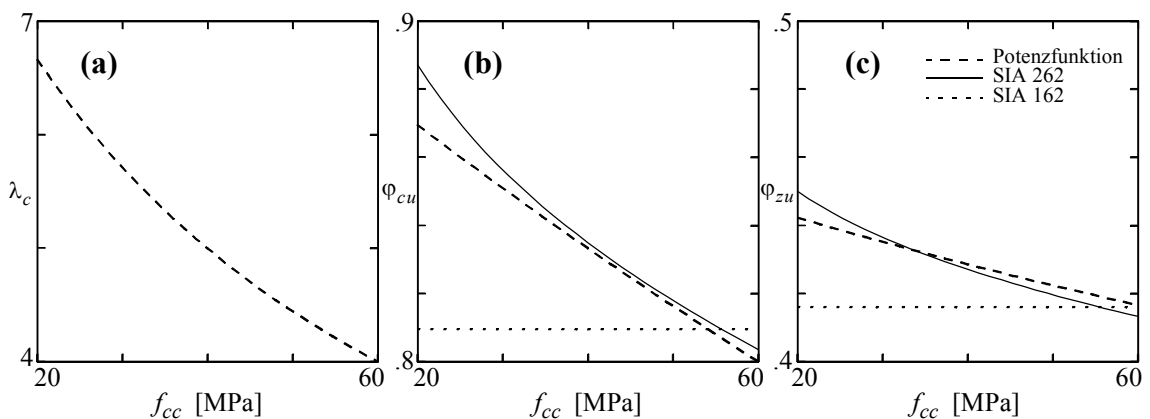
und für den Schwerpunktsbeiwert  $\varphi_z$  gilt

$$\varphi_z = \frac{\int_0^{\varepsilon_c} \sigma_c \varepsilon_c d\varepsilon_c}{\varepsilon_c \int_0^{\varepsilon_c} \sigma_c d\varepsilon_c} = 1 - \frac{\frac{1}{2} + \left( \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_c} \right)^2 \left[ \frac{1 - \left( \frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c}{\varepsilon_{cu}} \right)^{\lambda_c + 2}}{\lambda_c + 2} - \frac{1 - \left( \frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c}{\varepsilon_{cu}} \right)^{\lambda_c + 1}}{\lambda_c + 1} \right]}{1 - \frac{\varepsilon_{cu}}{(\lambda_c + 1)\varepsilon_c} \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_c}{\varepsilon_{cu}} \right)^{\lambda_c + 1} \right]} \quad (5.4)$$

Beim Erreichen der Betonbruchdehnung  $\varepsilon_{cu}$  vereinfachen sich (5.3) und (5.4) zu

$$\varphi_{cu} = \frac{\lambda_c}{\lambda_c + 1} \quad (5.5)$$

$$\varphi_{zu} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_c + 1}{\lambda_c + 2} \quad (5.6)$$



**Bild 5.2** – Vergleich verschiedener Spannungs-Dehnungs-Funktionen beim Erreichen der Betonbruchdehnung ( $\varepsilon_{cu} = 3.5 \text{ ‰}$ ): (a) Exponent  $\lambda_c$ ; (b) Völligkeitsbeiwert  $\varphi_{cu}$ ; (c) Schwerpunktsbeiwert  $\varphi_{zu}$ .



In [1] sind für verschiedene Verfestigungscharakteristiken des Bewehrungsstahls (bilinear, trilinear, kaltverformt und naturhart) die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen gemäss dem Zuggurtmodell formuliert. Für einen kaltverformten Bewehrungsstahl mit einem Spannungs-Dehnungs-Diagramm gemäss (2.63) gilt gemäss [1] beispielsweise

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\tau_{b0}s_r}{E_s\varnothing} + \frac{\varnothing}{2\tau_{b0}s_r} \frac{1}{(\lambda_s + 1)k_s^{\lambda_s}} \left[ \sigma_{sr}^{\lambda_s + 1} - \left( \sigma_{sr} - \frac{2\tau_{b0}s_r}{\varnothing} \right)^{\lambda_s + 1} \right] \quad \dots \quad \sigma_{sr} \leq f_y \quad (5.7)$$

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\varnothing}{4E_s\tau_{b1}s_r} \left\{ (\sigma_{sr} - f_y)^2 \left( 1 - \frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} \right) + \frac{2E_s}{(\lambda_s + 1)k_s^{\lambda_s}} \left[ \sigma_{sr}^{\lambda_s + 1} - f_y^{\lambda_s + 1} \left( 1 - \frac{\tau_{b1}}{\tau_{b0}} \right) - \frac{\tau_{b1}}{\tau_{b0}} \left( f_y + \frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} (\sigma_{sr} - f_y) - \frac{2\tau_{b0}s_r}{\varnothing} \right)^{\lambda_s + 1} \right] \right\} + \frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} \left[ \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{f_y}{E_s} \left( 1 - \frac{\tau_{b1}}{\tau_{b0}} \right) \right] - \frac{\tau_{b0}s_r}{E_s\varnothing} \quad \dots \quad f_y \leq \sigma_{sr} \leq f_y + \frac{2\tau_{b1}s_r}{\varnothing} \quad (5.8)$$

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\tau_{b1}s_r}{E_s\varnothing} + \frac{\varnothing}{2\tau_{b1}s_r} \frac{1}{(\lambda_s + 1)k_s^{\lambda_s}} \left[ \sigma_{sr}^{\lambda_s + 1} - \left( \sigma_{sr} - \frac{2\tau_{b1}s_r}{\varnothing} \right)^{\lambda_s + 1} \right] \quad \dots \quad f_y + \frac{2\tau_{b1}s_r}{\varnothing} \leq \sigma_{sr} \leq f_u \quad (5.9)$$

Die Beziehungen für bilineare und kaltverformte Verfestigungscharakteristiken des Bewehrungsstahls werden hier nicht wiedergegeben (siehe [1]).

### 5.3 Vereinfachte Momenten-Krümmungs-Beziehung

Zur Diskussion der Auswirkungen der Verfestigungseigenschaften der Bewehrung und des Bruchverhaltens des Betons auf das Last-Verformungsverhalten wird im folgenden eine analytische Näherungslösung erarbeitet. Für schwach bewehrte Biegeträger wird, aufbauend auf einem Potenzgesetz nach [3], eine solche Lösung entwickelt.

Normalkraft-Gleichgewicht im Rissquerschnitt ergibt

$$N = \sigma_{sr}A_s - bz_c\varphi_c\sigma_c = v f_{ct}A_c \quad (5.10)$$

und Momenten-Gleichgewicht, bezogen auf die Resultierende der Druckspannungen, verlangt

$$M + N(h_{sup} - z_c\varphi_z) = \sigma_{sr}A_s(d - z_c\varphi_z) \quad (5.11)$$

Die Druckzonenhöhe  $z_c$  muss aus einer Verformungsbedingung abgeleitet werden, welche für den Balkenabschnitt *I - II* zu formulieren ist. Vereinfachend wird die Betonrandstauchung am oberen Rand zwischen den Rissen konstant angenommen. Aus Bild 5.3 (a) folgt

$$\frac{\varepsilon_{c,sup}}{z_c} = \frac{\varepsilon_{sm}}{d-z_c} = \chi \quad (5.12)$$

Die Gleichungen (5.10) und (5.12) für die Unbekannten  $z_c$  und  $\varepsilon_{c,sup}$  können numerisch gelöst werden. Damit können das Moment  $M$  aus (5.11) und die zugehörige Krümmung  $\chi$  aus (5.12) ermittelt werden. Die Resultate solcher Berechnungen sind in Bild 5.3 (b) und Bild 5.4 dargestellt.

In guter Näherung kann die Momenten-Krümmungs-Beziehung  $M(\chi)$  angegeben werden durch

$$M = M_u \left( \frac{\chi}{\chi_u} \right)^K \quad (5.13)$$

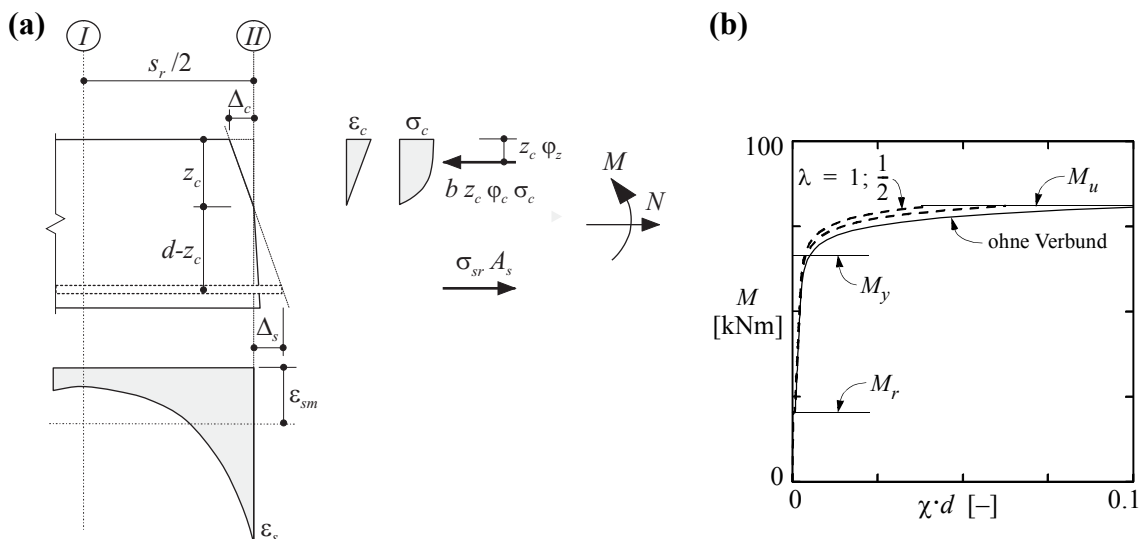
wobei  $M_u$  und  $\chi_u$  durch Erreichen der Zugfestigkeit der Bewehrung  $f_u$  oder der Betonbruchstauchung  $\varepsilon_{cu}$  begrenzt werden. Falls die nominelle Randstauchung des Betons den Maximalwert erreicht, lautet das Bruchkriterium

$$\varepsilon_{sm,max} = \varepsilon_{cu} \frac{d-z_c}{z_c} \quad (5.14)$$

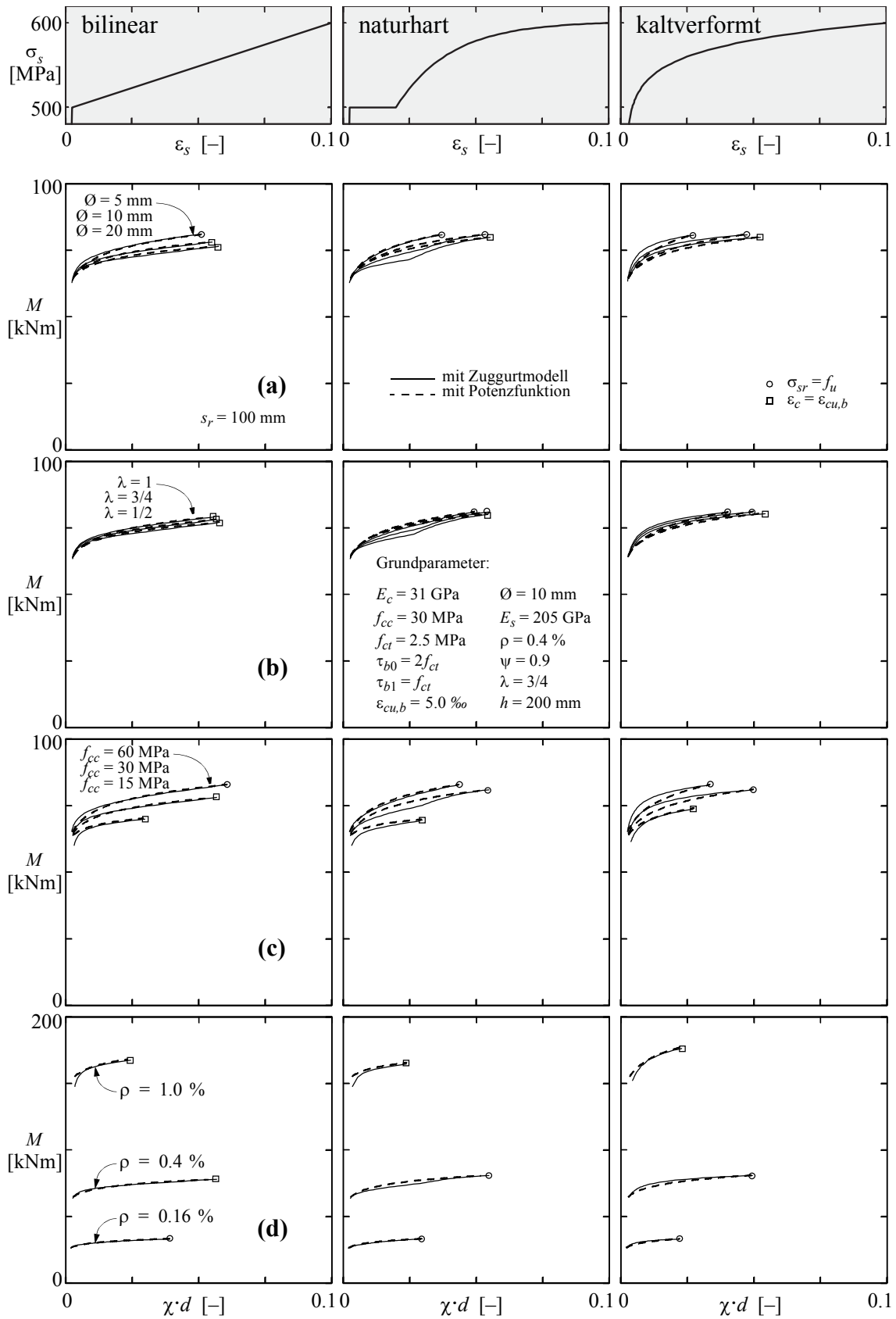
Der Exponent  $K$  ergibt sich zu

$$K = \frac{\ln(M_y/M_u)}{\ln(\chi_y/\chi_u)} \quad (5.15)$$

wobei  $M_y$  bzw.  $\chi_y$  mit (4.12) bzw. (4.67) ermittelt werden.



**Bild 5.3** – Plastische Dehnungen und Verformungen für einen Balkenabschnitt: (a) Spannungen, Dehnungen und Verformungen; (b) Momenten-Krümmungs-Diagramm für kaltverformte Bewehrung (Grundparameter gemäss Bild 5.4).



**Bild 5.4** – Vergleich der Momenten-Krümmungs-Diagramme im Verfestigungsbereich: (a) bis (d) Einfluss des Stabdurchmessers, des Rissabstands, der Betonfestigkeit und des Bewehrungsgehalts.

Bild 5.4 zeigt einen Vergleich der gemäss (5.11) und (5.12) numerisch ermittelten Krümmungen und der mit der Potenzfunktion gemäss (5.13) berechneten Krümmungen für unterschiedliche Verfestigungscharakteristiken (bilinear, naturhart und kaltverformt) aber gleiche Duktilitätskennwerte  $\varepsilon_{su}$  und  $f_u/f_y$ . Die numerisch ermittelten Krümmungen wurden unter Berücksichtigung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens berechnet. Die Diagramme zeigen den Einfluss des Bewehrungsdurchmessers  $\varnothing$ , des Rissabstandes  $\lambda$ , der Betonfestigkeit  $f_{cc}$ , des Bewehrungsgehalts  $\rho$  und der Verfestigungscharakteristik der Bewehrung auf die Momenten-Krümmungs-Beziehung  $M(\chi)$ . Es zeigt sich, dass die numerisch ermittelten Krümmungen bei naturharter bzw. kaltverformter Bewehrung mit der Potenzfunktion gemäss (5.13) leicht unter- bzw. überschätzt werden. Die beste Übereinstimmung ergibt sich bei einer bilinearen Verfestigungscharakteristik der Bewehrung.

## 5.4 Verformungsberechnung

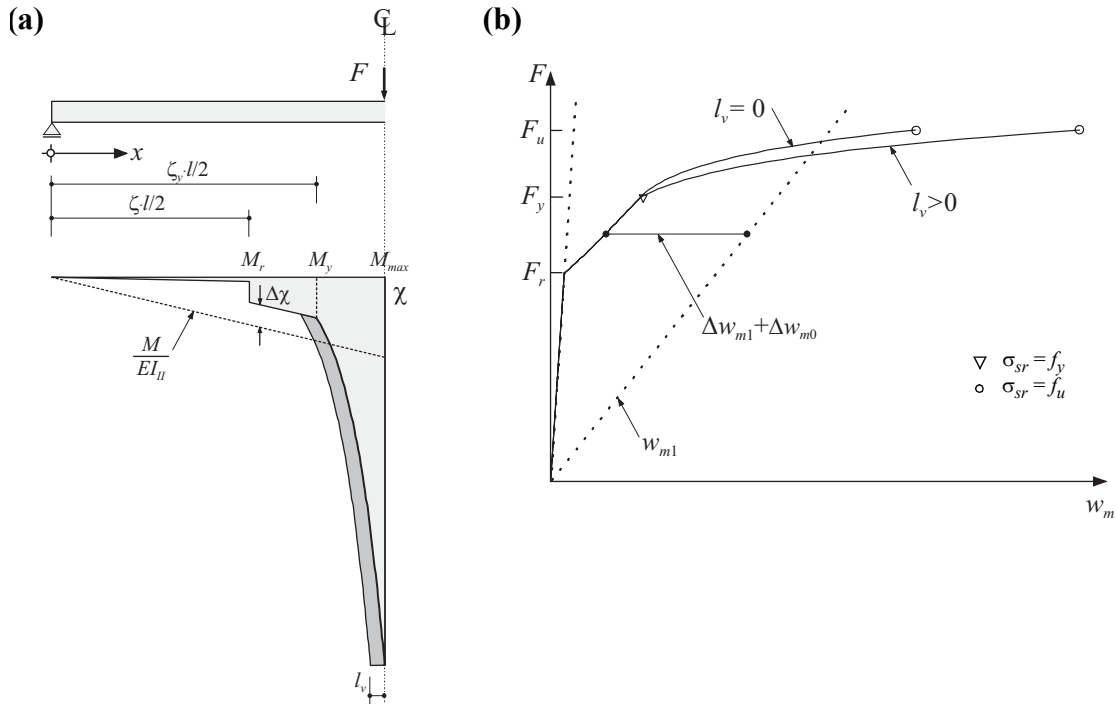
Entsprechend den Diagrammen in Bild 5.4 wird davon ausgegangen, dass die Krümmung in den plastifizierten Teillängen aus (5.13) berechnet werden kann. Weiter wird vorausgesetzt, dass die Belastung monoton gesteigert wird und keine gerissenen oder plastifizierten Teillängen entlastet werden. Langzeiteinflüsse wie Kriechen und Relaxation werden nicht berücksichtigt. Gemäss der Analogie von Mohr [95] kann die Mittendurchbiegung durch Multiplikation der Fläche unter der Krümmungslinie mit deren Schwerpunktsabstand zum Auflager berechnet werden. Für den in Bild 5.5 (a) dargestellten Fall beträgt der Verformungsanteil zwischen den Grenzen  $\zeta_y l/2 \leq x \leq l/2$

$$w_{pl} = \int_{\zeta_y \frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \chi x dx = \chi_u \left( \frac{M_{max}}{M_u} \right)^{\frac{1}{K}} \int_{\zeta_y \frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left( \frac{2x}{l} \right)^{\frac{1}{K}} x dx = \chi_y \left( \zeta_y \frac{l}{2} \right)^2 \frac{K}{2K+1} \left[ \left( \frac{1}{\zeta_y} \right)^{\frac{2K+1}{K}} - 1 \right] \quad (5.16)$$

Werden die Betonzugspannungen infolge Querkraft ausreichend hoch, bilden sich, von Biegeanrissen ausgehend, Risse aus, die schräg zur Lasteinleitungsstelle hin verlaufen. Durch diese Schubrisse ändert sich das innere Tragverhalten des Trägers, das mit einem Fachwerkmodell oder Spannungsfeldern beschrieben werden kann. Den schräg laufenden Druckstreben entspricht ein Kraftverlauf im Zuggurt, der gegenüber der  $M/z$ -Linie um das Versatzmass  $l_v$  verschoben ist. Durch die Verschiebung der Zugkraftlinie in Richtung des Momenten-Nullpunktes ergibt sich eine erhebliche Vergrösserung der plastischen Zone des Zuggurtes. Im Falle von Dreipunktbiegung erhält man für die Krümmungsdifferenz infolge Versatzmass  $l_v$

$$\Delta\chi_v = \chi(M + \Delta M) - \chi(M) \quad (5.17)$$

Die "verschobene" Krümmung kann durch Potenzreihenentwicklung angenähert werden:



**Bild 5.5** – Verformungsberechnung von Stahlbetonbalken: (a) Belastung und Krümmung; (b) Last-Durchbiegungskurve.

$$\chi(M + \Delta M) = \chi\left(M\left(1 + \frac{\Delta M}{M}\right)\right) = \chi_u \left[ \frac{M\left(1 + \frac{\Delta M}{M}\right)}{M_u} \right]^{\frac{1}{K}} \approx \chi(M) \left(1 + \frac{1}{K} \frac{\Delta M}{M}\right) \quad (5.18)$$

Mit der Momentendifferenz

$$\Delta M = \frac{2l_v}{l} M_{max} \quad (5.19)$$

ergibt sich somit die Krümmungsdifferenz

$$\Delta \chi_v = \frac{l_v}{xK} \chi(M) \quad (5.20)$$

und daraus der Verformungsanteil infolge Versatzmass  $l_v$ ,

$$w_v = \int_{\zeta_y \frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \Delta \chi_v x dx = \chi_y \zeta_y \frac{l}{2} \frac{l_v}{K+1} \left[ \left(\frac{1}{\zeta_y}\right)^{\frac{K+1}{K}} - 1 \right] \quad (5.21)$$

Die Mittendurchbiegung für die Systeme gemäss Bild 4.13 (a) wird wie folgt berechnet:

$$w_m = w_{m1} - \Delta w_{m0} - \Delta w_{m1} + w_{pl} + w_v \quad (5.22)$$

wobei  $w_{m1}$  unter Annahme eines vollständig gerissenen Trägers mit der Biegesteifigkeit nach der klassischen Stahlbetontheorie (Zusammenstellung in Tabelle 4.1) berechnet wird. Die aus (5.16) berechneten Verformungsanteile, welche bereits in  $w_{m1}$  enthalten sind, werden in den Verformungsdifferenzen  $\Delta w_{m0}$  und  $\Delta w_{m1}$  gemäss Tabelle 5.1 berücksichtigt.

Belastung und System	$\zeta_y =$	$\Delta w_{m0} =$	$\Delta w_{m1} =$
Vierpunkt	$\frac{4M_y}{Fl}$	$w_{m1} \left[ \frac{l/a}{3-4(a/l)^2} \left( \zeta^3 \left( 1 - \frac{EI_{II}}{EI_I} \right) - \zeta_y^3 \right) + 1 \right]$	$\Delta \chi (\zeta_y^2 - \zeta^2) \frac{l^2}{8}$
Dreipunkt	$\frac{4M_y}{Fl}$	$w_{m1} \left[ \zeta^3 \left( 1 - \frac{EI_{II}}{EI_I} \right) - \zeta_y^3 + 1 \right]$	$\Delta \chi (\zeta_y^2 - \zeta^2) \frac{l^2}{8}$
Eingespannt	$\frac{8M_y}{Fl}$	$w_{m1} \left[ \zeta^3 \left( 1 - \frac{EI_{II}}{EI_I} \right) - \zeta_y^3 + 1 \right]$	$\Delta \chi (\zeta_y^2 - \zeta^2) \frac{l^2}{16}$

**Tabelle 5.1** – Zusammenstellung der Gleichungen zur Berechnung der Mittendurchbiegung von Stahlbetonträgern im plastischen Bereich.

Qualitative Überlegungen [137] zeigen, dass Schiebungen erst dann substantiell zu den Tragwerksverformungen beitragen, wenn sich grosse vertikale Dehnungen der Bügel einstellen, d.h. wenn die Bügel plastifiziert werden. Dies ist insbesondere in Situationen, in denen sich schliesslich Schubbrüche ergeben, der Fall; die Durchbiegungen bleiben dann in der Regel relativ klein, und ein wesentlicher Teil der Durchbiegungen ist auf die Verformungen der Bügel zurückzuführen. Falls hingegen in den Stegen keine Plastifizierungen auftreten, bleibt der Einfluss der Schiebungen im Vergleich zu den Biegeverformungen verhältnismässig klein; der Anteil aus den Schiebungen beträgt dann kaum mehr als 5 %. Dies liegt innerhalb der Genauigkeit, mit der Verformungen vorhergesagt werden können. In der Folge wird deshalb darauf verzichtet, diesen Anteil zu berücksichtigen.

Im Falle einer Gleichlast lassen sich die Integrale in (5.16) und (5.21) nicht elementar lösen; sie können aber durch Reihenentwicklung oder numerisch gelöst werden. Bei Vierpunktbiegung berechnen sich die plastischen Verformungsanteile nach analogem Vorgehen wie folgt:

$$w_{pl} = \chi_y \left( \zeta_y \frac{l}{2} \right)^2 \frac{K}{2K+1} \left[ \left( \frac{2a}{\zeta_y l} \right)^{\frac{2K+1}{K}} - 1 \right] + \chi_y \left( \frac{2a}{\zeta_y l} \right)^{\frac{1}{K}} \frac{a^2}{2} \left[ \left( \frac{l}{2a} \right)^2 - 1 \right] \quad (5.23)$$

und

$$w_v = \chi_y \zeta_y \frac{l}{2} \frac{l_v}{K+1} \left[ \left( \frac{2a}{\zeta_y l} \right)^{\frac{K+1}{K}} - 1 \right] \quad (5.24)$$

Falls eine symmetrische Bewehrungsführung gemäss Bild 4.13 vorliegt, gilt bei beidseitiger Einspannung

$$w_{pl} = \chi_y \left( \zeta_y \frac{l}{4} \right)^2 \frac{2K}{2K+1} \left[ \left( \frac{1}{\zeta_y} \right)^{\frac{2K+1}{K}} - 1 \right] \quad (5.25)$$

und

$$w_v = \chi_y \zeta_y \frac{l}{2} \frac{l_v}{K+1} \left[ \left( \frac{1}{\zeta_y} \right)^{\frac{K+1}{K}} - 1 \right] \quad (5.26)$$

Untersuchungen an Stegscheiben von profilierten Trägern [137] zeigen, dass, falls sich im Trägersteg geneigte Risse bilden, in der Regel von Druckfeldneigungen  $\vartheta < 45^\circ$  ausgegangen werden kann. Bei Fliessbeginn der Bügelbewehrung liegen entsprechende Werte etwa zwischen  $30$  und  $40^\circ$ . In der Bemessung empfiehlt es sich allerdings, für die Abschätzung des Verformungsvermögens einen eher hohen Wert für  $\vartheta$  (z.B.  $45^\circ$ ) zu wählen. Dadurch wird die plastische Verformung unterschätzt.

## 5.5 Versuchsergebnisse

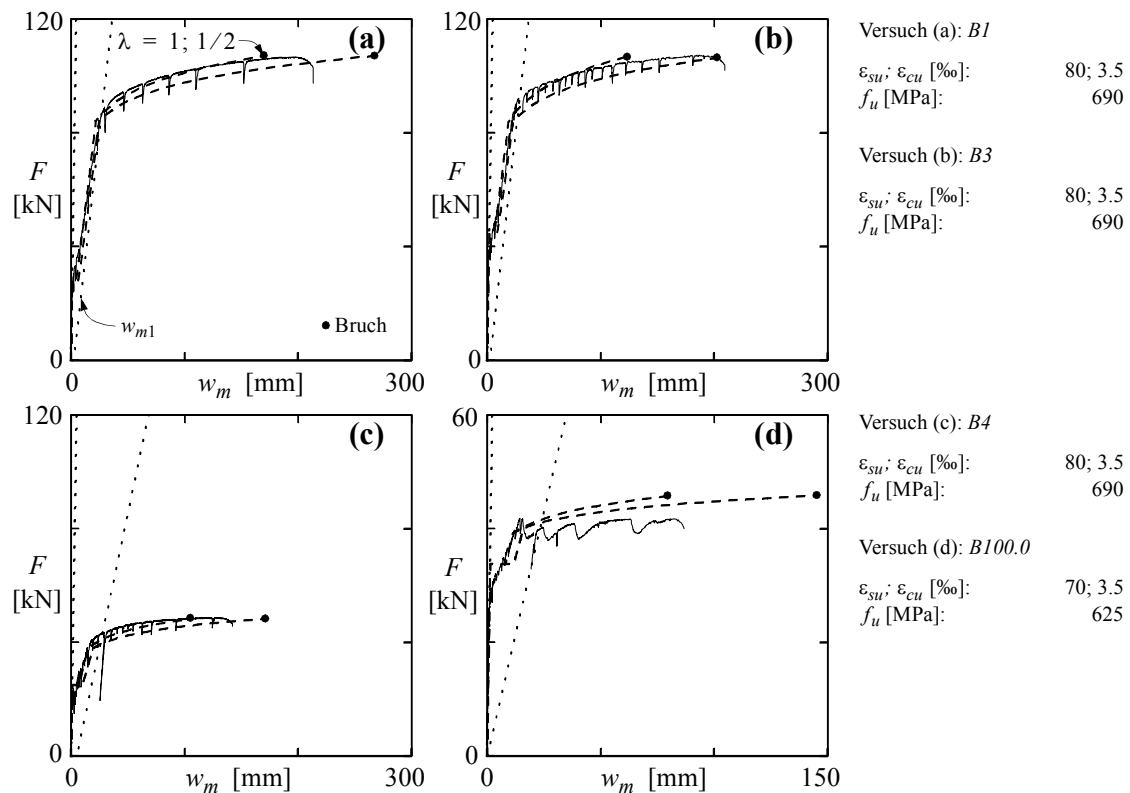
Mit der in Kapitel 5.3 beschriebenen Näherung (5.13) zur Krümmungsberechnung und den in Kapitel 5.4 angegebenen Beziehungen zur Berechnung der Mittendurchbiegung steht ein Verfahren zur Verfügung, mit dem die Verformungen von Biegeträgern im plastischen Bereich untersucht werden können. Die Resultate entsprechender Nachrechnungen verschiedener, schwach bewehrter Biegeträger sind in Bild 5.6 gemessenen Last-Durchbiegungs-Kurven gegenübergestellt. In den Berechnungen wurden die in entsprechenden Materialversuchen festgestellten Festigkeitswerte verwendet. Für die Untersuchungen an den Versuchskörpern *B1*, *B3* und *B4* wurden die Koeffizienten der idealisierten Spannungs-Dehnungs-Beziehung (2.63) im Bereich  $0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su} = 80 \text{ ‰}$  gemäss [1] gewählt:  $k_s = 784.54$  und  $\lambda_s = 20.0$ . Die Stahlkennlinie des Versuches *B100.0* wurde bilinear approximiert.

Der Einfluss der Belastungseinrichtung und des Eigengewichts der Biegeträger wurde in den Last-Durchbiegungs-Diagrammen in Bild 5.6 durch eine Verschiebung des Ursprungs der berechneten Kurven berücksichtigt. Analog den Feststellungen beim Vergleich der Momenten-Krümmungs-Diagramme in Bild 5.4 werden die Krümmungen und damit die Verformungen nach dem Überschreiten der Fliessspannung der Bewehrung etwas überschätzt. Die gemessenen Bruchverformungen liegen allerdings zwischen den rechnerischen Werten für maximalen ( $\lambda = 1$ ) und minimalen Rissabstand ( $\lambda = 1/2$ ). Die Verformungen des Versuches *B100.0* lokalisierten sich in einem Riss [109]. Somit konnte die rechnerische Bruchverformung nicht erreicht werden. Die rechnerischen Bruchlasten stimmen erwartungsgemäss gut mit den Rechenwerten überein. Der Vergleich der expe-

rimentellen und theoretischen Kurven unter Verwendung stark vereinfachender Annahmen zeigt eine befriedigende Übereinstimmung. In Anbetracht der geringen Unterschiede lohnen sich Berechnungen mit genaueren Modellen kaum.

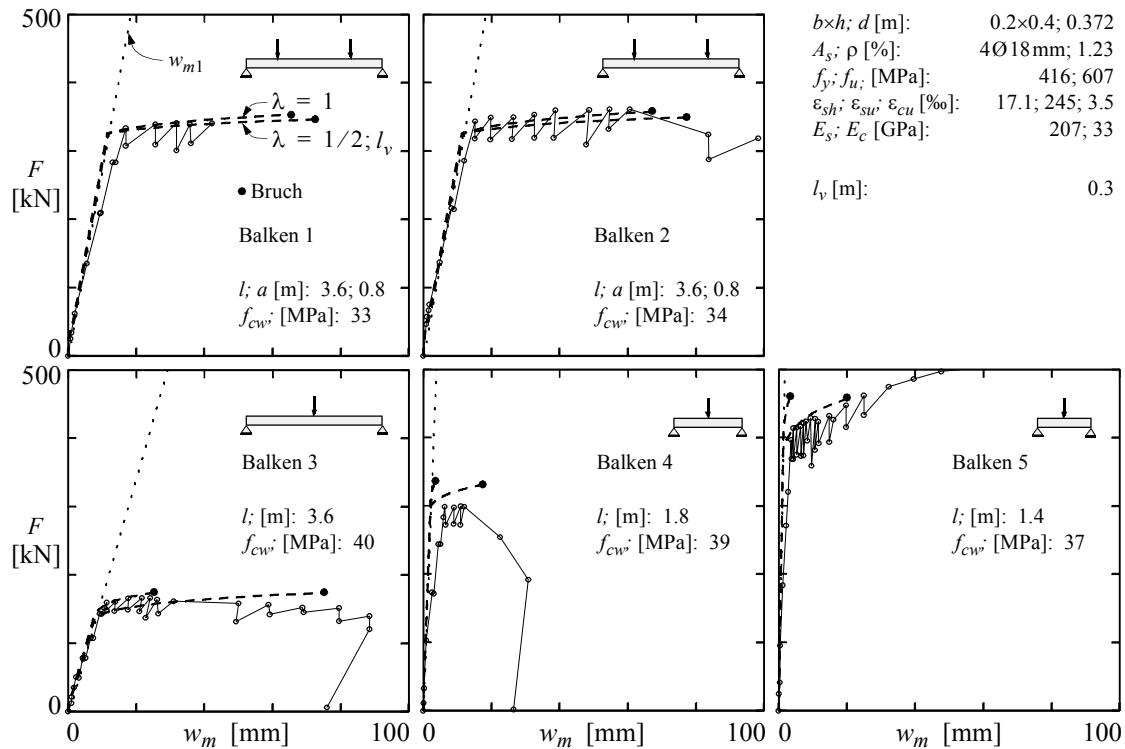
Zur Untersuchung der Verformungsfähigkeit im Bereich des plastischen Gelenkes und der Abhängigkeit von der Form der Momentenlinie führte Rao [112] fünf Biegeversuche an Stahlbetonbalken mit rechteckigem Querschnitt durch. Die Längsbewehrung mit naturhartem Stahl entspricht etwa dem zehnfachen Wert einer Mindestbewehrung. Im Querkraftbereich wurden die Balken mit Bügeln bewehrt. In den Berechnungen wurden die in entsprechenden Materialversuchen festgestellten Festigkeitswerte verwendet, siehe Bild 5.7. Der Einfluss der Belastungseinrichtung und des Eigengewichts der Biegeträger wurde in den Last-Durchbiegungs-Diagrammen durch eine Verschiebung des Ursprungs der berechneten Kurven berücksichtigt.

Infolge des hohen Bewehrungsgehaltes und der Dehnfähigkeit der naturharten Bewehrung waren die maximale Krümmung und der Biege Widerstand durch die Randstauchung der Biegedruckzone begrenzt. Die maximale Stahlspannung betrug beim Biegedruckbruch  $\sigma_{su} = 425 \dots 490$  MPa. Entsprechend dem rapportierten Schubrissbild wurde das Versatzmass zu  $l_v = 300$  mm festgelegt; dies entspricht einer Druckfeldneigung von  $45^\circ$ . Der Einfluss der Zugversteifung ist vor dem Erreichen der Fließspannung der Bewehrung vernachlässigbar klein. Bei den Balken 1 und 4 ist der Einfluss von Schiebungen



**Bild 5.6** – Last-Mittendurchbiegungs-Diagramme schwach bewehrter Biegeträger – Vergleich mit Versuchen: (a), (b) und (c) Kenel und Marti [70]; (d) Pfyl und Marti [109]; ( $\tau_{b1} = f_{ct}$ ).





**Bild 5.7** – Last-Mittendurchbiegungs-Diagramme schubbewehrter Biegeträger – Vergleich mit Versuchen von Rao [112].

oberhalb einer Last von  $F \approx 200$  kN infolge der geringen Bügelbewehrung beträchtlich. Die Berücksichtigung des Versatzmasses  $l_v$  zeigt vor allem bei Dreipunktbiegung eine grosse Zunahme der erreichbaren Mittendurchbiegung und damit die Empfindlichkeit der Annahme der Druckfeldneigung auf das Verformungsvermögen bei kurzen Spannweiten.

## 5.6 Verformungsvermögen von Biegeträgern

Die im folgenden beschriebenen Berechnungen basieren auf den in Kapitel 4.5 und Kapitel 5.4 zusammengestellten Grundlagen. Plastische Verformungen ergeben sich hauptsächlich aus der Verlängerung der Längsbewehrung, weshalb dem Verformungsverhalten des Zuggurtes besondere Beachtung geschenkt wird. Die Schubverformungen und die Verformungen des Druckgurtes haben demgegenüber eine eher untergeordnete Bedeutung. Zur Berechnung des Verformungsvermögens von Biegeträgern werden die Kenngrössen der plastischen Verformungsbereiche – Biegemomente und Krümmungen bei Fließbeginn und beim Eintreten des Versagens – auf idealisierte plastische Gelenke übertragen. Die Verformungen der plastischen Verformungsbereiche werden deshalb vereinfachend zu Gelenkwinkeln (Rotationswinkel) zusammengefasst.

Plastische Verformungen treten primär in Bereichen maximaler Momentenbeanspruchung auf, die in der Regel bei konzentrierten Krafteinleitungsstellen liegen. Bild 5.8 (a) zeigt einfache Balken unter Vier- und Dreipunktbiegung sowie einen beidseitig eingespannten Balken unter Dreipunktbiegung. Geht man vereinfachend davon aus, dass sich

die Krümmung entlang der Stabachse aus dem Biegemoment und (bei vorhandener Bügelbewehrung) dem Versatzmass bestimmen lässt, so kann die Mittendurchbiegung bei der Bruchlast sowie beim Erreichen der Fließspannung der Bewehrung mit (5.22) berechnet werden. Für den Fall eines einfachen Balkens unter Einzellast mit und ohne beidseitiger Einspannung findet man mit der Beziehung

$$\Theta_{pl} = 4 \frac{w_{m, M_u} - w_{m, M_y}}{l} \quad (5.27)$$

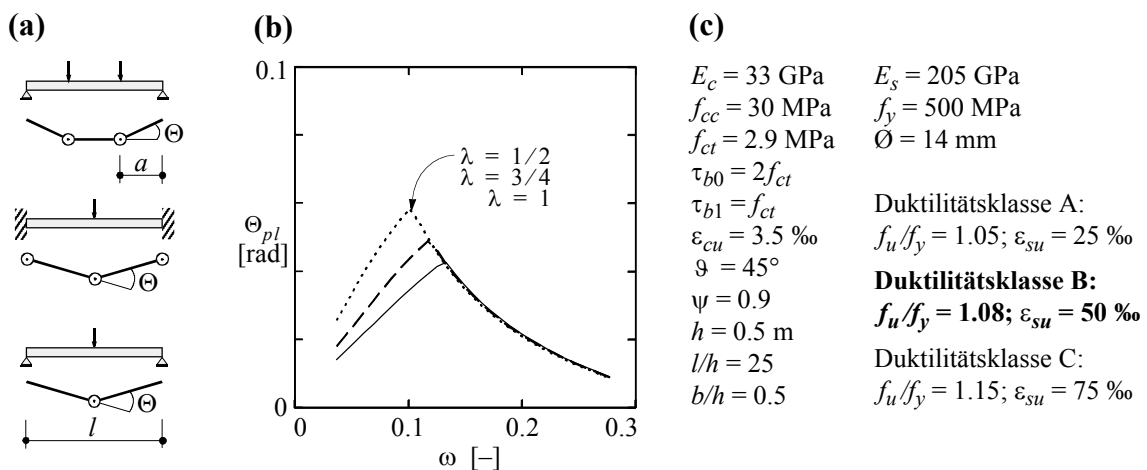
einen Näherungswert für den plastischen Gelenkwinkel. Die Näherung basiert auf der Vorstellung, dass die plastischen Verformungen des Gelenks als Starrkörperrotation der beiden Trägerhälften idealisiert werden können. Zur Vereinfachung wird auch bei Vierpunktbiegung eine Starrkörperrotation vorausgesetzt. Der plastische Gelenkwinkel ergibt sich damit zu

$$\Theta_{pl} = \frac{w_{m, M_u} - w_{m, M_y}}{a} \quad (5.28)$$

In Bild 5.8 (b) sind Berechnungen von plastischen Gelenkwinkeln mit Grundparametern gemäss Bild 5.8 (c) in Abhängigkeit des mechanischen Bewehrungsgehalts

$$\omega = \frac{A_s f_y}{b d f_{cc}} \quad (5.29)$$

für verschiedene Rissabstände aufgetragen. Man erkennt den Einfluss der Zugversteifung auf den plastischen Gelenkwinkel. Die mögliche Verdrehung nimmt mit zunehmendem Rissabstand ab. Im folgenden werden die Gelenkwinkel für maximale Rissabstände angegeben; damit wird das Rotationsvermögen unterschätzt, die Werte liegen aber auf der sicheren Seite.



**Bild 5.8** – Berechnung plastischer Gelenkwinkel: (a) Kinematische Modelle; (b) Einfluss des Rissabstandes bzw. der Zugversteifung (kaltverformter Bewehrungsstahl, Duktilitätsklasse B gemäss der Norm [136]); (c) Grundlagen für die Berechnungen.

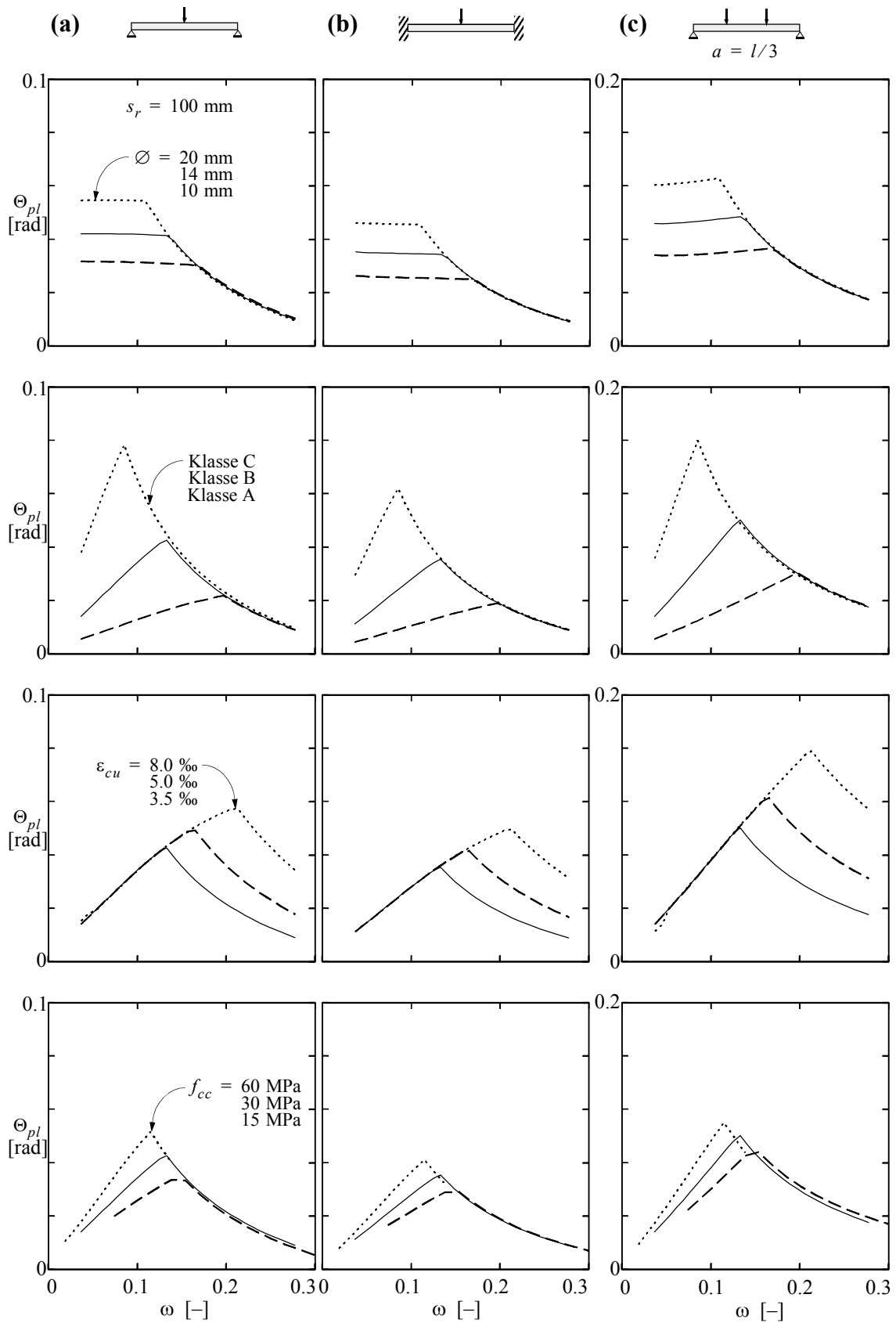
In Bild 5.9 sind zwei die Bewehrung und zwei den Beton betreffende Parameter behandelt. Die plastischen Gelenkwinkel wurden für drei Belastungsgeometrien bzw. statische Systeme berechnet. Obwohl der Stabdurchmesser der Bewehrung kein Materialkennwert ist, wird er in dieser Zusammenstellung mit einbezogen, da er das Verbundverhalten, bzw. die Verformungen im Risselement beeinflusst. Die Diagramme zeigen, dass eine Vergrößerung des Stabdurchmessers  $\varnothing$  von 10 auf 20 mm beinahe eine Verdoppelung der erreichbaren plastischen Gelenkwinkel bewirkt, falls nicht die Betonbruchstauchung das limitierende Bruchkriterium darstellt. Bei beidseitiger Einspannung sind die erreichbaren plastischen Gelenkwinkel stets etwas kleiner als bei Dreipunktbiegung. Bei Vierpunktbiegung ( $a = l/3$ ) betragen die erreichbaren Gelenkwinkel infolge des grossen plastischen Bereiches mehr als den zweifachen Wert der Gelenkwinkel bei Dreipunktbiegung.

Eine starke Beeinflussung des Verhaltens der plastischen Gelenkbereiche geht von der Verfestigung der Bewehrung aus. Eine Erhöhung der Werte  $f_u/f_y$  von 1.08 auf 1.15 sowie von  $\varepsilon_{su}$  von 50 auf 75 ‰ bewirkt (im Bereich in dem das Zerreißen der Bewehrung das Versagen bestimmt) eine Zunahme der erreichbaren plastischen Gelenkwinkel um mehr als den Faktor zwei. Die Verwendung von Stählen mit schlechteren Verfestigungseigenschaften führt hingegen zu deutlich geringeren plastischen Verformungen.

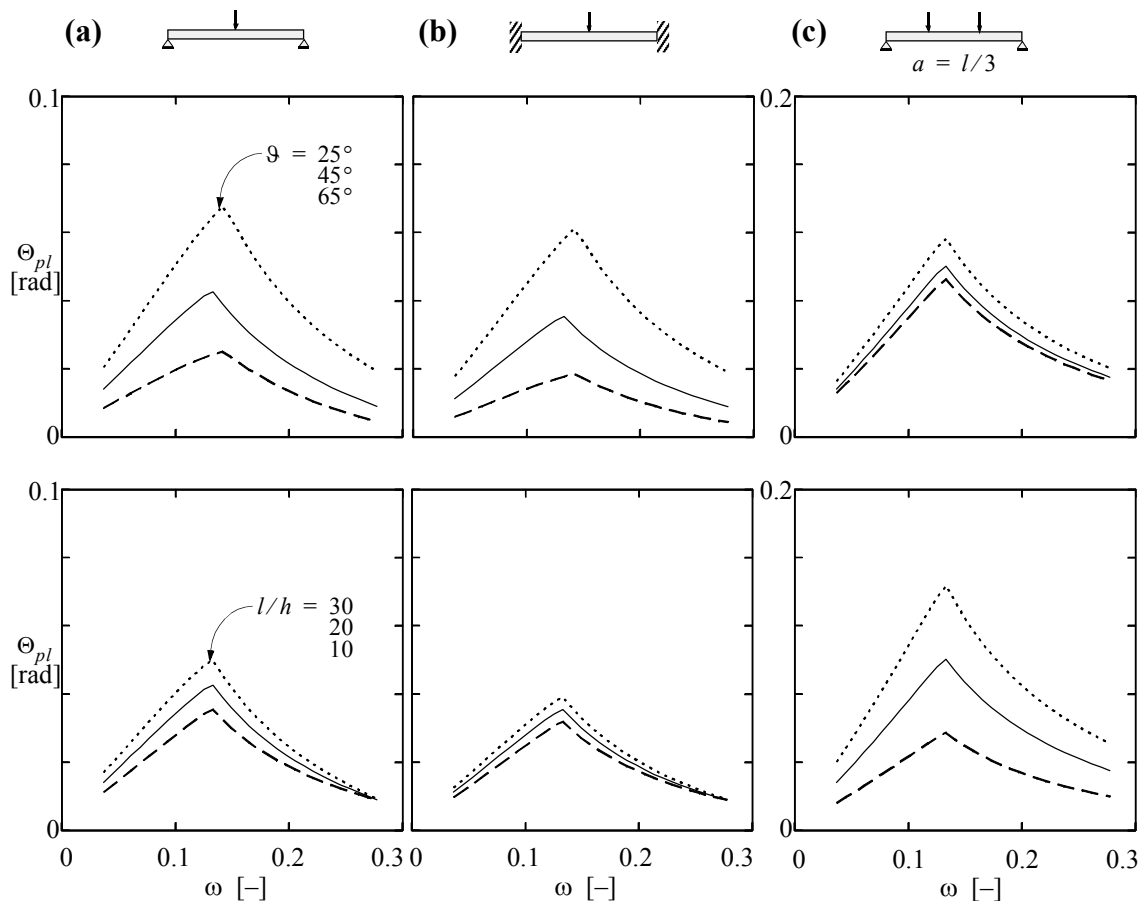
Eine Erhöhung der Betondruckstauchung  $\varepsilon_{cu}$  von 3.5 auf 5.0 bzw. 8.0 ‰ führt bei sehr grossen Bewehrungsgehalten nahezu zu einer Verdoppelung der erreichbaren plastischen Gelenkwinkel. Damit zeigt sich, dass durch das Einlegen einer Umschnürungsbewehrung in die Biegedruckzone das Verhalten der plastischen Gelenkbereiche entscheidend verbessert werden kann [5, 97, 137]. Eine Zunahme der Druckfestigkeit  $f_{cc}$  von 30 auf 60 MPa hat bei geringen Bewehrungsgehalten eine kleine Erhöhung der erreichbaren plastischen Gelenkwinkel zur Folge.

Bild 5.10 zeigt den Einfluss einer Variation der Druckfeldneigung und der Träger schlankheit auf den erreichbaren plastischen Gelenkwinkel. Die dargestellten Rechenergebnisse gelten für Stahl der Duktilitätsklasse B und die bereits in Bild 5.8 (a) dargestellten und in Bild 5.9 behandelten Belastungsgeometrien bzw. statischen Systeme. Die in den Diagrammen aufgetragenen Kurven illustrieren, dass sich durch die Berücksichtigung einer flacheren Druckfeldneigung wesentlich grössere plastische Gelenkwinkel ergeben. Bei Vierpunktbiegung ist die Zunahme der Gelenkwinkel infolge kleinerer Hebelarme der zusätzlichen Krümmungen aus dem Versatzmass  $l_v$  allerdings geringer.

In den bisherigen Betrachtungen wurde davon ausgegangen, dass das Verformungsvermögen der plastischen Bereiche entweder durch den Bruch der Biegedruckzone oder das Zerreißen der Längsbewehrung begrenzt ist. Als weitere mögliche Versagensursache kommen Schubbrüche in Frage. Dabei ist wiederum zwischen Stahl- und Betonbrüchen zu unterscheiden. Das Zerreißen der Bügelbewehrung stellt bei sehr kleinen Bügelbewehrungsgehalten und insbesondere bei der Verwendung von Stahl mit geringer Dehnfähigkeit eine Gefährdung dar. Schubbrüche sind bei der Darstellung von Versuchsergeb-



**Bild 5.9** – Einfluss der Eigenschaften der Bewehrung (kaltverformter Bewehrungsstahl) und des Betons auf den plastischen Gelenkwinkel; Grundparameter gemäss Bild 5.8 (c), Duktilitätsklasse B.



**Bild 5.10** – Einfluss der Druckfeldneigung und der Schlankheit des Trägers  $l/h$  auf den plastischen Gelenkwinkel; Grundparameter gemäss Bild 5.8 (c), Duktilitätsklasse B.

nissen klar zu bezeichnen. Eine Interpretation der Versuchsergebnisse erfordert, dass zwischen den verschiedenen Brucharten unterschieden wird.

Die Schlankheit der Träger beeinflusst das Verformungsvermögen indirekt. Eine Variation der Schlankheit wirkt sich in erster Linie auf den Verlauf der Zugkraft der Längsbewehrung aus; eine grössere Schlankheit hat einen flacheren Verlauf der Zugkraftlinie zur Folge. Da sich dementsprechend die plastischen Verformungsbereiche über längere Trägerabschnitte erstrecken, resultieren daraus für schlankere Träger grössere plastische Gelenkwinkel. Untersuchungen zum Einfluss der Grösse und Gliederung des Querschnittes sowie der statischen Höhe wurden in [137] und [77] angestellt. Der Einfluss der Trägerschlankheit verdeutlicht, dass die Beurteilung der Verformungsfähigkeit von Tragwerken sich nicht allein auf das Verformungsvermögen der Gelenkbereiche stützen kann, sondern unter Berücksichtigung des Verhaltens des gesamten Tragsystems vorgenommen werden muss. Die hier gezeigten Berechnungen belegen, dass sowohl die Mittendurchbiegung im plastischen Bereich der Stahl- und Betondehnungen als auch die erreichbaren plastischen Gelenkwinkel mit einfachen Beziehungen angegeben werden können. Die Verfestigungscharakteristik der Bewehrung kann mit dem Exponenten  $K$  der verwendeten Potenzfunktion (5.13) berücksichtigt werden. Auf diese Weise können die Verformungen analytisch berechnet werden.

# 6 Zusammenfassung und Folgerungen

## 6.1 Zusammenfassung

Mit der vorliegenden Arbeit wird versucht, zu einem besseren Verständnis des Trag- und Verformungsverhaltens von Massivbautragwerken, insbesondere von biegebeanspruchten Bauteilen, beizutragen. Es werden Methoden und Modelle vorgestellt, die es ermöglichen, die Mindestbewehrung zur Vermeidung des Versagens ohne Vorankündigung bei Erstrissbildung oder zur Begrenzung der Rissbreiten im Gebrauchszustand abzuschätzen. Sowohl im Gebrauchszustand als auch im Bereich von plastischen Stahl- und Betondehnungen werden zur Verformungsberechnung, ausgehend von der Rissabstandsberechnung in Biegeträgern, analytische Beziehungen entwickelt. Der Einfluss der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen wird bis zum Erreichen der plastischen Maximalverformung von Stahlbetonquerschnitten berücksichtigt.

Im ersten Teil der Arbeit (Kapitel 2) werden die wichtigsten bruchmechanischen Versagensmodelle zur Beschreibung des Entfestigungsverhaltens von Beton dargelegt und Grundlagen der linear elastischen Bruchmechanik eingeführt. In einer Übersicht der nicht linearen Bruchmechanik sind vor allem die kohäsiven Rissmodelle von Interesse. Der Einfluss der Bauteilgrösse auf die Art des Versagens und die Stabilität des Entfestigungsvorgangs wird erläutert. Unter Verwendung des fiktiven Rissmodells [62] wird anhand des Biegezugversuchs gezeigt, dass die Biegezug- und Zugfestigkeiten von Beton mit einfachen analytischen Beziehungen in guter Näherung angegeben werden können. Mit Hilfe einer geeigneten Formulierung des Entfestigungsverhaltens von Beton unter Berücksichtigung der Belastungskonfiguration werden vorhandene Vorschläge erweitert. Die Einflüsse der Spannungs-Rissöffnungs-Kurve des Betons im Rissquerschnitt und der Belastungsgeometrie auf das Last-Durchbiegungsverhalten werden aufgezeigt und die Resultate der Berechnungen mit weiteren Ansätzen und experimentell ermittelten Werten verglichen. Die Modellrechnungen verdeutlichen, dass die Sprödigkeit nicht eine reine Materialeigenschaft, sondern vielmehr eine Eigenschaft des Systems, d.h. des Prüfkörpers im Zusammenwirken mit der Prüfeinrichtung ist. Der Einfluss von Eigenspannungen auf die Biegezugfestigkeit wird qualitativ diskutiert.

Das Zusammenwirken zwischen Beton und Bewehrungsstahl wird auf der Grundlage des Zuggurtmodells [1, 137] erläutert. Der Vergleich zwischen faseroptisch ermittelten Stahldehnungen und nach dem Zuggurtmodell analytisch bestimmten sowie mit weiteren Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehungen numerisch berechneten Stahldehnungen zeigt sowohl im elastischen als auch im plastischen Bereich eine sehr gute Übereinstimmung. Im weiteren wird aufgezeigt, dass die unter Voraussetzung der starr-ideal plasti-

schen Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung ermittelten Dehnungs- und Spannungsverläufe eine mindestens gleichwertige Übereinstimmung mit den Messwerten aufweisen, wie die mit viel Rechenaufwand verbundenen Vergleichsrechnungen der übrigen Modelle. Der Einfluss einer Bewehrung auf die Entfestigungsstabilität von direkten Zugversuchen wird aufgezeigt.

Der zweite Teil der Arbeit (Kapitel 3) befasst sich mit der Mindestbewehrung zur Vermeidung des Versagens ohne Vorankündigung bei Erstrissbildung. Zunächst werden die analytischen Beziehungen des Biegezugversuchs mit einer vereinfachten Stahlspannungs-Rissöffnungs-Funktion auf der Grundlage der starr-ideal plastischen Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung sowie der Normalkraftbeanspruchung erweitert. Anschliessend wird der Einfluss der Bewehrung sowie jener der Normalkraftbeanspruchung auf das Momenten-Durchbiegungs-Verhalten bzw. die maximalen Biegegewiderstände untersucht. Dabei wird sowohl das Entfestigungsverhalten des Betons im Rissquerschnitt als auch die versteifende Wirkung einer Druckkraft berücksichtigt. Mit der Begrenzung der Stahlspannung im Riss sowie der Bedingung, dass das Biegemoment beim Erreichen der Fließspannung gleich dem ersten Maximum der Last-Durchbiegungskurve ist, wird die Mindestbewehrung bestimmt. Die numerischen Resultate solcher Berechnungen werden mit einer analytischen Funktion approximiert, welche die Grenzen für plastisches sowie ideal sprödes Materialverhalten beinhaltet und den Verlauf zwischen diesen Grenzen in guter Näherung abbildet. Diese Vereinfachung wird mit aufbruchmechanischen Ansätzen und Normvorschriften verglichen. Der Normalkrafteinfluss auf den Mindestbewehrungsgehalt wird untersucht und in der Vereinfachung berücksichtigt. Der Einfluss von Eigenspannungen auf den erforderlichen Mindestbewehrungsgehalt wird diskutiert. Zur Festlegung einer Bewehrungsreduktion infolge Schwindeigenspannungen werden grobe Anhaltspunkte angegeben.

Nach einem Abriss der geschichtlichen Entwicklung verschiedener Berechnungsmethoden gerissener Stahlbetonquerschnitte befasst sich der dritte Teil der Arbeit (Kapitel 4) mit dem Gebrauchsverhalten von Biegeträgern. Unter Verwendung von Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen an einem Trägerabschnitt zwischen zwei Rissen wird der maximale Rissabstand analytisch ermittelt. Dabei wird sowohl das Verbundverhalten der Bewehrung bzw. der entsprechende Stahlspannungsverlauf als auch ein linearisierter Verlauf der Betonrandstauchung berücksichtigt. Der Einfluss einer ideal spröden Zugspannungsverteilung im Rissquerschnitt zeigt sich erst bei einem Bewehrungsgehalt von  $\rho > 0.5\%$  in einer grösseren Druckzonenhöhe, kleineren Stahlspannungen im Rissquerschnitt und kleineren Rissabständen. Aus der Rissabstandsbeziehung für zentrischen Zug wird durch Ergänzung der für reine Biegung relevanten Parameter eine Näherung zur Bestimmung des Rissabstandes in Biegeträgern mit rechteckigem Querschnitt angegeben. Diese Näherungsbeziehung wird mit weiteren Ansätzen zur Rissabstandsbeziehung verglichen. Eine Normalkraftbeanspruchung führt zu aufwändigeren Berechnungen und lässt sich nicht im gleichen Mass vereinfachen.

Mit Hilfe eines Zugversteifungsfaktors lassen sich die Spannungen und Krümmungen am gerissenen Querschnitt mit bekannten analytischen Gleichungen angeben. Ähnlich

einer lastunabhängigen Differenz der Stahldehnungen infolge Zugversteifung beim Zuggurtmodell lässt sich eine Krümmungsdifferenz zur Berücksichtigung der Verbundwirkung zwischen den Rissen formulieren. Unter Verwendung einer vereinfachten Krümmungsberechnung lassen sich Verformungen von Biegeträgern mit Hilfe der Analogie von Mohr [95] einfach berechnen. Für verschiedene Belastungsgeometrien und statische Systeme werden einfache Gleichungen zur Verformungsberechnung bereitgestellt. Dabei wird der Einfluss ungerissener Trägerbereiche sowie die Zugversteifung berücksichtigt und den Berechnungen unter Voraussetzung komplett gerissener Querschnitte gegenübergestellt. Der Vergleich der vereinfachten Berechnung mit experimentell ermittelten Momenten-Krümmungs-Werten sowie gemessenen Last-Mittendurchbiegungs-Kurven zeigt eine befriedigende Übereinstimmung. Auf der Grundlage der vereinfachten Rissabstandsberechnung und der zugversteifenden Wirkung des Verbundes wird der Mindestbewehrungsgehalt zur Begrenzung der Rissbreiten angegeben und mit den Forderungen der gültigen Norm [135] verglichen.

Im vierten Teil der Arbeit (Kapitel 5) werden vereinfachte Beziehungen zum Verformungsverhalten von Biegeträgern im plastischen Bereich hergeleitet. Mit Hilfe einer geeigneten Formulierung des nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Verhaltens in der Betondruckzone ist eine analytische Behandlung ohne Fallunterscheidungen bis zur nominellen Bruchstauchung möglich. Zur Bestimmung der mittleren Stahldehnung im Risselement stehen in der Literatur [1] analytische Beziehungen für unterschiedliche Verfestigungscharakteristiken zur Verfügung. In Anlehnung an das Potenzgesetz von Bach [3] wird eine vereinfachte Momenten-Krümmungs-Beziehung angegeben. Vergleichsrechnungen mit den nichtlinearen Materialgesetzen unter Variation der massgebenden Parameter zeigen, dass der Krümmungsverlauf zwischen der Fließ- und Bruchlast in guter Näherung erfasst wird. Unter Verwendung der vereinfachten Krümmungsberechnung lassen sich Verformungen analytisch berechnen. Für verschiedene Belastungsgeometrien und statische Systeme werden einfache Gleichungen zur Verformungsberechnung entwickelt. Dabei werden der Einfluss ungerissener Trägerbereiche, die Zugversteifung sowie die Verschiebung der Zugkraftlinie infolge Querkraftbeanspruchung (bei vorhandener Schubbewehrung) berücksichtigt. Der Vergleich von vereinfachter Berechnung mit experimentell ermittelten Last-Mittendurchbiegungs-Kurven (mit und ohne Schubbewehrung) zeigt eine befriedigende Übereinstimmung.

Aufbauend auf der vereinfachten Berechnung der Mittendurchbiegung wird das Verformungsvermögen plastischer Gelenkbereiche ermittelt. Unter Verwendung eines einfachen kinematischen Modells werden erreichbare plastische Gelenkwinkel berechnet und in Funktion des mechanischen Bewehrungsgehalts  $\omega$  dargestellt. Für den Fall des Versagens der Biegedruckzone stellt die nominelle Bruchstauchung des Betons den wesentlichen Parameter dar. Bestimmt hingegen das Zerreißen der Längsbewehrung den Bruch, was beispielsweise bei Verwendung von Stahl der Duktilitätsklasse B (Bild 5.8 (c)) und mechanischen Bewehrungsgehalten bis etwa  $\omega = 0.15$  der Fall ist, so nehmen die plastischen Gelenkwinkel mit zunehmendem Bewehrungsgehalt massiv zu. Im Rahmen einer Parameterstudie werden die wichtigsten Einflüsse, denen das Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern unterliegt, behandelt. Diese betreffen einerseits die Eigen-



schaften der verwendeten Materialien und andererseits das statische System und die Art der Belastung.

## 6.2 Folgerungen

Aus den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit lassen sich einige Folgerungen zur Beschreibung des Biegetragverhaltens und Empfehlungen zur Mindestbewehrung von Stahlbetonbauteilen angeben:

- Die Biegezugfestigkeit wird sowohl von der Form der Spannungs-Rissöffnungs-Kurve des Betons im Riss als auch von der Belastungsgeometrie nur wenig beeinflusst. Mit zunehmender Balkenhöhe wird die Biegezugfestigkeit als Folge von Schwindeigenspannungen massiv reduziert.
- Der Vergleich von faseroptisch ermittelten Stahldehnungen mit Resultaten von Berechnungen bestätigt insbesondere das Zuggurtmodell.
- Die Mindestbewehrung zur Vermeidung eines Versagens ohne Vorankündigung bei Erstrissbildung kann bei Biegebeanspruchung sowie bei Biege- und Normalkraftbeanspruchung mit einfachen, aus bruchmechanischen Modellvorstellungen abgeleiteten Beziehungen in guter Näherung angegeben werden. Eine Druckkraft reduziert die erforderliche Bewehrung deutlich.
- Die auf der Rissabstandsberechnung aufbauenden Gleichungen zur Verformungsberechnung erlauben eine experimentell bestätigte Abschätzung der Mittendurchbiegung.
- Der analytisch berechnete Mindestbewehrungsgehalt zur Beschränkung der Rissbreiten in rechteckigen Querschnitten unter Biegebeanspruchung wird im Vergleich mit der gültigen Norm bestätigt.
- Die aus der vereinfachten Momenten-Krümmungs-Beziehung abgeleiteten Gleichungen zur Verformungsberechnung im plastischen Stahldehnungsbereich erlauben eine experimentell bestätigte Abschätzung der Mittendurchbiegung.
- Auf der Grundlage der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen und den angegebenen Beziehungen lassen sich die erreichbaren plastischen Gelenkwinkel abschätzen.
- Auf der Grundlage der starr-ideal plastischen Verbund Schubspannungs-Schlupf-Beziehung lässt sich das Last-Verformungs-Verhalten von gerissenen Biegezugzonen unter Verwendung wirklichkeitsgetreuer Stahlstoffgesetze im gesamten Beanspruchungsbereich zutreffend und mit geringem Rechenaufwand beschreiben.

## 6.3 Ausblick

Zum Schluss einige Anregungen für weiterführende Untersuchungen zu den Themen dieser Arbeit:

- Der Ansatz zur Bestimmung der Mindestbewehrung in Biegeträgern könnte auf weitere Querschnittsformen ausgedehnt werden. Dabei sollte der Einfluss von Eigenspannungen mit geeigneten Vereinfachungen angegeben werden.
- Die quantitativen Aussagen über das Verformungsverhalten gerissener Biegezugzonen sollten für Verbundentfestigung infolge zyklischer Beanspruchung erweitert werden. Für die genauere Untersuchung der Mindestbewehrung zur Begrenzung der Rissbreiten muss abgeklärt werden, wie stark der Verbund durch zyklische Beanspruchung zerstört wird.
- Die für Biegeträger mit rechteckigem Querschnitt hergeleiteten Beziehungen zur Bestimmung des Rissabstandes und der Biegesteifigkeit sollten auf weitere Querschnittsformen übertragen und für gemischte Bewehrung verallgemeinert werden.
- Bei statisch unbestimmten Systemen könnten mögliche und notwendige Schnittgrössenumlagerungen unter Berücksichtigung allfälliger Zwängungen mit den angegebenen einfachen Beziehungen untersucht werden.

## Literatur

- [1] Alvarez, M., "Einfluss des Verbundverhaltens auf das Verformungsvermögen von Stahlbeton", *IBK Bericht* Nr. 236, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Juli 1998, 183 pp.
- [2] Alvarez, M., Marti, P., "Versuche zum Verbundverhalten von Bewehrungsstahl bei plastischen Verformungen", *IBK Bericht* Nr. 222, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Sept. 1996, 135 pp.
- [3] Bach, C., "Untersuchungen von Granit inbezug auf Zug-, Druck-, Biegungs- und Schubfestigkeit, sowie in Hinsicht auf Zug-, Druck- und Biegeelastizität", *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, Band XXXXI, No. 9, Febr. 1897, pp. 241-252.
- [4] Bachmann, H., "Zur plastizitätstheoretischen Berechnung statisch unbestimmter Stahlbetonbalken", *IBK Bericht* Nr. 13, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Juli 1967, 188 pp.
- [5] Bachmann, H., Thürlimann, B., "Versuche über das Verhalten von zweifeldrigen Stahlbetonbalken, Serie A", *IBK Bericht* Nr. 6203-1, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Juli 1965, 131 pp.
- [6] Bachmann, H., Thürlimann, B., "Versuche über das Verhalten von zweifeldrigen Stahlbetonbalken, Serie B", *IBK Bericht* Nr. 6203-2, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Dez. 1965, 103 pp.
- [7] Bächtold, J., "Ursachen und Bedeutung der Rissbildung an Eisenbeton-Tragwerken", *Schweizerische Bauzeitung*, Band 113, Nr. 20, Mai 1939, pp. 239-242.
- [8] Baker, A.L.L., "A Plastic Theory of Design for Ordinary Reinforced and Prestressed Concrete Including Moment Re-Distribution in Continuous Members", *Magazine of Concrete Research*, No. 2, June 1949, pp. 57-66.
- [9] Baker, A.L.L., Amarakone, A.M.N., "Inelastic Hyperstatic Frames Analysis", *Proceedings*, International Symposium, Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, ASCE-ACI, Miami, ACI SP-12, Nov. 1964, pp. 85-136.
- [10] Baluch, M.H., Azad, A.K., Ashmawi, W., "Fracture Mechanics Application to Reinforced Concrete Members in Flexure", *Applications of Fracture Mechanics to Reinforced Concrete*, ed. A. Carpinteri, Elsevier Applied Science, 1992, pp. 413-436.
- [11] Barenblatt, G.I., "The Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture", *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 7, 1962, pp. 55-129.
- [12] Bausch, S., "Experimentelle und rechnerische Untersuchungen zur Grenzverformungsfähigkeit von Stahlbetonbalken", *Bericht* Nr. 84-42, Institut für Statik der Universität Braunschweig, 1984, 207 pp.
- [13] Bazant, Z.P., "Comment on Hillerborg's Comparison of Size Effect Law with Fictitious Crack Model", *Sandro Dei Poli – Testimonianze e note scientifiche in onore del settantesimo compleanno*, Politecnico Milano, Oct. 1985, pp. 335-338.
- [14] Bazant, Z.P., "Size Effect in Blunt Fracture: Concrete, Rock, Metal", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 110, No. 4, April 1984, pp. 518-535.
- [15] Bazant, Z.P., Kim, J.K., Pfeiffer, P.A., "Nonlinear Fracture Properties from Size Effect Tests", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 112, No. 2, Febr. 1986, pp. 289-307.
- [16] Bazant, Z.P., Novak, D., "Energetic-Statistical Size Effect in Quasibrittle Failure at Crack Initiation", *ACI Materials Journal*, Vol. 97, No. 3, May-June 2000, pp. 381-392.
- [17] Bazant, Z.P., Oh, B.H., "Crack Band Theory for Fracture of Concrete", *Materials and Structures*, Vol. 16, No. 93, 1983, pp. 155-177.

- [18] Bigaj, A.J., “Structural Dependence of Rotation Capacity of Plastic Hinges in Reinforced Concrete Beams and Slabs”, *PhD thesis*, University of Technology, Delft, 1999, 230 pp.
- [19] Birkenmaier, M., “Über Nachweise im Gebrauchszustand”, *Schweizer Ingenieur und Architekt*, Vol. 101, No. 6, 1983, pp. 120-125.
- [20] Cohn, M.Z., Ghosh, S.K., “The Flexural Ductility of Structural Concrete Sections”, *IABSE Publications*, No. 32, Vol. II, 1972, pp. 53-83.
- [21] Cohn, M.Z., Riva, P., “Flexural Ductility of Reinforced Concrete Sections”, *PCI Journal*, Vol. 36, No. 2, March/April 1991, pp. 72-87.
- [22] Bosco, C., Carpinteri, A., “Fracture Mechanics Evaluation of Minimum Reinforcement in Concrete Structures”, *Applications of Fracture Mechanics to Reinforced Concrete*, ed. A. Carpinteri, Elsevier Applied Science, 1992, pp. 347-377.
- [23] CEB-FIP *Model Code for Concrete Structures*, Comité Euro-International du Béton, Lausanne, 1990, 437 pp.
- [24] Cedolin, L., Dei Poli, S., Iori, I., “Analisi sperimentale del processo di formazione della frattura nel calcestruzzo”, *Studi e Ricerche*, Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento Armato., Fratelli Pesenti, Politecnico di Milano, No. 3, 1981, pp. 47-74.
- [25] Cedolin, L., Dei Poli, S., Iori, I., “Comportamento a trazione del calcestruzzo”, *Studi e Ricerche*, Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento Armato., Fratelli Pesenti, Politecnico di Milano, No. 5, 1983, pp. 23-46.
- [26] Cedolin, L., Dei Poli, S., Iori, I., “Determinazione indiretta del legame costitutivo del calcestruzzo sotto statit tensionali di trazione”, *Studi e Ricerche*, Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento Armato, Fratelli Pesenti, Politecnico di Milano, No. 8, 1986, pp. 9-33.
- [27] Considère, A., *Experimental-Untersuchungen über die Eigenschaften der Zement-Eisen-Konstruktionen* (Deutsch von M. Blodnig), Lehmann & Wentzel, Wien, 1902, 32 pp.
- [28] Corley, W.G., “Rotational Capacity of Reinforced Concrete Beams”, *ASCE Journal of the Structural Division*, Vol. 92, No. ST 5, Oct. 1966, pp. 121-146.
- [29] Cotterell, B., Mai, Y.W., Lam, K.Y., “Statistics and Size Effect in Cementitious Materials”, *Cement and Concrete Research*, Vol. 25, No. 2, 1995, pp. 408-416.
- [30] Daniels, H.E., “The Statistical Theory of Strength of Bundles of Threads”, *Proceedings of the Royal Society of London*, Series A, Vol. 183, 1944, pp. 405-435.
- [31] Debernardi, P.G., Taliano, M., “On Evaluation of Rotation Capacity for Reinforced Concrete Beams” *ACI Structural Journal*, Vol. 99, No. 3, May-June 2002, pp. 360-368.
- [32] Dilger, W., “Veränderlichkeit der Biege- und Schubsteifigkeit bei Stahlbetontragwerken und ihr Einfluss auf Schnittkraftverteilung und Traglast bei statisch unbestimmter Lagerung”, *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 179, 1966, 101 pp.
- [33] Dischinger, F., “Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken”, *Der Bauingenieur*, Vol. 20, 1939, Heft 5/6, pp. 53-63, Heft 21/22, pp. 286-294, Heft 31/32, pp. 426-437, Heft 47/48, pp. 563-572.
- [34] Dugdale, D.S., “Yielding of Steel Sheets Containing Slits”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 8, 1960, pp. 100-104.
- [35] Eifler, H., Plauk, G., “Zwei Verfahren zur Berechnung der Drehfähigkeit plastischer Gelenke in biegebeanspruchten Stahlbetonkonstruktionen”, *Materialprüfung*, Vol. 14, No. 8, Aug. 1972, pp. 256-259.
- [36] Eligehausen, R., Kreller, H., “Einfluss der Stahlkennlinie auf den möglichen Grad der Schnittkraftumlagerung bei Stahlbetontragwerken – Teil I: Theoretische Untersuchungen”, *Mitteilungen* 1988/2, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart, 1988, 118 pp.

- [37] Emperger, F. (Hrsg.), *Handbuch für Eisenbetonbau*, I. Band: Entwicklungsgeschichte, Versuche und Theorie des Eisenbetons, 3. Auflage, Berlin, 1921, 800 pp.
- [38] Evans, R.H., Marathe, M.S., “Microcracking and Stress-Strain Curves for Concrete in Tension”, *Matériaux et Constructions*, No.1, 1968, pp. 61-64.
- [39] Falkner, H., “Zur Frage der Rissbildung durch Eigen- und Zwängsspannungen infolge Temperatur in Stahlbetonbauteilen”, *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 208, 1969, 99 pp.
- [40] Favre, R., Koprna, M., Putallaz, J.C., “Deformation of Concrete Structures – Theoretical Basis for the Calculation”, *LABSE Periodica*, S-16/81, No. 1, 1981, pp. 1-24.
- [41] Fellmann, W., Menn, Ch., “Bemessung von Stahlbetonbauteilen bei Zwangsbeanspruchung”, *IBK Bericht* Nr. 106, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Dez. 1980, 11 pp.
- [42] Fellmann, W., Menn, Ch., “Zugversuche an Stahlbetonscheiben”, *IBK Bericht* Nr. 7604-1, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Sept. 1981, 40 pp.
- [43] Ferry-Borges, J., “Cracking and Deformability of Reinforced Concrete Beams” *Bulletin d’Information* No. 61, Comité Européen du Béton, Paris, Juin 1976, pp. 33-77.
- [44] Foote, R.M.L., Mai, Y.W., Cotterell, B., “Process Zone Size and Crack Growth Measurements in Fibre Cements”, *Fibre Reinforced Concrete Properties and Applications*, eds. S.P. Shah, G.B. Batson, SP-105, American Concrete Institute, 1987, pp. 55-70.
- [45] Freudenthal, A.M., “Statistical Approach to Brittle Fracture”, *Fracture – An Advanced Treatise*, Vol. II, Mathematical Fundamentals, ed. H. Liebowitz, Academic Press, 1968, pp. 591-619.
- [46] Fürst, A., “Vorgespannte Betonzugglieder im Brückenbau”, *IBK Bericht* Nr. 267, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Juli 2001, 124 pp.
- [47] Gerstle, W.H., Dey, P.P., Prasad, N.N.V., Rahulkumar, P., Xie, Ming, “Crack Growth in Flexural Members - A Fracture Mechanics Approach”, *ACI Structural Journal*, Vol. 89, No. 6, Nov.-Dec. 1992, pp. 617-625.
- [48] Giuriani, E., “Gli effetti della fessurazione sulla redistribuzione dei momenti nelle strutture iperstatiche in cemento armato.” *Studi e Ricerche*, Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento Armato, Fratelli Pesenti, Politecnico di Milano, No. 4, 1982, pp. 163-187.
- [49] Giuriani, E., “Studio della redistribuzione dei momenti provocata dalla fessurazione nelle travi continue di cemento armato.” *Studi e Ricerche*, Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento Armato, Fratelli Pesenti, Politecnico di Milano, No. 4, 1982, pp. 189-210.
- [50] Giuriani, E., Sforza, C., “Relazione fra momenti e curvature medie e locali di una trave in cemento armato sottoposta a distorsioni crescenti e ripetute – Ricerca sperimentale con il procedimento del Moiré per sovrapposizione.” *Studi e Ricerche*, Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento Armato, Fratelli Pesenti, Politecnico di Milano, No. 3, 1981, pp. 177-204.
- [51] Griffith, A.A., “The Phenomena of Rupture and Flow in Solids”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Series A, Vol. 221, 1921, pp. 163-198.
- [52] Guinea, G.V., Planas, J., Elices, M., “A General Bilinear Fit for the Softening Curve of Concrete”, *Materials and Structures*, Vol. 27, No. 166, March 1994, pp. 99-105.
- [53] Gustafsson, P.J., “Fracture Mechanics Studies of non-yielding Materials like Concrete – Modelling of Tensile Fracture and Applied Strength Analysis”, *Report TVBM - 1007*, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Sweden, 1985, 422 pp.
- [54] Gustafsson, P.J., Hillerborg, A., “Improvements in Concrete Design achieved through the Application of Fracture Mechanics”, *Application of Fracture Mechanics to Cementitious*

- Composites*, eds. S.P. Shah, NATO-ARW, Northwestern University, Sept. 1984, pp. 667-680.
- [55] Haberkalt, K., Postuvanschitz, F., *Tragwerke aus Eisenbeton oder Stampfbeton bei Hochbauten und Strassenbrücken*, Verlag Franz Deuticke, Wien und Leipzig, 2. Auflage, 1912, 330 pp.
- [56] Hahn, H.G., *Bruchmechanik – Einführung in die theoretischen Grundlagen*, B.G. Teubner Stuttgart, 1976, 221 pp.
- [57] Hawkins, N.M., Hjortset, K., “Minimum Reinforcement Requirements for Concrete Flexural Members”, *Applications of Fracture Mechanics to Reinforced Concrete*, ed. A. Carpinteri, Elsevier Applied Science, 1992, pp. 379-412.
- [58] Hegger, J., “Einfluss der Verbundart auf die Grenztragfähigkeit von Spannbetonbalken”, *Dissertation*, Heft 66, Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz der Technischen Universität Braunschweig, 1985, 195 pp.
- [59] Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Clarendon Press, Oxford, 1950, 355 pp.
- [60] Hillerborg, A., “A Comparison Between the Size Effect Law and the Fictitious Crack Model”, *Sandro Dei Poli – Testimonianze e note scientifiche in onore del settantesimo compleanno*, Politecnico Milano, Oct. 1985, pp. 329-334.
- [61] Hillerborg, A., “Analysis of one Single Crack”, *Fracture Mechanics of Concrete*, edited by F. Wittmann, Elsevier, Vol. 6, No. 6, 1983, pp. 223-249.
- [62] Hillerborg, A., Modéer, M., Petersson, P.E., “Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements”, *Cement and Concrete Research*, Vol. 6, 1976, pp. 773-782.
- [63] Hilsdorf, H., “Die Bestimmung der zweiachsigen Festigkeit des Betons”, *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 173, 1965, 68 pp.
- [64] Hofacker, K., *Stahlbeton Tabellen*, Verlag Leemann, Zürich, 3. Auflage, 1971, 80 pp.
- [65] Irwin, G.R., “Analysis of Stresses and Strains near the End of a Crack traversing a Plate”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, No.1, 1957, pp. 361-364.
- [66] Iványi, G., Buschmeyer, W., “Ermittlung der Biegetragfähigkeit von ohne Verbund vorgepannten Platten mit Hilfe plastischer Gelenkelemente”, Stoffgesetze im konstruktiven Ingenieurbau, *Abschlusskolloquium* zum Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft, Technische Universität Braunschweig, Mai 1988, pp. 181-188.
- [67] Iyengar, K.T.S.R., Saviraj, S., “Analytical Study of Fracture in Concrete Beams Using Blunt Crack Model”, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 127, No. 8, Aug. 2001, pp. 828-832.
- [68] Johnson, A.I., “Deformations of Reinforced Concrete”, *IABSE Publications*, Vol. 11, 1951, pp. 253-290.
- [69] Kaplan, M.F., “Crack Propagation and the Fracture of Concrete”, *ACI Journal*, Vol. 58, No. 11, Nov. 1961, pp. 591-610.
- [70] Kenel, A., Marti, P., “Faseroptische Dehnungsmessungen an einbetonierten Bewehrungsstäben”, *IBK Bericht* Nr. 271, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Jan. 2002, 93 pp.
- [71] Koch, R., “Verformungsverhalten von Stahlbetonstäben unter Biegung und Längszug im Zustand II auch bei Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen”, *Schriftenreihe* Heft 69, Otto-Graf-Institut, Universität Stuttgart, 1976, 176 pp.
- [72] Koenen, M., “Für die Berechnung der Stärke der Monierschen Zementplatten”, *Centralblatt der Bauverwaltung*, Jahrgang VI., Nr. 47, Nov. 1886, pp. 462.

- [73] König, G., Pommerening, D., Tue, N.V., "Nichtlineares Last-Verformungs-Verhalten von Stahlbeton- und Spannbetonbauteilen, Verformungsvermögen und Schnittgrössenermittlung", *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 492, 1999, 129 pp.
- [74] König, G., Scheidler, D., Fehling, E., "Grundlagen zur Traglastermittlung unbewehrter Betonbauteile unter Zugbeanspruchung", *Beton und Stahlbetonbau*, Vol. 81, 1986, Heft 11, pp. 292-296, Heft 12, pp. 325-329.
- [75] Kreller, H., "Zum nichtlinearen Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonstabtragwerken unter Last- und Zwangseinwirkung", *Mitteilungen* 1989/4, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart, 1989, 214 pp.
- [76] Kuuskoski, V., "Über die Haftung zwischen Beton und Stahl", *Dissertation*, Technische Hochschule von Finnland, Helsinki, 1950, 203 pp.
- [77] Langer, P., "Verdrehfähigkeit plastifizierter Tragwerksbereiche im Stahlbetonbau", *Mitteilungen* 1987/1, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart, 1987, 199 pp.
- [78] Latowsky, R., "Die Bieungselastizität bei Körpern ungleicher Festigkeit", *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, Band XXXXI, No. 33, Aug. 1897, pp. 941-943.
- [79] Leonhardt, F., "Cracks and Crack Control at Concrete Structures", *IABSE Periodica*, P-109/87, No. 1, 1987, pp. 25-44.
- [80] Leonhardt, F., *Vorlesungen über Massivbau*, Vierter Teil: Nachweis der Gebrauchsfähigkeit, Springer-Verlag, Korrigierter Nachdruck, 1977, 194 pp.
- [81] Li, L., "Rotationsfähigkeit plastischer Gelenke im Stahl- und Spannbetonbau", *Mitteilungen* 1995/1, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart, 1995, 206 pp.
- [82] Love, A.E.H., *Lehrbuch der Elastizität* (Deutsche Ausgabe von A. Timpe), Teubner, Leipzig und Berlin, 1907, 664 pp.
- [83] Macchi, G., "Ductility Condition for Simplified Design without Check of Compatibility" *Bulletin d'Information* No. 105, Comité Européen du Béton, Paris, Feb. 1976, pp. 115-142.
- [84] Macchi, G., "Elastic Distribution of Moments on Continuous Beams", *Proceedings*, International Symposium, Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, ASCE-ACI, Miami, ACI SP-12, Nov. 1964, pp. 237-256.
- [85] Maldague, M., "Contribution à l'étude des déformations instantanées des poutres en béton armé", *Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics*, No. 213, Paris, Sept. 1965, pp. 1169-1218.
- [86] Marti, P., "Stahlbeton Grundzüge", *Vorlesungsautographie*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, 2001.
- [87] Marti, P., "Verbundverhalten von Spanngliedern mit Kunststoff-Hüllrohren", *Festschrift Prof. J. Schneider zum 60. Geburtstag*, IBK Publikation SP-001, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Mai 1994, pp. 143-150.
- [88] Marti, P., Sigrist, V., Alvarez, M., "Mindestbewehrung von Betonbauten", Forschungsauftrag Nr. 82/95, Bundesamt für Strassenbau, *Bericht* Nr. 529, Juni 1997, 55 pp.
- [89] Mattock, A.H., "Rotational Capacity of Hinging Regions in Reinforced Concrete Beams", *Proceedings*, International Symposium, Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, ASCE-ACI, Miami, ACI SP-12, Nov. 1964, pp. 143-180.
- [90] Mayer, H., "Die Berechnung der Durchbiegung von Stahlbetonbauteilen", *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 194, 1967, 73 pp.
- [91] Meier, H.H., "Berücksichtigung des wirklichkeitsnahen Werkstoffverhaltens beim Stand sicherheitsnachweis turmartiger Stahlbetonbauwerke", *Dissertation*, Institut für Massivbau der Universität Stuttgart, 1983, 214 pp.

- [92] Melan, E., "Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Innern beanspruchten Halbscheibe", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik – Ingenieurwissenschaftliche Forschungsarbeiten*, Band 12, Heft 6, Dez. 1932, pp. 343-346.
- [93] Menn, Ch., "Gebrauchsfähigkeit von Stahlbetontragwerken", *IBK Bericht* Nr. 108, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Jan. 1981, 6 pp.
- [94] Meyer, J., König, G., "Verformungsfähigkeit der Biegedruckzone – Spannungs-Dehnungs-Linien für die nichtlineare Berechnung", *Beton- und Stahlbetonbau*, Vol. 93, 1998, Heft 7, pp. 189-194, Heft 8, pp. 224-228.
- [95] Mohr, O., "Beiträge zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen. Behandlung der elastischen Linie als Seillinie; zeichnerische Untersuchung des elastischen Balkens", *Zeitschrift des Architekten und Ingenieur-Vereins zu Hannover*, Band XIV, 1868, pp. 19-51.
- [96] Mörsch, E., *Der Eisenbetonbau – Seine Theorie und Anwendung*, Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart, 3. Auflage, 1908, 376 pp.
- [97] Muttoni, A., "Die Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie in der Bemessung von Stahlbeton", *IBK Bericht* Nr. 176, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Juni 1990, 158 pp.
- [98] Muttoni, A., Burdet, O., "Conception et dimensionnement des éléments de structures, béton armé", *Script*, IBAP – béton armé et précontraint, EPF Lausanne, 2001.
- [99] Nakayama, J., "Direct Measurement of Fracture Energies of Brittle Heterogeneous Materials", *Journal of the American Ceramic Society*, Vol. 48, No. 11, 1965, pp. 583-587.
- [100] Noakowski, P., "Die Bewehrung von Stahlbetonbauteilen bei Zwangsbeanspruchung infolge Temperatur", *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 296, 1978, 144 pp.
- [101] Noakowski, P., "Mitwirkungsgesetze zur Ermittlung der Verformungen und der Zwangsbeanspruchung bei gleichzeitiger Lastbeanspruchung", *Beton und Stahlbetonbau*, Vol. 81, Nr. 12, 1986, pp. 318-325.
- [102] Noakowski, P., "Nachweisverfahren für Verankerung, Verformung, Zwangsbeanspruchung und Rissbreite – Kontinuierliche Theorie der Mitwirkung des Betons auf Zug, Rechenhilfen für die Praxis", *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 394, 1988, 75 pp.
- [103] Noakowski, P., Schäfer, H.G., "Die Schnittgrößen in Stahlbetontragwerken einfach richtig berechnen", *Beton- und Stahlbetonbau*, Vol. 96, Heft 6, 2001, pp. 395-403.
- [104] Oelhafen, U., "Risse und Verformungen", *Dokumentation D 042*, Einführung in die Norm SIA 162 «Betonbauten», Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Zürich, 1989, pp. 57-74.
- [105] Ozbolt, J., "Massstabeffekt und Duktilität von Beton- und Stahlbetonkonstruktionen", *Mitteilungen* 1995/2, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart, 1995, 149 pp.
- [106] Pauser, A., *Eisenbeton 1850-1950*, Wien, 1994, 215 pp.
- [107] Petersson, P.E., "Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plain Concrete and Similar Materials", *Report TVBM - 1006*, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Sweden, 1981, 174 pp.
- [108] Pfyl, Th., "Tragverhalten von Stahlfaserverstärktem Stahlbeton", *IBK Bericht*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, in Vorbereitung.
- [109] Pfyl, Th., Marti, P., "Versuche an stahlfaserverstärkten Stahlbetonelementen", *IBK Bericht* Nr. 268, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Sept. 2001, 137 pp.
- [110] Polak, M.A., Killen, D.T., "The Influence of the Reinforcing Bar Diameter on the Behavior of Members in Bending and In-Plane Tension", *ACI Structural Journal*, Vol. 95, No. 5, Sept.-Oct. 1998, pp. 471-479.



- [111] Puche, M., "Rissbreitenbeschränkung und Mindestbewehrung bei Eigenspannungen und Zwang", *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 396, 1988, 133 pp.
- [112] Rao, P.S., "Die Grundlagen zur Berechnung der bei statisch unbestimmten Stahlbetonkonstruktionen im plastischen Bereich auftretenden Umlagerungen der Schnittkräfte", *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 177, 1966, 99 pp.
- [113] Rehm, G., "Über die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton", *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 138, 1961, 59 pp.
- [114] Rehm, G., Martin, H., "Zur Frage der Rissbegrenzung im Stahlbetonbau", *Beton- und Stahlbetonbau*, Vol. 63, Heft 8, 1968, pp. 175-182.
- [115] Reinhardt, H.W., "Fracture Mechanics of an Elastic Softening Material like Concrete", *HERON*, Vol. 29, No. 2, 1984, 42 pp.
- [116] Reinhardt, H.W., Cornelissen, H.A.W., Hordijk, D.A., "Tensile Test and Fracture Analysis of Concrete", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 112, Nov. 1986, pp. 2462-2477.
- [117] Reinke, H.G., "Zum Ansatz der Betonzugfestigkeit bei der Stahlbetonbemessung", *Dissertation*, Institut für Massivbau der Universität Stuttgart, 1986, 200 pp.
- [118] Rostásy, F.S., Henning, W., "Zwang und Rissbildung in Wänden und Fundamenten", *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 407, 1990, 145 pp.
- [119] Ritter, W., "Die Bauweise Hennebique", *Schweizerische Bauzeitung*, Band XXXIII, No. 6, Feb. 1899, pp. 41-43, 49-52, 59-61.
- [120] Ritz, P., "Biegeverhalten von Platten mit Vorspannung ohne Verbund", *IBK Bericht Nr. 80*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Mai 1978, 131 pp.
- [121] Ruiz, G., Planas, J., Elices, M., "Armadura mínima en flexión: teoría, ensayos y comparación con la normativa vigente", *Hormigón y acero*, Nr. 206, Departamento de Ciencia de Materials, ETS de Ingenieros de Caminos, Universidad Politécnica de Madrid, Spain, 1997, pp. 9-25.
- [122] Rüschi, H., "Versuche zur Festigkeit der Biegedruckzone – Festigkeit und Verformung des exzentrisch gedrückten Rechteckquerschnittes aus unbewehrtem Beton bei kurzzeitiger Lasteinwirkung", *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 120, 1955, 94 pp.
- [123] Rüschi, H., Stöckl, S., "Der Einfluss von Bügeln und Druckstäben auf das Verhalten der Biegedruckzone von Stahlbetonbalken", *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 148, 1963, 75 pp.
- [124] Rüschi, H., Stöckl, S., "Kennzahlen für das Verhalten einer rechteckigen Biegedruckzone von Stahlbetonbalken unter kurzzeitiger Belastung – Zusammenfassung neuerer Forschungsarbeiten", *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 196, 1967, pp. 29-66.
- [125] Russwurm, D., "Neue Erkenntnisse zur Frage der Duktilität von Betonstählen", *Beton- und Stahlbetonbau*, Vol. 90, Heft 1, 1995, pp. 16-22.
- [126] Saliger, R., *Der Eisenbeton*, Alfred Kröner Verlag, Stuttgart, 1906, 227 pp.
- [127] Saliger, R., *Der Stahlbetonbau*, 7. Auflage, Verlag Franz Deuticke, Wien, 1949, 644 pp.
- [128] Scheidler, D., "Experimentelle und analytische Untersuchungen zur wirklichkeitsnahen Bestimmung der Bruchschnittgrößen unbewehrter Betonbauteile unter Zugbeanspruchung", *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 379, 1987, 94 pp.
- [129] Schiessl, P., "Grundlagen der Neuregelung zur Beschränkung der Rissbreite", *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 400, 1989, pp. 157-175.
- [130] Schiessl, P., Wölfel, E., "Konstruktionsregeln zur Beschränkung der Rissbreite – Grundlage zur Neufassung DIN 1045, Abschnitt 17.6 (Entwurf 1985)", *Beton und Stahlbetonbau*, Vol. 81, Nr. 1, 1986, pp. 8-15.
- [131] Schnetzer, H., "Stochastische Baustoffmodelle für Beton", *IBK Bericht Nr. 248*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Juni 2000, 119 pp.

- [132] Scholz, G., "Festigkeit der Biegedruckzone", *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 139, 1960, 40 pp.
- [133] Schüle, F., "Resultate der Untersuchung von Eisenbetonbalken – Ueberblick der Versuchsergebnisse", *Mitteilungen der Eidgenössischen Materialprüfungsanstalt am Schweizerischen Polytechnikum in Zürich*, 12. Heft, 1907, pp. 63-74.
- [134] Shima, H., Chou, L.-L., Okamura, H., "Micro and Macro Models for Bond in Reinforced Concrete," *Journal of the Faculty of Engineering*, Vol. XXXIX, No. 2, University of Tokyo, 1987, pp. 133-194.
- [135] SIA, *Norm SIA 162 – Betonbauten*, Norm Ausgabe 1989, Teilrevision 1993, Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Zürich, 1993, 86 pp.
- [136] SIA, *Norm SIA 262 – Betonbau*, Norm Ausgabe 2003, Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Zürich, erscheint 2003.
- [137] Sigrist, V., "Zum Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern", *IBK Bericht* Nr. 210, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Juli 1995, 159 pp.
- [138] Siviero, E., "Rotation Capacity of Monodimensional Members in Structural Concrete" *Bulletin d'Information* No. 105, Comité Européen du Béton, Paris, Feb. 1976, pp. 206-222.
- [139] Trunk, B., "Einfluss der Bauteilgrösse auf die Bruchenergie von Beton", *Building Materials Reports*, No. 11, Aedificato Publishers, 2000, 155 pp.
- [140] Trunk, B., Sadouki, H., Wittmann, F.H., "Size Effect and Stability of Fracture", *Fracture Mechanics of Concrete Structures*, ed. F.H. Wittmann, Aedificato Publishers, Vol. 1, 1995, pp. 607-618.
- [141] Uchida, Y., Rokugo, K., Koyanagi, W., "Application of Fracture Mechanics to Size Effect on Flexural Strength of Concrete", *Concrete Library of JSCE*, No. 20, 1992, pp. 87-97.
- [142] Ulfkjaer, J.P., Krenk, S., Brincker, R., "Analytical Model for Fictitious Crack Propagation in Concrete Beams", *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 121, No. 1, Jan. 1995, pp. 7-15.
- [143] Wayss, G.A. (Hrsg.), *Das System Monier (Eisengerippe mit Cementumhüllung)*, Berlin, 1887, 128 pp.
- [144] Weibull, W., "A Statistical Theory of the Strength of Materials", *The Royal Swedish Institute for Engineering Research*, No. 151, Stockholm, 1939, pp. 5-45.
- [145] Weigler, H., Becker, G., "Untersuchungen über das Bruch- und Verformungsverhalten von Beton bei zweiachsiger Beanspruchung", *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Heft 157, 1963, 66 pp.
- [146] Wierig, H.J., "Frischbeton und Bauwerksqualität", *Beton*, Vol. 33, Heft 5, 1983, pp. 175-179.
- [147] Zhu, Y., "The Flexural Strength Function for Concrete Beams: A Closed Form Solution Based on the Fictitious Crack Model", Departement of Structural Mechanics and Engineering, *Bulletin* No. 157, The Royal Institut of Technology, Stockholm, 1991, pp. B1-B23.

# Bezeichnungen

## Lateinische Grossbuchstaben

<i>A</i>	Querschnittsfläche; Fläche
<i>B</i>	Festigkeitsfaktor
<i>C</i>	Formfaktor
<i>D</i>	Dissipationsenergie; Druckkraft
<i>E</i>	Elastizitätsmodul
<i>F</i>	Kraft
<i>G</i>	spezifische Bruchenergie
<i>H</i>	charakteristische Probengrösse
<i>I</i>	Flächenträgheitsmoment
<i>K</i>	Spannungsintensitätsfaktor; Koeffizient
<i>L</i>	Probengeometriefaktor
<i>M</i>	Moment
<i>N</i>	Normalkraft
<i>P</i>	Vorspannkraft; Versagenswahrscheinlichkeit
<i>U</i>	Formänderungsenergie
<i>RH</i>	relative Luftfeuchtigkeit
<i>S</i>	Oberflächenenergie
<i>V</i>	Volumen
<i>W</i>	Widerstandsmoment
<i>Y</i>	Formfunktion
<i>Z</i>	Zugkraft

## Lateinische Kleinbuchstaben

<i>a</i>	Risstiefe; Abstand
<i>b</i>	Breite
<i>c</i>	Konstante
<i>d</i>	Abstand; Bruchprozesszonendicke; Grösstkorndurchmesser
<i>e</i>	Stababstand
<i>f</i>	Baustoff - Festigkeit; bezogene Fläche
<i>h</i>	Höhe

<i>k</i>	Koeffizient
<i>l</i>	Länge
<i>m</i>	Koeffizient
<i>n</i>	Wertigkeit; Anzahl
<i>q</i>	verteilte Belastung
<i>r</i>	Abstand zur Rissspitze
<i>s</i>	Abstand
<i>t</i>	Probendicke
<i>u</i>	Verlängerung
<i>w</i>	Durchbiegung; Rissbreite; Rissöffnung
<i>x, y, z</i>	Koordinaten
<i>z</i>	Druckzonenhöhe

## Griechische Buchstaben

$\alpha$	Winkel; Koeffizient; Abminderungsfaktor
$\beta$	Zugversteifungsfaktor
$\gamma$	spezifische Oberflächenenergie
$\delta$	Schlupf
$\Delta$	Differenz; Verformung
$\varepsilon$	Dehnung
$\zeta$	bezogene Länge; Formbeiwert
$\eta$	bezogene Risstiefe; bezogene Höhe
$\vartheta$	Druckfeldneigung; Verbundparameter
$\Theta$	Gelenkwinkel
$\kappa$	Verhältnis; Exponent
$\lambda$	Faktor
$\mu$	normiertes Moment $\mu = \frac{6M}{f_{ct}bh^2}$
$\nu$	Querkontraktionszahl; normierte Normalkraft $\nu = \frac{N}{f_{ct}bh}$
$\xi$	bezogene Druckzonenhöhe
$\rho$	geometrischer Bewehrungsgehalt; Fehlstellendichte; Kerbgrundradius

$\sigma$	Normalspannung; Standardabweichung
$\tau$	Schubspannung
$\varphi$	Beiwert
$\chi$	Krümmung; Entfestigungsstabilitätsfaktor
$\psi$	Bewehrungslage ( $\psi = d/h$ )
$\omega$	mechanischer Bewehrungsgehalt

### Weitere Zeichen

$\emptyset$	Durchmesser
$\infty$	Unendlich

### Fusszeiger

<i>I</i>	ungerissen
<i>II</i>	gerissen
<i>L</i>	Ligament
<i>M</i>	Moment
<i>N</i>	Nennfestigkeit; Nebenschluss; Normalkraft
<i>P</i>	Prüfmaschine
<i>R</i>	Rippe
<i>T</i>	Temperatur
<i>adm</i>	zulässig
<i>b</i>	Biegung; Verbund
<i>c</i>	Beton; Zylinder
<i>cal</i>	rechnerisch
<i>ch</i>	charakteristisch
<i>cr</i>	kritisch
<i>e</i>	Eintragung
<i>eff</i>	effektiv
<i>erf</i>	erforderlich
<i>exp</i>	experimentell
<i>f</i>	Faser; Form
<i>h</i>	Verfestigungsbeginn

<i>id</i>	ideell
<i>inf</i>	unten
<i>m</i>	Mittelwert; Mitte
<i>max</i>	Maximum
<i>min</i>	Minimum
<i>p</i>	Vorspannung
<i>pl</i>	plastisch
<i>r</i>	Riss
<i>red</i>	reduziert
<i>s</i>	Entfestigung; Störung; Stahl; Schwinden
<i>sup</i>	oben
<i>t</i>	Zug
<i>u</i>	Bruch; Versagenszustand
<i>v</i>	Verfestigung; Versatz
<i>w</i>	Würfel
<i>y</i>	Fliessen; Fließgrenze
<i>z</i>	Druckzone
0	Anfang; initial; klassisch
1..4	Numerierung

### Kopfzeiger

$\dot{\square}$	Inkrement
-----------------	-----------

## Lebenslauf

Albin Kenel Lüthold

geboren in Zug am 26. Juni 1969

von Arth, SZ

### Ausbildung

- |             |   |
|-------------|---|
| 1976 – 1982 | Primarschule in Arth  |
| 1982 – 1985 | Sekundarschule in Oberarth  |
| 1985 – 1989 | Lehre als Metallbauschlosser bei A. Kaufmann AG in Goldau   |
| 1985 – 1988 | Berufsmittelschule in Emmen   |
| 1989 – 1992 | Ausbildung zum Bauingenieur HTL am Interkantonalen Technikum Rapperswil; Diplomarbeit “Stahlbau” bei K. Schellenberg; Auszeichnung für die beste praktische Diplomarbeit.   |
| 1993 – 1994 | Übertrittskurs HTL-ETHZ am Technikum in Winterthur und Aufnahmeprüfung an die ETH Zürich.   |
| 1994 – 1997 | Bauingenieurstudium an der ETH Zürich; Diplomarbeit “Verhalten von Holz/Beton-Verbundkonstruktionen unter langfristiger Beanspruchung” bei Prof. Dr. F.H. Wittmann; Auszeichnung der Diplomarbeit aus dem Culmann-Fond. |

### Berufliche Tätigkeit

- |              |  |
|--------------|--|
| 1992 – 1993  | Projektstatiker im Ingenieurbüro Birchler, Pfyl + Partner AG in Schwyz   |
| 1995         | Maurerpraktikum bei Brusa J.L. Bauunternehmung AG in Steinen; (4 Monate)   |
| ab März 1997 | Assistent und wissenschaftlicher Mitarbeiter von Prof. Dr. P. Marti am Institut für Baustatik und Konstruktion der ETH Zürich. |