

Diss. ETH Nr. 15194

# **Beitrag zur Simulation von Parallelkinematiken**

ABHANDLUNG  
zur Erlangung des Titels

Doktor der Technischen Wissenschaften  
der  
Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich

vorgelegt von  
Matthias Cobet  
Dipl.-Ing. Universität Karlsruhe (TH)

geboren am 20.07.1973

Angenommen im Auftrag von  
Prof. Dr. J. Reissner, Referent  
Prof. Dr.-Ing. habil. R. Neugebauer, Koreferent

2003

---

**Abstract**

The static and dynamic properties of a parallelkinematic machine tool are determined by the kinematic design and the properties of the machine tool parts. Whereas the influence of various kinematic designs has been studied in detail, the influence of the parts on the properties of a parallel kinematic machine tool have been neglected.

In this thesis the influence of the machine parts on the properties of a parallel kinematic machine tool is studied and quantified on the example of the Hexaglide- and the 6X Hexapod-Kinematic. Based on investigations, which have been undertaken to determine the properties of the machine parts, various models have been developed to describe the behaviour of these parts. The models are integrated into a simulation tool. With the use of the simulation tool it has been shown, that the static and dynamic properties of a parallelkinematic machine tool are strongly dependent on the influence of the machine parts and may therefore not be neglected.

The importance of the machine parts and the potential of their optimisation has been shown on various examples. By comparing different parallelkinematic machine tools with different designs and different kinematic principles the influence of the kinematic principle on the distribution of specific properties is also shown.

## **Kurzfassung**

Für die statischen und dynamischen Eigenschaften einer parallelkinematischen Werkzeugmaschine sind neben dem Einfluss der Kinematik vor allem die Eigenschaften der in diesen Maschinen eingesetzten Komponenten verantwortlich. In bisherigen Forschungsarbeiten wurde ausschließlich der Einfluss der Kinematik untersucht und die Bedeutung der Maschinenkomponenten vernachlässigt.

In der vorliegenden Arbeit wird am Beispiel der bei der Hexaglide- und der 6X Hexapod-Kinematik eingesetzten Antriebe und Gelenke der Einfluss dieser Maschinenkomponenten untersucht und quantifiziert. Ausgehend von den an den Maschinenkomponenten durchgeführten Untersuchungen werden Modelle entwickelt, mit denen sich das für die statischen und dynamischen Eigenschaften wesentliche Verhalten einer Werkzeugmaschine beschreiben lässt. Durch die Integration der entwickelten Komponentenmodelle in ein Simulationswerkzeug können verschiedene Eigenschaften einer parallelkinematischen Werkzeugmaschine berechnet und analysiert werden. Es kann gezeigt werden, dass der Einfluss der Maschinenkomponenten auf die statischen und dynamischen Eigenschaften von Parallelkinematiken erheblich ist und daher nicht vernachlässigt werden darf.

Anhand von Beispielen werden die Bedeutung der einzelnen Maschinenkomponenten und das Potential ihrer gezielten Optimierung aufgezeigt. Durch einen Vergleich von verschiedenen Parallelkinematiken kann die Bedeutung des kinematischen Prinzips für die Verteilung von wichtigen Eigenschaften innerhalb des Arbeitsraums für eine Bearbeitungsaufgabe gezeigt werden.

---

**Inhaltsverzeichnis**

<b>Abstract</b>	<b>I</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>II</b>
<b>Abkürzungen, Bezeichnungen und Konventionen</b>	<b>V</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Problemstellung	3
1.2 Stand der Forschung und Technik	4
1.3 Handlungsbedarf	6
1.4 Zielsetzung	7
<b>2 Darstellungen der Simulationsergebnisse</b>	<b>9</b>
<b>3 Komponentenuntersuchung und Modellierung</b>	<b>12</b>
3.1 Antriebe, Linearführungen und Stäbe	13
3.1.1 Grundlagen der Modellierung	14
3.1.2 Hexaglide-Kinematik	19
3.1.3 6X Hexapod-Kinematik	21
3.2 Gelenke	23
3.2.1 Grundlagen der Modellierung	24
3.2.2 Finite-Element-Analysen	28
3.2.3 Messungen auf einer Zugprüfmaschine	36
3.2.4 Vergleich Finite-Element-Analysen - Messungen	40
3.2.5 Hexaglide-Kinematik	41
3.2.6 6X Hexapod-Kinematik	43
3.3 Plattform und Werkzeugspindel	46
3.3.1 Hexaglide-Kinematik	46
3.3.2 6X Hexapod-Kinematik	47
<b>4 Simulationsmodelle</b>	<b>48</b>
4.1 Arbeitsraum	48
4.1.1 Arbeitsraumdefinitionen	49
4.1.2 Analytische Verfahren	53
4.1.3 Diskretisierende Verfahren	55
4.1.4 Modifiziertes Octree-Verfahren	57
4.1.5 Zweidimensionales Prädiktor-Korrektor-Verfahren	66
4.2 Strukturmodell	68
4.2.1 Grundlagen der Modellbildung	70
4.2.2 Modellierung der Subsysteme	73
4.2.3 Modellsynthese	80
4.2.4 Auswertungen	82
4.3 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverhalten	89
4.3.1 Übertragungsverhalten	89
4.3.2 Maximale Geschwindigkeit des Werkzeugs	92
4.3.3 Maximale Beschleunigung des Werkzeugs	92

<b>5 Simulationen und Messungen von Parallelkinematiken</b>	<b>97</b>
5.1 Varianten der Hexaglide-Kinematik	97
5.1.1 Originalzustand der Hexaglide-Kinematik	98
5.1.2 Variante 1 der Hexaglide-Kinematik	102
5.1.3 Variante 2 der Hexaglide-Kinematik	105
5.1.4 Vergleich der Varianten mit der Originalkonfiguration	109
5.2 Verschiedene Hexaglide- und Hexapod-Kinematiken	110
5.2.1 6X Hexapod-Kinematik	110
5.2.2 Linapod-Kinematik	112
5.2.3 Paralix-Kinematik	114
5.3 Komponentenoptimierung am Beispiel des Hexaglides	116
5.4 Geometrieoptimierung am Beispiel des Hexaglides	119
5.5 Vergleich Simulation - Messung	121
<b>6 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>125</b>
6.1 Zusammenfassung	125
6.2 Ausblick	128
<b>Anhang A: Kinematische Grundlagen</b>	<b>129</b>
A.1 Allgemeine Lagebeschreibungen	129
A.2 Allgemeine Koordinatentransformation	130
A.2.1 Rückwärtstransformation	131
A.2.2 Vorwärtstransformation	133
A.3 Jakobimatrix	135
<b>Anhang B: Geometrische und physikalische Randbedingungen</b>	<b>137</b>
B.1 Zulässigkeit der Antriebsposition	137
B.2 Gelenkwinkelprüfung	138
B.3 Prüfung auf singuläre Lagen	139
B.4 Stabkollisionsprüfung und Plattformkollisionsprüfung	140
B.5 Prüfung der statischen Antriebsbelastung	142
<b>Anhang C: Parameterlisten</b>	<b>144</b>
C.1 Hexaglide - Kinematik	144
C.1.1 Originalzustand	144
C.1.2 Variante 1	145
C.1.3 Variante 2	146
C.2 Linapod - Kinematik	146
C.3 Paralix - Kinematik	148
C.4 6X Hexapod - Kinematik	148
C.5 Biglide- und Bipod-Kinematik	149
<b>Literatur</b>	<b>151</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>160</b>

## Abkürzungen, Bezeichnungen und Konventionen

### Abkürzungen

Zeichen	Beschreibung
CAD	Computer-Aided-Design (Computer gestützte Entwicklung)
FEM	Finite-Element-Methode
KGT	Kugelgewindetrieb
MKS	Maschinenkoordinatensystem
PKM	Parallelkinematik
PKS	Plattformkoordinatensystem
SDE	Stiffness-Damping-Element (Feder-Dämpfer-Element)
TCP	Tool-Centre-Point (Werkzeugbezugspunkt)

### Lateinische Symbole

Zeichen	Beschreibung
<b>A</b>	allgemeine Matrix
A	Flächeninhalt einer Fläche
$\mathbf{a}_{1-6}$	Richtungsvektor der Antriebsgelenke (erste Gelenkachse)
$a, b, c$	Rotationswinkel um die X-, Y- und Z-Achse des MKS [ISO841]
$a', b', c'$	Rotationswinkel um die X-, Y- und Z-Achse des PKS [ISO841]
$\mathbf{b}_{1-6}$	Winkelbezugsvektor der Antriebsgelenke (erste Gelenkachse)
$b_h$	Abstand eines Messtasters vom Gelenkbezugspunkt
B	Gelenkbezugspunkt
<b>C</b>	Diagonalmatrix der coulombschen Reibung
<b>d</b>	Verschiebungs- und Verdrehungsvektor aller Modellkomponenten
$\mathbf{d}_{1-6}$	Richtungsvektoren der Stäbe
$d_{i,j}$	Abstand des Punkts 'i' vom Punkt 'j' (Ausgangslage)
$d'_{i,j}$	Abstand des verschobenen Punkts 'i' vom Punkt 'j'
$\mathbf{d}_{i,x}$	Richtungsvektoren der Stäbe in allgemeinen Koordinaten
$d_{Sp}$	Durchmesser einer Antriebsspindel
$dx, dy, dz$	effektive Auflösung einer Berechnung in x-, y- und z-Richtung
$da_i$	Länge der Grundseite einer Pyramide 'i'
$dh_i$	Höhe eines Dreiecks 'i'
$dp_i$	effektive Auflösung der Berechnungen
E	Elastizitätsmodul, Energie
$\mathbf{e}_i$	Koordinaten eines Eckpunkts eines Voxels ( $i = 1 \dots 8$ )

<b>Zeichen</b>	<b>Beschreibung</b>
$E_{Kin,i}$	kinetische Energie eines Körpers 'i'
$E_{Pot,i,j}$	potentielle Energie zwischen zwei Körpern 'i' und 'j'
<b>f</b>	allgemeiner Lastvektor aus Kräften und Momenten
$f_0$	Eigenfrequenz eines Systems
$f_h$	Abstand eines Messtasters vom Gelenkbezugspunkt
$F(\dot{Q})$	Vektor der Reibungskräfte im Antriebskoordinatensystem
<b>G</b>	Schubmodul
<b>H</b>	Transformationsmatrix
$h_i$	Höhe einer Pyramide / eines Tetraeders
$h_i^t$	wahre Höhe einer Pyramide / eines Tetraeders
$h_S$	Gewindesteigung einer Gewindespindel
<b>J</b>	Jakobimatrix
<b>J</b>	Trägheitsmoment
<b>J<sub>C</sub></b>	kinematische Jakobimatrix
<b>J<sub>E</sub></b>	Jakobimatrix der Euler-Winkel
<b>J<sub>R</sub></b>	relative Jakobimatrix
<b>K</b>	allgemeine Steifigkeitsmatrix
$k_A$	axiale (skalare) Steifigkeit eines Antriebssystems
$k_{AaL}$	axiale Steifigkeit eines Lagers 'A'
$k_{ArL}$	radiale Steifigkeit eines Lagers 'A'
<b>K<sub>A</sub></b>	Steifigkeitsmatrix eines Antriebssystems
$k_{AG}$	Steifigkeit eines Antriebsgelenks
$k_{aL}$	Steifigkeit einer Axiallagerung
$k_i$	allgemeine Steifigkeit einer kinematischen Kette
<b>K<sub>L</sub></b>	Steifigkeitsmatrix der Stäbe (Diagonalmatrix)
$k_m$	Motorkonstante
$k_M$	Steifigkeit einer Gewindemutter eines Kugelgewindetriebs
<b>K<sub>P</sub></b>	Steifigkeitsmatrix einer Plattform
$k_{PG}$	Steifigkeit eines Plattformgelenks
$k_{px}$	Lageregelverstärkung
$k_S$	Steifigkeit der Spindel-Plattform-Bindung
$k_{SDE}$	skalare Zug-Drucksteifigkeit eines Stiffness-Damping-Elements
<b>K<sub>SDE</sub></b>	Steifigkeitsmatrix eines Stiffness-Damping-Elements

<b>Zeichen</b>	<b>Beschreibung</b>
$k_{Sp}$	längenabhängige Steifigkeit einer Gewindespindel
$k_{St}$	Steifigkeit eines Stabs
$k_{TM}$	Steifigkeit der Anschlusskonstruktion der Gewindemutter
$K_G$	Steifigkeitsmatrix eines Gelenks
$K_{W,i}'$	Steifigkeitsmatrix eines Antriebs 'i' im Antriebskoordinatensystem
$K_X$	globale Steifigkeitsmatrix im kartesischen Koordinatensystem
$k_x, k_y, k_z$	Steifigkeiten in den kartesischen Raumrichtungen
$l_{1-6}$	absolute Länge der Stäbe
$l_{abs}$	absolute Spindellänge
$l_{eff}$	effektive Spindellänge
$l_i$	effektive Länge des Stabs 'i'
$L_i(\mathbf{q}_i)$	Verschiebungen in generalisierten Koordinaten
$l_{i,k}$	Gesamtheit der Längenänderungen
$m$	Masse, Anzahl der zur Volumenberechnung verwendeten Körper
$\mathbf{m}$	Vektor der Antriebsmassen
$\mathbf{m}_{1-6}$	Richtungsvektor der Plattformgelenke im MKS
$\mathbf{m}'_{1-6}$	Richtungsvektor der Plattformgelenke im PKS
$m_{Ai}$	Masse eines Antriebs (mit $i = 1-6$ )
$m_{Pl}$	Masse einer Plattform
$m_{St}$	Masse eines Stabs
$\mathbf{M}_A(\mathbf{q})$	Massenmatrix der Antriebe im Antriebskoordinatensystem
$\mathbf{M}_P(\mathbf{x})$	Massen- und Trägheitsmatrix einer Plattform in kartesischen Koordinaten
$\mathbf{M}_q(\mathbf{q})$	Massenmatrix im Gelenkraum
$\mathbf{M}_S$	Massenmatrix der Antriebe (Diagonalmatrix)
$m_{Sp}$	Masse einer Werkzeugspindel
$\mathbf{n}$	Normalenvektor einer Fläche / eines Vektors
$\mathbf{n}_{1-6}$	Winkelbezugsvektor der Plattformgelenke im MKS
$\mathbf{n}'_{1-6}$	Winkelbezugsvektor der Plattformgelenke im PKS
$\mathbf{N}_{i,j}$	Bezugsmatrix
$O$	Ursprung des Maschinenkoordinatensystems [ISO841]
$O'$	Ursprung des Plattformkoordinatensystems
$\mathbf{p}_{1-6}$	Gelenkkoordinaten der Plattform im MKS
$\mathbf{p}'_{1-6}$	Gelenkkoordinaten der Plattform im PKS



Zeichen	Beschreibung
$q_A$	Antriebskoordinaten ( $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ )
$q_{1-6}$	Gelenkkoordinaten der Antriebe im MKS
$q_i$	generalisierte Koordinaten
$q_P$	Translationen und Rotationen der Plattform im globalen System
$q_S$	Translationen und Rotationen der Spindel im globalen System
$R$	Rotationsmatrix
$r_{1-6}$	Richtungsvektoren der Führungsbahnen und der Antriebe
$r$	allgemeiner Vektor
$R_{i,n}$	Bezugsmatrix der Last 'n' an den Körper 'i'
$r_{P,U}$	SDE Angriffspunkt vom Schwerpunkt der Plattform aus
$r_{S,U}$	SDE Angriffspunkt vom Schwerpunkt der Spindel aus
$s$	Standardabweichung, Sicherheitszugabe
$s_{1-6}$	Ortsvektoren der Führungsbahnen
$s_i$	Koordinaten des Schwerpunkts eines Voxels
$t_{1-6}$	Länge der Führungsbahnen einer Parallelkinematik nach dem Glide-Prinzip
$u(x)$	Unsicherheit einer Größe $x$
$U$	Plattform-Werkzeugspindel-Bindung
$V$	Volumen
$V$	Diagonalmatrix der viskosen Reibung
$V_i$	Antrieb - Plattform - Bindung der kinematischen Kette 'i'
$V(q, \dot{q})$	Matrix der Zentrifugal- und Coriolisterme
$w$	Ortsvektor des Werkzeugbezugspunkts
$w$	Wichtungsfaktoren
$W$	Wichtungsmatrix
$W_i$	Antrieb - Umgebungs - Bindung
$x_i$	generalisierte kartesische Koordinaten ( $x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i$ ) [ISO841]
$x, y, z$	Achsen des Maschinenkoordinatensystems
$x', y', z'$	Achsen des Plattformkoordinatensystems
$x, y, z$	kartesische Koordinaten
$Z$	Zentrum eines untersuchten Volumens

**Griechische Symbole**

<b>Zeichen</b>	<b>Beschreibung</b>
$\delta d_{i,j}$	Längenänderung eines SDE durch Verschiebung / Verdrehung
$\delta h, \delta t, \delta l$	allgemeine Längenänderung
$\partial / \partial \mathbf{q}_A$	Ableitung nach den Antriebskoordinaten
$\delta \mathbf{q}$	allgemeiner Verschiebungs- / Verdrehungsvektor
$\varepsilon$	obere Schranke der Berechnungsgenauigkeit
$\vartheta_{i,A}$	Kippwinkel des i-ten antriebsseitigen Gelenks
$\vartheta_{i,P}$	Kippwinkel des i-ten plattformseitigen Gelenks
$\kappa$	Konditionszahl einer Matrix
$\lambda$	Eigenwert einer Matrix
$\lambda_i$	Abstand des Antriebs vom Anfangspunkt einer Führungsbahn 'i'
$\rho$	Dichte
$\sigma$	Singularwert einer Matrix
$\tau_a$	Vektor der Gelenkmomente
$\tau_{eff}$	Vektor der effektiv verfügbaren Antriebskräfte
$\tau_{q,max}$	Vektor der maximalen Antriebskräfte
$\tau_{q,min}$	Vektor der minimal vorgegebenen Kraftreserve der Antriebe
$\varphi_{i,A}$	Schwenkwinkel des i-ten Antriebsgelenks
$\varphi_{i,P}$	Schwenkwinkel des i-ten Plattformgelenks
$\omega$	Eigenkreisfrequenz
$\Omega$	Abstand eines Doppelpols eines Antriebs von der reellen Achse

**Sonstige Symbole**

<b>Zeichen</b>	<b>Beschreibung</b>
${}^n x$	nominaler Wert einer Größe $x$
$r_x$	realer Wert einer Größe $x$
$\dot{x}, \ddot{x}$	einfache und zweifache Ableitung einer Größe $x$ nach der Zeit
$\bar{x}$	Mittelwert einer Größe $x$
diag	Diagonale einer Matrix
sign	Signumfunktion
$\mathbf{A}^T$	Transponierte einer Matrix $\mathbf{A}$
$\mathbf{A}^{-1}$	Inverse einer Matrix $\mathbf{A}$
$\ \mathbf{q}\ $	Norm eines Vektors
$\ \mathbf{A}\ $	Norm einer Matrix

**Zeichen****Beschreibung**

<b><math>\mathbf{x} \times \mathbf{y}</math></b>	Kreuzprodukt zweier Vektoren <b><math>\mathbf{x}</math></b> und <b><math>\mathbf{y}</math></b>
--	--

## 1 Einleitung

Zwei Entwicklungsrichtungen der immer weiter fortschreitenden Globalisierung der Märkte haben für die fertigende Industrie besondere Bedeutung. Dies sind zum einen der sich erhöhende Innovationsdruck, der zu immer kürzeren Produktlebenszyklen, kleineren Losgrößen und damit zu höheren Flexibilitätsanforderungen an die Produktionseinrichtungen führt, und zum anderen der stark zunehmende Kostendruck, der sich aus der Globalisierung der Wertschöpfung ergibt.

Diese Entwicklungsrichtungen haben Auswirkungen auf die Anforderungen, die an moderne Werkzeugmaschinen gestellt werden. Während dem Innovationsdruck durch die Entwicklung von hoch flexiblen Universaldreh- und Fräszentren Rechnung getragen wird, stellt der zunehmende Kostendruck nach wie vor eine Herausforderung für die Werkzeugmaschinenindustrie dar. Dies ist vor allem darauf zurückzuführen, dass die Anforderungen an Werkzeugmaschinen zum Teil widersprüchlich sind. So ist zum Beispiel die Forderung nach einer hohen Produktivität bei gleichzeitig hoher Genauigkeit und niedrigen Herstellkosten der Werkzeugmaschine gegensätzlich.

Für eine möglichst hohe Produktivität werden die Maschinen mit immer höheren Leistungen ausgestattet, was zu höheren Drehzahlen, Schnittleistungen und Beschleunigungen führt. Um gleichzeitig eine hohe Qualität liefern zu können, werden die Werkzeugmaschinen immer steifer und damit auch immer schwerer gebaut. Hierdurch wird wiederum die maximal erreichbare Dynamik der Maschinen begrenzt. Darüber hinaus müssen die einzelnen Komponenten einer klassischen Werkzeugmaschine hoch genau gefertigt werden, da die maximale Bearbeitungsgenauigkeit direkt von der Genauigkeit der einzelnen Komponenten abhängt. Dies führt zusammen mit der Zunahme des Maschinengewichts zu einer erheblichen Steigerung der Herstellungskosten einer Werkzeugmaschine. Der geringe Anteil von Gleiteilen einer klassischen Werkzeugmaschine erschwert zusätzlich die Nutzung der mengenabhängigen Kostendegression bei der Herstellung der Maschinenteile.

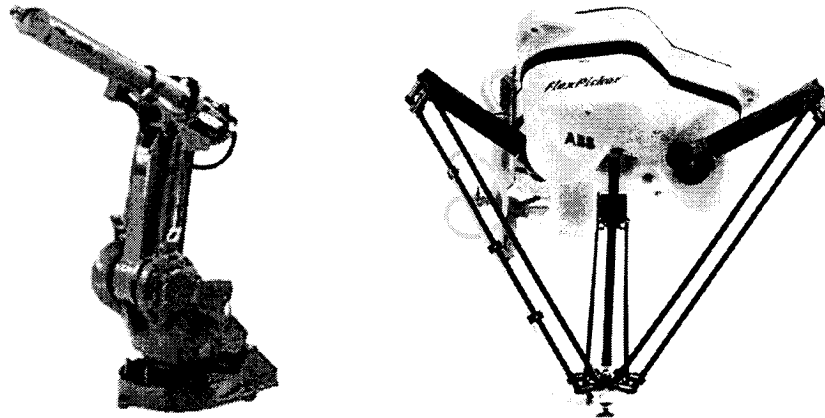
Im Laufe der über 100-jährigen Entwicklungsgeschichte haben sich die klassischen Werkzeugmaschinen den physikalischen Grenzen dieser Technologie angenähert. Durch den Einsatz neuer Materialien kann die Leistungsfähigkeit dieser Technologie zwar weiter gesteigert werden, ein „Quantensprung“ bei der Anforderungserfüllung ist allerdings nicht mehr zu erwarten.

Um den steigenden Anforderungen genügen zu können und damit die internationale Wettbewerbsfähigkeit der fertigenden Industrie sicherzustellen, sind staatliche und private Forschungseinrichtungen auf der Suche nach alternativen Konzepten zur klassischen Werkzeugmaschinenarchitektur. Eine Möglichkeit die Leistungsfähigkeit von Werkzeugmaschinen weiter zu steigern, bietet die Parallelkinematik. Hierbei werden die Achsen parallel angeordnet und nicht seriell, wie bei der klassischen Werkzeugmaschinenarchitektur üblich. Der Unterschied zwischen serieller und paralleler Achsanordnung wird in Abbildung 1.1 am Beispiel von zwei Industrierobotern gezeigt: Während sich bei dem seriellen Roboter (links) die Achsen gegenseitig tragen, stützt bei dem parallelen Roboter (rechts) jede der einzelnen Achsen die gemeinsame Plattform.

Parallelkinematiken entsprechen mit ihren grundsätzlichen Eigenschaften [Neu00]:

- hohe Dynamik (Geschwindigkeit und Beschleunigung) aufgrund geringer zu bewegender Massen,
- modularer Aufbau mit hohem Wiederholteilegrad als Basis für niedrigere Herstellkosten,

hervorragend den oben genannten Anforderungen, weshalb ihnen ein hohes Potential im Bereich der Werkzeugmaschinen eingeräumt wird.



**Abbildung 1.1: Serieller Industrieroboter (links) am Beispiel des IRB 1440 und paralleler Industrieroboter (rechts) am Beispiel des IRB 340 „FlexPicker“ der Firma ABB**

Die Entwicklung moderner parallelkinematischer Maschinen begann Ende des 20. Jahrhunderts. In den siebziger Jahren wurden die ersten Flugsimulatoren und in den achtziger Jahren die ersten Roboter mit paralleler Kinematik für die praktische Anwendung entwickelt. Auf der „International Machine Tool Show“ in Chicago 1994 wurden erstmals drei Prototypen parallelkinematischer Werkzeugmaschinen vorgestellt. Diese Präsentation und die durch diese Maschinen hervorgerufenen Erwartungen lösten weltweit große Entwicklungsanstrengungen aus, die sowohl von der Werkzeugmaschinenindustrie als auch von verschiedenen staatlichen Forschungseinrichtungen getragen worden sind. Da es eine fast unendliche Vielzahl von möglichen Kinematikvarianten gibt, wiesen diese Maschinenstudien der ersten Generation nur wenige Gemeinsamkeiten auf.

Aufgrund dieser Variantenvielfalt und einer Reihe weiterer Besonderheiten (vgl. Kapitel 1.1) ist die Entwicklung einer parallelkinematischen Werkzeugmaschine eine komplexe Optimierungsaufgabe.

Dies hat zur Folge, dass viele der bisher realisierten Maschinen eine nicht optimale Auslegung und damit zumindest eine der folgenden Einschränkungen aufweisen:

- ein unzureichendes Verhältnis von Arbeitsraum zu Maschinenvolumen,
- zu geringe statische Steifigkeit und zu niedrige erste Eigenfrequenzen,
- unzureichende Positioniergenauigkeit,
- für Fünfseitenbearbeitung unzureichende Schwenkwinkel.

Da diese parallelkinematischen Werkzeugmaschinen außerdem in direkter Konkurrenz zu jahrzehntelang optimierten, erprobten und zuverlässigen seriellen Werkzeugmaschinen stehen, konnten sie sich auf dem Markt nicht wie erwartet durchsetzen. Bedingt durch das hierdurch nachlassende Interesse der Werkzeugmaschinenindustrie konzentrierte sich die Forschung in diesem Bereich wieder auf die staatlichen Forschungseinrichtungen, wodurch sie weitestgehend akademischen Charakter annahm und die praktische Anwendung und Umsetzung der gewonnenen Erkenntnisse in den Hintergrund traten. Eine weitere Folge des Rückzugs der Werkzeugmaschinenindustrie war ein deutlicher Rückgang der für diese Forschung zur Verfügung stehenden Ressourcen.

Mit der METAV 2000, auf der parallelkinematischen Werkzeugmaschinen im Rahmen der Sonderschau „TRENDS 2000“ eine eigene Präsentationsplattform eingeräumt worden ist, hat das Interesse an diesen Maschinen wieder zugenommen. Wie eine im Jahr 2002 durchgeführte Untersuchung von Weck [Wec02] zeigt, befinden sich inzwischen mehrere weiterentwickelte parallelkinematische Werkzeugmaschinen der zweiten Generation im industriellen Fertigungseinsatz.

Eine ausführliche Darstellung der Entwicklungsgeschichte von Parallelkinematiken findet sich unter anderem bei Wieland [Wie00].

### 1.1 Problemstellung

Die Auslegung und Optimierung einer parallelkinematischen Werkzeugmaschine stellen für Ingenieure eine neue Herausforderung dar, da sich die im klassischen Werkzeugmaschinenbau gewonnenen Erfahrungen nur sehr begrenzt auf Parallelkinematiken übertragen lassen. Neben der begrenzten Erfahrung lassen sich zwei Hauptproblembfelder bei der Auslegung einer Parallelkinematik identifizieren [Mer98]:

- die Wahl einer angemessenen kinematischen Topologie,
- die angemessene Dimensionierung der einzelnen Maschinenkomponenten.

Weil die Festlegung der kinematischen Topologie und die Dimensionierung der einzelnen Maschinenkomponenten die Leistungsfähigkeit paralleler Kinematiken entscheidend beeinflussen, ist ihre optimale Auslegung von hoher Bedeutung. Dies lässt sich an einem Beispiel verdeutlichen: Eine Änderung des Plattformdurchmessers einer Gough-Parallelkinematik um zehn Prozent kann die Steifigkeit des Gesamtmechanismus im ungünstigsten Fall um bis zu 700 Prozent verändern [Mer02].

Neben diesen Problembfeldern gibt es bei Parallelkinematiken weitere Besonderheiten, die ihre Auslegung, Optimierung und Dimensionierung der einzelnen Maschinenkomponenten erschweren:

- Der Arbeitsraum ergibt sich nicht aus dem Produkt der maximal nutzbaren Achslängen, sondern stellt ein meist unregelmäßig geformtes höherdimensionales Gebilde dar. Im Gegensatz zu seriellen Kinematiken sind die rotatorischen und translatorischen Bewegungsgrenzen des Werkzeugs positions- und orientierungsabhängig.

- Die statischen und dynamischen Eigenschaften (Beschleunigungsvermögen, maximale Bahngeschwindigkeiten, Steifigkeiten, Eigenfrequenzen) werden durch die nichtlineare Kopplung der Achsen von der Position und der Orientierung des Werkzeugs bestimmt.
- Die Positioniergenauigkeit ist keine lineare Funktion der einzelnen Achsabweichungen, sondern eine komplexe Funktion, die durch die Kinematik bestimmt wird. Hierdurch ist auch diese von der Position und Orientierung des Werkzeugs abhängig.
- Die Gestaltungsparameter sind nichtlinear voneinander abhängig. Die Veränderung einer Achse wirkt sich auf das gesamte Maschinenverhalten aus.
- Die Dimensionierung der einzelnen Komponenten ist im Vergleich zu seriellen Werkzeugmaschinen aufwendiger, da die auftretenden Belastungen durch die Kinematik vergrößert beziehungsweise verkleinert werden können.

Darüber hinaus müssen eine Reihe von Randbedingungen, die von der gewählten Konfiguration und dem Aufbau der Maschine abhängen, beachtet werden:

- Kollisionen zwischen einzelnen Antrieben, Antrieben und Stäben, zwischen einzelnen Stäben sowie zwischen Stäben und der Plattform,
- Beschränkungen der Winkellagen der eingesetzten Gelenke,
- Singularitäten (Definition siehe Anhang B.3),
- statische Antriebsbelastung durch die kinematikübersetzte Schwerkraft.

Diese Besonderheiten und Randbedingungen machen die Auslegung einer Parallelkinematik zu einer komplexen Aufgabe, die aufgrund der hohen Anzahl nichtlinear verknüpfter Parameter nur in wenigen Sonderfällen analytisch gelöst werden kann.

## 1.2 Stand der Forschung und Technik

Die Forschung im Bereich der Parallelkinematik zerfällt in mehrere Bereiche, die nur wenige Überschneidungen aufweisen. Dies wirkt sich negativ auf die praktische Anwendung der gewonnenen Forschungsergebnisse aus. Die Forschungsarbeiten im Bereich der parallelkinematischen Werkzeugmaschinen lassen sich in Abhängigkeit von der Bauart der untersuchten Kinematiken in zwei Gruppen teilen: Poden (Kinematiken, die auf dem Prinzip der längenveränderlichen Stäbe basieren) und Glides (Kinematiken, die auf dem Prinzip des bewegten Fußpunkts basieren). Innerhalb dieser beiden Gruppen sind hauptsächlich verschiedene Aspekte der jeweiligen Kinematikvarianten untersucht worden. Eine Ausnahme hiervon stellt Pritschow [Pri00] dar, der die mit den verschiedenen Bauarten verbundenen Vor- und Nachteile gegenübergestellt und Ansätze zur Vermeidung der jeweiligen Nachteile vorgestellt hat.

Ausgehend von grundlegenden Untersuchungen zu den Freiheitsgraden einer Kinematik und deren möglichen Konfigurationen, die unter anderem von Bagci, Chablat und Lazard [Bag71, Cha98, Laz94] durchgeführt worden sind, ist das bei Parallelkinematiken verstärkt auftretende Problem der Singularitäten von Gosselin, Kim, Takeda und Zlatanov [Gos90b, Gos90c, Kim99, Tak96, Zla95] weitergehend untersucht worden. Gosselin und Kim klassifizieren auftretende Singularitä-

ten anhand der Eigenschaften und der Determinante der Jakobimatrix, während Takeda die Umgebung von Singularitäten über die Jakobimatrix, einen Transmissionsindex und die Isotropie der resultierenden Kräfte beschreibt. Zlatanov präsentiert einen Ansatz zur Berechnung von Singularitäten direkt aus den Bewegungsgleichungen.

Eine bei Parallelkinematiken auftretende Herausforderung stellt die Transformation der Antriebskoordinaten in die Koordinaten des Werkzeugs dar, die im Allgemeinen als Vorwärtstransformation bezeichnet wird. Diese ist bis auf wenige Sonderfälle nicht geschlossen analytisch darstellbar. Untersuchungen zur Vorwärtstransformation wurden unter anderem von Chen, Husain, Innocenti, Shi und Zhang [Che92, Hus92, Inn93, Shi92, Shi94, Zha92] durchgeführt. Chen und Husain beschreiben eine geschlossene analytische Lösung für die Vorwärtstransformation einer Stewart-Parallelkinematik unter Zuhilfenahme verschiedener Randbedingungen. Für einen allgemeinen Hexapod wird von Innocenti ein eindimensionaler Suchalgorithmus für die numerische Lösung der Vorwärtstransformation präsentiert. Sind die Geschwindigkeiten dreier Punkte auf einer Plattform bekannt, so kann die Vorwärtstransformation nach einem Ansatz von Shi geschlossen dargestellt werden. Von Zhang wird ein Ansatz zur geschlossenen Lösung der Vorwärtstransformation über die Entkopplung eines Drehfreiheitsgrads der Plattform beschrieben. Untersuchungen zur technischen Vermeidung dieses Problems unter Zuhilfenahme zusätzlicher Sensoren wurden von Bonev und Cheok [Bon99b, Che93] durchgeführt.

Um die gefundenen Kinematikvarianten hinsichtlich des ihnen eigenen Übertragungsverhaltens besser beschreiben zu können, wurden von Chablat [Cha98a] Orte gleicher Konditionszahlen (Definition siehe Anhang A.2.2) im Bewegungsraum berechnet. Takeda verwendet zur Beschreibung Kennzahlen wie die Bewegungstransmissibilität [Tak95] oder einen globalen Isotropie-Index [Tak99]. Gosselin [Gos90c] stellt einen Ansatz zur Minimierung der Konditionszahl bei der Bewegungsplanung mithilfe eines freien Parameters vor. Aufbauend auf dem Konzept der kinematischen Isotropie führte Zanganeh [Zan95, Zan97] Untersuchungen zur optimalen Auslegung und Gestaltung von Parallelkinematiken durch.

Grundlegende Untersuchungen zum Thema „Arbeitsraum einer Parallelkinematik“ wurden von Bonev, Gosselin und Merlet [Bon99, Bon99a, Bon00, Gos90a, Gos92, Gos96, Mer94, Mer95, Mer97] durchgeführt. Bessala, Conti, Haug, Ji, Masory, Nguyen, Weng und Yang [Bes96, Con98, Hau96, Ji94, Mas92, Ngu89, Wen87, Yan94] untersuchen weiterführende Aspekte dieser Thematik. Die verschiedenen bei der Berechnung von Arbeitsräumen verwendeten Vorgehensweisen und Algorithmen werden in Kapitel 4.1 ausführlich dargestellt. Von Merlet [Mer91, Mer96] sind unter anderem Untersuchungen zur Arbeitsraum basierten Auslegung von Parallelkinematiken durchgeführt worden.

Eine weitere Herausforderung stellt die Analyse und Kompensation von Abweichungen dar. Da diese direkt vom nichtlinearen Übertragungsverhalten der Kinematik beeinflusst werden, ist eine Kompensation von der korrekten Identifikation der einzelnen Abweichungen im Gesamtsystem abhängig. Untersuchungen zur Fehleranalyse und Kalibrierung von Parallelkinematiken wurden von Alizade, Chen, Huang, Innocenti, Jokiel, Kugiumtzis, Masory, Olliviers, Parenti-Castelli, Pa-



sek, Patel, und Weck [Ali94, Che99, Hua00, Inn95, Jok99, Jok00, Kug94, Mas93, Oll95, Par90, Pas00, Pat97, Wec00] sowohl für allgemeine als auch für spezielle Kinematikvarianten durchgeführt.

Untersuchungen zur Optimierung von Parallelkinematiken wurden unter anderem von Angeles, Bhattacharya, Huang, Kirchner und Neugebauer [Ang90, Bha95, Hua98, Kir01, Neu02a] durchgeführt. Da die Optimierung von Parallelkinematiken ein komplexes Problem mit negativ korrelierten Zielen ist, konzentrieren sich die meisten Untersuchungen auf Kostenfunktionen oder nutzen genetische Ansätze. Der Optimierungsansatz über die Verwendung einer Kostenfunktion beruht auf einer gewichteten Summe von Leistungsindices und besitzt zwei wesentliche Einschränkungen: Zum einen ist die Wahl der Wichtungsfaktoren schwierig (zum Beispiel: Priorisierung von Beschleunigungsfähigkeit und Steifigkeit) und zum anderen führt die Komplexität der Optimierungsaufgabe dazu, dass kein globales Optimum garantiert werden kann. Ein auf genetischen Algorithmen basierendes Optimierungsverfahren wurde von Kirchner, bei dem sich auch eine ausführliche Darstellung der bisher verwendeten Optimierungsansätze findet, vorgestellt.

Im Rahmen von neu entwickelten Maschinenstudien sind umfassendere Untersuchungen der konzipierten Kinematik durchgeführt worden. Diese beziehen sich allerdings ausschließlich auf die zugehörige Kinematik, so dass eine Verallgemeinerung der Ergebnisse nur in Ausnahmefällen möglich ist. Carretero, Funabashi, Heisel, Kim, Ryu, Takeda und Weck [Car00, Fun96, Hei00, Kim99a, Ryu98, Tak96a, Tak97, Tak99a, Wec98] repräsentieren eine Auswahl dieser im Rahmen von Maschinenentwicklungen durchgeführten Untersuchungen. Carretero und Weck stellen Parallelkinematiken mit drei Freiheitsgraden, Funabashi und Heisel Parallelkinematiken mit sechs Freiheitsgraden, Kim und Ryu die in Korea entwickelte Parallelkinematik „Eclipse“ und Takeda Parallelkinematiken mit drei und sechs Freiheitsgraden mit verschiedenen Gelenkbauarten vor.

Kinematische Analysen von Parallelkinematiken der Stewart-Bauweise wurden von Lebet und Liu [Leb93, Liu93] vorgenommen. Überlegungen zur Berechnung und Modellierung der Steifigkeit von Parallelkinematiken wurden unter anderem von Clinton, El-Khasawneh und Tahmasebi [Cli97, Kha98, Tah95] durchgeführt. Weitergehende Analyse- und Simulationswerkzeuge zur umfassenden Modellierung des statischen und dynamischen Verhaltens von Parallelkinematiken wurden von Falco, Molinari-Tosatti und Cobet [Fal97, Mol00, Cob01, Cob02] vorgestellt.

### **1.3 Handlungsbedarf**

Bei den bisher durchgeführten Untersuchungen im Bereich der Simulation und Optimierung von Parallelkinematiken wurde der Schwerpunkt entweder auf die systematische Analyse verschiedener Kinematikvarianten oder auf die Optimierung einer speziellen Kinematik (meist Stewart-Plattform) gelegt [Mer97].

Bei der systematischen Analyse verschiedener Gestaltungsvarianten werden die Güte und Gleichmäßigkeit des Übertragungsverhaltens durch eine Kennzahl - üblicherweise die Konditionszahl der Jakobimatrix oder ein Transmissionsindex - beschrieben und durch Variation der Kinematik optimiert. Es wird hierbei in Abhängigkeit der gewählten Kennzahl nach einem im Arbeitsraum der Kinematik möglichst gleichverteilten globalen Maximum oder Minimum gesucht. Bei negativ

korrelierten Zielen, wie zum Beispiel maximaler Beschleunigung bei gleichzeitig hoher Steifigkeit, werden die Ziele meist mithilfe einer Wichtungsmatrix gewichtet und ein den Gewichtungskriterien entsprechender Kompromiss gefunden. Die Optimierung hat dann eine möglichst gleichmäßige Verteilung dieses gewichteten Kompromisses im Arbeitsraum zum Ziel.

Die Optimierung einer speziellen Gestaltungsvariante im Anschluss an einen Grobentwurf ist Voraussetzung für eine anwendungstaugliche Maschine. In der Regel erfolgt diese Optimierung jedoch für eine nach allgemeinen Überlegungen durchgeführte erste Grobauslegung und nicht für eine aus einer systematischen Untersuchung aller möglichen Kinematikvarianten hervorgegangenen Auswahl. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die im Bereich der seriellen Maschinen vorhandene Auslegungserfahrung bei Parallelkinematiken nicht zur Verfügung steht. Hinzu kommt die Schwierigkeit, in den ersten Phasen der Maschinenauslegung aus den unzähligen Anordnungsmöglichkeiten im Hinblick auf die Achsanordnung, Stablänge und die Gelenkpositionen eine für die gewünschte Anwendung passende Anordnung auszuwählen [Mol00] und die strukturellen Nachteile zu beherrschen, die aus der Vielzahl der Mechanismenglieder und aus einem begrenzten Bewegungsraum der Wirkglieder resultieren [Sch98]. Eine so durchgeführte Optimierung beschränkt sich daher in der Regel auf die Beseitigung von Singularitäten und Kollisionen durch kleine Veränderungen der Kinematik.

Sowohl bei der systematischen Analyse verschiedener Kinematikvarianten als auch bei der Optimierung einer speziellen Kinematik wird bisher ausschließlich die Kinematik und deren Einfluss auf das Übertragungsverhalten untersucht. Der Einfluss der einzelnen Maschinenkomponenten auf die Eigenschaften einer Parallelkinematik wird dagegen vernachlässigt. Dies hat zur Folge, dass die bei der Auslegung mithilfe von Simulationen berechneten Eigenschaftswerte meist deutlich von den später an der realisierten Maschine messbaren Werten abweichen.

Das Fehlen eines Simulationswerkzeugs, mit dem nicht nur der Einfluss und das Übertragungsverhalten der Kinematik, sondern auch der Einfluss der einzelnen Maschinenkomponenten berücksichtigt und analysiert werden kann, stellt ein Hindernis für die zielgerichtete Optimierung und damit für die Anwendung von parallelkinematischen Werkzeugmaschinen in der Industrie dar.

#### **1.4 Zielsetzung**

Zielsetzung der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines Simulationswerkzeugs, mit dem wesentliche Eigenschaften einer parallelkinematischen Werkzeugmaschine berechnet und analysiert werden können. Im Gegensatz zu den bestehenden Modellen sollen in den neu entwickelten Simulationsmodellen nicht nur der Einfluss der Kinematik, sondern auch der Einfluss der für die Eigenschaften maßgeblichen Maschinenkomponenten einer Parallelkinematik berücksichtigt werden. Hierdurch soll eine gezielte Untersuchung und Optimierung der einzelnen Maschinenkomponenten ermöglicht werden. Grundlage eines solchen Simulationswerkzeugs ist eine detaillierte Untersuchung und Modellierung der einzelnen Maschinenkomponenten einer parallelkinematischen Werkzeugmaschine.

Die Zielsetzung der Arbeit lässt sich damit in zwei Teile gliedern:

- Untersuchung und Modellierung der für die Eigenschaften einer Parallelkinematik wesentlichen Maschinenkomponenten. Den Schwerpunkt der in diesem Bereich durchzuführenden Untersuchungen bilden die Gelenke, da ihre für das Verhalten einer Parallelkinematik wesentlichen Eigenschaften bisher nicht ausreichend analysiert wurden.
- Erstellen eines Simulationswerkzeugs zur Berechnung und Analyse wesentlicher Eigenschaften von Parallelkinematiken, indem die im ersten Teil ermittelten Komponentenmodelle berücksichtigt werden.

Zu den die statischen und dynamischen Eigenschaften einer parallelkinematischen Werkzeugmaschine wesentlich beeinflussenden Maschinenkomponenten gehören die Antriebe, die Gelenke und die Plattform. Diese Maschinenkomponenten werden daher im ersten Teil der Arbeit detailliert untersucht und ihr Verhalten mit entsprechenden Modellen nachgebildet. Da der Einfluss der Maschinenkomponenten an zwei verschiedenen Parallelkinematiken mit sechs Freiheitsgraden quantifiziert werden soll, müssen mit den zu erstellenden Modellen das Verhalten der Maschinenkomponenten beider Kinematikvarianten beschrieben werden können.

An das im zweiten Teil zu erstellende Simulationswerkzeug müssen die folgenden Anforderungen gestellt werden, um dessen effektiven Einsatz auch in einem industriellen Umfeld zu ermöglichen:

- Alle den Arbeitsraum einschränkenden kinematischen Randbedingungen (Kollisionen, Gelenkwinkelgrenzen, Singularitäten, etc.) müssen von den Modellen berücksichtigt werden, um die physikalische Realisierbarkeit der Werkzeugmaschine gewährleisten zu können.
- Die für eine Bewertung notwendigen Kennzahlen (zum Beispiel: Arbeitsraumvolumen, Abmessungen des Arbeitsraums) und Verteilungen (zum Beispiel: Steifigkeitsverteilung im Arbeitsraum, zulässige Orientierungen des Werkzeugs) müssen von den Modellen zur Verfügung gestellt werden, um eine anwendungsspezifische Auslegung zu ermöglichen.
- Bei der Auswahl der Modelle muss auf eine hohe Leistungsfähigkeit geachtet werden, um kurze Simulations- und Analysezeiten sicherzustellen. Diese sollten sich in Abhängigkeit des gewünschten Detaillierungsgrads skalieren, damit der Rechenaufwand in den ersten Auslegungsphasen möglichst klein gehalten werden kann.

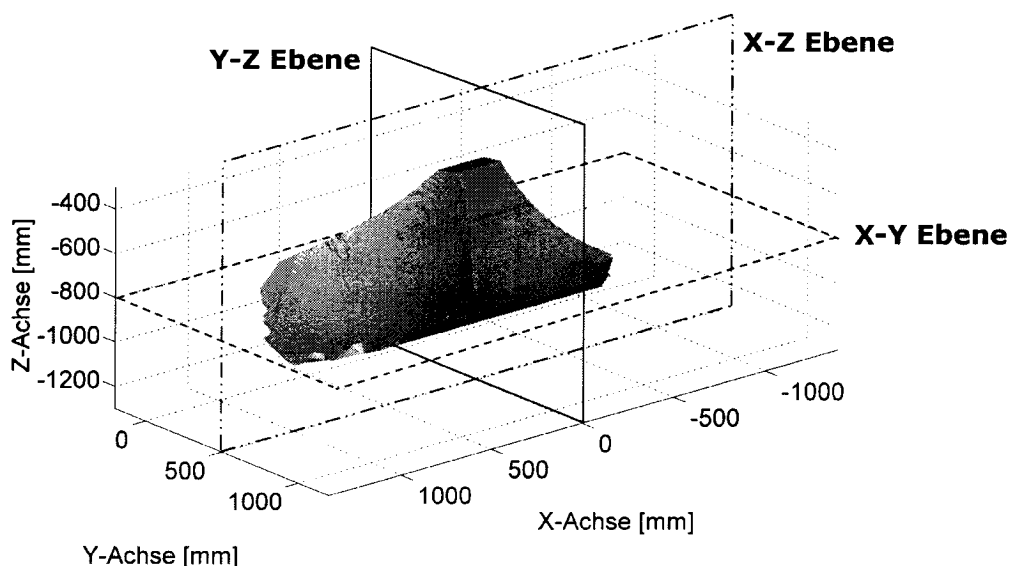
Für die Erfüllung des zweiten Teils der Zielsetzung ist die Entwicklung neuer und die Verallgemeinerung, Erweiterung und Optimierung bekannter Algorithmen von zentraler Bedeutung.

## 2 Darstellungen der Simulationsergebnisse

Um eine gute Vergleichbarkeit der Simulationsergebnisse sicherzustellen, wird im Rahmen dieser Arbeit zur Visualisierung verschiedener Eigenschaften einer Parallelkinematik immer die gleiche Darstellungsart verwendet. Diese soll im Folgenden definiert und veranschaulicht werden.

Für diese Darstellungsart werden drei orthogonal aufeinanderstehende Schnittebenen durch den Arbeitsraum einer Parallelkinematik gelegt und die interessierenden Eigenschaften in diesen Ebenen berechnet. Die Position und Größe der Ebenen innerhalb des Arbeitsraums ist frei wählbar. Hierdurch können die Berechnungen sowohl den ganzen Querschnitt des Arbeitsraums umfassen als auch auf den Bereich begrenzt werden, der die gesuchte Information enthält.

Am Beispiel der Hexaglide-Kinematik soll dies verdeutlicht werden. Der *Arbeitsraum bei konstanter Orientierung* (für die Definition siehe Kapitel 4.1.1 und für den zur Berechnung verwendeten Algorithmus Kapitel 4.1.4) und die Lage von drei Schnittebenen (Y-Z Ebene, X-Z Ebene und X-Y Ebene) ist in Abbildung 2.1 dargestellt.



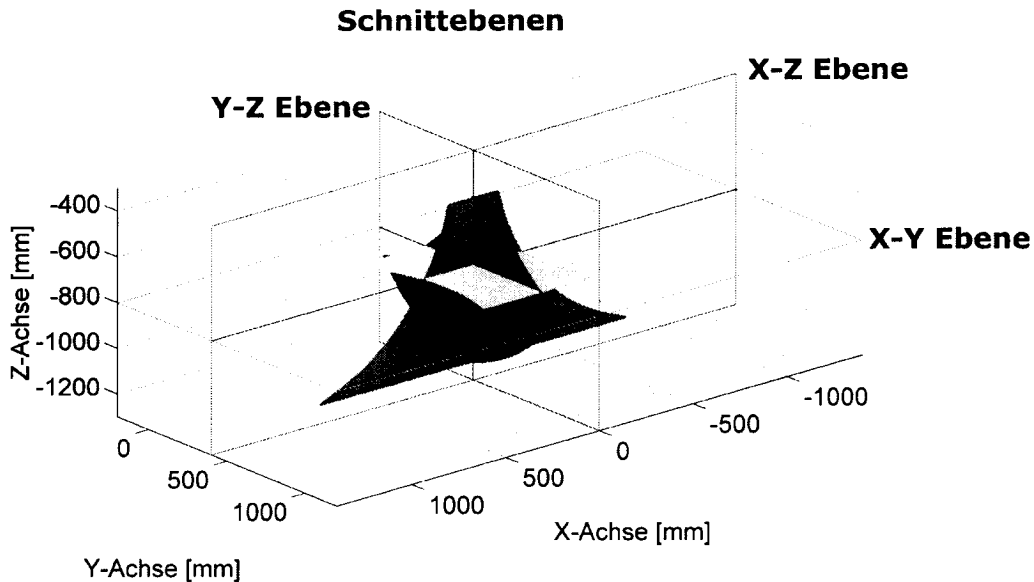
**Abbildung 2.1: Arbeitsraum der Hexaglide-Kinematik bei konstanter Orientierung ( $a = b = c = 0^\circ$ ). Die eingezeichneten Ebenen stellen mögliche Schnittebenen durch den Arbeitsraum dar.**

Da bei der Berechnung dieser Schnittebenen alle den Arbeitsraum einschränkende Randbedingungen (vgl. Anhang B) berücksichtigt werden, stellen diese Ebenen neben den in ihnen berechneten Eigenschaften auch die Kontur des effektiv zur Verfügung stehenden Arbeitsraums dar.

Diese Art der Darstellung hat den Vorteil, dass die Verteilung der gesuchten Eigenschaften zusammen mit den Grenzen des Arbeitsraums erfolgt. Hierdurch kann die Bewertung der einzelnen Eigenschaften (zum Beispiel: Steifigkeiten, Eigenfrequenzen) sowohl global als auch innerhalb eines interessierenden Bereichs erfolgen. Dies ist im Rahmen einer Auslegung von wesentlich höherer Aussage-

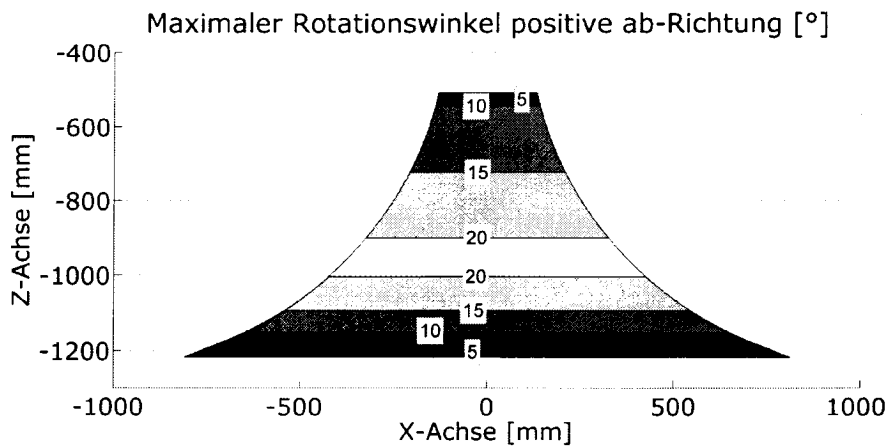
kraft als die Betrachtung eines isolierten Punkts, da von diesem keinerlei Rückschlüsse auf die für die Anwendungstauglichkeit wesentlichen Eigenschaftsverteilungen innerhalb des Arbeitsraums möglich sind.

Wird der Arbeitsraum der Hexaglide-Kinematik mit den in Abbildung 2.1 gezeigten Ebenen geschnitten, ergeben sich die in Abbildung 2.2 dargestellten Schnittebenen.



**Abbildung 2.2: Schnittebenen durch den Arbeitsraum der Hexaglide-Kinematik**

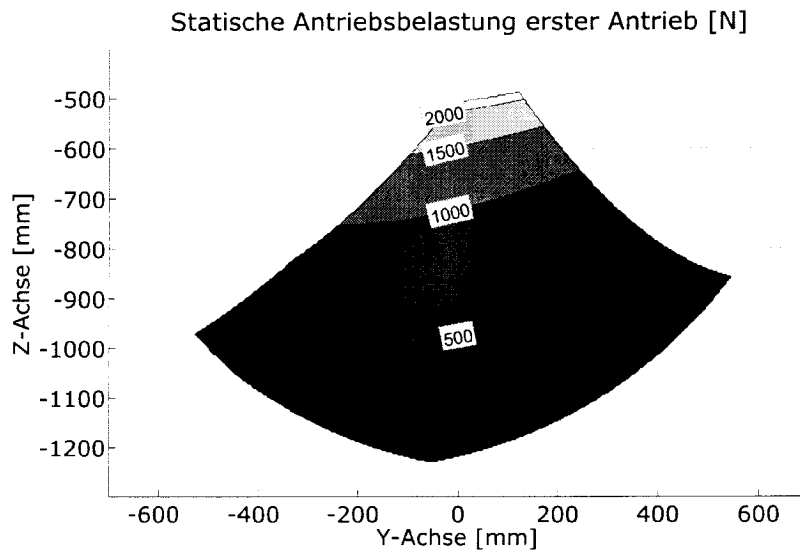
Zur Berechnung der gesuchten Eigenschaften werden diese Ebenen mit einer frei wählbaren Auflösung gerastert. Die an den einzelnen Punkten der Ebenen berechneten Simulationsergebnisse werden dann in einem Konturplot mit einer Graustufenskalisierung über zwei Raumachsen aufgetragen. Da die Hexaglide-Kinematik bei einer Werkzeugorientierung von  $a = b = c = 0$  Grad zu der Y-Z Ebene bei einer x-Koordinate von  $x = 0$  mm symmetrisch ist, wird diese Ebene in der Arbeit zur Visualisierung der berechneten Eigenschaften verwendet.



**Abbildung 2.3: Verteilung des maximal zulässigen Rotationswinkels in positive a- und b-Richtung der Hexaglide-Kinematik in der X-Z Ebene**

Die Symmetrie der Eigenschaftsverteilung der Hexaglidle-Kinematik zur Y-Z Ebene soll am Beispiel der maximal *zulässigen Rotationswinkel in positive a- und b-Richtung* (für die Definition siehe Kapitel 4.1.1, für den zur Berechnung verwendeten Algorithmus Kapitel 4.1.5) in der X-Z Ebene in Abbildung 2.3 gezeigt werden.

In Abbildung 2.4 wird die am ersten Antrieb auftretende statische Antriebsbelastung in der oben definierten Y-Z Ebene dargestellt. Die aufgetragene Belastung ergibt sich aus Gleichung 4.90.



**Abbildung 2.4: Verteilung der statischen Antriebsbelastung des ersten Antriebs der Hexaglidle-Kinematik in der Y-Z Ebene**

Die Visualisierung der Simulationsergebnisse der 6X Hexapod-Kinematik und der anderen in Kapitel 5.2 aufgeführten Parallelkinematiken erfolgt ebenfalls in der Y-Z Ebene für die gleiche x-Koordinate und Werkzeugorientierung, da diese Kinematiken ebenfalls über einen symmetrischen Aufbau verfügen.

### 3 Komponentenuntersuchung und Modellierung

Da der Einfluss der einzelnen Maschinenkomponenten auf das Gesamtverhalten einer Parallelkinematik bisher nicht detailliert untersucht worden ist, weichen die mit den in Kapitel 1.2 vorgestellten Simulationsmodellen berechneten Eigenschaften und deren Verteilung innerhalb des Arbeitsraums meist deutlich von den später an der Werkzeugmaschine messbaren ab. Dies ist vor allem darauf zurückzuführen, dass die zur Simulation verwendeten Modelle meist nur den Einfluss der Kinematik berücksichtigen und die als Eingangsparameter verwendeten Eigenschaften der einzelnen Maschinenkomponenten als konstant angenommen werden.

Wie die im Folgenden dargestellten Untersuchungen zeigen, stellt diese Annahme eine starke Vereinfachung dar, die die maximal mögliche Genauigkeit der auf ihr beruhenden Simulationsergebnisse deutlich einschränkt. Um die Genauigkeit der Simulationen zu erhöhen, wird die für die Eigenschaften einer Parallelkinematik wesentliche Steifigkeit der Antriebe, der Gelenke und der Plattform in diesem Kapitel untersucht und modelliert. Den Schwerpunkt der durchgeführten Untersuchungen bilden die bei Parallelkinematiken eingesetzten Gelenke, da deren für eine Werkzeugmaschine wesentliche winkelabhängige Steifigkeit bisher nicht untersucht worden ist.

Analysiert wurden die Komponenten, die bei der Hexaglide- und bei der 6X Hexapod-Kinematik eingesetzt werden. Da diese beiden Maschinen sich nicht nur nach ihrem kinematischen Prinzip, sondern auch bei den verwendeten Antriebsarten und Gelenken unterscheiden, können die aus den Untersuchungen gewonnenen Ergebnisse und Modelle auch zur Simulation von anderen Parallelkinematiken mit sechs Freiheitsgraden eingesetzt werden.

Zur Bestimmung der Eigenschaften von Maschinenkomponenten können drei verschiedene Ansätze verwendet, deren Eignung von der Komplexität der jeweiligen Komponenten abhängt:

- Bei einfachen Komponenten können die physikalischen Eigenschaften direkt aus der Geometrie und den Materialeigenschaften bestimmt werden. Ein Beispiel für eine solche Maschinenkomponente sind die Stäbe einer Glied-Kinematik.
- Bei aufwendigeren Komponenten, wie zum Beispiel der Plattform einer Parallelkinematik, muss aufgrund der meist komplexen Geometrie auf diskretisierende Finite-Element-Berechnungen zurückgegriffen werden.
- Werden die einzelnen Maschinenkomponenten sehr komplex, nimmt auch die Genauigkeit der mit diesen diskretisierenden Berechnungsverfahren ermittelten Eigenschaften ab. Zur genauen Bestimmung der physikalischen Eigenschaften muss dann auf Messungen zurückgegriffen werden. Ein Beispiel für hochkomplexe Bauteile sind die in Parallelkinematiken eingesetzten Gelenke.

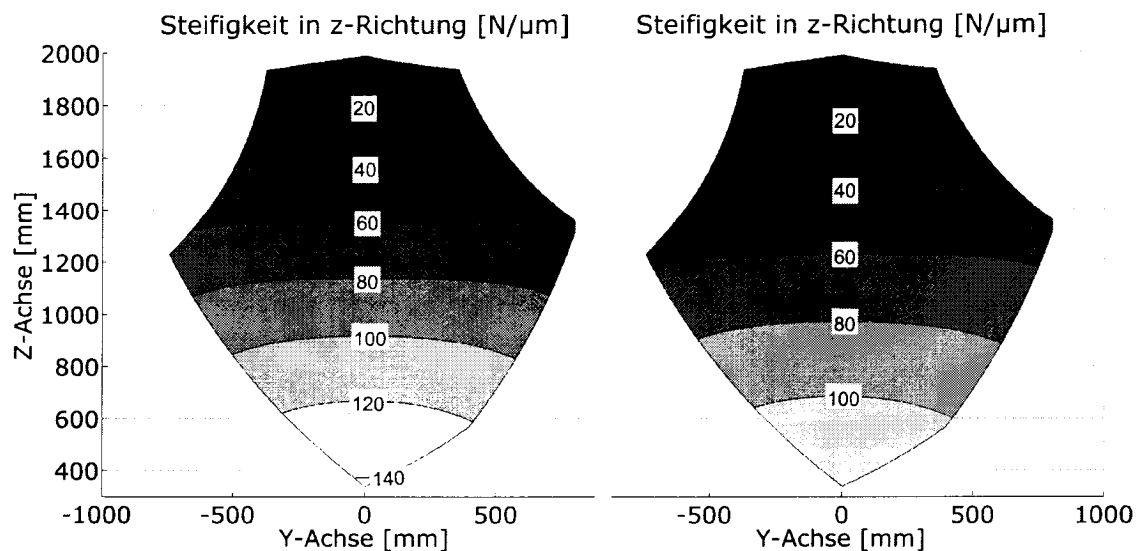
Die zur Beschreibung der Eigenschaften der Komponenten entwickelten Modelle werden zusammen mit den in Kapitel 4 entwickelten Modellen zur Beschreibung der Eigenschaften einer Gesamtmaschine zu einem Simulationswerkzeug für Parallelkinematiken zusammengefügt.

### 3.1 Antriebe, Linearführungen und Stäbe

Die Gruppe der Antriebe umfasst bei Parallelkinematiken nach dem Pod-Prinzip die als Antriebe eingesetzten längenveränderlichen Stäbe. Bei Kinematiken nach dem Glide-Prinzip umfasst sie neben den eigentlichen Antrieben auch die Linearführungseinheiten und die längenunveränderlichen Stäbe. Die Bedeutung der Modellierung der veränderlichen Eigenschaften dieser Gruppe soll am Beispiel der statischen Steifigkeit der 6X Hexapod-Kinematik aufgezeigt werden.

Wird die statische Steifigkeit in z-Richtung der 6X Hexapod-Kinematik in der Y-Z Ebene (vgl. Kapitel 2) mit einer als konstant angenommenen Antriebssteifigkeit von  $250 \text{ N}/\mu\text{m}$  berechnet, so ergibt sich innerhalb des Arbeitsraums die auf der linken Seite von Abbildung 3.1 gezeigte Steifigkeitsverteilung. Diese Verteilung weist einen Durchschnittswert von  $71.3 \text{ N}/\mu\text{m}$  bei einem Maximum von  $141.9 \text{ N}/\mu\text{m}$  auf.

Wird bei der Modellierung der Antriebe die in diesem Kapitel ermittelte hubabhängige Steifigkeit (vgl. Abbildung 3.8) zugrunde gelegt, so ergibt sich die auf der rechten Seite von Abbildung 3.1 gezeigte Verteilung der Steifigkeit in z-Richtung. Der Durchschnittswert der so berechneten Verteilung beträgt  $59.9 \text{ N}/\mu\text{m}$  bei einem Maximum von  $120 \text{ N}/\mu\text{m}$ .



**Abbildung 3.1: Steifigkeitsverteilung in der Y-Z-Schnittebene der 6X Hexapod-Kinematik bei einer Orientierung von  $a = b = c = 0$  Grad: auf der linken Seite bei Annahme einer konstanten Antriebssteifigkeit und auf der rechten Seite bei Annahme einer hubabhängigen Antriebssteifigkeit**

Legt man den Durchschnittswert der mit hubabhängiger Antriebssteifigkeit berechneten Verteilung zugrunde, so führt die Annahme einer konstanten Antriebssteifigkeit zu einer Abweichung der Steifigkeit in z-Richtung von 19 Prozent. Diese Abweichung zeigt die Bedeutung der Berücksichtigung des Einflusses der hubabhängigen Steifigkeit bei der Berechnung der Eigenschaften einer Parallelkinematik.



### 3.1.1 Grundlagen der Modellierung

Die bei Werkzeugmaschinen eingesetzten Antriebe für Linearachsen lassen sich in zwei Gruppen gliedern: Kugelgewindetriebe und Lineardirektantriebe. Bei der Modellierung der Kugelgewindetriebe muss zusätzlich nach der Art des verwendeten Messsystems unterschieden werden, da dieses einen Einfluss auf die Steifigkeit der Antriebe hat: Zum einen werden direkte Messsysteme eingesetzt, die einen den Linearantrieben ähnliche Steifigkeit zur Folge haben, und zum anderen indirekte Messsysteme.

#### Kugelgewindetriebe mit indirekten Messsystemen

Bei Kugelgewindetrieben mit indirekten Messsystemen ist, im Gegensatz zu Lineardirektantrieben und Kugelgewindetrieben mit direktem Messsystem, die Steifigkeit abhängig von der Position des Antriebs und wird von der Steifigkeit der einzelnen Antriebskomponenten:

- Längenabhängige axiale Steifigkeit der Gewindespindel,
- Steifigkeit der Gewindemutter und deren Befestigung,
- axiale Steifigkeit der Lagerung,
- und der eingestellten Vorspannung bestimmt [Ack91].

Die axiale Steifigkeit einer Gewindespindel ist eine Funktion des Spindeldurchmessers  $d_{sp}$ , der sich als Mittelwert von Kern- und Nenndurchmesser ergibt [Gro81], des E-Moduls des eingesetzten Werkstoffs und der effektiven Länge  $l_{eff}$ , die sich aus dem Abstand der Kräfteinleitungspunkte von Festlager und Gewindemutter berechnet. Die positionsabhängige Steifigkeit einer Gewindespindel kann nach Zirn [Zir96] zu:

$$k_{Sp} = \frac{\pi d_{sp}^2 E}{4 l_{eff}} \quad 3.1$$

angenähert werden. Die Steifigkeit der Gewindemutter ist abhängig von ihrem Durchmesser  $d_{sp}$ , der Anzahl der tragenden Gewindegänge und der eingestellten Vorspannung. Die für die Simulation verwendeten Werte werden aus den Herstellerangaben übernommen und zusammen mit der Steifigkeit ihrer Befestigung als konstant angenommen.

Einen wesentlichen Einfluss auf die Steifigkeit eines Kugelgewindetriebs hat die Lagerung der Gewindespindel. Im Weiteren soll daher zwischen zwei verschiedenen gebräuchlichen Lagerungsarten unterschieden werden: der fest-fest und der fest-los bzw. los-fest Lagerung. Bei der fest-fest Lagerung, die in Tabelle 3.1 oben gezeigt ist, werden zwei Festlager gegeneinander angestellt und die Gewindespindel auf Zug vorgespannt.

Art	Spindellagerung	Ersatzbild	Schema
fest-fest			
fest-lost			

**Tabelle 3.1: Lagerungsarten für Kugelgewindetriebe mit Ersatzbild [Gro81]**

Aus dem auf der rechten Seite der Tabelle dargestellten Schema lässt sich die axiale Steifigkeit einer fest-fest Lagerung zu:

$$\frac{1}{k_A} = \frac{(2k_{al} + k_{Sp1})(2k_{al} + k_{Sp2})}{4k_{al}(k_{Sp1}k_{Sp2} + k_{al}(k_{Sp1} + k_{Sp2}))} + \frac{1}{k_M} + \frac{1}{k_{TM}} \quad 3.2$$

herleiten. Hierbei bezeichnen:

- $k_A$  axiale Steifigkeit des Antriebssystems [N/ $\mu$ m]
- $k_{al}$  axiale Steifigkeit der Lager [N/ $\mu$ m]
- $k_{Sp1}$  Steifigkeit der Gewindespindel (aus Gleichung 3.1 mit  $l_{eff} = l_{Sp1}$ ) [N/ $\mu$ m]
- $k_{Sp2}$  Steifigkeit der Gewindespindel (aus Gleichung 3.1 mit  $l_{eff} = l_{Sp2}$ ) [N/ $\mu$ m]
- $k_M$  Steifigkeit der Gewindemutter [N/ $\mu$ m]
- $k_{TM}$  Steifigkeit der Anschlusskonstruktion der Gewindemutter [N/ $\mu$ m]
- $l_{Sp}$  Länge der Gewindespindel [m]

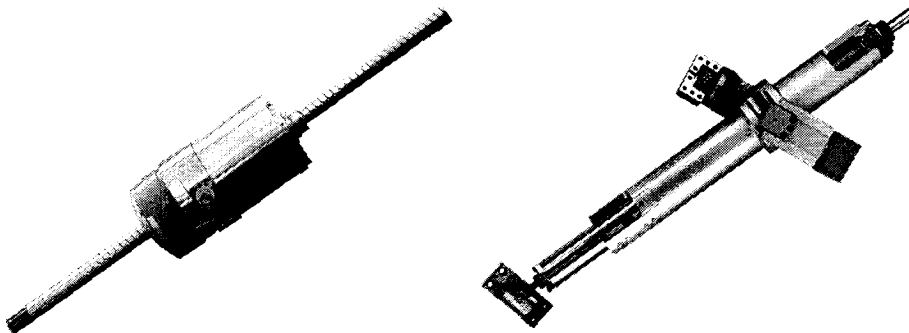
Werden die Antriebe mit hohen Geschwindigkeiten verfahren, so kommt es aufgrund von Erwärmung zu einer Ausdehnung der Gewindespindel. Dies führt bei auf Zug vorgespannten Lagern zu einer Verkleinerung der Vorspannung. Die zulässige Vorspannung und damit auch die Steifigkeit einer solchen Anordnung ist in Abhängigkeit der Einsatzbedingungen begrenzt [Ack91].

Durch die in Tabelle 3.1 unten gezeigte fest-lost bzw. los-fest Lagerung lässt sich die temperaturabhängige Vorspannung vermeiden. Bei dieser Lagerung ist die Positioniergenauigkeit jedoch wesentlich stärker temperaturabhängig als bei einer vorgespannten Spindel. Die Unterscheidung zwischen fest-lost und los-fest erfolgt hierbei je nach Position des Antriebs: Befindet sich der Antrieb auf der Seite des Festlagers, so handelt es sich um eine fest-lost Konfiguration, im umgekehrten Fall (das Loslager auf der Antriebsseite) um eine los-fest Konfiguration.

Die axiale Steifigkeit dieser Anordnung ergibt sich entsprechend dem Ersatzbild zu:

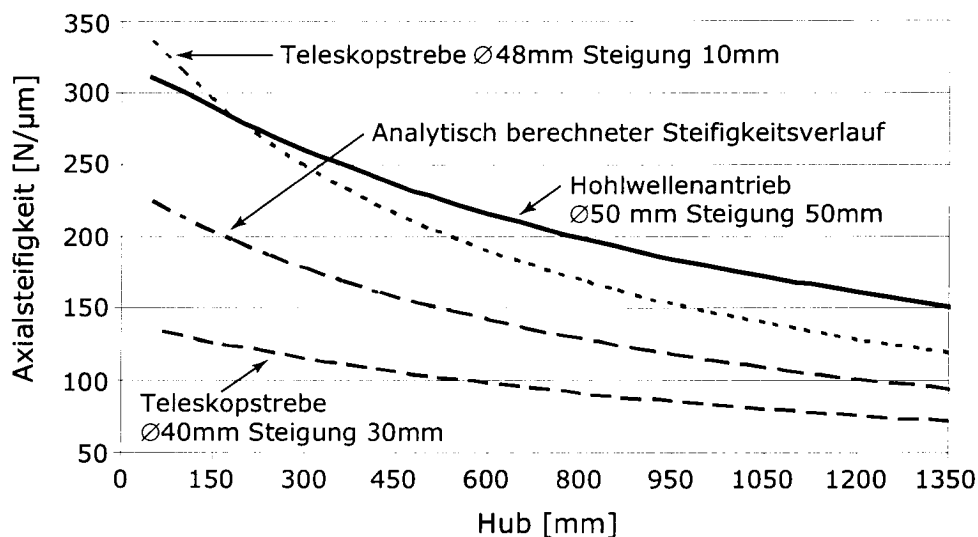
$$\frac{1}{k_A} = \frac{1}{2k_{aL}} + \frac{1}{k_{SP}} + \frac{1}{k_M} + \frac{1}{k_{TM}} \quad \text{mit } k_{SP} \text{ aus Gleichung 3.1} \quad 3.3$$

Bei Parallelkinematiken nach dem Glide-Prinzip können sowohl fest-fest als auch fest-los als auch los-fest Konfigurationen zum Einsatz kommen. Bei Pod-Kinematiken werden Kugelgewindetriebe entweder als Hohlwellenantriebe (Abbildung 3.2 links) oder als Teleskopstreben (Abbildung 3.2 rechts) eingesetzt, die einen der fest-los Konfiguration ähnlichen Steifigkeitsverlauf aufweisen.



**Abbildung 3.2: Hohlwellenantrieb (links) und Teleskopstrebe (rechts) [Hes01]**

Ein Vergleich von an Teleskopstreben und Hohlwellenantrieben gemessenen Axialsteifigkeiten mit einem analytisch nach Gleichung 3.3 berechneten Steifigkeitsverlauf wird in Abbildung 3.3 dargestellt.



**Abbildung 3.3: Axialsteifigkeit verschiedener Antriebe [Hes01] und analytisch berechneter Steifigkeitsverlauf in Abhängigkeit vom Hub der Antriebe**

Die dem analytisch berechneten Steifigkeitsverlauf zugrunde liegenden Parameterwerte sind:

$$k_{aL} = 650 \text{ N/}\mu\text{m} \quad k_{SP} = \frac{211}{I_{eff}} \frac{\text{Nm}}{\mu\text{m}} \quad k_M = 210 \text{ N/}\mu\text{m} \quad k_{TM} = 1000 \text{ N/}\mu\text{m}$$

Ein Vergleich des nach Gleichung 3.3 berechneten analytischen Steifigkeitsverlaufs mit den gemessenen Steifigkeitsverläufen zeigt eine gute qualitative Übereinstimmung. Sind die Steifigkeiten der einzelnen Komponenten eines Kugelgewindetriebs mit indirektem Messsystem bekannt, kann die hubabhängige Steifigkeit mit den Gleichungen 3.2 und 3.3 daher hinreichend genau modelliert werden. Die zur Berechnung des dynamischen Verhaltens (vgl. Kapitel 4.2) notwendigen translatorischen Trägheiten von Teleskopstreben können über den Durchmesser und die Steigung der Gewindespindel aus den rotativen Trägheiten berechnet werden:

$$m = \left[ \frac{2\pi}{h_s} \right]^2 J = \frac{\pi^3 d_{Sp}^4 l_{abs} \rho}{8 h_s^2} \quad 3.4$$

Hierbei bezeichnen:

- $m$  axial wirksame, scheinbare Masse [kg]
- $h_s$  Steigung des Gewindes der Spindel [m]
- $J$  Trägheitsmoment der Spindel [kg/m<sup>2</sup>]
- $d_{Sp}$  Durchmesser der Spindel [m]
- $l_{abs}$  absolute Länge der Spindel [m]
- $\rho$  Dichte des Spindelmaterials [kg/m<sup>3</sup>]

Die Masse und die Trägheit eines Hohlwellenantriebs werden durch die Masse der Spindel bestimmt.

#### Lineardirektantriebe und Kugelgewindetriebe mit direktem Messsystem

Im Gegensatz zu den Kugelgewindetrieben mit indirektem Messsystem ist die Antriebssteifigkeit bei Lineardirektantrieben und bei Kugelgewindetrieben mit direktem Messsystem unabhängig von deren Position. Die Modellierung der Steifigkeit dieser Antriebe soll am Beispiel des in Abbildung 3.4 gezeigten Lineardirektantriebs der Firma ETEL hergeleitet werden. Dieser Lineardirektantrieb wird bei der Hexaglide-Kinematik eingesetzt.

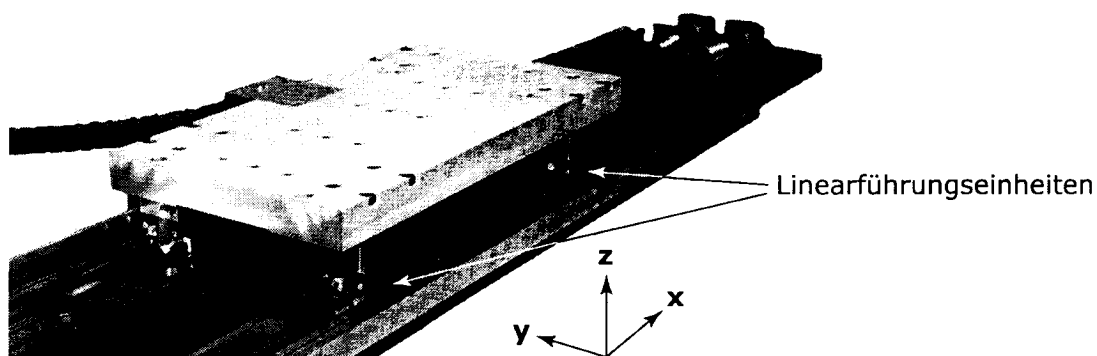


Abbildung 3.4: Lineardirektantrieb der Firma ETEL [Ete95]

Die Steifigkeit eines solchen Lineardirektantriebs mit PD-Regelung ergibt sich nach Zirn [Zir96] als Produkt der Motorkonstante  $k_m$  und der Lageregelverstärkung  $k_{px}$  zu:

$$k_A = k_m k_{px} \quad 3.5$$

Während bei Kinematiken nach dem Pod-Prinzip die Antriebe konstruktionsbedingt fast ausschließlich axial belastet werden und damit die Annahme einer ausschließlich axialen Steifigkeit zulässig ist, treten bei Kinematiken nach dem Glide-Prinzip auch Kräfte quer zur Antriebsrichtung auf. Diese werden von den Linearführungseinheiten aufgenommen, die die Antriebe tragen. Hierdurch ergibt sich eine anisotrope Steifigkeitsverteilung der Antriebe, die im Rahmen der Arbeit in einer Steifigkeitsmatrix im Koordinatensystem des Antriebs modelliert und mit  $K'_{W,i}$  bezeichnet wird. Im Simulationsmodell werden die Antriebe als Punktmassen mit drei translatorischen Freiheitsgraden modelliert (vgl. Kapitel 4.2.2), wodurch sich eine 3x3 Steifigkeitsmatrix ergibt:

$$K'_{W,i} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad 3.6$$

Für den in Abbildung 3.4 gezeigten Lineardirektantrieb berechnet sich  $k_A$  aus Gleichung 3.5. Bei Verwendung eines Kugelgewindetriebs als Antriebseinheit einer Glide-Kinematik ist die Antriebssteifigkeit von der Lagerung abhängig und ergibt sich damit entweder aus Gleichung 3.2 oder aus Gleichung 3.3. Die Quersteifigkeiten berechnen sich als Summe der Steifigkeiten in den jeweiligen Raumrichtungen der Linearführungseinheiten.

Die für die Berechnung der dynamischen Eigenschaften der Parallelkinematik benötigte Masse des Lineardirektantriebs ergibt sich bei Glide-Kinematiken als die Summe der Massen des Primärteils, des Führungsschlittens und des darauf montierten Gelenks. Bei Pod-Kinematiken setzt sie sich aus der scheinbaren Masse der Gewindespindel und den dazugehörenden Komponenten zusammen.

Die Steifigkeit der Stäbe ist bei Parallelkinematiken nach dem Glide-Prinzip konstant und ergibt sich bei Stäben mit konstantem Querschnitt aus dem E-Modul des verwendeten Materials, der Querschnittsfläche  $A$  und der Länge  $l$  zu:

$$k_S = \frac{E A}{l} \quad 3.7$$

Ist der Querschnitt nicht konstant, kann der Stab als Reihenschaltung  $n$  verschiedener Querschnittsabschnitte zu:

$$\frac{1}{k_S} = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{E_i A_i} \quad 3.8$$

approximiert werden.

Die Masse der Stäbe berechnet sich aus der Dichte und dem Volumen des verwendeten Materials.

### 3.1.2 Hexaglide-Kinematik

Die lokale Steifigkeitsmatrix im Antriebskoordinatensystem  $\mathbf{K}'_{W,i}$  ergibt sich aus Gleichung 3.6, da die Hexaglide-Kinematik über Lineardirektantriebe mit einer von der Position unabhängigen Steifigkeit verfügt. In dem in Abbildung 3.4 gezeigten lokalen Antriebskoordinatensystem lassen sich die einzelnen Komponenten  $k_x$ ,  $k_y$  und  $k_z$  der lokalen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}'_{W,i}$  bestimmen. Die Steifigkeit der Antriebe in Antriebsrichtung  $k_x$  ist das Produkt der Motorkonstante  $k_m$  und der Lageregelverstärkung  $k_{px}$  nach Gleichung 3.5. Die Lageregelverstärkung ergibt sich nach Zirner [Zir96] zu:

$$k_{px} = \frac{m_i}{k_m} \Omega^2 \quad 3.9$$

Die scheinbaren Massen  $m_i$  ergeben sich aus den Diagonalelementen der Massenmatrix im Gelenkraum  $\mathbf{M}_q(\mathbf{q})$ , die sich aus der Massenmatrix der Antriebe  $\mathbf{M}_A(\mathbf{q})$  und der Massenmatrix der Plattform in kartesischen Koordinaten  $\mathbf{M}_p(\mathbf{x})$  berechnet. Die Massenmatrix der Antriebe im Antriebskoordinatensystem  $\mathbf{M}_A(\mathbf{q})$  ist die Diagonalmatrix der einzelnen Antriebsmassen  $m_{Ai} = 102,17 \text{ kg}$ :

$$\mathbf{M}_A(\mathbf{q}) = \text{diag}[102.17, 102.17, 102.17, 102.17, 102.17, 102.17] \quad 3.10$$

Diese setzt sich aus den Massen des Antriebsschlittens und der an ihr befestigten Komponenten zusammen. Die Massenmatrix der Plattform  $\mathbf{M}_p(\mathbf{x})$  in kartesischen Koordinaten ist die Summe der Plattform- und der Werkzeugspindelmasse und wurde mit einem Finiten-Element-Modell (vgl. Kapitel 3.3) zu:

$$\mathbf{M}_p(\mathbf{x}) = \text{diag}[117.24, 117.24, 117.24, 7.42, 7.74, 2.87] \quad 3.11$$

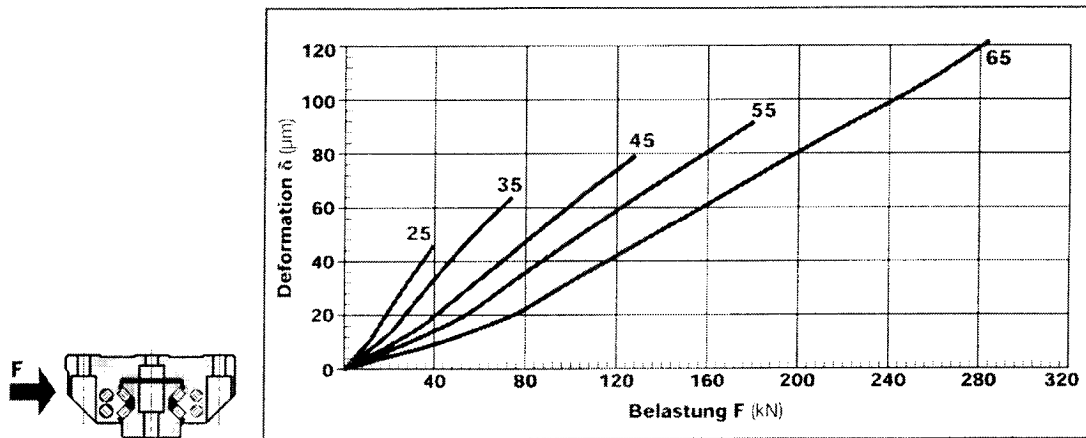
berechnet. Hieraus ergibt sich zusammen mit der kinematischen Jakobimatrix  $\mathbf{J}_C$  (vgl. Anhang A.3) der Vektor  $\mathbf{m}$  der für die Antriebe maßgebenden Massen:

$$\mathbf{m} = \text{diag}[\mathbf{M}_q(\mathbf{q})] = \text{diag}[\mathbf{M}_A(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_C^T \mathbf{M}_p(\mathbf{x}) \mathbf{J}_C] \quad 3.12$$

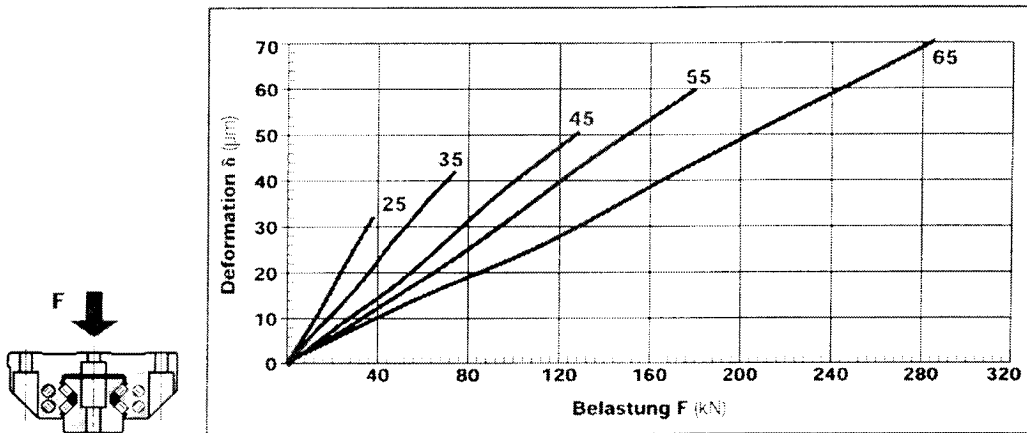
Das Einsetzen der einzelnen scheinbaren Massen  $m_i$  aus dem Vektor  $\mathbf{m}$  und der Pollage  $\Omega$  in Gleichung 3.9 ergibt die Steifigkeit der einzelnen Antriebe in Antriebsrichtung. Bei dem in der Hexaglide-Kinematik eingesetzten PD-Regler ist die Pollage so gewählt, dass die einzelnen Antriebe eine Steifigkeit von  $25 \text{ N}/\mu\text{m}$  haben:

$$k_{x,i} = k_{Ai} = 25 \text{ N}/\mu\text{m} \quad i=1,2,\dots,6 \quad 3.13$$

Die Steifigkeit quer zur Antriebsrichtung wird durch die in Abbildung 3.4 gezeigten Linearführungseinheiten bestimmt. Die Antriebseinheiten der Hexaglide-Kinematik verfügen über je vier Linearführungseinheiten des Typs 35 der Firma Schneeberger. Die Gesamtsteifigkeit quer zur Antriebsrichtung berechnet sich damit als Parallelschaltung der Einzelsteifigkeiten dieser Führungseinheiten. Für das in Abbildung 3.4 gezeigte Antriebskoordinatensystem ergeben sich die Steifigkeiten  $k_y$  und  $k_z$  aus der Horizontal- beziehungsweise Vertikalsteifigkeit der Führungseinheiten. Aus dem in Abbildung 3.5 gezeigten Kraft-Wegdiagramm bei horizontaler Belastung und dem in Abbildung 3.6 dargestellten Kraft-Wegdiagramm bei vertikaler Belastung lassen sich die zugehörigen Steifigkeiten ableiten.



**Abbildung 3.5: Kraft-Wegdiagramm für verschiedene Linearführungen bei horizontaler Belastung [Sch02]**



**Abbildung 3.6: Kraft-Wegdiagramm für verschiedene Linearführungen bei vertikaler Belastung [Sch02]**

Für eine Linearführungseinheit beträgt die horizontale Steifigkeit  $1130 \text{ N}/\mu\text{m}$  und die vertikale Steifigkeit  $1700 \text{ N}/\mu\text{m}$ . Die Gesamtsteifigkeit für eine Antriebseinheit beträgt damit in  $y$ -Richtung  $k_y = 4520 \text{ N}/\mu\text{m}$  und in  $z$ -Richtung  $k_z = 6800 \text{ N}/\mu\text{m}$ . Die lokale Steifigkeitsmatrix im Antriebskoordinatensystem ist damit zu:

$$\mathbf{K}'_{W,i} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 4250 & 0 \\ 0 & 0 & 6800 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\mu\text{m}} \quad 3.14$$

gegeben.

Die maximalen Antriebskräfte betragen nach Herstellerangaben  $\tau_{q,\max} = 2500 \text{ N}$ . Für das Simulationsmodell wird eine Kraftreserve zur Überwindung der Haftreibungskräfte von  $\tau_{q,\min} = 300 \text{ N}$  angenommen. Die für die Berechnung der maximalen Beschleunigungen notwendigen Parameter der Coulombschen und der viskosen Reibung wurden mithilfe eines adaptiven Algorithmus in der Steuerung der Hexaglide-Kinematik ermittelt. Eine detaillierte Beschreibung dieses Algorithmus findet sich bei Honegger [Hon99].

Die Matrizen der Reibung sind mit diesem Algorithmus zu:

$$\mathbf{C} = \text{diag}[ 75.7, 106.4, 113.1, 153.0, 93.0, 66.4 ] \text{ N} \quad 3.15$$

$$\mathbf{V} = \text{diag}[ 753.6, 456.7, 566.8, 623.5, 535.6, 577.5 ] \text{ Ns/m} \quad 3.16$$

ermittelt worden. Die maximale Verfahrensgeschwindigkeit der Antriebe wird von der Steuerung auf 1 m/s begrenzt.

Die Steifigkeiten der Stäbe der Hexaglide-Kinematik können über Gleichung 3.7 aus dem E-Modul des eingesetzten Stahls, dem konstanten Querschnitt und der Länge der Stäbe bestimmt werden:

$$k_{\text{St} [1,2]} = 326 \text{ N}/\mu\text{m} \quad 3.17$$

$$k_{\text{St} [3,4,5,6]} = 344 \text{ N}/\mu\text{m} \quad 3.18$$

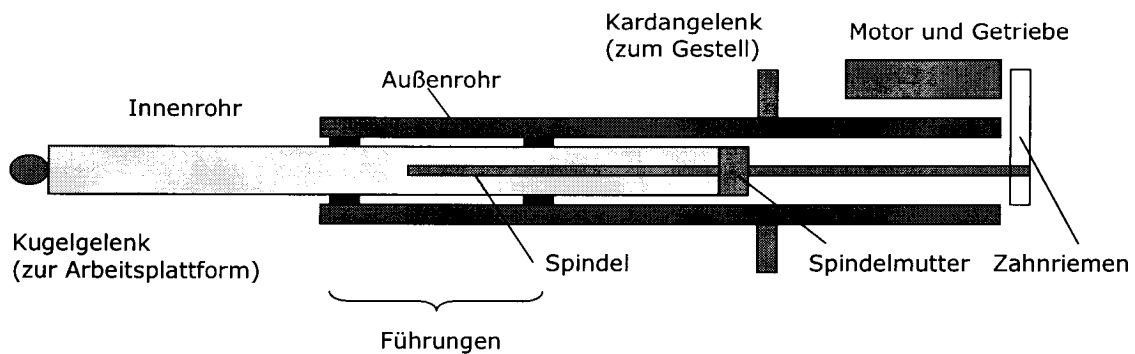
Die Massen der Stäbe berechnen sich über die Dichte des eingesetzten Stahls zu:

$$m_{\text{St} [1,2]} = 12.13 \text{ kg} \quad 3.19$$

$$m_{\text{St} [3,4,5,6]} = 11.52 \text{ kg} \quad 3.20$$

### 3.1.3 6X Hexapod-Kinematik

Da es sich bei den Antrieben der 6X Hexapod-Kinematik um Teleskopstreben mit einer fest-los Lagerung handelt, ist ihre Steifigkeit eine Funktion des Hubs. Der schematische Aufbau der in dieser Kinematik eingesetzten Teleskopstreben ist in Abbildung 3.7 dargestellt.



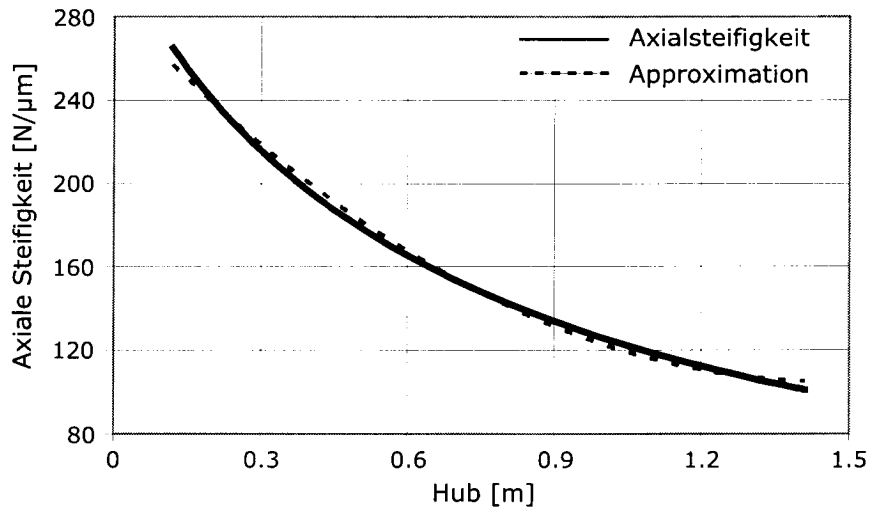
**Abbildung 3.7: Schematischer Aufbau einer Antriebseinheit der 6X Parallelkinematik [Ih102]**

Über das in Tabelle 3.1 gezeigte Ersatzschema lässt sich die axiale Steifigkeit für diese Lagerungsart mit Gleichung 3.3 beschreiben. Das Axiallager der Gewindespindel hat nach Herstellerangaben eine Steifigkeit von  $k_{aL} = 650 \text{ N}/\mu\text{m}$  [Sta99]. Die Gewindemutter hat eine axiale Steifigkeit von  $k_M = 410 \text{ N}/\mu\text{m}$ . Die Spindelsteifigkeit  $k_{sp}$  berechnet sich nach Gleichung 3.1 für die gegebenen Parameter (Durchmesser, E-Modul) zu:

$$k_{sp} = \frac{211}{l_{eff}} \frac{\text{Nm}}{\mu\text{m}} \quad \text{mit} \quad 0.12 \text{ m} \leq l_{eff} \leq 1.410 \text{ m} \quad 3.21$$



Mit der Annahme einer ideal steifen Anschlusskonstruktion der Gewindemutter kann die Steifigkeit einer Antriebseinheit  $k_{A,i}$  als Funktion ihres Hubs berechnet werden. In Abbildung 3.8 ist die Axialsteifigkeit eines Antriebs der 6X Parallelkinematik in Abhängigkeit des Hubs dargestellt (durchgezogene Linie).



**Abbildung 3.8: Axialsteifigkeit eines Antriebs der 6X Parallelkinematik in Abhängigkeit des Hubs**

Für das Simulationswerkzeug (vgl. Kapitel 4.2) wird diese Abhängigkeit durch ein Polynom zweiter Ordnung approximiert. Für einen gegebenen Hub  $x_i$  berechnet sich die Axialsteifigkeit eines Antriebs 'i' damit näherungsweise über:

$$k_{A,i} = 85,3 x_i^2 - 248,14 x_i + 285,53 \quad 3.22$$

Mit dieser polynomischen Approximation, die in Abbildung 3.8 durch eine gestrichelte Linie dargestellt ist, wird ein Korrelationskoeffizient von  $\rho = 0.9979$  erreicht, was eine gute Übereinstimmung zwischen der Funktion und der Approximation zeigt.

Das Trägheitsmoment der Spindel beträgt  $12.57 \text{ kg cm}^2/\text{m}$ , die Steigung  $40 \text{ mm}$  und die Gesamtlänge  $1586 \text{ mm}$ , woraus sich mit Gleichung 3.4 die translatorische Trägheit eines Antriebs 'i' zu:

$$m_i = 49.19 \text{ kg} \quad 3.23$$

berechnen lässt. Die von den Antrieben zur Verfügung gestellte Axialkraft ergibt sich aus der Steigung des Gewindetriebs  $h_s$  und dem Motormoment  $M_t$ . Mit  $h_s = 40 \text{ mm}$ ,  $M_t = 33.3 \text{ Nm}$  und einem Wirkungsgrad  $\eta = 0.95$  beträgt die maximale Axialkraft:

$$\tau_{q,\max} = \frac{2\pi M_t \eta}{h_s} = 4969 \text{ N} \quad 3.24$$

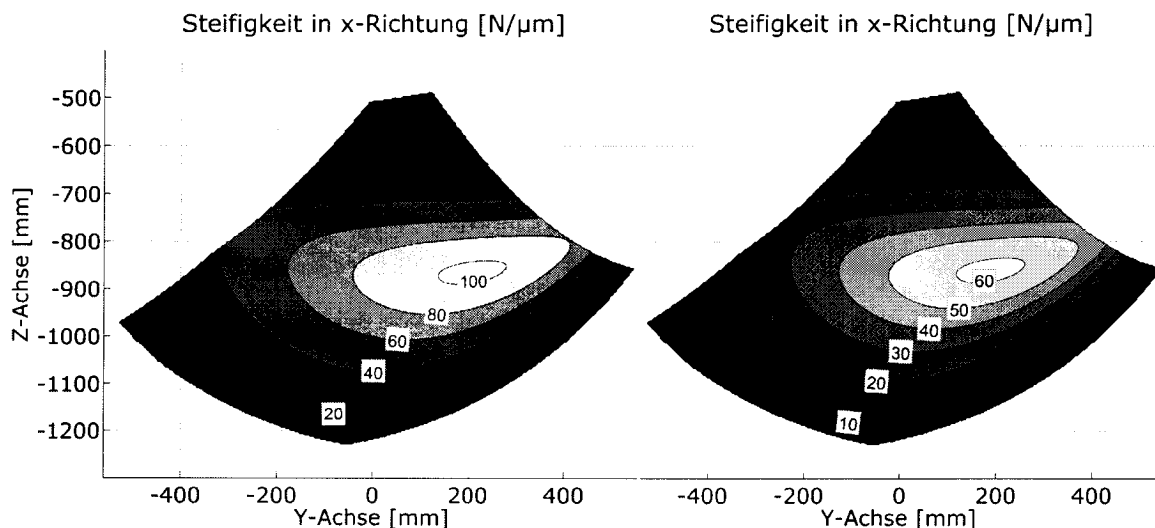
Die Reibungsverluste innerhalb des Antriebs werden durch den Wirkungsgrad  $\eta$  berücksichtigt. Die maximale Verfahrgeschwindigkeit der Antriebe wird von Neugebauer [Neu98] mit  $0.5 \text{ m/s}$  angegeben.

### 3.2 Gelenke

Für das im Arbeitsraum stark variierende statische und dynamische Verhalten einer Parallelkinematik ist neben der Kinematik auch die winkelabhängige Steifigkeit der Gelenke verantwortlich. Die Bedeutung dieser winkelabhängigen Steifigkeit und ihr Einfluss auf die Eigenschaften einer Parallelkinematik soll im Folgenden am Beispiel der Gelenke der Hexaglide-Kinematik aufgezeigt werden.

Wird bei der Berechnung der statischen Steifigkeit in x-Richtung der Steifigkeitswert der Gelenke in der Null-Grad-Stellung zugrunde gelegt, ergibt sich für eine Werkzeugorientierung von  $a = b = c = 0$  Grad die auf der linken Seite von Abbildung 3.9 gezeigte Steifigkeitsverteilung.

Berücksichtigt man die in Abbildung 3.32 dargestellte winkelabhängige Steifigkeit der verbesserten antriebs- und plattformseitigen Gelenke, so ergibt sich die auf der rechten Seite von Abbildung 3.9 gezeigte Steifigkeitsverteilung.



**Abbildung 3.9: Steifigkeitsverteilung in der Y-Z-Schnittebene der Hexaglide-Kinematik bei einer Orientierung von  $a = b = c = 0$  Grad: auf der linken Seite bei Annahme einer konstanten Gelenksteifigkeit und auf der rechten Seite bei winkelabhängiger Gelenksteifigkeit**

Legt man für die Berechnung der Abweichungen die Werte der mit winkelabhängigen Gelenksteifigkeiten berechneten Verteilungen zugrunde, so ergeben sich die in Tabelle 3.2 zusammengefassten Abweichungen der Steifigkeit in x-Richtung. Zur Verdeutlichung des Einflusses der winkelabhängigen Gelenksteifigkeiten werden der Maximal- und der Durchschnittswert der Steifigkeit in der dargestellten Ebene verwendet. Aussagen über die Eignung einer Kinematik für eine gegebene Bearbeitungsaufgabe lassen sich aus diesen Werten allerdings nur sehr eingeschränkt ableiten, da innerhalb eines Arbeitsraums geforderte Minimalsteifigkeitswerte garantiert werden müssen.

Da die winkelabhängige Steifigkeit von in Parallelkinematiken eingesetzten Gelenken bisher nicht näher untersucht worden ist, konnte ihr Einfluss auf die Eigenschaften einer solchen Kinematik bisher nicht berücksichtigt werden.

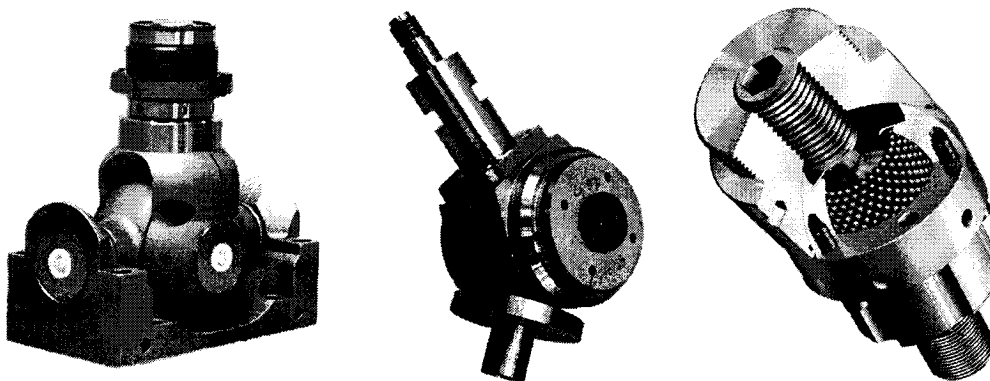
	konstante Gelenksteifigkeit [N/ $\mu$ m]	winkelabhängige Gelenksteifigkeit [N/ $\mu$ m]	Abweichung [%]
Maximum	102.5	61.7	39.8
Durchschnitt	41.9	24.3	42.0

**Tabelle 3.2: Verteilung der Steifigkeit in x-Richtung der Hexaglide-Kinematik bei Annahme konstanter bzw. winkelabhängiger Gelenksteifigkeit**

Die in Tabelle 3.2 dargestellten Abweichungen machen deutlich, wie wesentlich die Berücksichtigung der winkelabhängigen Steifigkeit der Gelenke für die Genauigkeit der Simulationsergebnisse ist. In den folgenden Kapiteln wird daher das winkelabhängige Steifigkeitsverhalten von Gelenken untersucht und modelliert.

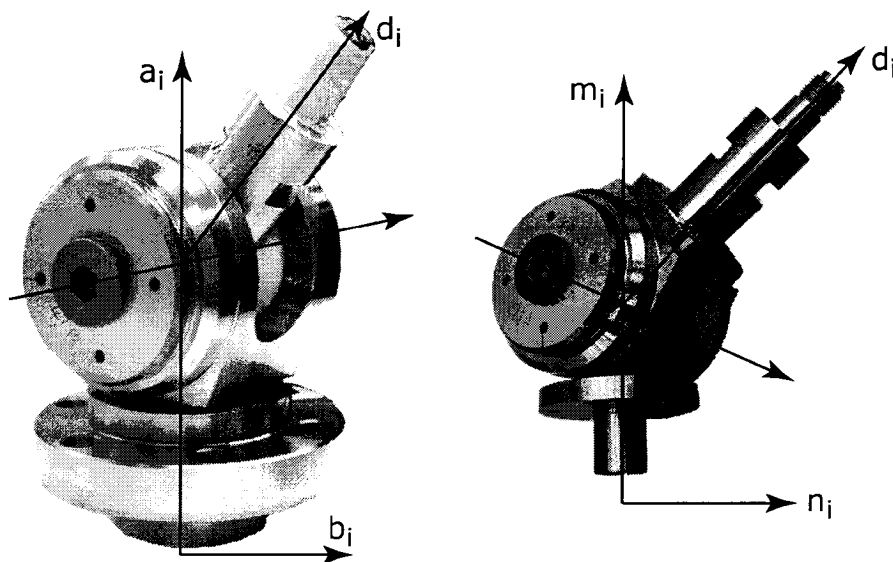
### 3.2.1 Grundlagen der Modellierung

In Abhängigkeit von dem Aufbau der Struktur und den geforderten Eigenschaften kommen bei Parallelkinematiken Gelenke verschiedener Bauarten zum Einsatz. Zwei wesentliche Bauarten lassen sich hierbei unterscheiden: Kardangelenke (Abbildung 3.10 links und mitte) und Kugelgelenke (Abbildung 3.10 rechts). Da die Vor- und Nachteile der verschiedenen Bauarten bereits von Bode [Bod98] und Hebsacker [Heb00] verglichen worden sind, wird die im Folgenden durchgeführte Untersuchung und Modellierung auf die für die Simulationsmodelle (vgl. Kapitel 4) wesentlichen Eigenschaft beschränkt: die winkelabhängigen Steifigkeit.



**Abbildung 3.10: Verschiedene Gelenkbauarten (von links): INA-Kardangelenk [Ina00], IWF-Gelenk, INA-Kugelgelenk [Ina99]**

Eine Eigenschaft, die das statische und dynamische Verhalten einer Parallelkinematik beeinflusst und allen Gelenkbauarten eigen ist, ist eine winkelabhängige Steifigkeit. Diese ergibt sich durch eine Überlagerung von Zug-, Druck- und Biegebelastungen am Gelenk, die von den am Gelenk anliegenden Winkeln abhängig ist. Um das winkelabhängige Steifigkeitsverhalten für eine Modellierung beschreiben zu können, müssen die anliegenden Winkel bestimmt werden. Diese sollen ohne Beschränkung der Allgemeinheit am Beispiel der Gelenke der Hexaglide-Kinematik definiert werden. Die Lage der für die Definition der Winkel benötigten Vektoren wird in Abbildung 3.11 für zwei Gelenke dieser Kinematik gezeigt.



**Abbildung 3.11: Für die Winkeldefinition benötigte Vektoren: links für ein Gelenk mit drei Freiheitsgraden (antriebsseitig) und rechts für ein Gelenk mit zwei Freiheitsgraden (plattformseitig)**

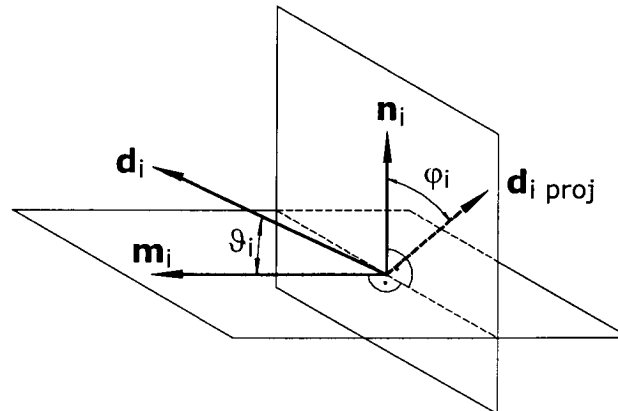
Hierbei bezeichnen:

- $\mathbf{d}_i$  Vektor in Richtung des Stabs der  $i$ -ten kinematischen Kette
- $\mathbf{a}_i$  Schwenkachsenvektor eines Antriebsgelenks ' $i$ ' (erste Gelenkachse)
- $\mathbf{b}_i$  Bezugsvektor eines Antriebsgelenks ' $i$ ' für den Schwenkwinkel
- $\mathbf{m}_i$  Schwenkachsenvektor eines Plattformgelenks ' $i$ ' (erste Gelenkachse)
- $\mathbf{n}_i$  Bezugsvektor eines Plattformgelenks ' $i$ ' für den Schwenkwinkel

Die Bezeichnungen richten sich nach dem Einbauort der Gelenke (antriebs- oder plattformseitig) und sind von der Anzahl der Freiheitsgrade unabhängig. Die Unterscheidung zwischen antriebs- und plattformseitigen Gelenken ist notwendig, da sich die Richtung des Schwenkachsen- und Bezugsvektors bei den antriebsseitigen Gelenken nicht verändert, während sie sich bei den plattformseitigen Gelenken mit der Orientierung der Plattform ändert. Der Richtungs- und Bezugsvektor der Schwenkachse müssen daher bei den plattformseitigen Gelenken mit der Plattform rotiert werden. Unabhängig von der Bauart der Gelenke lassen sich zwei verschiedene Winkel unterscheiden, die am Beispiel eines Plattformgelenks verdeutlicht werden sollen:

- Zum einen der Winkel um die erste Gelenkachse  $\mathbf{m}_i$ , der im Folgenden als Schwenkwinkel  $\varphi_i$  bezeichnet wird. Dieser berechnet sich zwischen dem in eine Ebene senkrecht auf  $\mathbf{m}_i$  projizierten Richtungsvektor des Stabs  $\mathbf{d}_i \text{ proj}$  und dem Bezugsvektor  $\mathbf{n}_i$ . Der Bezugsvektor  $\mathbf{n}_i$  ist von der Gelenkbauart abhängig und muss entsprechend der Nulllage des Gelenks definiert werden.
- Zum anderen der Winkel um die zweite Gelenkachse, der als Kippwinkel  $\vartheta_i$  bezeichnet wird und sich als Winkel zwischen der ersten Gelenkachse  $\mathbf{m}_i$  und dem Richtungsvektor  $\mathbf{d}_i$  des Stabs ' $i$ ' ergibt.

Die Lage der beiden Winkel wird in Abbildung 3.12 definiert und veranschaulicht.



**Abbildung 3.12: Definition der Winkel**

Der Schwenkwinkel  $\varphi_i$  eines plattformseitigen Gelenks 'i' ergibt sich als Winkel zwischen dem Bezugsvektor  $\mathbf{n}_i$  und dem Stabrichtungsvektor  $\mathbf{d}_i$  proj, der in die zur Schwenkachse senkrecht liegende Ebene projiziert ist:

$$\varphi_{i,P} = \arccos \frac{\mathbf{n}_i (\mathbf{m}_i \times (\mathbf{d}_i \times \mathbf{m}_i))}{\|\mathbf{n}_i\| \|\mathbf{m}_i \times (\mathbf{d}_i \times \mathbf{m}_i)\|} \quad 3.25$$

mit:

$$\mathbf{m}_i = \mathbf{R} \mathbf{m}'_i \quad \text{und} \quad \mathbf{n}_i = \mathbf{R} \mathbf{n}'_i \quad 3.26$$

$\mathbf{R}$  bezeichnet hierbei die Drehmatrix aus Gleichung A.5, mit der die Orientierung des Bezugs- und Richtungsvektors der Schwenkachse aus dem Werkzeugkoordinatensystem in das Maschinenkoordinatensystem transformiert wird. Der Kippwinkel  $\vartheta_i$  der Plattformgelenke berechnet sich als Winkel zwischen dem in das Maschinenkoordinatensystem transformierten Richtungsvektor der Schwenkachse und dem Stabrichtungsvektor zu:

$$\vartheta_{i,P} = \arccos \frac{\mathbf{m}_i \mathbf{d}_i}{\|\mathbf{m}_i\| \|\mathbf{d}_i\|} \quad 3.27$$

Analog hierzu ergeben sich die Schwenk- und Kippwinkel der Antriebsgelenke zu:

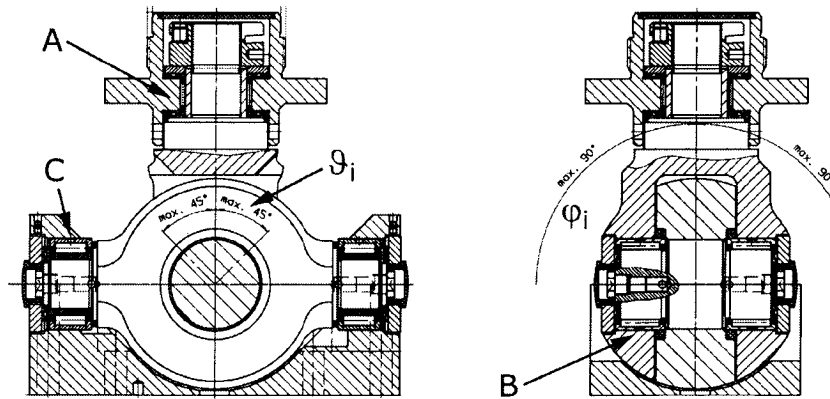
$$\varphi_{i,A} = \arccos \frac{\mathbf{b}_i (\mathbf{a}_i \times (\mathbf{d}_i \times \mathbf{a}_i))}{\|\mathbf{b}_i\| \|\mathbf{a}_i \times (\mathbf{d}_i \times \mathbf{a}_i)\|} \quad 3.28$$

und:

$$\vartheta_{i,A} = \arccos \frac{\mathbf{a}_i \mathbf{d}_i}{\|\mathbf{a}_i\| \|\mathbf{d}_i\|} \quad 3.29$$

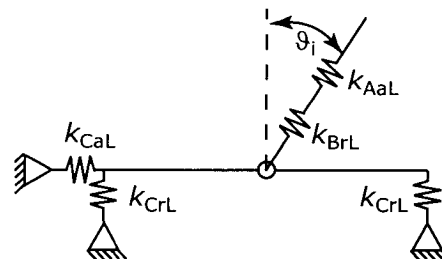
Die Steifigkeit eines Gelenks ist abhängig von diesen Winkeln. Am Beispiel des in Abbildung 3.13 gezeigten Kardangelenks der Firma INA kann anhand eines Ersatzmodells die winkelabhängige Steifigkeit eines solchen Gelenks analytisch berechnet werden.

Unter der Annahme, dass die Steifigkeit der Gelenkbauteile wesentlich größer als die der eingesetzten Radial- und Axiallager ist, kann das Steifigkeitsverhalten des in Abbildung 3.13 gezeigten Kardangelenks durch das in Abbildung 3.14 dargestellte Ersatzschema beschrieben werden.



**Abbildung 3.13: Aufbau eines Kardangelenks [Ina00] - A, B und C bezeichnen die Lagerungen,  $\varphi_i$  und  $\vartheta_i$  die Gelenkwinkel**

Bedingt durch diese Annahme ist die Steifigkeit ausschließlich eine Funktion des Kippwinkels  $\vartheta_i$ , da eine Rotation um den Schwenkwinkel  $\varphi_i$  die die Steifigkeit bestimmende Überlagerung von Zug/Druck- und Biegesteifigkeit nicht verändert.



**Abbildung 3.14: Ersatzschema eines Gelenks**

Hierbei bezeichnen:

- |  |  |
|--|--|
| $k_{AaL}$ axiale Steifigkeit des Lagers 'A'  | $k_{CrL}$ radiale Steifigkeit des Lagers 'C' |
| $k_{BrL}$ radiale Steifigkeit des Lagers 'B' | $k_{CaL}$ axiale Steifigkeit des Lagers 'C'  |

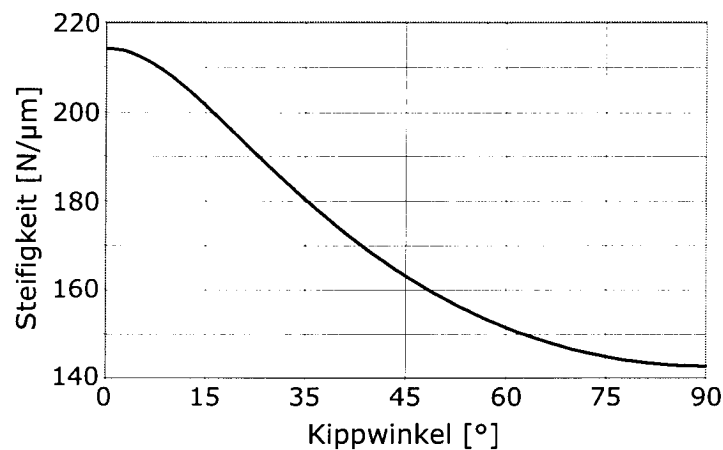
Die Steifigkeit  $k_G$  des Ersatzmodells eines solchen Gelenks lässt sich damit durch:

$$k_G = \frac{2 k_{AaL} k_{BrL}}{2 k_{BrL} + k_{AaL} \left( 2 + k_{BrL} \sqrt{\left( \frac{\cos(\vartheta_i)}{k_{CrL}} \right)^2 + \left( \frac{4 \sin(\vartheta_i)}{k_{CaL}} \right)^2} \right)} \quad 3.30$$

beschreiben. Unter Annahme der folgenden Parameterwerte:

$$k_{AaL} = 600 \text{ N}/\mu\text{m} \quad k_{BrL} = 500 \text{ N}/\mu\text{m} \quad k_{CrL} = 500 \text{ N}/\mu\text{m} \quad k_{CaL} = 600 \text{ N}/\mu\text{m}$$

lässt sich die in Abbildung 3.15 gezeigte winkelabhängige Steifigkeit des Ersatzmodells berechnen.



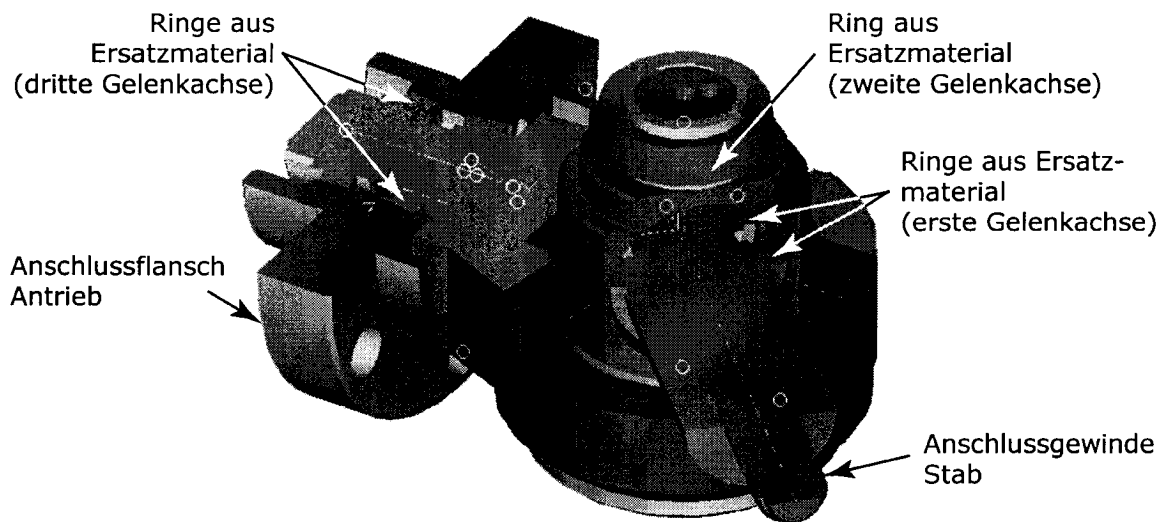
**Abbildung 3.15: Analytisch berechnete Steifigkeit des Ersatzmodells eines Gelenks als Funktion des Kippwinkels  $\vartheta_i$**

Ausgehend von der Nullgradlage reduziert sich die Steifigkeit eines so modellierten Gelenks um 33 Prozent bis zur 90 Gradlage.

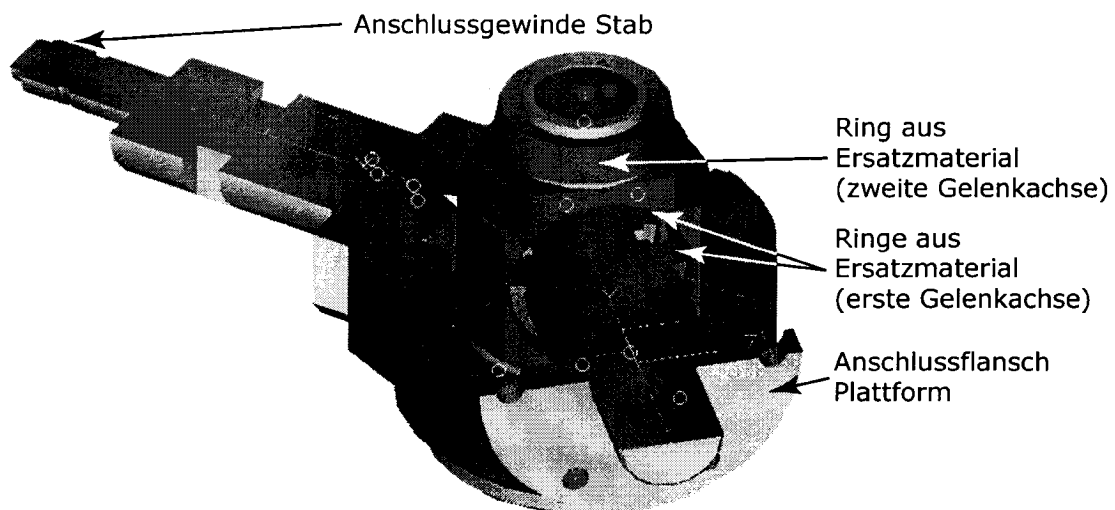
### 3.2.2 Finite-Element-Analysen

Die Genauigkeit der mit dem analytischen Modell berechneten winkelabhängigen Steifigkeit ist von der Annahme, die Steifigkeit der Gelenkbauteile mit Ausnahme der Axial- und Radiallager zu vernachlässigen, abhängig. Um diese Annahme zu verifizieren beziehungsweise falsifizieren und damit die Genauigkeit des Ersatzmodells bestimmen zu können, wurden die Gelenke der Hexaglide-Kinematik mithilfe der Finiten-Element-Methode bei verschiedenen Winkellagen modelliert und analysiert. Hierzu wurden ausgehend von den Zeichnungen Volumenmodelle für die Gelenke mit drei und zwei Freiheitsgraden erstellt.

Um alle für die Steifigkeit der Gelenke wesentlichen Einflussfaktoren berücksichtigen zu können, wurden die Volumenmodelle mit einem hohen Detaillierungsgrad erstellt und die antriebs- und plattformseitigen Anschlussgeometrie in den Volumenmodellen nachgebildet. Die für die Untersuchung aus den Zeichnungen erzeugten Volumenmodelle der Gelenke mit drei und zwei Freiheitsgraden sind in Abbildung 3.16 und Abbildung 3.17 in Schnittdarstellungen dargestellt. Wie in den Abbildungen gezeigt, wurden die Lager der drei beziehungsweise zwei Gelenkachsen durch Ringe modelliert, da eine umfassende Modellierung eines Wälzlagers aufgrund seines komplexen Aufbaus sehr aufwendig ist und die Berechnungen erheblich komplizierter machen. So besteht zum Beispiel ein von Weidemann [Wei02] detailgetreu modelliertes Zylinderrollenlager aus ca. 30.000 Finiten-Elementen.



**Abbildung 3.16: Schnittdarstellung eines 3D Gelenks der Hexaglide-Kinematik bei einem Kippwinkel von 45 Grad**



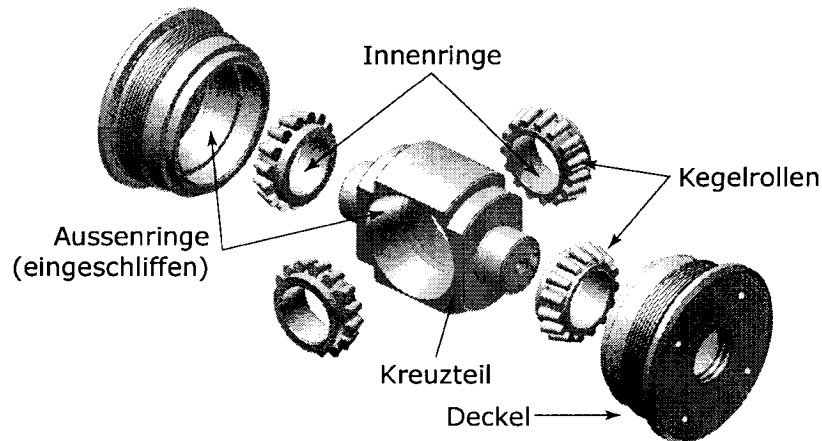
**Abbildung 3.17: Schnittdarstellung eines 2D Gelenks der Hexaglide-Kinematik bei einem Kippwinkel von 45 Grad**

Um die Komplexität und den Umfang der Volumenmodelle zu reduzieren, wurden die sechs (bei den Gelenken mit drei Freiheitsgraden) beziehungsweise vier Kegelrollenlager (bei den Gelenken mit zwei Freiheitsgraden) durch aus Ersatzmaterial bestehende Ringe modelliert. Die Finite-Element-Modellierung dieser Ringe und die Bestimmung der physikalischen Eigenschaften des Ersatzmaterials soll im Folgenden an den Lagern des Kreuzteils gezeigt werden, die die erste und zweite Gelenkachse tragen.

Das CAD-Modell des Aufbaus dieser Lagerung ist in Abbildung 3.18 dargestellt. Die Aussenringe der vier Kegelrollenlager sind in die Deckel des Gehäuses beziehungsweise das Kreuzteil eingeschliffen. Hierdurch können die Schnittstellen innerhalb des Gelenks reduziert und damit die Steifigkeit der Lagerung insgesamt

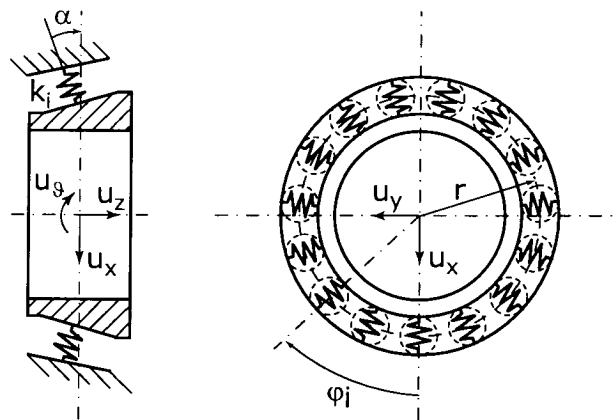


erhöht werden. Über die Deckel und einen durch das Kreuzteil gehenden Zuganker sind die Lager mit einer definierten Kraft von 4.2 kN gegeneinander vorgespannt. Die Lagerluft wird durch diese Vorspannung auf Null reduziert.



**Abbildung 3.18: CAD-Modell des Kreuzteils  
(Lagerung der ersten und zweiten Gelenkachse)**

Das Steifigkeitsverhalten eines so vorgespannten Kegelrollenlagers wird wesentlich durch die elastohydrodynamischen Kontaktbedingungen der einzelnen Lagerkörper mit dem Innen- und Aussenring bestimmt. Wie Untersuchungen von Ophrey [Oph86] zeigen, kann das nichtlineare Steifigkeitsverhalten eines Wälzlagers für Finite-Element-Analysen hinreichend genau durch ein lineares Federmodell beschrieben werden. Die Steifigkeitseigenschaften eines Lagers ergeben sich bei einer solchen Linearisierung aus den Einzelsteifigkeiten der Wälzpaarungen. Für die in den Gelenken eingesetzten Kegelrollenlagern ist ein entsprechendes Modell in Abbildung 3.19 dargestellt.



**Abbildung 3.19: Modellierung  
eines Kegelrollenlagers mit Ersatzfedern**

Wählt man die von Dietl [Die97] vorgeschlagene Notation der Richtungen und definiert man einen globalen Verschiebungsvektor mit drei Freiheitsgraden  $\mathbf{u}_B$ :

$$\mathbf{u}_B = \{u_x, u_z, u_\vartheta\}^T \quad 3.31$$

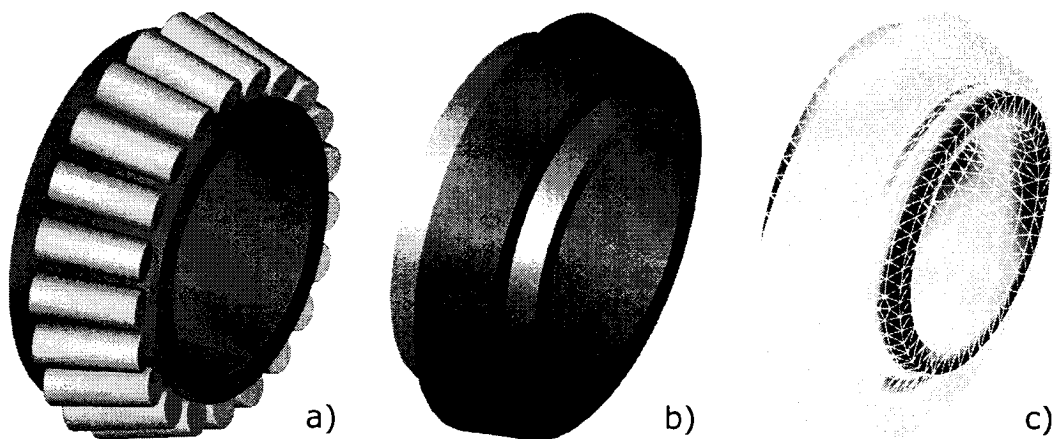
so kann die linear-elastische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_L$  für das Lagermodell nach Dietl [Die97] zu:

$$\mathbf{K}_L = \sum_{i=1}^n (k_i \mathbf{N}_i^T \mathbf{N}_i) \quad \text{mit} \quad \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \varphi_i \\ \sin \alpha \\ -r \sin \alpha \cos \varphi_i \end{bmatrix}^T \quad 3.32$$

hergeleitet werden. Hierbei bezeichnet  $n$  die Anzahl der Kegelrollen im Lager. Bei einer lokalen Federsteifigkeit  $k_i = 22.5 \text{ N}/\mu\text{m}$ , einen Druckwinkel  $\alpha = 30.1 \text{ Grad}$  und  $n = 21$  Kegelrollen (gemäß Herstellerangaben) ergibt sich für ein solches Kegelrollenlager über Gleichung 3.32 eine Radialsteifigkeit von  $k_r = 176.8 \text{ N}/\mu\text{m}$  und eine Axialsteifigkeit von  $k_a = 118.8 \text{ N}/\mu\text{m}$ .

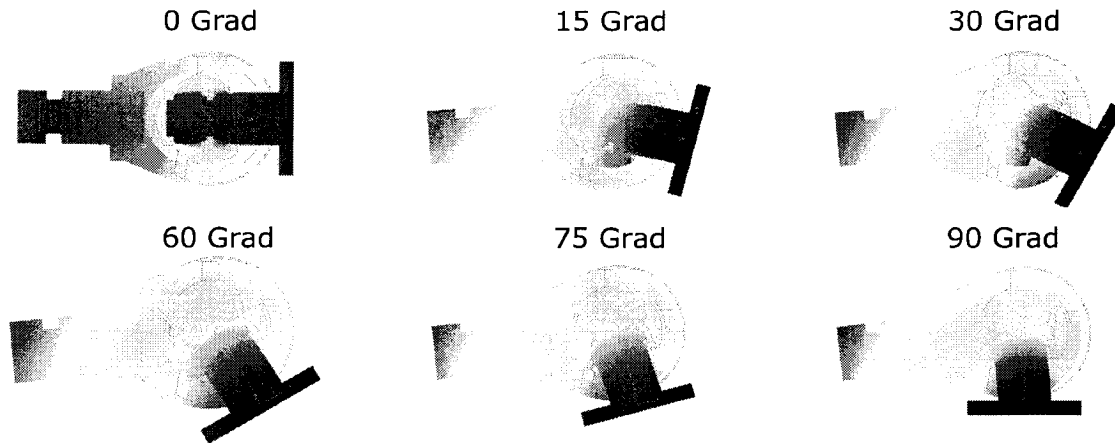
Um die Komplexität und die Anzahl der Elemente des FE-Modells zu reduzieren, werden die Kegelrollenlager vereinfacht. Den Innenringen und den eingeschliffenen Aussenringen der Lager werden die physikalischen Eigenschaften des verwendeten Materials beziehungsweise die des Grundkörpers (Deckel - Kreuzteil) zugewiesen. Die Kegelrollen des Lagers, die in Abbildung 3.20 links zusammen mit dem Innenring als CAD-Modell dargestellt sind, werden durch den in der Mitte der Abbildung gezeigten Ring ersetzt und zu einem Lagermodell zusammengefügt.

An diesem Lagermodell wurden der Elastizitätsmodul, der Schubmodul und die Querkontraktionszahl des Ersatzmaterials so gewählt, dass die Radial- und die Axialsteifigkeit des Modells mit den oben dargestellten Werten übereinstimmen. Der unter einer Radiallast deformierte Ring, der mit einem Elastizitätsmodul von  $E = 7.7 \text{ kN}/\text{mm}^2$ , einem Schubmodul von  $G = 3.2 \text{ kN}/\text{mm}^2$  und einer Querkontraktionszahl von  $\mu = 0.1$  modelliert ist, ist auf der rechten Seite von Abbildung 3.20 dargestellt. Diese am Modell ermittelten Eigenschaften des Ersatzmaterials wurden dann in die Gelenkmodelle übernommen.



**Abbildung 3.20: CAD-Modell der Kegelrollen und des Innenrings (a), FEM-Ersatzmodell (b), unter Last deformiertes FEM-Ersatzmodell (c)**

Für verschiedene Kippwinkel (0, 15, 30, 45, 60, 75 und 90 Grad) wurden Volumenmodelle der Gelenke mit drei und zwei Freiheitsgraden erstellt und das jeweilige Deformationsverhalten berechnet. In Abbildung 3.21 ist dieses Deformationsverhalten bei verschiedenen Kippwinkeln an einem Gelenk mit zwei Freiheitsgraden dargestellt.



**Abbildung 3.21: FEM-Modelle bei verschiedenen Winkellagen**

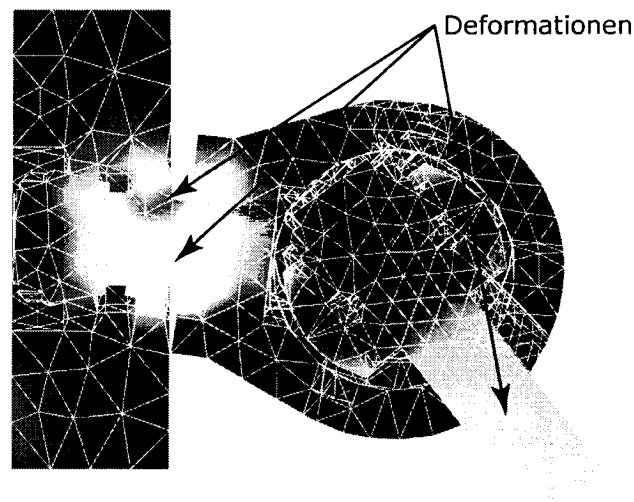
Die bei einer Last von 5 kN berechneten Deformationen sind in Tabelle 3.3 zusammengefasst.

Winkel	Deformation	Winkel	Deformation
0 Grad	14.8 $\mu\text{m}$	60 Grad	58.1 $\mu\text{m}$
15 Grad	23.3 $\mu\text{m}$	75 Grad	62.1 $\mu\text{m}$
30 Grad	37.3 $\mu\text{m}$	90 Grad	61.5 $\mu\text{m}$
45 Grad	49.5 $\mu\text{m}$		

**Tabelle 3.3: Deformation der FEM-Modell bei verschiedenen Winkellagen**

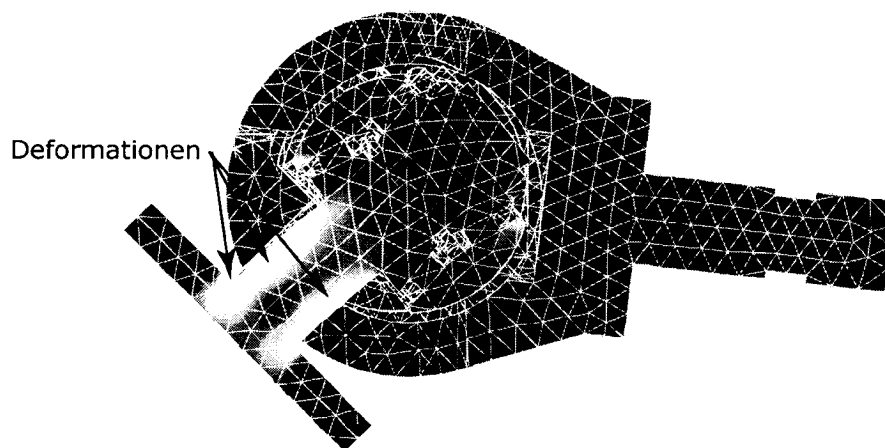
Die Deformationen der Gelenke mit drei und zwei Freiheitsgraden werden im Folgenden am Beispiel eines Kippwinkels von 45 Grad diskutiert.

Das Deformationsverhalten eines Gelenks mit drei Freiheitsgraden bei einem Kippwinkel von 45 Grad und einer Zugbelastung an der stabseitigen Anschlussgeometrie ist in Abbildung 3.22 dargestellt. Bei einer angenommenen Last von 500 N beträgt die Deformation 35.9  $\mu\text{m}$ . Die unter der Last auftretenden Deformationen konzentrieren sich auf die Welle der dritten Gelenkachse und die stabseitige Anschlussgeometrie (in der Abbildung durch Pfeile markiert). Die Deformation der Welle der dritten Gelenkachse ist auf eine überlagerte Zug- und Biegebelastung und die der stabseitigen Anschlussgeometrie auf eine reine Zugbelastung zurückzuführen.



**Abbildung 3.22: FEM-Analyse eines 3D Gelenks der Hexaglide-Kinematik bei einem Kippwinkel von 45 Grad**

Das Deformationsverhalten eines Gelenks mit zwei Freiheitsgraden bei gleicher Winkellage und Belastungsart ist in Abbildung 3.23 dargestellt. Bei einer Last von ebenfalls 500 N beträgt die maximale Deformation 24.1  $\mu\text{m}$ . Die Steifigkeit dieses Gelenks wird bei der dargestellten Winkellage durch die Biegesteifigkeit der plattformseitigen Anschlussgeometrie bestimmt.



**Abbildung 3.23: FEM-Analyse eines 2D Gelenks der Hexaglide-Kinematik bei einem Kippwinkel von 45 Grad**

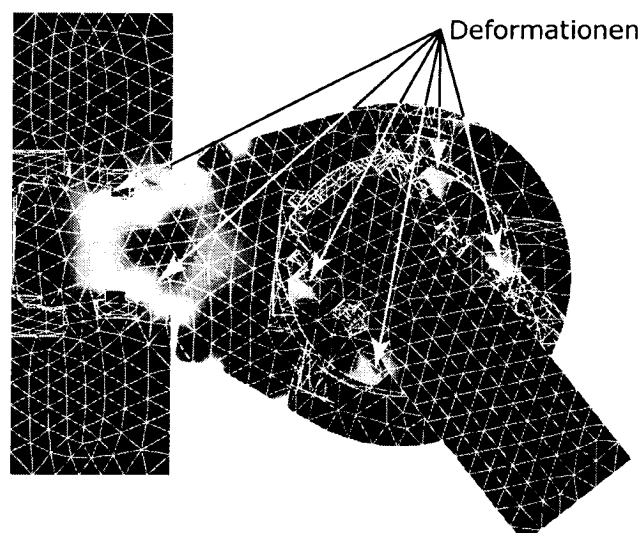
Sowohl das Deformationsverhalten des Gelenks mit drei als auch das des Gelenks mit zwei Freiheitsgraden zeigen, dass die für das analytische Modell getroffene Annahme, die Steifigkeit der Gelenkbauteile mit Ausnahme der Axial- und Radiallager zu vernachlässigen, nicht zulässig ist.

Die Konzentration der Deformationen auf die Anschlussgeometrie der Gelenke zeigt aber auch, dass die Dimensionierung der Bauteile in diesem Bereich zu gering ist und die eingesetzten Materialien über eine unzureichende Zug- und Biegesteifigkeit verfügen. Mit dem Simulationswerkzeug (vgl. Kapitel 4.2) durchgeführt-

te Untersuchungen an der Hexaglide-Kinematik zeigen, dass die maximal erreichbare Steifigkeit dieser Kinematik vor allem durch die eingesetzten Gelenke begrenzt ist, da diese über die geringste Steifigkeit innerhalb der einzelnen kinematischen Ketten verfügen. Eine Erhöhung der Steifigkeit der Gelenke wirkt sich daher direkt auf die Steifigkeit der gesamten Parallelkinematik aus.

Wie im Vergleich von Abbildung 3.24 mit Abbildung 3.22 und von Abbildung 3.25 mit Abbildung 3.23 zu erkennen ist, wurden daher im Rahmen eines Optimierungsprozesses die Querschnitte der die Steifigkeit begrenzenden Anschlussgeometrie vergrößert. Das bisher als Werkstoff verwendete Aluminium wurde durch Stahl ersetzt.

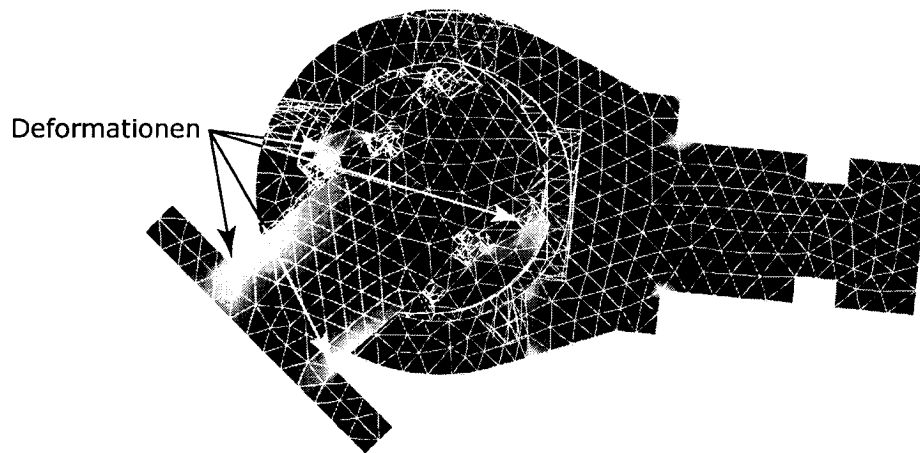
Das Deformationsverhalten eines so verbesserten Gelenks mit drei Freiheitsgraden ist in Abbildung 3.24 für einen Kippwinkel von 45 Grad bei Zugbelastung an der stabseitigen Anschlussgeometrie dargestellt. Bei einer Zugbelastung von 5000 N beträgt die maximale Deformation 153.8  $\mu\text{m}$ . Die Deformation der Welle der dritten Gelenkachse ist im Vergleich zu der in Abbildung 3.22 gezeigten Ausgangssituation deutlich reduziert. Die stabseitige Anschlussgeometrie zeigt keine größeren Deformationen mehr. Die übrigen Deformationen konzentrieren sich auf die Lager der ersten Gelenkachse (in der Abbildung durch Pfeile markiert). Für die Steifigkeit des so verbesserten Gelenks bleibt die Biegesteifigkeit der Welle der dritten Gelenkachse allerdings weiterhin bestimmend. Dies hat zur Folge, dass die Steifigkeit des Gelenks, bedingt durch den mit zunehmendem Kippwinkel größer werdenden Biegeanteil, mit dem Kippwinkel abnimmt.



**Abbildung 3.24: FEM-Analyse eines verbesserten 3D Gelenks der Hexaglide-Kinematik bei einem Kippwinkel von 45 Grad**

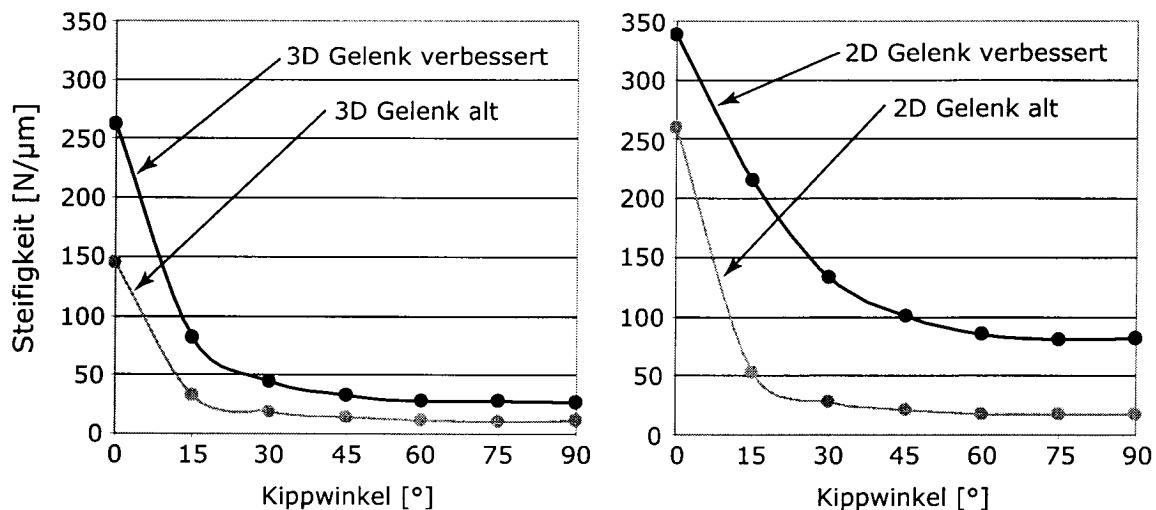
Das in Abbildung 3.25 dargestellte Deformationsverhalten eines verbesserten Gelenks mit zwei Freiheitsgraden bei gleicher Winkellage und Belastungsart zeigt eine deutlich reduzierte Deformation an der plattformseitigen Anschlussgeometrie. Die Deformation bei einer Belastung von 5000 N beträgt 49.5  $\mu\text{m}$ . Diese Deformation ist auch bei dem verbesserten Gelenk auf die durch den Kippwinkel gegebene Biegebelastung zurückzuführen. Darüber hinaus sind die Lager der ersten

Gelenkachse durch die hier auftretende Zugbelastung deutlich deformiert. Im Vergleich zu dem Gelenk mit drei Freiheitsgraden ist die Winkelabhängigkeit der Steifigkeit durch die Deformation der Lager der ersten Gelenkachse, die winkelunabhängig ist, geringer.



**Abbildung 3.25: FEM-Analyse eines verbesserten 2D Gelenks der Hexaglide-Kinematik bei einem Kippwinkel von 45 Grad**

Um die winkelabhängige Steifigkeit zu bestimmen wurden die FEM-Analysen der verschiedenen Gelenke bei verschiedenen Kippwinkeln durchgeführt (vgl. Abbildung 3.21). Aus dem Quotienten der Deformation in Krafrichtung und dem Betrag der wirkenden Kraft ergibt sich die in Abbildung 3.26 dargestellte winkelabhängige Steifigkeit.



**Abbildung 3.26: Mit FEM-Analysen bestimmte Steifigkeitswerte der Gelenke der Hexaglide-Kinematik mit drei (links) und zwei (rechts) Freiheitsgraden: Werte der alten (graue Linien) und der verbesserten (schwarze Linien) Gelenke**

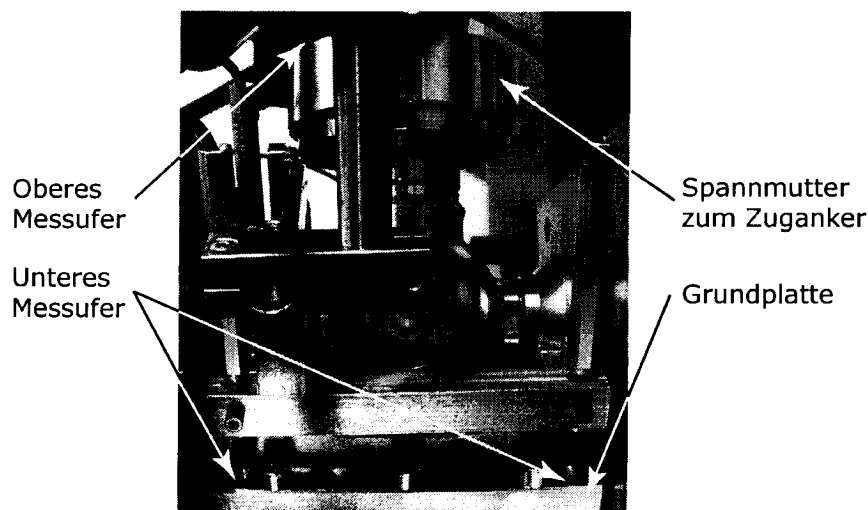
Das Gelenk mit zwei Freiheitsgraden verfügt über eine deutlich höhere Steifigkeit, die sich durch die Optimierung darüber hinaus noch wesentlich stärker erhöht als das Gelenk mit drei Frei-

heitsgraden stärker ausgeprägte Winkelabhängigkeit zeigen, dass die Biegesteifigkeit der Welle der dritten Gelenkachse für dieses Gelenk steifigkeitsbestimmend ist. Eine weitere Optimierung dieser Gelenke müsste sich daher auf eine Versteifung dieser Welle konzentrieren.

### 3.2.3 Messungen auf einer Zugprüfmaschine

Da die in den einzelnen Lagern auftretenden Gleit- und Setzbewegungen der einzelnen Lagerungskörper (Kugeln, Kegel- oder Zylinderrollen) in einem FE-Modell nicht berücksichtigt werden können, sind der Genauigkeit einer solchen Modellierung ebenfalls Grenzen gesetzt. Darüber hinaus können bei einer analytischen oder FE-Modellierung die sich aus Fertigungs- und Montagetoleranzen ergebenden Streuungen bei der Vorspannung der Lager, die sich direkt auf die Steifigkeitswerte auswirken, nur näherungsweise abgeschätzt werden.

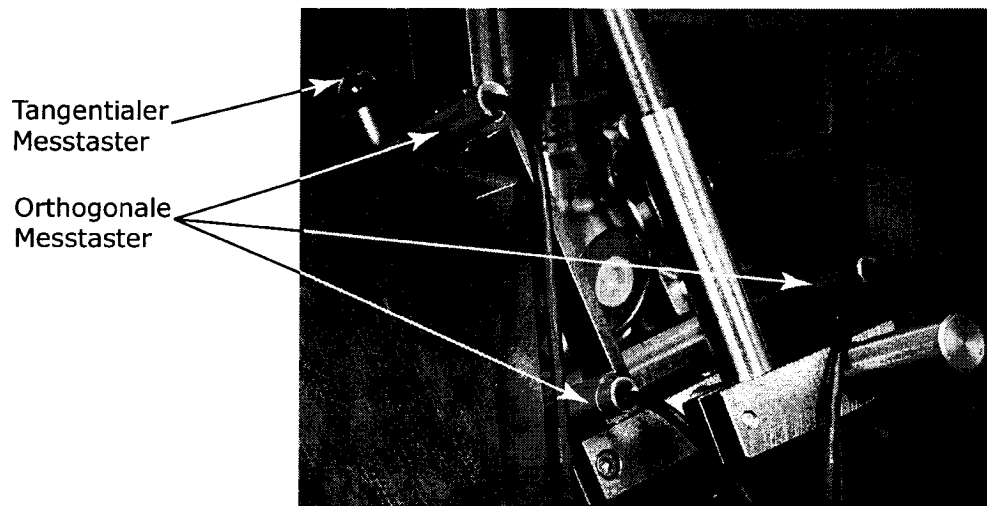
Um die Genauigkeit einer analytischen oder FE-Modellierung bestimmen zu können, wurde die Steifigkeit der Gelenke der Hexaglide-Kinematik auf einer statischen Zugprüfmaschine der Firma Zwick bei verschiedenen Winkellagen gemessen. Die Messufer, zwischen denen die Messung erfolgt, sind so gewählt, dass sowohl der Einfluss der plattform- beziehungsweise antriebsseitigen Befestigungsschrauben als auch der des stabseitigen Gewindes berücksichtigt worden sind. Hierdurch kann die im Einsatz maßgebende reale Gelenksteifigkeit ermittelt werden. Die Position der Messufer wird in Abbildung 3.27 dargestellt. Die Messung erfolgte von der Spannmutter, mit der das stabseitige Gewinde vorgespannt wurde, auf die Grundplatte, auf der das Gelenkgehäuse verschraubt ist. Die Grundplatte kann für die Messung bei verschiedenen Winkellagen über ein entsprechendes Bohrbild von 0 bis 90 Grad in Schritten von 15 Grad geschwenkt werden.



**Abbildung 3.27: Position der Messufer**

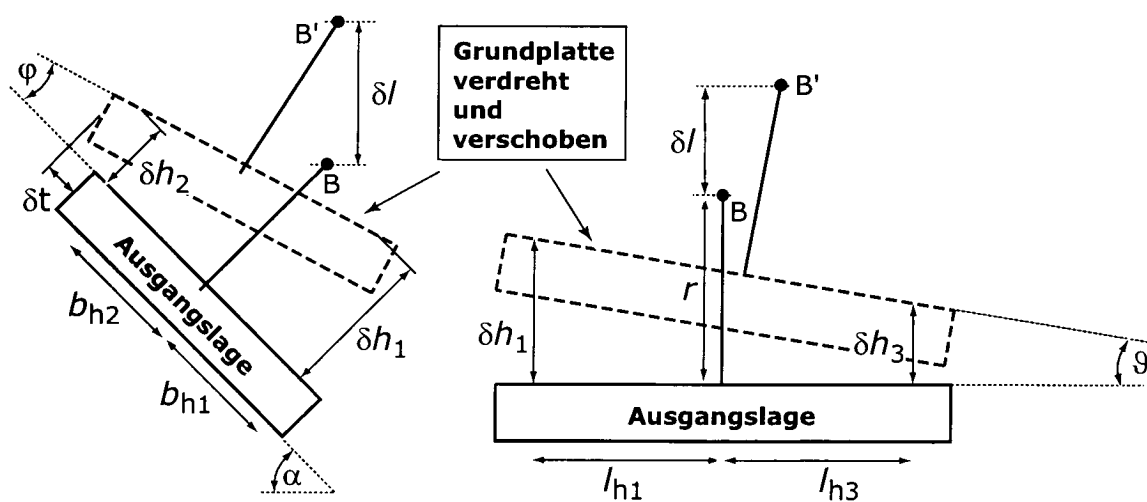
Um die das Messergebnis verfälschende Deformation der Vorrichtung zu korrigieren, wurde die Verschiebung und Verdrehung der Grundplatte mit vier Messtastern erfasst. Mit drei orthogonal auf die Grundplatte ausgerichteten Tastern wurden die Verschiebung und Verdrehung in drei Raumrichtungen relativ zum oberen Messufer gemessen; mit einem weiteren Taster wird die tangentielle Verschiebung

erfasst. Die tangentiale Antastung wurde mit einem Taster mit flachem Tastkopf auf einer Kugloberfläche durchgeführt, um die das Messergebnis dieses Tasters beeinflussende Verdrehung der Grundplatte zu neutralisieren. Dieses und die Anordnung der Taster ist in Abbildung 3.28 dargestellt.



**Abbildung 3.28: Positionen der orthogonalen und des tangentialen Messtaster**

Der Deformationsweg des Gelenkbezugspunkts B in axialer Richtung  $\delta/l$  berechnet sich aus einer Überlagerung der durch die Kräfteinwirkung verursachten Verdrehung und Verschiebung des unteren Messufers relativ zum oberen Messufer. In Abbildung 3.29 werden diese Bewegungen schematisch und die zur Herleitung des Deformationswegs notwendigen Größen gezeigt.



**Abbildung 3.29: Schematische Darstellung der Verschiebung und Verdrehung der Grundplatte und deren messtechnische Erfassung**

Hierbei bezeichnen:

- B Ausgangslage des Gelenkbezugspunkts
- B' Gelenkbezugspunkt verschoben und verdreht



- $\delta h_i$  Längenänderung des i-ten orthogonalen Messtasters
- $\delta t$  Längenänderung des tangentialen Messtasters
- $b_{hi}$  Abstand des Messtasters 'i' vom Gelenkbezugspunkt
- $l_{hi}$  Abstand des Messtasters 'i' vom Gelenkbezugspunkt
- $r$  Abstand des Gelenkbezugspunkts von der Grundfläche
- $\varphi$  Rotationswinkel
- $\vartheta$  Rotationswinkel
- $\alpha$  Gelenkwinkel, bei dem die Messung durchgeführt wird

Die Winkel zur Beschreibung der Verdrehungen der Grundplatte  $\varphi$  und  $\vartheta$  berechnen sich aus den Längenänderungen der zugehörigen Messtaster zu:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\delta h_1 - \delta h_2}{b_{h1} + b_{h2}}\right) \quad \text{und} \quad \vartheta = \arctan\left(\frac{\delta h_1 - \delta h_3}{l_{h1} + l_{h3}}\right) \quad 3.33$$

Die durch diese Verdrehungen verursachten axialen Verschiebungen des Gelenkbezugspunkts lassen sich damit als:

$$\delta l_{\text{rot}} = r(\cos(\alpha - \varphi) - \cos(\alpha)) + \cos(\alpha)(r - r \cos(\vartheta)) \quad 3.34$$

darstellen. Die Auswirkungen der Verschiebungen der Grundplatte auf den Gelenkbezugspunkt lassen sich wie folgt ausdrücken:

$$\delta l_{\text{trans}} = \cos(\alpha) \left[ \delta h_1 + \frac{l_{h1}}{l_{h1} + l_{h3}} (\delta h_3 - \delta h_1) + \frac{b_{h1}}{b_{h1} + b_{h2}} (\delta h_2 - \delta h_1) \right] - \sin(\alpha) \delta t \quad 3.35$$

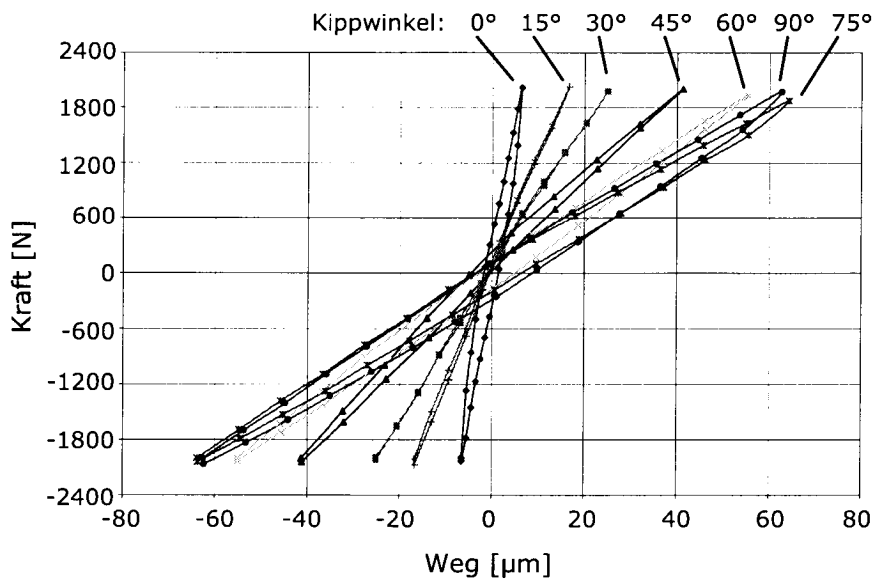
Hieraus ergibt sich die gesamte axiale Verschiebung des Gelenkbezugspunkts als Summe der Rotations- und Translationsbewegungen:

$$\delta l = \delta l_{\text{rot}} + \delta l_{\text{trans}} \quad 3.36$$

Werden die auf das Gelenk wirkenden Kräfte über dieser axialen Verschiebung aufgetragen, so lassen sich die Kraft-Weg-Diagramme, aus denen sich die Steifigkeit ableiten lässt, zeichnen.

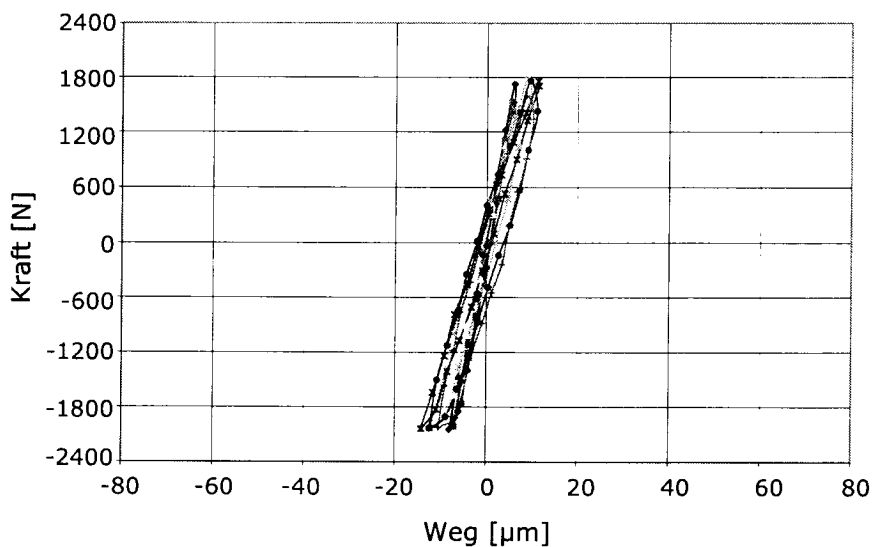
Die für die Gelenke der Hexaglide-Kinematik auf der Zugprüfmaschine durchgeführten Zugversuche zeigen im dazugehörigen Kraft-Weg-Diagramm (vgl. Abbildung 3.30 für ein verbessertes Gelenk mit drei Freiheitsgraden und Abbildung 3.31 für ein verbessertes Gelenk mit zwei Freiheitsgraden), dass es trotz einer definierten Lagervorspannung von 4.2 kN zur Ausbildung einer Hysterese kommt. Dies ist auf die Gleit- und Setzbewegungen der einzelnen Lagerkörper in den Lagern zurückzuführen.

Bei einem Gelenk mit drei Freiheitsgraden (Abbildung 3.30), das über sechs Kegelrollenlager verfügt, ist mit ansteigendem Kippwinkel eine deutliche Verflachung der Hysterese und damit Abnahme der Steifigkeit zu erkennen. Ab einem Kippwinkel von 45 Grad wird die Hysterese mit größer werdendem Winkel zunehmend bauchiger.



**Abbildung 3.30: Kippwinkelabhängige Kraft-Weg-Hysterese eines verbesserten IWF-Gelenks mit drei Freiheitsgraden**

Das Gelenk mit zwei Freiheitsgraden (Abbildung 3.31), das über vier Kegelrollenlager verfügt, hat eine deutlich weniger stark ausgeprägte Winkelabhängigkeit bei einer im Vergleich zu einem Gelenk mit drei Freiheitsgraden höheren Steifigkeit. Auch ist die Bauchigkeit der Hysteresen gleichmäßiger.

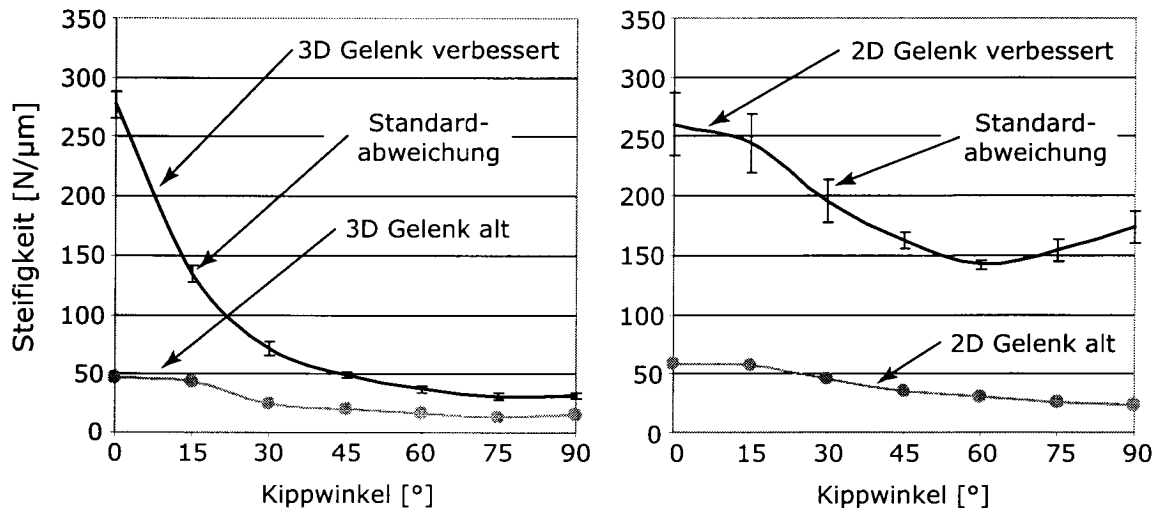


**Abbildung 3.31: Kippwinkelabhängige Kraft-Weg-Hysterese eines verbesserten IWF-Gelenks mit zwei Freiheitsgraden**

Durch eine lineare Interpolation der einzelnen Kurven lässt sich aus der Steigung der einzelnen Hysteresen die Steifigkeit der Gelenke ermitteln.

In Abbildung 3.32 ist auf der linken Seite der Mittelwert der Steifigkeit der verbesserten Gelenke mit drei Freiheitsgraden über dem Kippwinkel aufgetragen. Die ebenfalls in dem Diagramm aufgetragene Standardabweichung der Messungen

zeigt eine nur geringe Streubreite unter den sechs gemessenen Gelenken. Ebenfalls aufgetragen sind die Steifigkeitswerte eines alten Gelenks, das bei einem Kippwinkel von Null Grad eine deutliche Abweichung von dem in Abbildung 3.26 gezeigten mit FEM berechneten Werts aufweist. Diese Abweichung ist auf die geringe Steifigkeit der stabseitigen Anschlussgeometrie zurückzuführen (vgl. Abbildung 3.22).



**Abbildung 3.32: Mit Messungen bestimmte Steifigkeitswerte der Gelenke der Hexaglide-Kinematik mit drei (links) und zwei (rechts) Freiheitsgraden: Werte der alten (graue Linien) und der verbesserten (schwarze Linien) Gelenke**

Auf der rechten Seite von Abbildung 3.32 sind die Werte der Gelenke mit zwei Freiheitsgraden aufgetragen. Die Messwerte dieser Gelenke zeigen eine deutlich größere Standardabweichung und einen qualitativ anderen Verlauf als der Verlauf, der mithilfe der FEM-Analyse berechnet wurde (vgl. Abbildung 3.26).

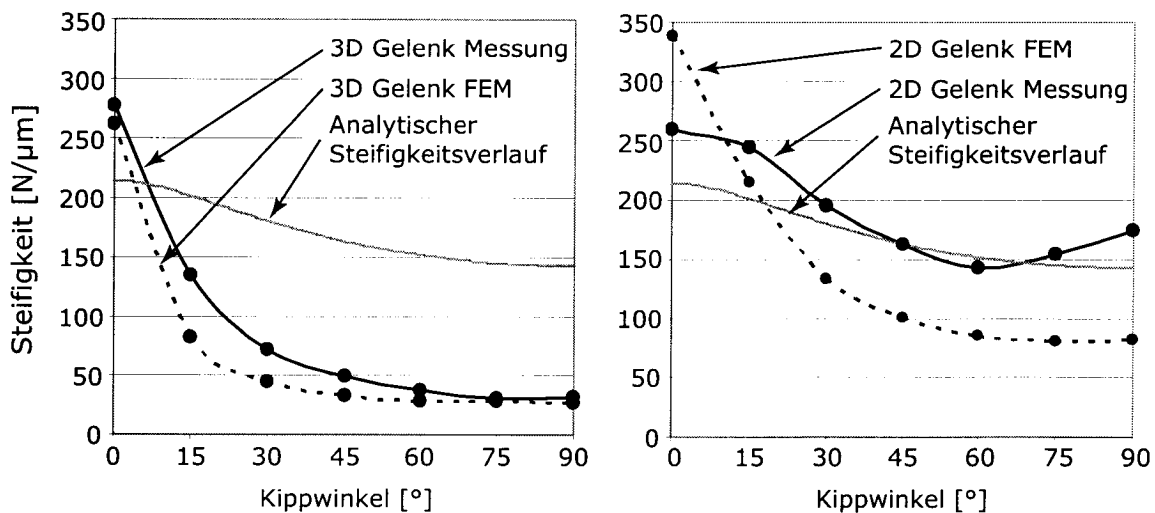
### 3.2.4 Vergleich Finite-Element-Analysen - Messungen

Die Ergebnisse der FEM-Analysen und der Messungen sind zusammen mit der analytisch berechneten winkelabhängigen Steifigkeit in Abbildung 3.33 für die verschiedenen Gelenke dargestellt.

Bei dem auf der linken Seite der Abbildung gezeigten Gelenken mit drei Freiheitsgraden zeigt sich eine gute qualitative Übereinstimmung der FEM-Analyse mit den gemessenen Werten. Dies ist auf die die Steifigkeit bestimmende Deformation der Welle der dritten Gelenkachse zurückzuführen. Da diese Deformation durch eine einfache Überlagerung von Zug- und Biegebelastung an einer Welle begründet ist, kann sie mit dem FE-Modell mit großer Genauigkeit berechnet werden.

Bei den Gelenken mit zwei Freiheitsgraden ist die qualitative Übereinstimmung deutlich schwächer ausgeprägt, die Abweichungen zwischen den Messwerten und den Simulationswerten betragen bis zu 100 Prozent. Das Steifigkeitsminimum bei einem Kippwinkel von 60 Grad (bei dem die Messungen die geringste Standardabweichung aufweisen vgl. Abbildung 3.32) kann mit dem FE-Modell ebenfalls nicht nachvollzogen werden. Hierdurch wird deutlich, dass die komplexen Deformationen im Inneren des Gelenks mit dem FE-Modell nicht hinreichend genau be-

rechnet werden können. Dies ist vor allem darauf zurückzuführen, dass die elasto-hydrodynamischen Kontaktbedingungen und die Gleit- und Setzbewegungen der einzelnen Lagerkörper in dem FE-Modell nicht ausreichend genau modelliert werden können.



**Abbildung 3.33: Vergleich der Steifigkeitswerte der verbesserten Gelenke der Hexaglide-Kinematik mit drei (links) und zwei (rechts) Freiheitsgraden: gemessene Werte (durchgezogene Linie), mit der FEM-Analyse bestimmte Werte (gestrichelte Linie) und analytisch bestimmte Werte (graue Linie)**

Der in Abbildung 3.33 ebenfalls eingezeichnete analytisch berechnete Steifigkeitsverlauf weicht sowohl von den Werten der FEM-Analyse als auch von den Messwerten stark ab. Die für dieses Modell getroffene Annahme, die Steifigkeit der Gelenkbauteile mit Ausnahme der Axial- und Radiallager zu vernachlässigen, ist somit nicht zulässig. Da eine solche Modellierung der Realität aber näher kommt als die bisherige Annahme konstanter Gelenksteifigkeiten, sollte sie verwendet werden, wenn keine genaueren Werte verfügbar sind.

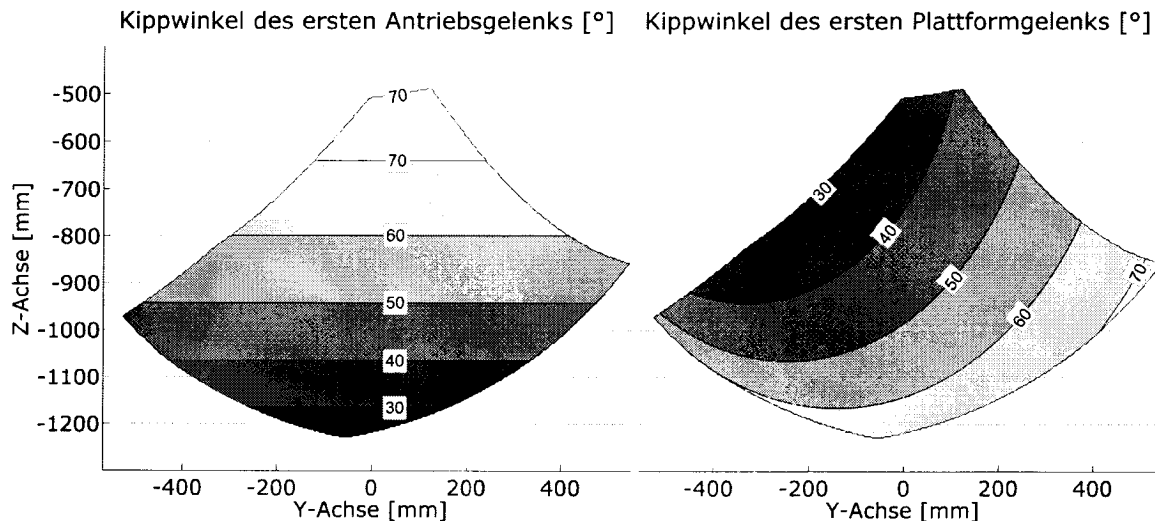
Sowohl die Messungen als auch die FEM-Analysen zeigen, dass die Steifigkeit über den Winkelbereich deutlich abnimmt. Legt man die Messwerte zugrunde, so ergibt sich bei den Gelenken mit drei Freiheitsgraden eine Abnahme der Steifigkeit über den Kippwinkel von bis zu 85 Prozent und für die Gelenke mit zwei Freiheitsgraden eine Abnahme von bis zu 45 Prozent. Dies zeigt die Bedeutung der Berücksichtigung der winkelabhängigen Steifigkeit bei der rechnerischen Bestimmung der statischen und dynamischen Eigenschaften einer parallelkinematischen Werkzeugmaschine.

### 3.2.5 Hexaglide-Kinematik

Der Simulation der Hexaglide-Kinematik liegen die in Abbildung 3.33 dargestellten Steifigkeitswerte der verbesserten Gelenke zugrunde. Die für die Simulation notwendige Interpolation der Steifigkeitswerte zwischen den Stützpunkten der diskreten Messungen erfolgt mit einem kubischen Spline, um die bei Polynomen hö-

herer Ordnung auftretenden Oszillationen zu vermeiden. Die für die Splineinterpolation notwendigen Steigungen am rechten und linken Rand der Kurve werden durch lineare Interpolation mit den jeweiligen nächsten Nachbarn ermittelt.

Die für die Berechnung der Steifigkeit benötigten Kippwinkel werden für jedes Gelenk und für jede Lage des Werkzeugs über die Gleichungen 3.25 bis 3.29 bestimmt. Die so berechnete Verteilung der Kippwinkel des ersten Antriebs- und des ersten Plattformgelenks in der Y-Z Schnittebene (vgl. Kapitel 2) der Hexaglide-Kinematik sind in Abbildung 3.34 dargestellt.



**Abbildung 3.34: Verteilung des Kippwinkels des ersten Antriebsgelenks mit drei Freiheitsgraden (links) und des ersten Plattformgelenks mit zwei Freiheitsgraden (rechts) bei einer Werkzeugorientierung von  $a = b = c = 0$  Grad**

In der auf der linken Seite von Abbildung 3.34 gezeigten Schnittebene wird am unteren Rand des Arbeitsraums (negative z-Achse) ein minimaler Kippwinkel des ersten Antriebsgelenks von 21.8 Grad erreicht. Bei diesem Winkel verfügt ein Gelenk mit drei Freiheitsgraden über eine Steifigkeit von 98.4 N/ $\mu$ m. Innerhalb der Ebene liegt der durchschnittliche Kippwinkel bei 52.1 Grad und damit deutlich über dem Minimum. Die durchschnittliche Steifigkeit der Gelenke beträgt für diesen Winkel nur 42.6 N/ $\mu$ m.

Das auf der rechten Seite von Abbildung 3.34 gezeigte Plattformgelenk weist eine ähnliche Verteilung auf. Die Steifigkeitswerte in diesem Winkelbereich liegen jedoch deutlich über denen der Antriebsgelenke.

	Kippwinkel antriebsseitige Gelenke [Grad]	Steifigkeit antriebsseitige Gelenke [N/ $\mu$ m]	Kippwinkel plattformseitige Gelenke [Grad]	Steifigkeit plattformseitige Gelenke [N/ $\mu$ m]
Max. Winkel	79.0	30.3	72.3	151.0
Durch. Winkel	52.1	42.6	49.9	153.7
Min. Winkel	21.8	98.4	30.2	195.4

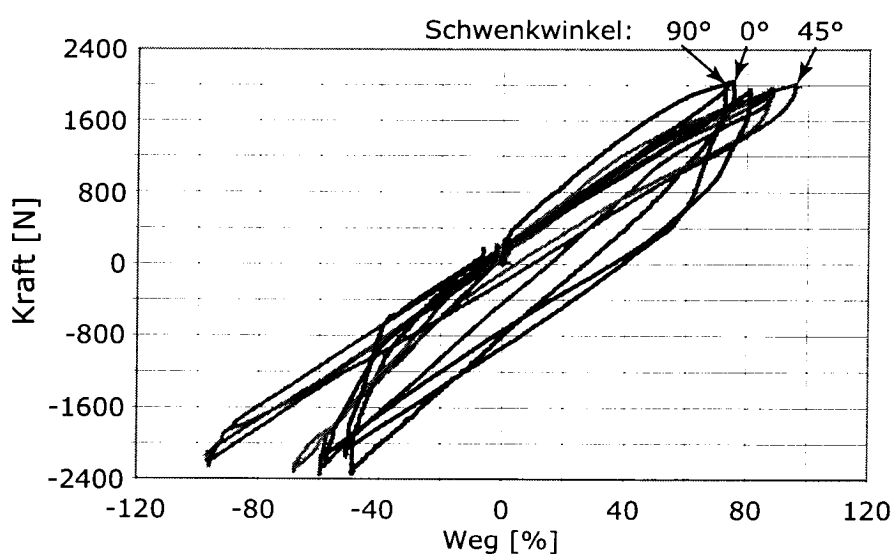
**Tabelle 3.4: Verteilungswerte der Kippwinkel und der zu diesen Winkeln gehörigen Gelenksteifigkeiten der Gelenke der Hexaglide-Kinematik**

Da die Steifigkeit der Gelenke mit zunehmendem Kippwinkel abnimmt, sollten die Gelenke so eingebaut werden, dass innerhalb des Arbeitsraums ein möglichst kleiner Kippwinkel an den einzelnen Gelenken anliegt. Aus den dargestellten Verteilungen wird aber deutlich, dass die Einbauorientierung der Gelenke der Hexaglide-Kinematik nicht optimal ist. Das Potential einer Eigenschaftsverbesserung durch eine Optimierung der Einbauorientierung der Gelenke wird in Kapitel 5.4 analysiert.

### 3.2.6 6X Hexapod-Kinematik

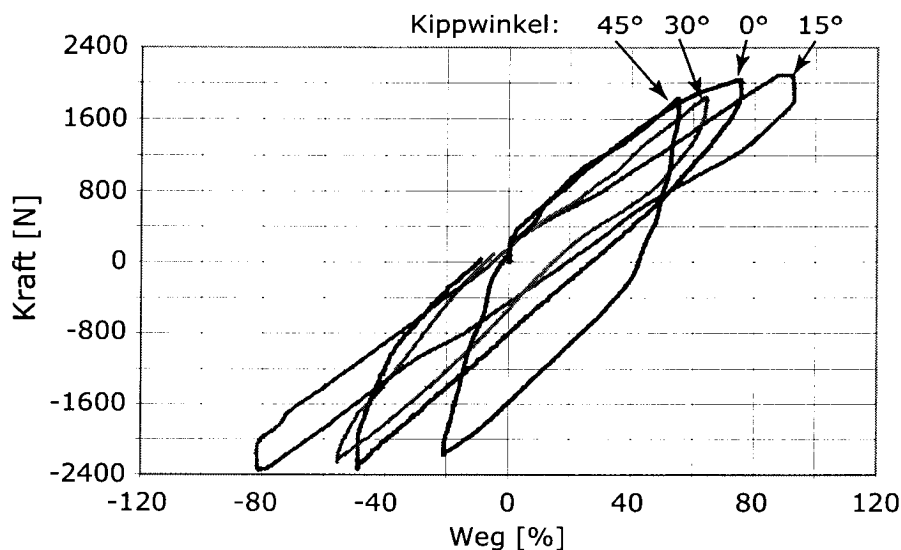
Um die statischen und dynamischen Eigenschaften der 6X Hexapod-Kinematik simulieren zu können, wurde die Steifigkeit der an der Plattform dieser Kinematik eingesetzten Kardangelenke der Firma INA (vgl. Abbildung 3.10 links) ebenfalls auf der Zugprüfmaschine gemessen. Im Gegensatz zu den Gelenken der Hexaglide-Kinematik, deren Steifigkeit aufgrund des symmetrischen Aufbaus nur von dem Kippwinkel abhängig ist, ist die Steifigkeit des INA Gelenks sowohl von dem Schwenk- als auch von dem Kippwinkel abhängig. Dies ist vor allem auf den unsymmetrischen Aufbau des Gelenkgehäuses (vgl. Abbildung 3.13) zurückzuführen, das bei einem Schwenkwinkel von Null Grad auf Zug/Druck und bei einem Winkel von  $\varphi = 90$  Grad auf Biegung beansprucht wird. Die Kraft-Weg-Diagramme der durchgeführten Messungen sind in Abbildung 3.35 in Abhängigkeit des Schwenkwinkels und in Abbildung 3.36 in Abhängigkeit des Kippwinkels dargestellt.

Die Hysteresen der INA Gelenke zeigen bei den Schwenkwinkelextrema von 0 und 90 Grad einen ähnlichen Verlauf und eine ähnliche Bauchigkeit. In der Mitte des zulässigen Winkelbereichs (bei 45 Grad) nimmt die Steigung der Hysterese und deren Bauchigkeit deutlich ab. Die entsprechenden Hysteresen sind in der Abbildung mit Pfeilen markiert. Darüber hinaus ist die Drucksteifigkeit des Gelenks deutlich höher als die Zugsteifigkeit, was sich in Abbildung 3.35 durch ein asymmetrische Deformationsverhalten zeigt.



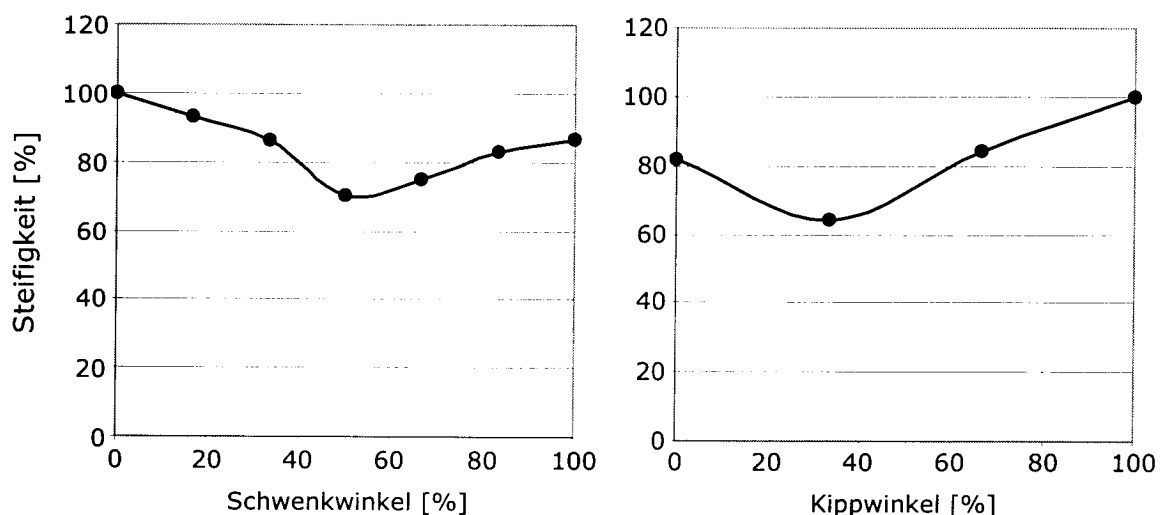
**Abbildung 3.35: Schwenkwinkelabhängige Kraft-Weg-Hysterese eines INA-Gelenks mit drei Freiheitsgraden**

Die Steifigkeit des Gelenks bei Variation des Kippwinkels (vgl. Abbildung 3.36) wird bei 15 Grad minimal. Bei einem Kippwinkel von 45 Grad erreicht die Steigung der Hysterese und deren Bauchigkeit ein Maximum. Damit ist auch die Steifigkeit des Gelenks bei diesem Winkel maximal. Mit zunehmendem Winkel nimmt darüber hinaus der Unterschied zwischen Zug- und Drucksteifigkeit zu.



**Abbildung 3.36: Kippwinkelabhängige Kraft-Weg-Hysterese eines INA-Gelenks mit drei Freiheitsgraden**

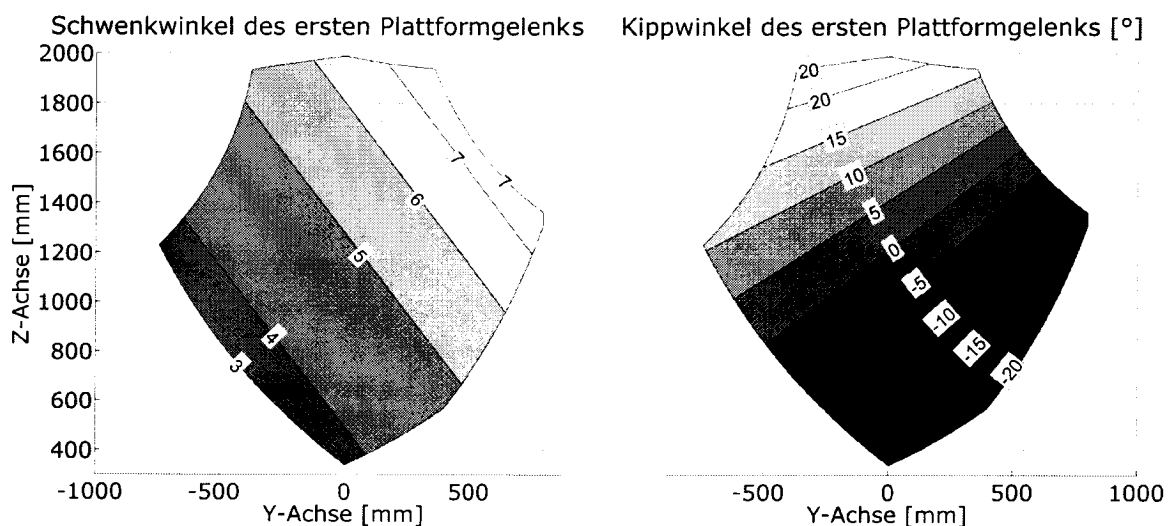
Durch eine lineare Interpolation der einzelnen Kurven lässt sich aus der Steigung der einzelnen Hysterese die durchschnittliche Steifigkeit des Gelenks für die einzelnen Winkel ermitteln. Die so berechneten Steifigkeitswerte sind in Abbildung 3.37 auf die jeweiligen Maximalwerte normiert dargestellt.



**Abbildung 3.37: Steifigkeitsverlauf eines an der 6X Hexapod-Parallelkinematik eingesetzten Gelenkes: auf der linken Seite in Abhängigkeit des Schwenkwinkels und auf der rechten Seite in Abhängigkeit des Kippwinkels**

Ein Vergleich der auf der rechten Seite von Abbildung 3.37 gezeigten Messergebnisse mit den in Abbildung 3.15 dargestellten analytisch berechneten Werten zeigt, dass das verwendete Gelenkmodell auch für diese Gelenke nicht über eine ausreichende Genauigkeit verfügt. Bei der Berechnung der statischen und dynamischen Eigenschaften der 6X Hexapod-Kinematik wurde daher auf die Messergebnisse zurückgegriffen.

Die Interpolation der Steifigkeitswerte zwischen den einzelnen Stützpunkten erfolgt für das in Kapitel 4 vorgestellte Simulationsmodell ebenfalls über einen kubischen Spline. Für das erste Plattformgelenk sind die hierzu benötigten Schwenk- und Kippwinkel in der Y-Z Schnittebene in Abbildung 3.38 dargestellt.



**Abbildung 3.38: Verteilung der Schwenk- (links) und Kippwinkel (rechts) des ersten Plattformgelenks der 6X Hexapod-Kinematik ( $a = b = c = 0$  Grad)**

Ein Vergleich der Steifigkeitsverläufe in Abhängigkeit der Schwenk- und Kippwinkel zeigt, dass bei der 6X Hexapod-Kinematik die Vororientierung an der Nullgradlage der Plattformgelenke ausgerichtet wurde. Hierdurch wird bei beiden Winkeln in der Mitte des Arbeitsraums ein Steifigkeitsmaximum erreicht. Die Maximal-, Durchschnitts- und Minimalwerte der Schwenk- und Kippwinkel sind in Tabelle 3.5 zusammengefasst.

	Schwenkwinkel plattformseitig [Grad]	Kippwinkel plattformseitig [Grad]
Maximaler Winkel	7.8	23.5
Durchschnittlicher Winkel	5.2	-0.3
Minimaler Winkel	3.7	-20.7

**Tabelle 3.5: Verteilung der Kippwinkel der antriebs- und plattformseitigen Gelenke der 6X Hexapod-Kinematik**



### 3.3 Plattform und Werkzeugspindel

Die Bestimmung der Eigenschaften einer Plattform kann je nach Komplexität des geometrischen Aufbaus durch analytische Verfahren oder diskretisierende Finite-Element-Berechnungen erfolgen. Da die Eigenschaften konstant sind, müssen diese nicht modelliert werden und können direkt in die Simulationsmodelle übernommen werden.

#### 3.3.1 Hexaglide-Kinematik

Da die in der Hexaglide-Kinematik eingesetzte Plattform zur Gewichtsreduktion mit Taschenausfräsungen und Bohrungen versehen wurde, kann eine hinreichend genaue Berechnung der Steifigkeiten und Trägheiten nur über eine Finite-Element Berechnung erfolgen. Das hierzu im Rahmen dieser Arbeit erstellte Volumenmodell wird zusammen mit einem Bild der Plattform in Abbildung 3.39 dargestellt.

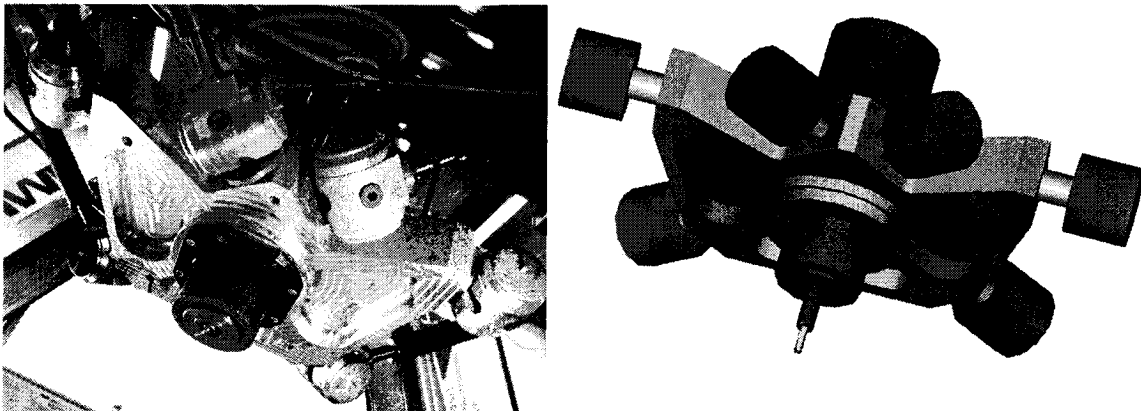


Abbildung 3.39: Plattform (links) und Volumenmodell (rechts) der Plattform der Hexaglide-Kinematik

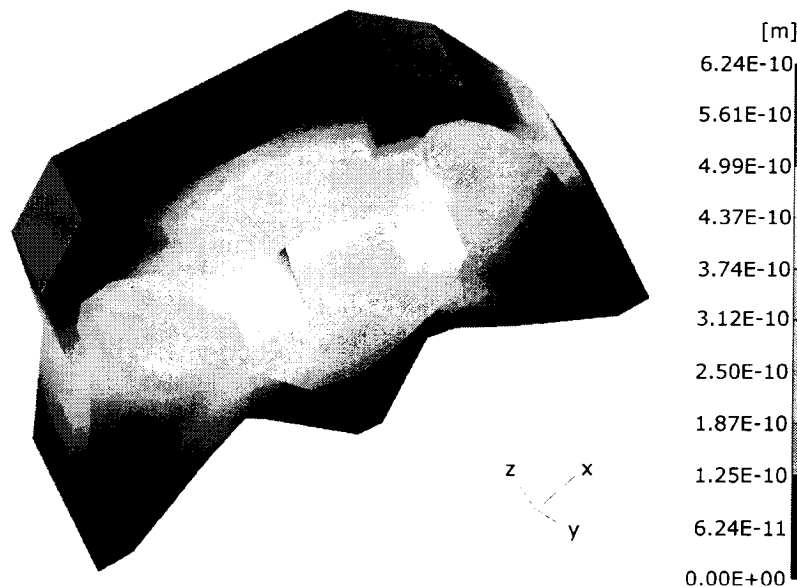


Abbildung 3.40: FEM-Analyse der Hexaglide Plattform. Dargestellt ist die Verformung der Plattform bei einer Last in x-Richtung.

Eine FEM-Analyse ergibt für die Plattform der Hexaglide-Kinematik (vgl. Abbildung 3.40 für einen Lastfall), dass aufgrund der hohen Quer- und Verdrehsteifigkeit die Steifigkeitsmatrix hinreichend genau durch eine Diagonalmatrix beschrieben werden kann.

Diese wurde durch Berechnungen für die sechs möglichen Lastfälle zu:

$$\mathbf{K}_p = \text{diag} (1603, 1567, 588, 4348, 5115, 2564) \quad 3.37$$

ermittelt.

### 3.3.2 6X Hexapod-Kinematik

Da es sich bei der in Abbildung 3.41 gezeigten Plattform der 6X Hexapod-Kinematik um eine Schweißkonstruktion handelt, für die kein Volumenmodell verfügbar war, wird diese für die in Kapitel 4 und 5 durchgeführten Simulationen als ideal steif angenommen.

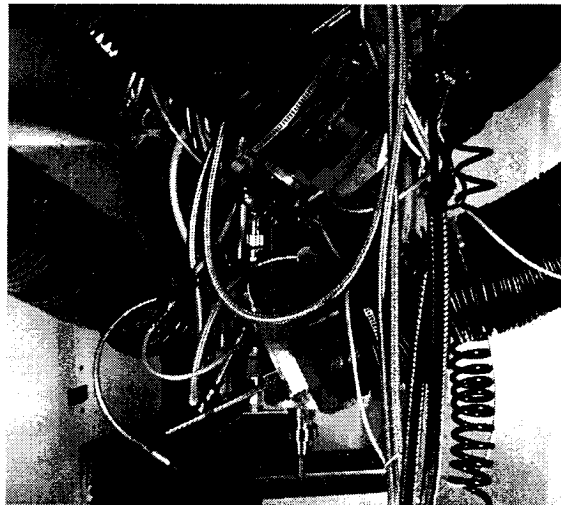
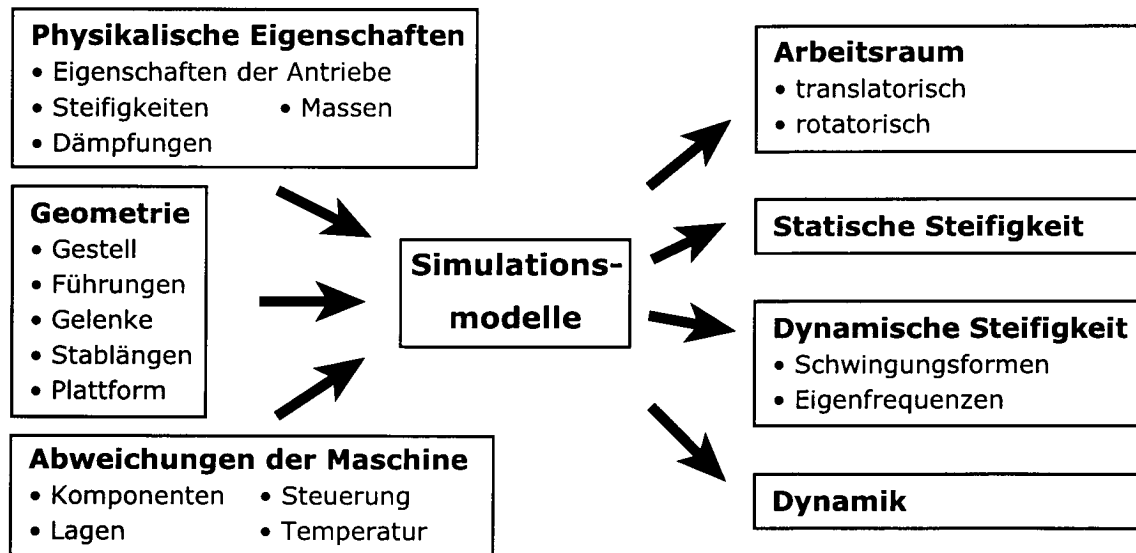


Abbildung 3.41: Plattform der 6X Parallelkinematik

## 4 Simulationsmodelle

Im diesem Kapitel werden verschiedene Simulationsmodelle entwickelt, mit denen unterschiedliche Arbeitsräume, statische und dynamische Eigenschaften von parallelkinematischen Maschinen in Abhängigkeit von der Geometrie und den in Kapitel 3 vorgestellten Komponentenmodellen berechnet werden können (vgl. Abbildung 4.1).



**Abbildung 4.1: Ein- und Ausgangsparameter der Simulationsmodelle**

Da die im Folgenden entwickelten Simulationsmodelle nicht nur die Eigenschaften der einzelnen Achsen beschreiben, sondern auch die komplexen Einflüsse der Struktur und der einzelnen Komponenten (vgl. Kapitel 3) berücksichtigen, kann das Verhalten der Gesamtmaschine mit einer hohen Genauigkeit berechnet werden.

### 4.1 Arbeitsraum

Einer der wesentlichen Parameter einer Werkzeugmaschine ist der für Bearbeitungsaufgaben zur Verfügung stehende Arbeitsraum. Da bei Parallelkinematiken verschiedene Arbeitsraumdefinitionen Verwendung finden, werden die in dieser Arbeit verwendeten im folgenden Abschnitt eingeführt. Nachfolgend werden die bisher zur Berechnung der verschiedenen Arbeitsräume genutzten Berechnungsmethoden und Algorithmen dargestellt.

Da die bisher bekannten Verfahren zur Berechnung von Arbeitsräumen entweder Einschränkungen bei der Allgemeingültigkeit oder eine unzureichende Leistungsfähigkeit haben, wird im Anschluss hieran die Verwendung zweier in diesem Bereich bis jetzt nicht eingesetzter Verfahren vorgeschlagen. Diese neuen Verfahren basieren auf dem mathematisch bekannten Octree- und dem Prädiktor-Korrektor-Verfahren und bieten im Gegensatz zu den bisher genutzten Verfahren eine hohe Allgemeingültigkeit und Leistungsfähigkeit. Im Rahmen dieser Arbeit werden die für die Anwendung dieser Verfahren notwendigen Algorithmen entwickelt und an die an das Simulationswerkzeug gestellten Anforderungen angepasst.

#### 4.1.1 Arbeitsraumdefinitionen

Der Arbeitsraum einer Werkzeugmaschine ist nach Weck [Wec91] als der Raum definiert, der mit der Gesamtheit aller Achsbewegungen von der Spitze des Werkzeugs erreicht werden kann. Diese bisher im Werkzeugmaschinenbau verwendete Definition des Arbeitsraums kann nur sehr eingeschränkt auf Parallelkinematiken übertragen werden, da sie von Achskonfigurationen ausgeht, die zu dreidimensionalen, kubischen oder zylindrischen Volumina führen. Der Arbeitsraum einer Parallelkinematik ist aber nicht das Produkt der maximal nutzbaren Achslängen, sondern ergibt sich aus der Konfiguration der Kinematik und den dazugehörigen Randbedingungen. Folglich sind mehrere unterschiedliche Arbeitsraumdefinitionen möglich.

Um sowohl die Vergleichbarkeit von seriellen mit parallelkinematischen Maschinenkonzepten als auch die von parallelkinematischen Maschinenkonzepten untereinander sicherzustellen, sind daher eindeutige Definitionen der zu vergleichenden Arbeitsräume notwendig.

Der vollständige Arbeitsraum einer Parallelkinematik mit sechs Freiheitsgraden ist ein unregelmäßiges Gebilde, das nicht als Ganzes visualisiert werden kann [Bon99]. Die Unregelmäßigkeit dieses Gebildes ist auf die Wechselwirkung der einzelnen Bewegungsgrenzen aufeinander und weitere geometrische Einschränkungen zurückzuführen. So begrenzt die Orientierung des Werkzeugs die translatorischen Bewegungen und umgekehrt begrenzt die translatorische Position die Orientierungsmöglichkeiten des Werkzeugs. Da ein Gebilde mit mehr als drei Dimensionen nicht graphisch dargestellt werden kann, werden in der Regel Teilmengen dieses Gebildes visualisiert. Aufbauend auf den von Merlet [Mer97] eingeführten Definitionen lassen sich hierbei verschiedene Teilmengen und damit Arbeitsräume bei einer Parallelkinematik unterscheiden (vgl. Tabelle 4.1).

Die Definition der Orientierungswinkel des Werkzeugs erfolgt entsprechend der einschlägigen ISO-Norm [ISO841], der Winkel um die x-Achse wird damit als  $a$ , der Winkel um die y-Achse als  $b$  und der Winkel um die z-Achse als  $c$  definiert. Gemäß der ISO Definition ist die z-Achse parallel zur Spindelachse. Fallen z-Achse und Spindelachse zusammen, kann dieser Winkel zur lokalen Verbesserung der statischen und dynamischen Eigenschaften und zur Erweiterung des Arbeitsraums verwendet werden.

Definition	Beschreibung	Mathematische Definition
Maximaler Arbeitsraum	Maximal zulässiger Translationsraum, wobei die Orientierung des Werkzeugs derart angepasst wird, dass der Raum maximal wird.	Winkel $a$ , $b$ , $c$ sind voneinander unabhängig und werden innerhalb der zulässigen Winkelbereiche angepasst.
Arbeitsraum bei konstanter Orientierung	Zulässiger Translationsraum bei beliebiger, aber fester Orientierung des Werkzeugs.	Winkel $a$ , $b$ , $c$ sind voneinander unabhängig und fest vorgegeben, z. B.: $a = b = c = 0^\circ$ .

**Tabelle 4.1: Verschiedene Arbeitsraumdefinitionen nach Merlet [Mer97]**

Definition	Beschreibung	Mathematische Definition
Arbeitsraum mit einem variablen Orientierungsbereich	Translationsraum, in dem mindestens ein vorgegebener Orientierungsbereich für einen Winkel zulässig ist und die anderen Winkel fest sind.	Mindestens ein Winkel innerhalb eines vorgegebenen Bereichs variabel, die anderen fest, z. B.: $a=c=12^\circ$ , $b=\pm 20^\circ$ .
Arbeitsraum mit allen Orientierungsbereichen variabel	Translationsraum, in dem ein vorgegebener Orientierungsbereich für alle Winkel zulässig ist.	Alle Winkel innerhalb eines vorgegebenen Bereichs variabel z. B.: $a=\pm 8^\circ$ , $b=\pm 5^\circ$ , $c=\pm 30^\circ$ .
Rotatorischer Arbeitsraum an einem Punkt	Alle an einem vorgewählten Punkt zulässigen Orientierungen.	Position $x, y, z$ fest vorgewählt, alle zulässigen Winkelkombinationen, z. B.: $x=500$ , $y=400$ , $z=300$ .

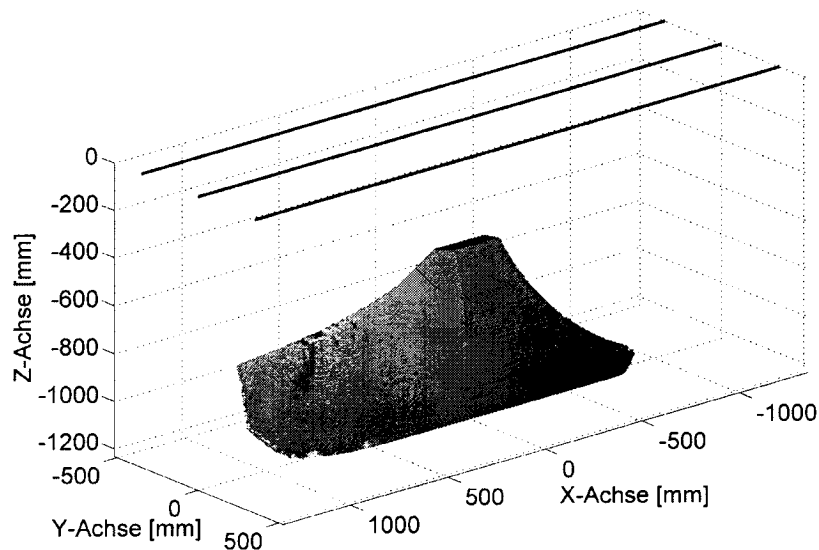
**Tabelle 4.1: Verschiedene Arbeitsraumdefinitionen nach Merlet [Mer97]**

Da bei einer fünfschigen Bearbeitungsaufgabe eine bestimmte Orientierung des Werkzeugs benötigt wird, hat der *maximale Arbeitsraum* in der Praxis keine Bedeutung. Er wird daher im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter untersucht.

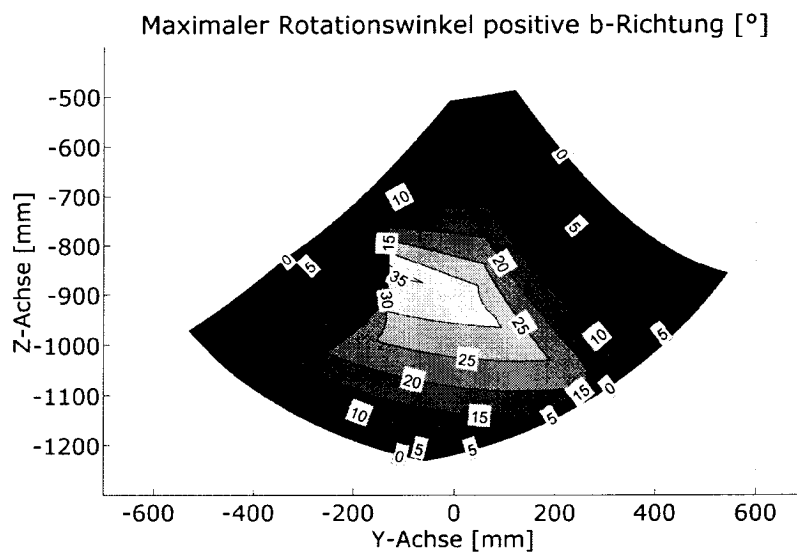
Der translatorische Arbeitsraum bei vorgegebener Orientierung des Werkzeugs kommt der aus dem Bereich der seriellen Kinematiken gewohnten Darstellung eines Arbeitsraums am nächsten und wird daher im Rahmen der Untersuchung verwendet. Dieser Arbeitsraum wird durch die maximalen Grenzen der Translationsbewegungen in den drei Raumrichtungen bei frei wählbarer, konstant gehaltener Orientierung ermittelt und analog zu Merlet [Mer97] im Folgenden als *Arbeitsraum bei konstanter Orientierung* bezeichnet. Ein so definierter Arbeitsraum wird am Beispiel der Hexaglide-Kinematik in Abbildung 4.2 dargestellt. Die diesem Beispiel zugrunde liegende Maschinengeometrie ist in Anhang C.1 dargestellt, die dazugehörige Werkzeugmaschine wird in Abbildung 5.1 gezeigt.

Fallen die Spindelachse und die z-Achse der Maschine zusammen, bietet sich die Möglichkeit, den c-Winkel innerhalb eines Bereichs freizugeben, um den zur Verfügung stehenden Arbeitsraum durch Vermeidung (Umfahren) von Singularitäten und Kollisionen zu erweitern. Daher wird zusätzlich zu den oben eingeführten Arbeitsraumdefinitionen die Definition *Arbeitsraum mit einem variablen Orientierungsbereich* verwendet. Bei diesem Arbeitsraum ist ein Winkel innerhalb eines Bereichs variabel, die anderen Winkel sind fest vorgegeben. Die Darstellungsart dieses Arbeitsraums ist mit der des *Arbeitsraums bei konstanter Orientierung* identisch.

Die graphische Darstellung aller zulässigen Rotationswinkel an einem Punkt ist sowohl für eine dreidimensionale Darstellung als auch für eine zweidimensionale Projektion komplex und hat aufgrund ihrer lokalen Begrenztheit nur eine sehr eingeschränkte Aussagekraft. Daher werden diese in den in Kapitel 2 eingeführten Schnittebenen visualisiert. In Abbildung 4.3 werden in der Y-Z Ebene die Verteilung des maximal zulässigen Rotationswinkels der Hexaglide-Kinematik in positiver  $b$  Richtung dargestellt. Diese Darstellung wird im Folgenden als *Zulässige Rotationswinkel in drei Ebenen* bezeichnet.



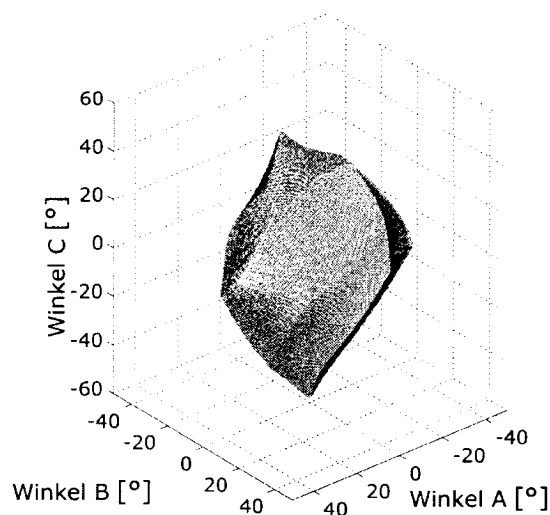
**Abbildung 4.2: Arbeitsraum der Hexaglide-Kinematik bei konstanter Orientierung ( $a = b = c = 0^\circ$ )**



**Abbildung 4.3: Verteilung des maximal zulässigen Rotationswinkels in positiver  $b$  Richtung der Hexaglide-Kinematik in der Y-Z Ebene**

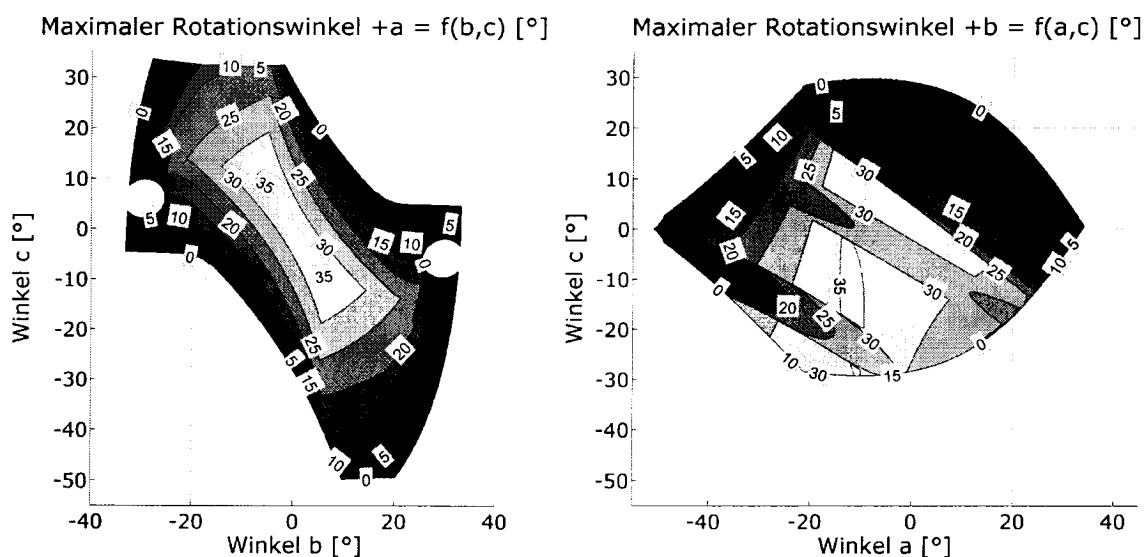
Da die Berechnung des maximalen Orientierungsvermögens des Werkzeugs an einem Punkt für Vergleiche von Kinematiken und für besondere Aufgaben wie zum Beispiel die Kalibrierung von Bedeutung ist, wird bei den Simulationen auch der *Rotatorische Arbeitsraum an einem Punkt* berechnet. Zur Berechnung und Visualisierung dieses Arbeitsraums wurden von Romdhane, Merlet, Benea und Bonev [Rom94, Mer95, Ben96, Bon99] verschiedene analytische Methoden und Algorithmen entwickelt. Mit Ausnahme von Benea, der diesen Arbeitsraum mit allen drei Rotationen berechnet, beschränken sich die anderen Autoren auf eine zweidimensionale Projektion bei festem Winkel um die Werkzeugachse, die mit der z-Achse identisch ist.

In Abbildung 4.4 werden am Beispiel der Hexaglide-Kinematik die Grenzen der Orientierbarkeit des Werkzeugs in der Mitte des Arbeitsraums ( $x=0, y=0, z=-900$  mm) als Funktion aller Rotationswinkel dargestellt.



**Abbildung 4.4: Maximale Rotationswinkel der Hexaglide-Kinematik an einem Punkt**

Da diese Darstellungsweise komplex ist und für die Bestimmung von Grenzwinkeln in der Praxis kaum Bedeutung hat, wird im Folgenden eine andere Darstellungsweise - die Projektion dieses Körpers in drei Ebenen - gewählt. Zwei dieser drei Projektionsebenen werden in Abbildung 4.5 gezeigt: auf der linken Seite das maximale Orientierungsvermögen der Kinematik um die positive  $x$ -Achse (positive  $a$  Richtung) als Funktion der Rotationswinkel  $b$  und  $c$  und auf der rechten Seite das maximale Orientierungsvermögen um die positive  $y$ -Achse (positive  $b$  Richtung) in Abhängigkeit der Rotationswinkel  $a$  und  $c$ .



**Abbildung 4.5. Maximale Rotationswinkel der Hexaglide-Kinematik in positiver  $a$  Richtung als Funktion der Rotationswinkel  $b$  und  $c$  (links) und in positiver  $b$  Richtung als Funktion der Rotationswinkel  $a$  und  $c$  (rechts)**

Die in dieser Arbeit verwendeten Arbeitsräume und Beschreibungen möglicher Schwenkbereiche werden in Tabelle 2.2 zusammengefasst und beschrieben.

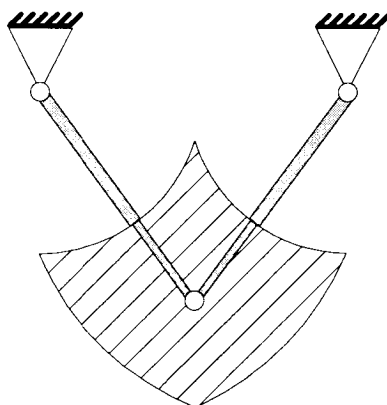
Definition	Beschreibung
Arbeitsraum bei konstanter Orientierung	Zulässiger Translationsraum bei beliebiger, aber fester Orientierung des Werkzeugs, z. B: $a=b=c=0^\circ$ .
Arbeitsraum mit einem variablen Orientierungsbereich	Zulässiger Translationsraum bei beliebiger, aber fester Orientierung des Werkzeugs, wobei der Winkel um die Werkzeugachse $c$ innerhalb eines Bereichs variabel ist.
Zulässige Rotationswinkel in drei Ebenen	Zulässige Rotationswinkel in $+a, -a, +b, -b, +a +b$ und $-a -b$ in drei Schnittebenen.
Rotatorischer Arbeitsraum an einem Punkt	Alle an einem vorgewählten Punkt zulässigen Orientierungen.

**Tabelle 4.2: Im Weiteren verwendete Arbeitsraumdefinitionen und Beschreibung möglicher Schwenkbereiche**

Bei der Berechnung der oben beschriebenen Arbeitsräume und Schwenkbereiche können in der Literatur zwei bisher verwendete Ansätze unterschieden werden: zum einen analytische Ansätze und zum anderen diskretisierende Ansätze. In den folgenden beiden Abschnitten werden die beiden Ansätze mit ihren Vor- und Nachteilen zusammengefasst. Im Anschluss hieran werden die im Rahmen dieser Arbeit für das Simulationswerkzeug entwickelten Algorithmen vorgestellt.

#### 4.1.2 Analytische Verfahren

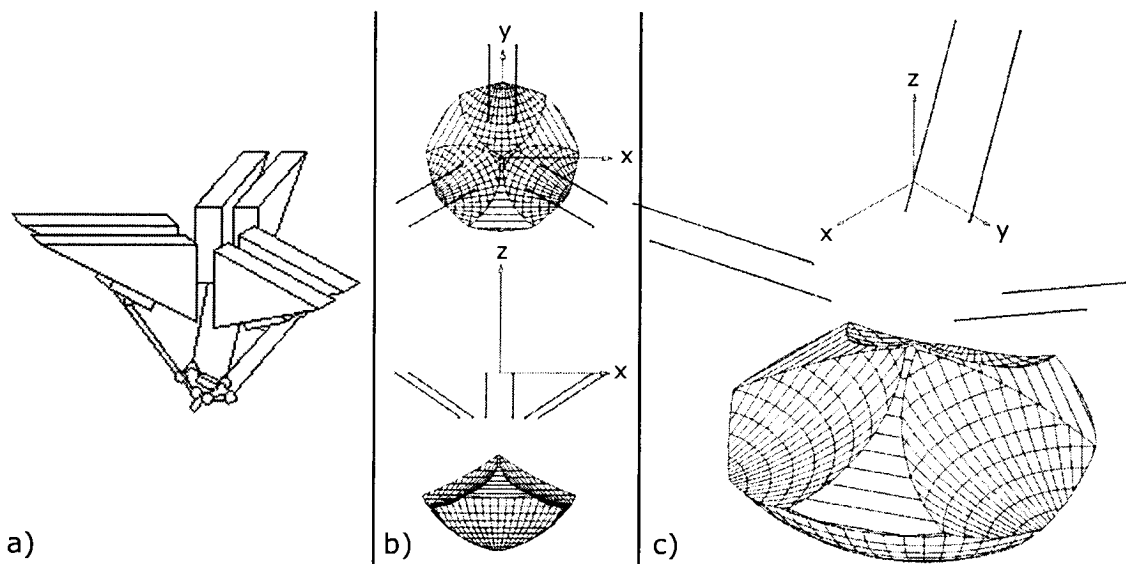
Analytische Verfahren zur Berechnung des Arbeitsraums einer Parallelkinematik wurden unter anderem von Nguyen, Gosselin, Masory, Ji, Merlet, Bessala und Bonnev [Ngu89, Gos90a, Gos92, Mas92, Ji94, Mer95, Gos96, Bes96, Bon99a] präsentiert. Bei diesen Verfahren werden die zulässigen Bewegungsgrenzen der einzelnen Komponenten ermittelt und die aus diesen resultierenden Halbräume miteinander geschnitten. In Abbildung 4.6 ist die auf diese Art berechnete Arbeitsfläche am Beispiel einer Koppelkinematik mit zwei Freiheitsgraden dargestellt. Die gezeigte Koppelkinematik ist nach dem Pod-Prinzip aufgebaut.



**Abbildung 4.6: Bewegungsraum einer Koppelkinematik mit zwei Freiheitsgraden**



Berücksichtigten die ersten analytischen Verfahren bei der Ermittlung der Halbräume ausschließlich die Bewegungslänge der Stäbe bzw. Führungen, so wurden in einem von Merlet [Mer94] vorgestellten Verfahren auch die Bewegungsgrenzen der eingesetzten Gelenke und Kollisionen zwischen den einzelnen Stäben bei Hexapod-Kinematiken berücksichtigt. Ein analytisches Verfahren zur Berechnung des Arbeitsraums einer Hexaglide-Kinematik wurde von Bonev [Bon99a] vorgestellt. In Abbildung 4.7 wird eine Glide-Kinematik, die auf dem Prinzip des bewegten Fußpunkts mit sternförmiger Anordnung der Führungsbahnen basiert, und dem dazugehörigen analytisch berechneten Arbeitsraum gezeigt.



**Abbildung 4.7: Glide-Kinematik mit bewegtem Fußpunkt und sternförmig angeordneten Führungsbahnen (a). Der analytisch berechnete Arbeitsraum in der Drauf- und Seitenansicht (b) sowie perspektivische Ansicht (c) [Bon99a].**

Bei dieser Berechnung wurden neben den Bewegungslängen der Führungen auch Singularitäten, Kollisionen zwischen den einzelnen Stäben und die physikalisch zulässigen Grenzwinkel der eingesetzten Gelenke berücksichtigt.

Eine wesentliche Einschränkung erfahren die analytischen Verfahren dadurch, dass sie ausschließlich für die Geometrie gelten, für die die Modellierung durchgeführt wurde. Sollen verschiedene Kinematikvarianten untersucht werden, so müssen diese jeweils mathematisch mit einem erheblichen Aufwand neu formuliert werden. Ein weiterer Nachteil der analytischen Verfahren besteht darin, dass die zu erfüllenden Randbedingungen nur auf eine einzelne kinematische Kette angewandt werden können. So ist zum Beispiel die aus der Gewichtskraft resultierende statische Antriebsbelastung (vgl. Anhang B.5) bisher nicht als ein den Arbeitsraum begrenzender Faktor berücksichtigt worden, da sich diese Begrenzung aus der Kombination der Antriebe und der Kinematik ergibt. Eine Berücksichtigung aller den Arbeitsraum einschränkenden Randbedingungen ist mit diesen Verfahren aufgrund der Komplexität der Aufgabenstellung bisher nicht durchgeführt worden. Die für ein Simulationswerkzeug geforderte Allgemeingültigkeit ist somit zur Zeit nicht gegeben. Von Yang und Haug [Yan94, Hau96] wurden numerische Verfahren zur Berechnung der Grenzen des Arbeitsraums entwickelt.

Wie von Yang gezeigt wurde, ist es mit diesen Verfahren auch möglich, die Randbedingungen der eingesetzten Gelenke zu berücksichtigen. Bezieht man alle notwendigen und hinreichenden Randbedingungen (vgl. Anhang B) mit in die Berechnung ein, werden diese Verfahren sehr komplex und rechenintensiv, so dass eine ausreichende Leistungsfähigkeit mit diesen Verfahren nicht erreicht wird.

Diese Einschränkungen machen analytische Verfahren für ein Simulationswerkzeug, mit dem sowohl die Arbeitsräume der Hexaglide- als auch der 6X Hexapod-Kinematik berechnet werden können, ungeeignet, da sie nicht über die geforderte Variabilität verfügen und der Modellierungsaufwand zu hoch ist.

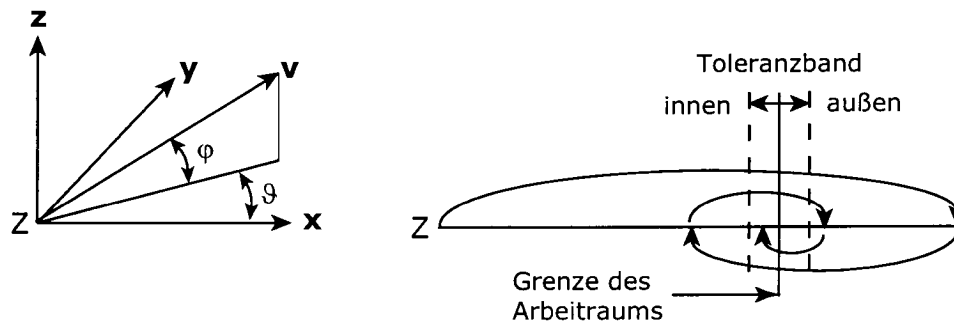
#### 4.1.3 Diskretisierende Verfahren

Im Gegensatz zu den analytischen Verfahren sind diskretisierende Verfahren unabhängig von der Geometrie der zu untersuchenden Kinematik und ermöglichen die Berücksichtigung aller einschränkenden Randbedingungen. Es ist daher auch möglich, die sich aus der gegenseitigen Abhängigkeit der Antriebe ergebenden einschränkenden Randbedingungen zu berücksichtigen.

Bei den diskretisierenden Verfahren wird der zu untersuchende Raum in diskrete Punkte aufgelöst, die dann einzeln auf ihre Zulässigkeit geprüft werden. Die Anzahl der Punkte ist hierbei abhängig von der Größe des zu untersuchenden Raums und der geforderten Auflösung. Da die Anzahl der Punkte mit dem zu untersuchenden Raum und der gewünschten Auflösung kubisch wächst, sind diese Verfahren bei größeren Räumen und höheren Auflösungen sehr rechenaufwendig (vgl. [Bon00]). Ein weiterer Nachteil besteht darin, dass die Speicherung der resultierenden Punktwolke viel Speicherplatz benötigt. Diese beiden Nachteile schränken die Verwendbarkeit eines solchen Verfahrens im Rahmen eines Simulationswerkzeugs ein, da eine kurze Simulationszeit für einen Entwicklungsprozess wesentlich ist. Eine hinreichende Leistungsfähigkeit wird mit diesen Verfahren nicht erreicht.

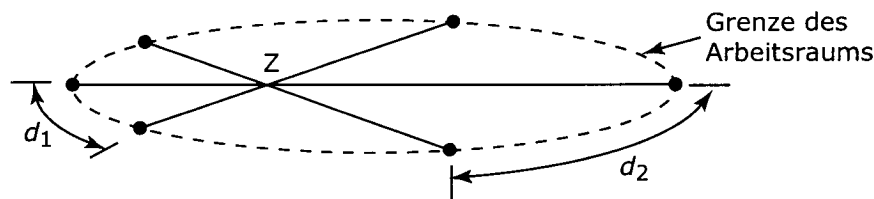
Um diese Nachteile zu vermeiden, wurde von Conti [Con98] ein anderes diskretisierendes Verfahren entwickelt. Ausgehend von einem Punkt  $Z$  innerhalb des Arbeitsraums wird ein Vektor  $\mathbf{v}$  durch diskrete Variation des Zenitwinkels  $\varphi$  und des Azimutwinkels  $\vartheta$  im Raum rotiert (vgl. Abbildung 4.8 links). Mit einem iterativen Verfahren wird dann die Länge des rotierten Vektors so lange verändert, bis der Abstand zur Grenze des Arbeitsraums innerhalb eines Toleranzbands liegt. Auf der rechten Seite von Abbildung 4.8 wird dieses Vorgehen schematisch gezeigt. Die Iterationsschritte sind durch die vom Punkt  $Z$  ausgehenden Pfeile dargestellt.

Die mit diesem Verfahren berechnete Punktwolke repräsentiert die Grenzen des Arbeitsraums innerhalb der vorgewählten Toleranz. Wie bei allen diskretisierenden Verfahren ist die Qualität des Ergebnisses von der Anzahl der berechneten Punkte, in diesem Fall der Anzahl der berechneten Kugelsektoren, abhängig. Ein wesentlicher Nachteil dieses Verfahrens besteht darin, dass der Abstand der einzelnen Punkte der Punktwolke nicht gleichmäßig ist, da dieser von der Position des Punkts  $Z$  abhängt.



**Abbildung 4.8: Schematische Darstellung des diskretisierenden Verfahrens zur Ermittlung des Arbeitsraums nach Conti [Con98]**

In Abbildung 4.9 wird dieser Zusammenhang anhand der beiden Abstände  $d_1$  und  $d_2$  dargestellt.



**Abbildung 4.9: Abstand der Randpunkte in Abhängigkeit der Position des Punkts  $Z$**

Um einen möglichst gleichmäßigen Abstand der Randpunkte zu bekommen, muss der Punkt  $Z$  im Zentrum des Arbeitsraums liegen. Da dieser zu Beginn des Verfahrens unbekannt ist, ist die Bestimmung eines geeigneten Punkts  $Z$  mit zusätzlichem Rechenaufwand verbunden, wodurch die Leistungsfähigkeit des Algorithmus einschränkt wird. Ungeachtet hiervon führen unregelmäßig geformte Randkurven, wie sie bei Parallelkinematiken auftreten, zu erheblichen Schwankungen der Auflösung, so dass die Aussagekraft des Ergebnisses reduziert wird. Weist die Randkurve darüber hinaus Löcher auf, versagt dieser Ansatz. Damit verfügt dieser Ansatz nicht über eine ausreichende Allgemeingültigkeit für ein Simulationswerkzeug.

Da keiner der vorgestellten Ansätze die für ein Simulationswerkzeug zur Auslegung von Parallelkinematiken wesentlichen Anforderungen von Variabilität bei gleichzeitig geringem Rechen- und Speicheraufwand erfüllt, werden in den nächsten Abschnitten für zwei bisher nicht genutzte Verfahren zur Berechnung der verschiedenen Arbeitsräume Algorithmen entwickelt:

- in Kapitel 4.1.4 ein Algorithmus für ein modifiziertes Octree-Verfahren zur Berechnung der translatorischen Arbeitsräume und des *rotatorischen Arbeitsraums an einem Punkt*,
- in Kapitel 4.1.5 ein Algorithmus für ein zweidimensionales Prädiktor-Korrektor-Verfahren zur Berechnung der *zulässigen Rotationswinkel in drei Ebenen*.

#### 4.1.4 Modifiziertes Octree-Verfahren

Die geringe Leistungsfähigkeit der diskretisierenden Verfahren ist darauf zurückzuführen, dass nur ein Bruchteil der untersuchten Punkte relevante Informationen für die Arbeitsraumbestimmung enthält. Im Gegensatz hierzu werden von dem im Folgenden entwickelten Algorithmus nur die Punkte berechnet, die auf dem Rand des Arbeitsraums liegen. Hierdurch kann die Allgemeingültigkeit der diskretisierenden Verfahren mit einer hohen Leistungsfähigkeit kombiniert werden.

Bei dem modifizierten Octree-Verfahren wird analog zu den oben vorgestellten diskretisierenden Verfahren ein kubisches Volumen vorgegeben, das den zu berechnenden Arbeitsraum näherungsweise enthält. Im Unterschied zu den diskretisierenden Verfahren wird dieses Volumen nicht in eine Punktwolke gerastert, sondern in acht Voxel geteilt. Ein Voxel beschreibt hierbei ein quaderförmiges Volumen. Jedes dieser Voxel besitzt acht Eckpunkte, die im Weiteren mit  $\mathbf{e}_{1-8}$  bezeichnet werden. Für jeden Eckpunkt jedes Voxels wird unter Berücksichtigung aller einschränkenden Randbedingungen die Zulässigkeit (vgl. Anhang B) überprüft. Zusätzlich zu diesen Randbedingungen, die nur die physikalische Zulässigkeit sicherstellen, können weitere Anforderungen definiert werden. Zu diesen frei wählbaren Anforderungen können minimal zu erreichende Eigenschaften der Kinematik, wie zum Beispiel Steifigkeit, Beschleunigungsvermögen oder Orientierbarkeit des Werkzeugs, und Kinematik Kennzahlen, wie Konditionszahl oder Übertragungsgüte (vgl. Anhang A.2.2 bzw. Kapitel 4.3.1), gehören.

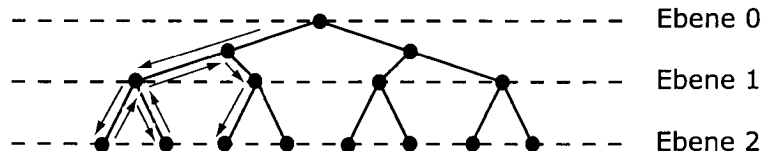
Erfüllt ein Eckpunkt eines Voxels diese Anforderungen, befindet er sich innerhalb des Arbeitsraums und ist damit zulässig. Sind alle Eckpunkte eines Voxels zulässig, so liegt das Voxel komplett im Inneren des Arbeitsraums und wird verworfen. Analog hierzu liegen Voxel mit acht unzulässigen Eckpunkten außerhalb des Arbeitsraums und werden ebenfalls verworfen. Liegt eines der acht Voxel am Rand des Arbeitsraums, so sind mindestens ein und maximal sieben Eckpunkte des Voxels zulässig. In diesem Fall wird dieses Voxel wiederum in acht neue Voxel unterteilt und die Zulässigkeit der neuen Eckpunkte untersucht. Dieses Vorgehen wird so lange wiederholt, bis der Abstand der Randpunkte des Voxels in allen drei Raumrichtungen eine vorzugebende Mindestauflösung unterschreitet. Von dem Voxel wird dann der Schwerpunkt  $\mathbf{s}$  der  $n$  zulässigen Eckpunkte bestimmt:

$$\mathbf{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \quad 4.1$$

und als Randpunkt abgespeichert. Im Gegensatz zu vollständig diskretisierenden Verfahren, bei denen alle innerhalb des Volumens liegenden Punkte abgespeichert werden müssen, werden bei diesem Verfahren nur die Schwerpunkte der Randvoxel gespeichert. Hierdurch kann der benötigte Speicherplatz stark reduziert werden (vgl. Tabelle 4.3). Durch die Wahl des Schwerpunkts anstelle des Mittelpunkts des Voxels kann die Genauigkeit des Verfahrens weiter erhöht werden, da hierdurch die Verteilung der zulässigen Eckpunkte berücksichtigt wird.

Nach der Berechnung aller benachbarten Voxel auf der untersten Ebene, springt der Algorithmus eine Ebene nach oben und berechnet die Voxel der nächst höheren Ebene. Mit Ebene wird hierbei der Detaillierungsgrad des Algorithmus be-

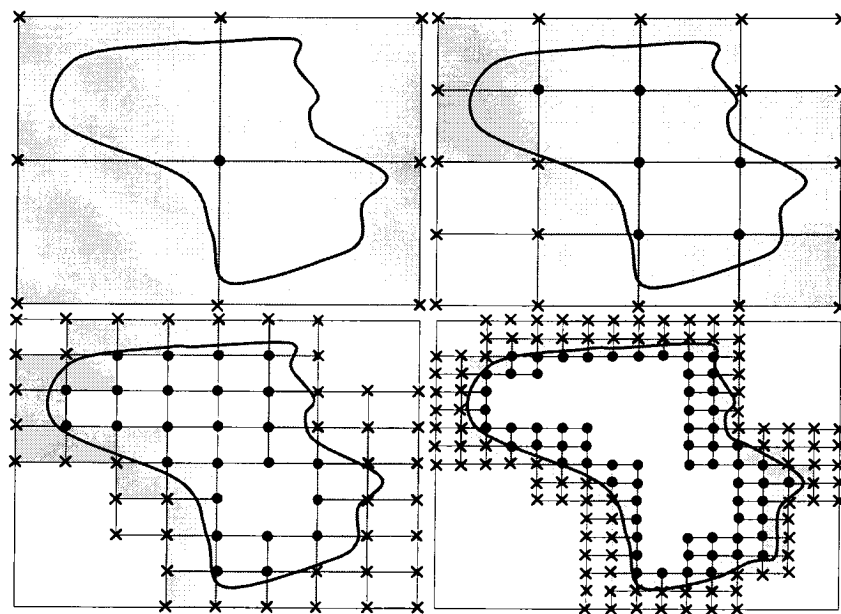
schrieben. Das Ausgangsvolumen wird mit Ebene 0 bezeichnet, die acht Untervoxel, in die das Ausgangsvolumen geteilt wird, mit Ebene 1. Mit Ebene 2 werden dann die aus der nächsten Teilung hervorgehenden Voxel beschrieben. Diese Vorgehensweise ist in Abbildung 4.10 schematisch dargestellt.



**Abbildung 4.10: Schematische Darstellung des Octree-Algorithmus**

Das Resultat des Octree-Verfahrens ist eine Punktwolke, die den Rand des Arbeitsraums, der den oben genannten Anforderungen entspricht, darstellt.

Das Octree-Verfahren wird in Abbildung 4.11 am Beispiel einer ebenen Kurve verdeutlicht. Diese wird mit einem Quadtree-Verfahren, der zweidimensionalen Version des Octree-Verfahrens, approximiert. Das Rechteck, das die Kurve enthält, wird jeweils in vier rechteckige Segmente unterteilt. Liegen alle vier Eckpunkte eines Segments innerhalb der Kurve, so liegt das ganze Segment innerhalb der Kurve und wird verworfen. Analog dazu liegt ein Segment, bei dem alle vier Eckpunkte außerhalb der Kurve liegen, komplett außerhalb der Kurve und wird ebenfalls verworfen. Die Segmente, bei denen ein, zwei oder drei Eckpunkte zulässig sind, liegen am Rand der Kurve und werden ihrerseits in vier neue Segmente geteilt. Diese Teilungen werden so lange wiederholt, bis ein vorgegebener Abstand zwischen benachbarten Punkten unterschritten wird.



**Abbildung 4.11: Randkurvenermittlung in der Ebene mithilfe des Quadtree-Verfahrens. Die grau unterlegten Flächen werden im nächsten Schritt geviertelt, die weißen Flächen werden verworfen. Die Punkte bezeichnen die zulässigen Punkte innerhalb des Volumens, die Kreuze die nicht zulässigen, außerhalb liegenden Punkte.**

Um den Rechenaufwand weiter zu reduzieren und eine gleichmäßige Auflösung der Randkurve auch von nichtquaderförmigen Ausgangsvolumina sicherzustellen, wird das Octree-Verfahren dahingehend modifiziert, dass eine Teilung der einzelnen Voxel nur in den Raumrichtungen durchgeführt wird, in denen die vorgegebene Auflösung noch nicht unterschritten worden ist. In den anderen Raumrichtungen wird das Voxel nicht weiter geteilt. Der dem modifizierten Octree-Verfahren zugrunde liegende Algorithmus ergibt sich damit zu:

```

Algorithmus Octree (Volumen v)
for Voxel 1 to 8
  zul_Eckpunkt = 0           {Anzahl der zulässigen Eckpunkte}
  Neues_Volumen = FALSCH
  for e[1] to e[8]           {e[1] bis e[8] sind alle Eckpunkte des Voxels}
    if e[i] == zulässig
      zul_Eckpunkt + 1
  if (zul_Eckpunkt >= 1 und zul_Eckpunkt <= 7) {Voxel liegt am Rand}
    Erstelle neues Volumen (nv)
    if |e[2] - e[1]| > ε      {Abstand ist größer als die vorgewählte Auflösung}
      nv:x_min = e[1], nv:x_max = e[2] {Dem neuen Volumen werden die Grenzen des aktuellen
      Neues_Volumen = WAHR           {Voxels zugewiesen: Teilung des Volumens in x Richtung}
    else
      nv:x_min = v:x_min      {Dem neuen Volumen werden die Grenzen des alten
      nv:x_max = v:x_max      {Volumens zugewiesen: Keine Teilung des Volumens in X-Richtung}
    if |e[5] - e[1]| > ε
      nv:y_min = e[1], nv:y_max = e[5], Neues_Volumen= WAHR {analog zu oben}
    else
      nv:y_min = v:y_min, nv:y_max = v:y_max {analog zu oben}
    if |e[3] - e[1]| > ε
      nv:z_min = e[1], nv:z_max = e[3], Neues_Volumen = WAHR {analog zu oben}
    else
      nv:z_min = v:z_min, nv:z_max = v:z_max {analog zu oben}
    if Neues_Volumen == WAHR
      Octree (nv) {Algorithmus ruft sich mit neuem Volumen nv wieder auf}
    else
      Lösche neues Volumen (nv)
      Speichere Schwerpunkt des Voxels als Randpunkt

```

In Tabelle 4.3 wird ein Effektivitätsvergleich bei der Randpunkteermittlung am Beispiel des Arbeitsvolumens der Hexaglide-Kinematik bei konstanter Orientierung ( $a = b = c = 0$  Grad) dargestellt. Der Vergleich bezieht sich auf den Rechenaufwand, der zur Ermittlung der Randkurve bei vollständiger Diskretisierung und dem modifizierten Octree-Verfahren notwendig ist.

	<b>Auflösung [mm]</b>	<b>Anzahl der zu berechnenden Punkte</b>	<b>Rechenzeit</b>
Vollständige Diskretisierung	1.5625	786.432.000	2133:04 h
Modifiziertes Octree-Verfahren	1.5625	3.011.531	8:10 h
Vollständige Diskretisierung	12.5	1.536.000	243:09 min
Modifiziertes Octree-Verfahren	12.5	45.884	7:15 min

**Tabelle 4.3: Vergleich der Diskretisierungsverfahren bei verschiedenen Auflösungen der Randkurve der Hexaglide-Kinematik und einem Ausgangsvolumen von 1.54 m<sup>3</sup>. Die Rechenzeit bezieht sich auf eine 350 MHz Pentium III CPU.**

Die in Tabelle 4.3 verwendete Auflösung der Berechnung ergibt sich durch die wiederholte gleichmäßige Teilung des Ausgangsvolumens in Untervoxel.

Um die resultierende Randpunktewolke visualisieren zu können, muss diese trianguliert werden. Hierzu werden jeweils drei benachbarte Punkte zu einem Dreieck verbunden. Der Körper, der durch die so gebildeten Dreiecke entsteht, stellt dann die Grenzen des Arbeitsraums dar (vgl. Abbildung 4.2).

Das von der Raumkurve eingeschlossene Volumen und damit der Arbeitsraum der untersuchten Parallelkinematik lässt sich nur näherungsweise ermitteln, da die Raumkurve  $f(x,y,z,a,b,c)$  aufgrund der Diskretisierung des modifizierten Octree-Verfahrens nicht exakt bekannt ist und darüber hinaus zum Teil auch Unstetigkeiten aufweisen kann. Der Existenzsatz [Bro93]: „Das Integral existiert, wenn die Funktion  $f(x,y,z,a,b,c)$  im gesamten Integrationsgebiet einschließlich seines Rands stetig ist.“ ist daher nicht immer gültig. Eine Berechnung des Volumens über das Integral:

$$V = \int_V f(x, y, z, a, b, c) dV \quad 4.2$$

ist daher nicht möglich. Da die zu untersuchenden Volumina nicht nur unregelmäßige und unstetige Ränder aufweisen können, sondern auch Hinterschnitte, Einschlüsse und Löcher besitzen können, ist eine automatisierte und allgemeingültige Volumenberechnung mithilfe des GAUSSschen Integralssatzes:

$$V = \oint_{(S)} V dS \quad 4.3$$

ebenfalls nicht möglich. Die Berechnung des Arbeitsraumvolumens muss daher über die mit dem Octree-Verfahren ermittelte Randpunktewolke erfolgen. Dies kann über die im Folgenden entwickelten Pyramiden- oder Tetraederverfahren erreicht werden.

Für die Berechnung des Arbeitsraumvolumens über ein Pyramidenverfahren muss die Randpunktewolke nicht trianguliert werden. Hierdurch kann der Rechen- und Speicheraufwand gerade bei höheren Auflösungen reduziert werden. Dieses Verfahren hat drei wesentliche Einschränkungen:

- Es ist keine einheitliche Konvergenzrichtung sichergestellt, so dass das Volumen auch überschätzt werden kann.
- Der Wert, gegen den das Verfahren konvergiert, kann bis zu 40 Prozent vom wahren Volumeninhalt abweichen.
- Das berechnete Volumen variiert in Abhängigkeit von der Position des angenommenen Mittelpunkts des Arbeitsraums.

Das Pyramidenverfahren ist daher nur für die ersten Auslegungsphasen geeignet. Diese Nachteile vermeidet die Volumenberechnung über das Tetraederverfahren, für das die resultierende Punktewolke trianguliert werden muss. Dies ist bei höheren Auflösungen mit einem erheblichen Rechen- und Speicheraufwand verbunden. Dieses Verfahren wird daher in den fortgeschrittenen Phasen eines Auslegungsprozesses zum Einsatz kommen.

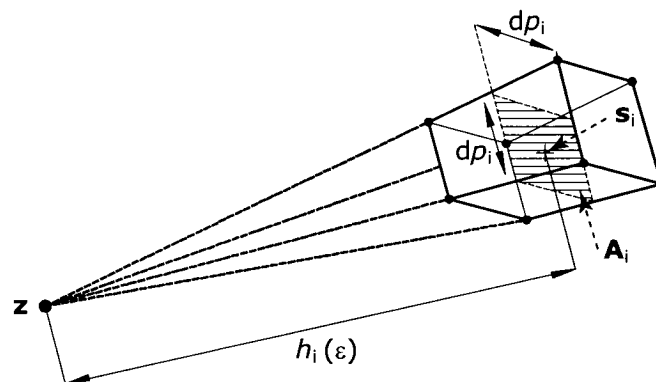
Im Folgenden werden diese beiden Verfahren dargestellt und miteinander verglichen.

### Pyramidenverfahren

Für jedes am Rand des Arbeitsraums befindliche Voxel wird der Abstand  $h_i(\varepsilon)$  seines Schwerpunkts  $\mathbf{s}_i$ , der sich aus der Zahl der  $n$  zulässigen Eckpunkte  $\mathbf{e}_i$  des Voxels berechnet (vgl. Gleichung 4.1), von einem im Arbeitsraum gelegenen Punkt  $\mathbf{z}$  ( $z_x, z_y, z_z$ ) ermittelt:

$$h_i(\varepsilon) = \|\mathbf{z} - \mathbf{s}_i\| = \left\| \mathbf{z} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \right\| \quad 4.4$$

Der Abstand  $h_i(\varepsilon)$  ist hierbei eine Funktion der gewählten Auflösung  $\varepsilon$  der Berechnung. Aus dem Abstand  $h_i(\varepsilon)$  und einer Fläche  $A_i$  kann das Volumen des Arbeitsraumsektors durch den Rauminhalt einer Pyramide approximiert werden (siehe Abbildung 4.12).



**Abbildung 4.12: Modell der Volumenberechnung mit dem Pyramidenverfahren**

Da die Grundfläche einer Pyramide von ihrer Position und Lage im Raum abhängig ist, wird diese zu:

$$A_i = \bar{e}_i^2 \quad \text{mit} \quad \bar{e}_i = \frac{1}{3}(dx + dy + dz) \quad 4.5$$

angenähert. Hierbei bezeichnen  $dx$ ,  $dy$  und  $dz$  die tatsächliche Auflösung der Berechnung in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung.

Das gesuchte Arbeitsraumvolumen ergibt sich näherungsweise aus der Summe der für alle Randvoxel gebildeten Pyramiden zu:

$$V \approx \frac{1}{3} \sum_{i=1}^m h_i(\varepsilon) \cdot A_i \quad 4.6$$

Der bei dieser Berechnung auftretende Fehler ist von der Auflösung  $\varepsilon$  der Berechnung abhängig und kann wie folgt abgeschätzt werden.

Da der Abstand vom Punkt  $\mathbf{z}$  zum Schwerpunkt des Voxels bestimmt wird, kann der Fehler bei ihrer Bestimmung mit:

$$h_{i,\min}(\varepsilon) = h_i - \frac{dp_i}{2} \leq h_i^t \leq h_i + \frac{dp_i}{2} = h_{i,\max}(\varepsilon) \quad 4.7$$



nach unten bzw. oben abgeschätzt werden, wobei  $dp_i$  den maximalen Abstand zweier Randpunkte bezeichnet und  $h_i^t$  den wahren Abstand des Punkts  $\mathbf{z}$  vom Schwerpunkt  $\mathbf{s}_i$ . Der maximale Abstand zweier Randpunkte  $dp_i$  ist durch die gewählte Auflösung  $\varepsilon$  nach oben beschränkt. Da das zu untersuchende Volumen immer gleichmäßig geteilt wird, muss für den tatsächlichen Punktabstand richtungsunabhängig gelten:

$$dp_i \leq \varepsilon \quad 4.8$$

und damit für den minimalen bzw. maximalen Fehler des Abstands:

$$h_{i,\min}(\varepsilon) = h_i(\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad h_{i,\max}(\varepsilon) = h_i(\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \quad 4.9$$

Der mit der Grundfläche der Pyramide verbundene Fehler wird annahmsweise durch die minimale ebene Fläche  $A_{i,\min}$  und die maximale ebene Fläche  $A_{i,\max}$  eines Quaders nach unten bzw. nach oben beschränkt. Analog zu Gleichung 4.9 lassen sich die Längenfehler der die Flächen bildenden Ränder abschätzen. Die minimale Fläche  $A_{i,\min}(\varepsilon)$  und die maximale Fläche  $A_{i,\max}(\varepsilon)$  zu lassen sich damit zu:

$$A_{i,\min}(\varepsilon) = \varepsilon \varepsilon = \varepsilon^2 \quad \text{und} \quad A_{i,\max}(\varepsilon) = \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2} = \varepsilon^2 \sqrt{2} \quad 4.10$$

berechnen. Hiermit ergibt sich das Verhältnis von maximalem zu minimalem Volumen zu:

$$\frac{V_{i,\max}}{V_{i,\min}} = \frac{\sum A_{i,\max} h_{i,\max}}{\sum A_{i,\min} h_{i,\min}} = \frac{\sum \sqrt{2} (h_i(\varepsilon) + \varepsilon)}{\sum (h_i(\varepsilon) - \varepsilon)} \quad 4.11$$

Unter der Annahme, dass der Abstand  $h_i$  sehr viel größer als die Auflösung  $\varepsilon$  ist und der Grenzwert des Abstands für gegen Null gehende Auflösungen  $\varepsilon$  gegen den wahren Abstand  $h_i^t$  strebt:

$$h_i(\varepsilon) \gg \varepsilon \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_i(\varepsilon) = h_i^t \quad 4.12$$

ergibt sich ein von der Auflösung unabhängiges Verhältnis zwischen größtem und kleinstem Volumen zu:

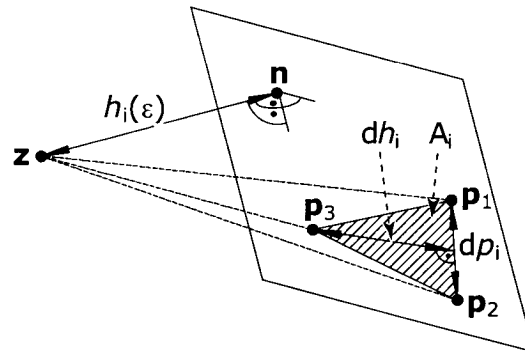
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum V_{i,\max}}{\sum V_{i,\min}} = \sqrt{2} \quad 4.13$$

Das Pyramidenverfahren kann damit gegen Werte konvergieren, die bis zu 40 Prozent vom wahren Arbeitsraumvolumen abweichen. Diese maximale Abweichung dürfte allerdings nur bei extrem unregelmäßig geformten Arbeitsräumen erreicht werden. An zwei Regelkörpern (vgl. übernächster Abschnitt) durchgeführte Untersuchungen zeigen maximale Abweichungen von fünf Prozent.

### Tetraederverfahren

Im Gegensatz zum Pyramidenverfahren nutzt das Tetraederverfahren die triangulierte Raumkurve. Für die aus jeweils drei benachbarten Punkten gebildeten Dreiecke wird der Abstand der durch die Dreiecke aufgespannten Ebenen zum Zentrum der Punktwolke bestimmt und das Volumen des resultierenden Tetraeders berechnet. In Abbildung 4.13 bezeichnet  $\mathbf{z}$  den Mittelpunkt der Punktwolke, der

als Mitte der maximalen Ausdehnung der Punktwolke in den drei Raumrichtungen bestimmt wird,  $h_i(\varepsilon)$  den normalen Abstand zur durch das Dreieck 'i' aufgespannten Ebene,  $da_i$  die Länge der Grundseite des Dreiecks und  $dh_i$  die Höhe des Dreiecks.



**Abbildung 4.13: Modell der Volumenberechnung mit dem Tetraederverfahren**

Das Tetraeder wird dann durch die Punkte  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$ ,  $\mathbf{p}_3$  und  $\mathbf{z}$  gebildet (vgl. Abbildung 4.13). Das Volumen des Arbeitsraums ergibt sich näherungsweise als Summe aller Tetraeder zu:

$$V \approx \sum_{i=1}^m \frac{1}{3} (h_i(\varepsilon) A_i) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{6} (h_i(\varepsilon) dh_i dp_i) \quad 4.14$$

Bezeichnet man die Eckpunkte jedes einzelnen Dreiecks 'i' mit  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  und  $\mathbf{p}_3$ , so ergibt sich die Länge der Grundseite  $dp_i$  als Abstand der Punkte  $\mathbf{p}_1$  und  $\mathbf{p}_2$  zu:

$$dp_i = \|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1\| \quad 4.15$$

Die Höhe  $dh_i$  zu:

$$dh_i = \sqrt{(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)^2 - \left( (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{\|\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1\|} \right)^2} \quad 4.16$$

Und die Höhe des Tetraeders analog zu Gleichung 4.15 als Abstand der Punkte  $\mathbf{z}$  und  $\mathbf{n}$ , wobei  $\mathbf{n}$  über den geschlossenen Vektorzug:

$$\mathbf{p}_1 + \tau(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + \sigma(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) = \nu((\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) \times (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)) \quad 4.17$$

berechnet wird.

Der Fehler bei der Volumenberechnung über ein Tetraederverfahren wird durch den Abstand der Raumkurve von der triangulierten Fläche bestimmt und ist damit abhängig von der Auflösung  $\varepsilon$  der Berechnung. Mit kleinerem  $\varepsilon$  (höhere Auflösung) wird eine immer bessere Anschmiegung der triangulierten Fläche an die Raumkurve erzielt.

Unter der Annahme, dass  $h_i(\varepsilon) \gg \varepsilon$  ist, wird das maximal und das minimal mögliche Tetraedervolumen durch zwei ebene Flächen begrenzt. Diese Flächen ergeben sich aus einer Parallelverschiebung der Grundfläche um den maximal möglichen Abstand zweier Randpunkte  $dp_i$  nach außen und nach innen.

Die Änderung der Höhe des Tetraeders kann mit  $dp_i \leq \varepsilon$  nach oben beziehungsweise unten abgeschätzt werden. Das maximal und das minimal mögliche Volumen ergibt sich damit zu:

$$V_{i, \max}(\varepsilon) = \frac{1}{6} (h_i + \varepsilon) dh_i da_i \quad 4.18$$

$$V_{i, \min}(\varepsilon) = \frac{1}{6} (h_i - \varepsilon) dh_i da_i \quad 4.19$$

Die Grenzwertbildung für eine gegen Null strebende Auflösung  $\varepsilon$  zeigt, dass das berechnete Volumen für höher werdende Auflösungen gegen das wahre Volumen des Arbeitsraums konvergiert:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\sum V_{i, \max}}{\sum V_{i, \min}} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\sum (h_i + \varepsilon)}{\sum (h_i - \varepsilon)} \right) = 1 \quad 4.20$$

Da die Anschmiegung darüber hinaus immer von der Innenseite der Raumkurve erfolgt, ist eine Konvergenzrichtung gegen ein Maximum sichergestellt. Das Arbeitsraumvolumen kann bei Anwendung des Tetraederverfahrens daher nicht überschätzt werden.

Das Konvergenzverhalten der beiden Verfahren wird im folgenden Abschnitt anhand von zwei Regelkörpern untersucht und die Eignung der beiden Verfahren für die Volumenberechnung einander gegenübergestellt.

### Vergleich Pyramidenverfahren - Tetraederverfahren

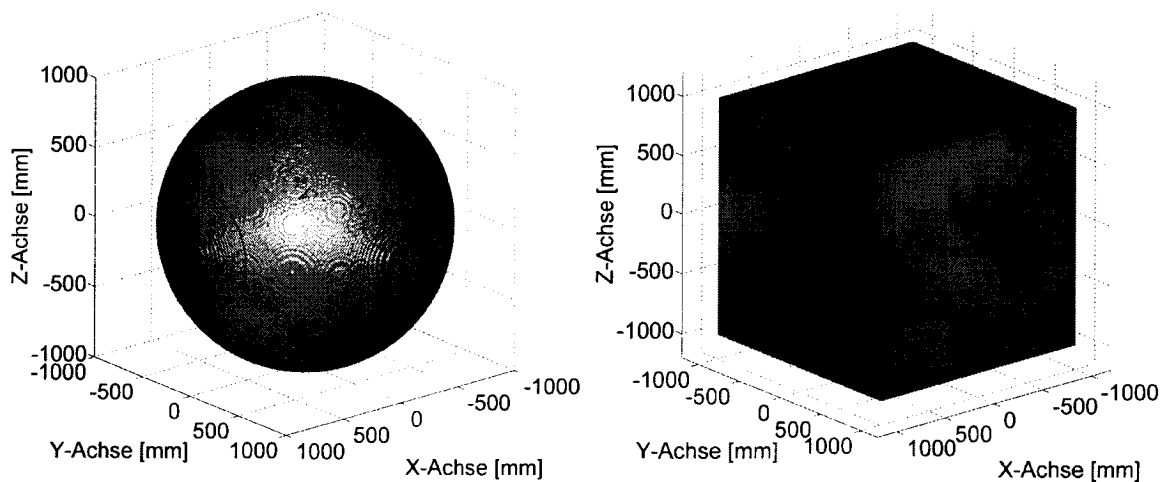
Um die verschiedenen Berechnungsverfahren zu verifizieren und deren Genauigkeit zu quantifizieren, wurden zwei verschiedene Regelkörper mit bekanntem Volumen untersucht:

- eine Kugel mit einem Durchmesser von 1000 mm und
- ein Würfel mit einer Kantenlänge von 1000 mm.

Beide Körper wurden mit dem modifizierten Octree-Verfahren bei verschiedenen Auflösungen berechnet. Die aus den Berechnungen mit einer Auflösung von  $\varepsilon = 1.56$  mm resultierenden Punktwolken gebildeten Regelkörper sind in Abbildung 4.14 dargestellt.

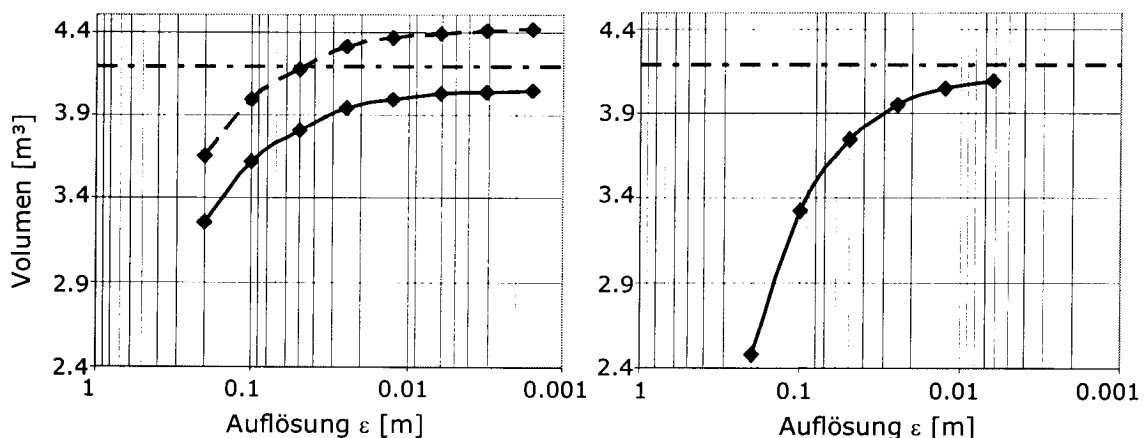
In Abbildung 4.15 wird für den Regelkörper Kugel das Konvergenzverhalten der beiden Verfahren gezeigt. Auf der linken Seite ist die Konvergenz des Pyramidenverfahrens für zwei verschiedene Mittelpunktpositionen dargestellt. Liegt der Punkt  $\mathbf{z}$  in der Mitte des Volumens (durchgezogene Linie), so konvergiert das Volumen gegen einen Wert, der kleiner als das analytisch ermittelte Volumen ist, das durch die strichpunktierte Linie dargestellt wird. Die Abweichung zum analytischen Volumen beträgt bei einer Auflösung von  $\varepsilon = 6.25$  mm 4.1 Prozent.

Liegt der Punkt  $\mathbf{z}$  nicht in der geometrischen Mitte des Körpers, sondern in der Nähe des Rands (gestrichelte Linie), so konvergiert das Volumen gegen einen Wert der größer ist als das analytische Volumen. Bei gleicher Auflösung beträgt die Abweichung 4.8 Prozent.



**Abbildung 4.14: Mithilfe des modifizierten Octree-Verfahrens berechnete Regelkörper (Auflösung  $\varepsilon = 1.56$  mm): Kugel (links) und Würfel (rechts)**

Das auf der rechten Seite dargestellte Tetraederverfahren ist nicht von der Position des Mittelpunkts abhängig und zeigt ein deutlich ausgeprägteres Konvergenzverhalten. Die Abweichung des berechneten Volumens zum analytisch bestimmten Volumen beträgt bei einer Auflösung von  $\varepsilon = 6.25$  mm 2.3 Prozent.

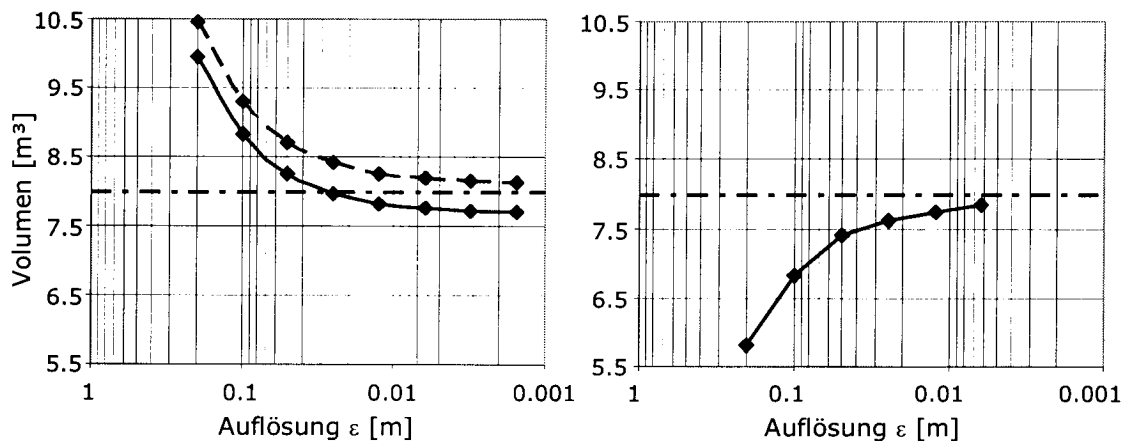


**Abbildung 4.15: Konvergenz der Arbeitsraumberechnung für die Kugel in Abhängigkeit der Auflösung  $\varepsilon$  für das Pyramidenverfahren (links) und das Tetraederverfahren (rechts)**

Für den Regelkörper Quader wird in Abbildung 4.16 das Konvergenzverhalten der beiden Verfahren dargestellt. Bei dem auf der linken Seite gezeigten Pyramidenverfahren konvergiert das Volumen ausgehend von Werten, die größer als das analytisch bestimmte Volumen sind, gegen das analytisch bestimmte Volumen, das durch die strichpunktierte Linie dargestellt wird. Liegt der Punkt  $\mathbf{z}$  im Mittelpunkt des Körpers (durchgezogene Linie), so konvergiert das Volumen gegen einen Wert, der kleiner als das analytisch bestimmte Volumen ist. Die Abweichung beträgt für eine Auflösung von  $\varepsilon = 6.25$  mm 3.1 Prozent.

Befindet sich der Punkt  $\mathbf{z}$  in der Nähe des Rands der Randkurve (gestrichelte Linie), so konvergiert das Volumen gegen einen Wert, der bei gleicher Auflösung 2.3 Prozent über dem analytisch bestimmten Wert liegt.

Die Anwendung des Tetraederverfahrens auf den Quader führt wie bei der Kugel zu einem schnelleren Konvergenzverhalten, das von unten gegen das analytisch bestimmte Volumen konvergiert. Die Abweichung beträgt bei diesem Verfahren bei einer Auflösung von  $\varepsilon = 6.25$  mm 1.7 Prozent.



**Abbildung 4.16: Konvergenz der Arbeitsraumberechnung für den Quader in Abhängigkeit der Auflösung  $\varepsilon$  für das Pyramidenverfahren (links) und das Tetraederverfahren (rechts)**

Die Genauigkeit der Volumeberechnung der mit dem Octree-Verfahren bestimmten Arbeitsräume hängt von der Auflösung der Simulation ab. Da die zur Berechnung des Arbeitsraums notwendige Rechenzeit mit genaueren Auflösungen exponentiell wächst, muss bei der Anwendung des Simulationswerkzeugs auf eine den Anforderungen des Auslegungsprozesses angepasste Auflösung geachtet werden. Dem gewünschten Detaillierungsgrad entsprechend muss ein geeignetes Volumeberechnungsverfahren gewählt werden.

Alle in der vorliegenden Arbeit berechneten Arbeitsräume sind aufgrund des besseren Konvergenzverhaltens und der höheren Genauigkeit mit dem Tetraederverfahren berechnet worden.

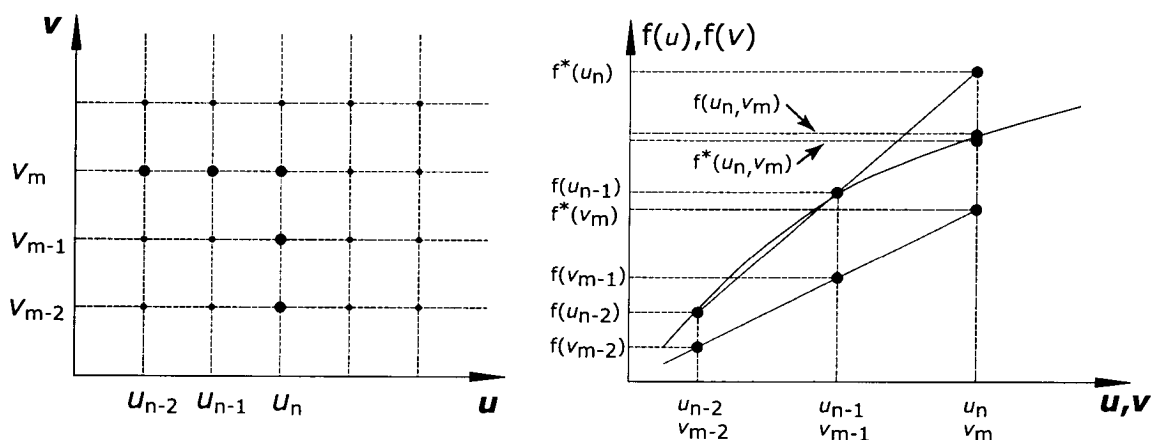
#### 4.1.5 Zweidimensionales Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Die Berechnung der *zulässigen Rotationswinkel in drei Ebenen* erfolgt in den Abbildung 2.2 gezeigten Schnittebenen. Ausgehend von einer vorzugebenden Anfangsorientierung des Werkzeugs werden die maximal zulässigen Rotationswinkel für jeden Rasterpunkt der Ebene berechnet. Hierzu wird der Rotationswinkel in positive  $a$  Richtung bei ansonsten konstanter Orientierung um ein frei wählbares Inkrement erhöht, bis eine Zulässigkeitsverletzung auftritt. Diese Zulässigkeitsverletzung kann durch eine Verletzung der Randbedingungen, zum Beispiel Stabkollision (vgl. Anhang B), oder durch nichterreichten definierter Anforderungen, zum Beispiel Eigenfrequenz kleiner als gefordert, ausgelöst werden.

Die Bestimmung der maximal zulässigen Rotationswinkel in den anderen Richtungen (negativ  $a$ , positiv und negativ  $b$ ) erfolgt entsprechend. Die maximal zulässigen Rotationswinkel bei gleichzeitiger und gleichmäßiger Rotation in  $a$  und  $b$  Richtung werden ebenfalls analog hierzu berechnet.

Der Rechenaufwand zur Bestimmung aller sechs Grenzwinkel ist umgekehrt proportional zur sechsten Potenz der Größe des Inkrements, das die erreichbare Berechnungsgenauigkeit festlegt. Dieses Verfahren verfügt damit nicht über eine hinreichende Leistungsfähigkeit für eine Anwendung in einem Simulationswerkzeug.

Für das Simulations- und Auslegungswerkzeug wird daher für ein zweidimensionales Prädiktor-Korrektor-Verfahren ein Algorithmus entwickelt und angewendet, der den notwendigen Rechenaufwand reduziert. Bei diesem Verfahren wird der Startwert, von dem aus die inkrementelle Suche nach dem maximal zulässigen Grenzwinkel beginnt über eine zweidimensionale lineare Extrapolation benachbarter Rasterpunkte bestimmt. In Abbildung 4.17 sind auf der linken Seite die geraserte Ebene mit den benachbarten Punkten und auf der rechten Seite schematisch die lineare Extrapolation gezeigt.



**Abbildung 4.17: Zweidimensionales Prädiktor-Korrektor-Verfahren**

Der wahre Grenzwinkel wird in Abbildung 4.17 mit  $f(u_n, v_m)$  und der erwartete Grenzwinkel mit  $f^*(u_n, v_m)$  bezeichnet. Der erwartete Grenzwinkel  $f^*(u_n, v_m)$  berechnet sich aus dem arithmetischen Mittel der beiden Extrapolationswerte zu:

$$f^*(u_n, v_m) = \frac{1}{2}(f_u^*(u_n, v_m) + f_v^*(u_n, v_m)) \quad 4.21$$

wobei:

$$f_u^*(u_n, v_m) = f(u_{n-1}, v_m) + \frac{f(u_{n-1}, v_m) - f(u_{n-2}, v_m)}{u_{n-1} - u_{n-2}} (u_n - u_{n-1}) \quad 4.22$$

die lineare Extrapolation in  $u$ -Richtung und:

$$f_v^*(u_n, v_m) = f(u_n, v_{m-1}) + \frac{f(u_n, v_{m-1}) - f(u_n, v_{m-2})}{v_{m-1} - v_{m-2}} (v_m - v_{m-1}) \quad 4.23$$

die lineare Extrapolation in v-Richtung ist. Ist eine lineare Extrapolation an den Rändern der Ebene nicht möglich, werden die Werte der direkt benachbarten Rasterpunkte gemittelt:

$$f_u^*(u_n, v_m) = f(u_{n-1}, v_m) \quad \text{und} \quad f_v^*(u_n, v_m) = f(u_n, v_{m-1}) \quad 4.24$$

Sind bei Beginn des Verfahrens auch diese Werte nicht verfügbar, wird die Anfangsorientierung der Plattform als Ausgangswert verwendet.

Der für das zweidimensionale Prädiktor-Korrektor-Verfahren entwickelte Algorithmus lässt sich wie folgt darstellen:

```

Algorithmus Prädiktor-Korrektor (Ergebnismatrix (n,m))
for m = 1 to Anzahl Punkte in v-Richtung
  for n = 1 to Anzahl Punkte in u-Richtung
    if (m >= 3 und n >= 3)      {Zweidimensionale Berechnung möglich}
      Berechne fu* und fv*
      f* = 0.5 (fu* + fv*)
    else if (m >= 3)           {Eindimensionale Berechnung in v Richtung möglich}
      Berechne fv*
      f* = fv*
    else if (n >= 3)           {Eindimensionale Berechnung in u Richtung möglich}
      Berechne fu*
      f* = fu*
    else f* = 0                 {Keine Prädiktorberechnung möglich}
    if (f* zulässig)           {Zulässiger Winkel größer als Prädiktor}
      do f* += inkrement       {Winkel wird um ein vorgewähltes Inkrement vergrößert}
      while (f* zulässig)
      Speichere f*(n,m) in der Ergebnismatrix
    else if (f* nicht zulässig) {Zulässiger Winkel kleiner als Prädiktor}
      do f* -= inkrement       {Winkel wird um ein vorgewähltes Inkrement verkleinert}
      while (f* nicht zulässig)
      Speichere f*(n,m) in der Ergebnismatrix
  
```

Die Leistungssteigerung durch die Verwendung des zweidimensionalen Prädiktor-Korrektor-Verfahrens ist abhängig von der Gleichmäßigkeit der Grenzwinkelverteilung innerhalb der Schnittebene und der Rasterdichte und lässt sich nicht allgemein quantifizieren. An der Hexaglide-Kinematik durchgeführte Untersuchungen zeigen Leistungssteigerungen, deren Größenordnungen mit den in Tabelle 4.3 gezeigten vergleichbar sind.

## 4.2 Strukturmodell

Da die bisher zur Berechnung der statischen und dynamischen Eigenschaften verwendeten Strukturmodelle den Einfluss wesentlicher Komponenteneigenschaften (vgl. Kapitel 3) vernachlässigen, wird im diesem Kapitel ein Strukturmodell entwickelt, das diese Eigenschaften berücksichtigt. Im Gegensatz zu den in der Literatur bekannten Verfahren können mit diesem Strukturmodell sowohl die Hexaglide- als auch die 6X Hexapod-Kinematik untersucht werden.

Im Bereich der Hexapod-Kinematiken wurden unter anderem von Gosselin, Yi, Tahmasebi, Clinton, Khasawneh, Takeda, Hebsacker und Kirchner [Gos90, Yi93, Tah95, Cli97, Kah98, Tak00, Heb00, Kir01] Modelle zur Berechnung der statischen Steifigkeit entwickelt. Diesen Modellen ist gemein, dass sie ausgehend von einer linearen Kraft-Weg-Beziehung einer Feder:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{d} \mathbf{x}$$

4.25

die Plattform als eine an sechs Federn aufgehängte Masse betrachten. Die mit der Lage der Plattform veränderlichen kinematischen Bedingungen werden bei diesen Modellen über die Jakobimatrix berücksichtigt. Die globale Steifigkeitsmatrix einer Hexapod-Kinematik ergibt sich nach Kirchner [Kir01] somit zu:

$$\mathbf{K}_X = \mathbf{J}_C^T \mathbf{K}_L \mathbf{J}_E \quad 4.26$$

Hierbei bezeichnen:

- $\mathbf{K}_X$  Globale Steifigkeitsmatrix im kartesischen Koordinatensystem
- $\mathbf{J}_C^T$  Transponierte kinematische Jakobimatrix (vgl. Anhang A.3)
- $\mathbf{K}_L$  Steifigkeitsmatrix der Streben (Diagonalmatrix)
- $\mathbf{J}_E$  Jakobimatrix der Euler-Winkel

Unter der bei den meisten Hexapod-Kinematiken zulässigen Annahme, dass die Steifigkeit der einzelnen kinematischen Ketten gleich ist, reduziert sich die Gleichung zu:

$$\mathbf{K}_X = k \mathbf{J}_C^T \mathbf{J}_E \quad 4.27$$

wobei  $k$  die skalare Zug-Drucksteifigkeit der einzelnen kinematischen Ketten angibt. Diese Steifigkeit setzt sich aus einer Reihenschaltung der an der Plattform befindlichen Gelenke, Stäbe, Antriebe und der antriebsseitigen Gelenke zusammen. Im Gegensatz zur Diagonalmatrix  $\mathbf{K}_L$  ist die globale Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_X$  somit eine vollbesetzte Matrix, die eine Verbindung zwischen den am Werkzeug im kartesischen Koordinatensystem auftretenden Kräften und Momenten und den dazugehörigen Verschiebungen im Koordinatensystem der jeweiligen Antriebe herstellt [Kir01]. Die bisher bekannten Modelle beziehen allerdings nur eine konstante Zug-Drucksteifigkeit der Stäbe ein und vernachlässigen damit die in Kapitel 3 untersuchten Hub- und Winkel-Steifigkeiten der Antriebe und Gelenke.

Ein wesentlicher Nachteil dieses Ansatzes besteht darin, dass er nicht, wie von Hebsacker [Heb00] und Kirchner [Kir01] angenommen, für alle Parallelkinematiken gültig ist, da die Annahme einer skalaren Zug-Drucksteifigkeit in Stabrichtung nur für Parallelkinematiken des Pod-Prinzips zulässig ist.

Bei Parallelkinematiken des Glide-Prinzips ist die Antriebsrichtung in der Regel nicht mit der Stabrichtung identisch. Dies hat zur Folge, dass die Antriebe aufgrund der Linearführungen eine anisotrope Steifigkeitsverteilung im Raum aufweisen (vgl. Kapitel 3.1). Diese anisotrope Steifigkeitsverteilung kann in dem Ansatz nach Gleichung 4.27 nicht berücksichtigt werden, wodurch die Verwendung dieses Ansatzes bei Glide-Kinematiken unzulässig ist.

Für ein Strukturmodell, mit dem statische und dynamische Eigenschaften der Hexaglide- und der 6X Hexapod-Kinematik berechnet werden sollen, ist ein Ansatz über die Jakobimatrix aufgrund der fehlenden Allgemeingültigkeit somit nicht ausreichend.



### 4.2.1 Grundlagen der Modellbildung

Zwei verschiedene Ansätze können zur Modellierung einer Werkzeugmaschine verwendet werden: Zum einen ein kontinuierliches System mit verteilten Massen, Trägheiten, Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften, das zu partiellen Differentialgleichungen führt, zum anderen ein diskretes System, das zu gewöhnlichen Differentialgleichungen führt.

Das kontinuierliche System mit endlich vielen Freiheitsgraden stellt ein realitätsnahes Modell dar, da Massen, Trägheiten, Steifigkeits- und Dämpfungseigenschaften mit ihrem kontinuierlichen Verlauf berücksichtigt werden können. Das Lösen der zugehörigen partiellen Gleichungen ist allerdings bei komplexen Systemen nur mit sehr großem Aufwand möglich und scheidet daher für praktische Anwendungen aus [Dub95]. Mithilfe der Finiten-Element-Methode (FEM) lassen sich auch komplexe Strukturen in eine Anzahl von Einzelementen mit endlich kleiner Ausdehnung zerlegen. In jedem dieser finiten Elemente können die entsprechenden Eigenschaften Masse, Trägheit, Steifigkeit und Dämpfung berücksichtigt und in Matrizen zusammengefasst werden. Die einzelnen finiten Elemente werden unter Einhaltung aller Randbedingungen an den Knotenpunkten nach dem Prinzip von d'Alembert miteinander verbunden und zu einer Gesamtstruktur zusammengefügt.

Die FE-Methode weist eine geringe Variabilität auf, da die zu untersuchende Maschinenstruktur jeweils vollständig modelliert werden muss. Die Genauigkeit der mit der FE-Methode berechneten Eigenschaften des Gesamtsystems nimmt mit zunehmender Elementgröße ab. Da der Rechenaufwand kubisch mit der Anzahl der Elemente und Knoten wächst, sind der Auflösung und damit der Genauigkeit einer solchen Berechnung im Rahmen eines iterativen Auslegungsprozesses Grenzen gesetzt. Daher wird im Folgenden ein anderer Ansatz verwendet.

Fasst man die kontinuierlich verlaufenden Massen zu Punktmassen oder starren Körpern zusammen und verbindet man diese mit masselosen Feder- und Dämpfer-Elementen (Stiffness-Damping-Elements - SDE), so erhält man ein diskretes Mehrkörpersystem (MKS). Es wird angenommen, dass die einzelnen Körper des MKS starr sind; eine Deformation derselben wird nicht zugelassen. Hierdurch werden die Deformationen auf die Koppelstellen reduziert, die als viskoelastisch ausgebildete SDE angenommen werden. Dies ist bei Parallelkinematiken zulässig, da die Steifigkeit der Komponenten (Plattform, Stäbe, Führungsbahnen) erheblich über der Steifigkeit der Koppelstellen (Gelenke, Antriebe, Führungen) liegt [Sch94]. Aus den einzelnen Kopplungen werden die linearen Bewegungsdifferentialgleichungen des MKS zusammengesetzt. In Abhängigkeit der Geometrie und der Materialeigenschaften der einzelnen Komponenten ist die Annahme starrer Körper nur bis zu einer Frequenz von 250 Hz zulässig, da es oberhalb dieser Frequenz zu Komponenteneigenschwingungen kommen kann, wie experimentelle Modalanalysen an entsprechenden Konstruktionen gezeigt haben [Wei00]. Die Analyse des dynamischen Verhaltens einer Maschinenstruktur über ein MKS muss daher auf Bereiche unterhalb von 250 Hz beschränkt werden. Dies ist zulässig, da die für die Bearbeitungsqualität relevanten ersten Eigenfrequenzen des Gesamtsystems deutlich unterhalb dieses Werts auftreten.

Der Vorteil der Modellbildung über ein MKS besteht in dem sehr geringen Aufwand für die Berechnung und in der Parametrisierbarkeit, die eine große Variabilität der zu untersuchenden Strukturen ermöglicht. Hierdurch könne sowohl die Hexaglide- als auch die 6X Hexapod-Kinematik mit einem Strukturmodell beschrieben werden.

Ein auf einem MKS beruhendes Strukturmodell zur Berechnung von Parallelkinematiken nach dem Hexaglide-Prinzip wurde von Weikert [Wei00] vorgestellt. Bei diesem Modell ist die Kinematik aus sieben Körpern aufgebaut: einer Plattform mit sechs Freiheitsgraden und sechs Antrieben, die über jeweils einen translatorischen Freiheitsgrad verfügen. Das Modell verfügt damit über insgesamt zwölf Freiheitsgrade und eignet sich damit ausschließlich zur Modellierung von Hexaglide-Kinematiken. Das von Weikert vorgestellte Modell beschränkt sich auf zwei als konstant angenommene Parameter: die Steifigkeit der Antriebe in Antriebsrichtung und die axiale Steifigkeit der Stäbe. Analog zu Gleichung 4.27 werden die Steifigkeiten der einzelnen kinematischen Ketten in einem Wert zusammengefasst. Wie in Kapitel 3 gezeigt worden ist, können in diesem Modell das Verhalten der Gesamtmaschine wesentlich bestimmende Komponenteneinflüsse nicht berücksichtigt werden. Mit dem von Weikert vorgestellten Modell sind daher nur qualitative Aussagen möglich. Eine hinreichend genaue Quantifizierung wesentlicher Eigenschaften ist dagegen nicht möglich.

Im Folgenden wird der Aufbau eines parametrisierten MKS beschrieben, das auf dem von Weikert [Wei00] entwickelten MKS aufbaut, jedoch über 30 Freiheitsgrade verfügt und damit die Simulation der Hexaglide- und der 6X Hexapod-Kinematik ermöglicht.

Eine vollständige mathematische Modellierung einer Werkzeugmaschine ist mit einem erheblichen Aufwand sowohl bei der Erstellung des Modells als auch bei den anschließenden Berechnungen verbunden. Wie von Backhaus [Bac81] gezeigt wurde, lässt sich ein solches System, das über eine große Anzahl von Freiheitsgraden verfügt, mithilfe des Ritz'schen Verfahrens in reduzierte Subsysteme mit wenigen Freiheitsgraden überführen. Diese Subsysteme werden dazu aus dem Gesamtsystem herausgeschnitten und ihr statisches und dynamisches Verhalten näherungsweise erfasst. Aus der Summe aller Subsysteme lässt sich dann ein reduziertes Gesamtsystem zusammensetzen und berechnen. Die mathematische Beschreibung des Zusammenhangs der Subsysteme im Gesamtsystem erfolgt durch die Modellierung der Koppelstellen der einzelnen Subsysteme. Durch eine Transformation werden die Bewegungsgleichungen der reduzierten Subsysteme in die des Gesamtsystems überführt. Die Subsysteme bestehen hierbei aus diskreten Elementen wie Punktmassen, starren Körpern mit Massenträgheitsmomenten und masselosen SDE.

Für ein aus diesen Elementen aufgebautes System sind nach Weikert [Wei00] folgende Annahmen zu treffen:

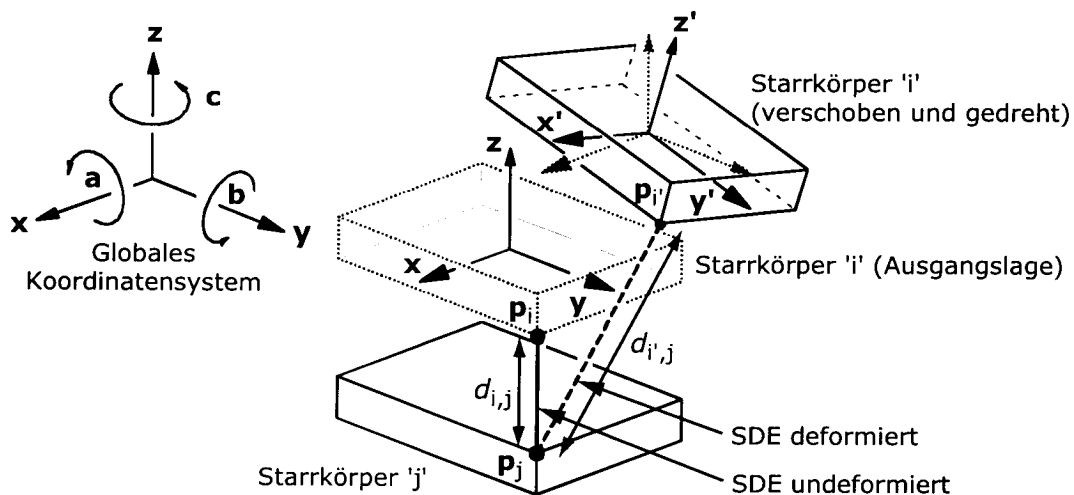
- Die zueinander bewegten Maschinenkomponenten und die Gestelle werden als starre Körper angenommen. Die Körper des Modells geben die Massen und Trägheiten der ihnen entsprechenden Strukturkomponenten wieder.

- Die starren Körper sind an den Koppelstellen über SDE miteinander verbunden.
- Die Koppelstellen benachbarter Körper, die durch ein SDE miteinander verbunden sind, fallen zusammen.
- Die Verschiebungen der Körper sind sehr klein im Vergleich zur Größe der Körper.

Aufbauend auf diesen Annahmen wird im Folgenden ein Formalismus hergeleitet, mit dem die Eigenschaften der einzelnen Koppelstellen beschrieben werden können. Darüber hinaus erlaubt die Verwendung dieses Formalismus eine effiziente Erstellung der einzelnen Subsysteme und deren Kombination zu einem Gesamtsystem [Wsp99]. Der Formalismus beruht auf einer Verknüpfung des Prinzips von d'Alembert mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebung, einer Methode, die auch als Prinzip von d'Alembert in der Fassung von Lagrange bezeichnet wird und die nach Gasch [Gas87] wie folgt definiert wird:

*Für einen virtuellen Verschiebungszustand ist die virtuelle Arbeit der Feder- und Dämpferkräfte an den zugehörigen virtuellen Relativverschiebungen genauso groß wie die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte und der d'Alembertschen Trägheitskräfte an den zugehörigen virtuellen Verschiebungen.*

Grundlage der auf diesem Prinzip aufbauenden Systembeschreibung ist die Lagebeziehung zweier Starrkörper zueinander, die in Abbildung 4.18 dargestellt wird.



**Abbildung 4.18: Zwei über ein Stiffness-Damping-Element (SDE) miteinander verbundene Starrkörper 'i' und 'j' [nach Wei00]**

Die mit einer Verschiebung der relativen Lage zweier Starrkörper, die mit den Indices 'i' und 'j' bezeichnet werden, einhergehende Längenänderung des zwischen diesen befindlichen SDE lässt sich durch die folgende Gleichung beschreiben:

$$\delta d_{i,j} = \|d'_{i,j} - d_{i,j}\| = \|\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}_j\| - \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\| \quad 4.28$$

Hierbei sind:

- $\delta d_{i,j}$  Längenänderung des SD-Elements durch Verschiebung und Verdrehung des Körpers 'i'
- $d_{i',j}$  Abstand des verschobenen Punkts  $\mathbf{p}_{i'}$  vom Punkt  $\mathbf{p}_j$
- $d_{i,j}$  Abstand des Punkts  $\mathbf{p}_i$  vom Punkt  $\mathbf{p}_j$  vor der Verschiebung und Verdrehung
- $\mathbf{p}_i$  Koordinaten des SDE Angriffspunkts des Körpers 'i' (Ausgangslage)
- $\mathbf{p}_{i'}$  Koordinaten des SDE Angriffspunkts des verschobenen und verdrehten Körpers 'i'
- $\mathbf{p}_j$  Koordinaten des SDE Angriffspunkts des Körpers j

Alle Koordinaten beziehen sich hierbei auf ein globales Koordinatensystem, wie in Abbildung 4.18 dargestellt. Mit der skalaren Zug-Drucksteifigkeit eines SDE  $k_{\text{SDE}}$  ergibt sich unter Voraussetzung linearen Federverhaltens die potentielle Energie:

$$E_{\text{Pot}, i,j} = \frac{1}{2} k_{\text{SDE}} \delta d_{i,j}^2 \quad 4.29$$

Eine Verallgemeinerung dieses Falls ergibt, dass sich die Längenänderung aller sich zwischen zwei Körpern 'i' und 'j' befindlichen SDE durch eine in generalisierten Koordinaten beschriebenen Verschiebung des Körpers 'i' relativ zu 'j' beschreiben lässt. Die Gesamtheit der Längenänderungen  $\mathbf{l}_{i,k}$  der SDE ergibt sich somit zu:

$$\mathbf{l}_{i,k} = \mathbf{l}_{i,k}(\mathbf{q}_i) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad 4.30$$

Hierbei bezeichnet  $n$  die Anzahl der SDE und  $\mathbf{q}_i$  die generalisierten Koordinaten, in denen die Verschiebung des Körpers 'i' im globalen Koordinatensystem beschrieben wird. Die Verschiebungen der Körper 'i' und 'j' in generalisierten Koordinaten lassen sich in den zwei Matrizen  $\mathbf{L}_i(\mathbf{q}_i)$  und  $\mathbf{L}_j(\mathbf{q}_j)$  zusammenfassen [Muk00]:

$$\mathbf{L}_i(\mathbf{q}_i) = (\mathbf{l}_{i,1}, \mathbf{l}_{i,2}, \dots, \mathbf{l}_{i,n})^T \quad 4.31$$

$$\mathbf{L}_j(\mathbf{q}_j) = (\mathbf{l}_{j,1}, \mathbf{l}_{j,2}, \dots, \mathbf{l}_{j,n})^T \quad 4.32$$

Aus diesen Verschiebungen lassen sich bei Vernachlässigung der Dämpfung mit den zu den SDE gehörenden Steifigkeitsmatrizen die Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems herleiten, wie in Kapitel 4.2.3 gezeigt werden wird. Grundlage der zu den SDE gehörenden Steifigkeitsmatrizen sind die physikalischen Eigenschaften der einzelnen Maschinenkomponenten einer Parallelkinematik (vgl. Kapitel 3). In den folgenden Abschnitten soll ausgehend von diesen Komponenten der Aufbau der einzelnen Subsysteme und daran anschließend die Modellsynthese des Gesamtsystems dargestellt werden.

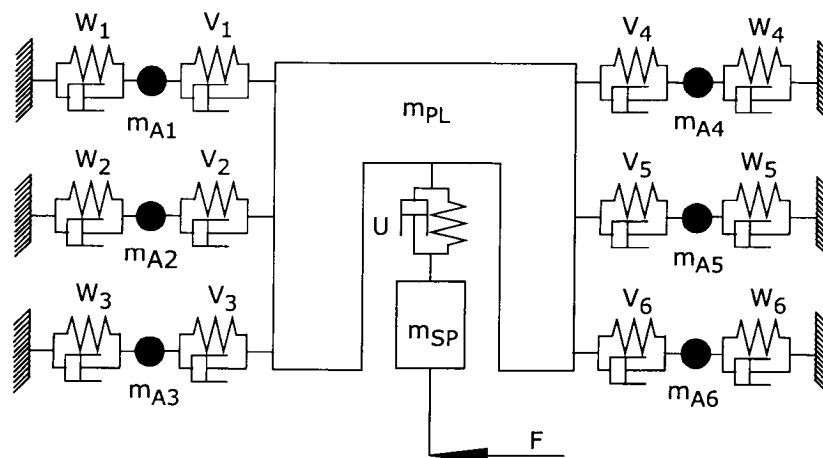
#### 4.2.2 Modellierung der Subsysteme

Entsprechend des in Kapitel 4.2.1 vorgestellten Ansatzes wird die zu untersuchende Parallelkinematik als ein aus miteinander verknüpften Subsystemen aufgebautes Gesamtsystem modelliert. Die entsprechenden Subsysteme wurden dabei so gewählt, dass sowohl die Hexaglide- als auch die 6X Hexapod-Kinematik in einem

Modell beschrieben und simuliert werden können. Um die im Rahmen einer Maschinenauslegung notwendigen Iterationsschritte effizient durchführen zu können, wurde die Anzahl der Subsysteme auf die bei beiden Kinematiken vorhandenen Baugruppen reduziert. Zu den bei jeder dieser Parallelkinematiken vorhandenen Baugruppen zählen:

- Plattform mit Werkzeugspindel,
- plattform- und antriebsseitige Gelenke,
- bei der Pod-Kinematik: Stäbe mit den integrierten Antrieben,
- bei der Glide-Kinematik: Stäbe, Antriebe und Führungsschlitten.

Diese Baugruppen werden für die Modellbildung in zwei Hauptgruppen zusammengefasst, für die die dazugehörigen Subsysteme gebildet werden. Die eine Hauptgruppe, die im Folgenden als Antriebsgruppe bezeichnet wird, umfasst die Antriebe und die antriebsseitigen Gelenke. Für die Kinematik nach dem Glide-Prinzip kommen die Führungsschienen hinzu. Die andere Hauptgruppe, die Plattformgruppe, besteht aus dem Plattformgrundkörper, den plattformseitigen Gelenken und der Werkzeugspindel. In Abbildung 4.19 ist das Ersatzschema des Modells für die beiden Parallelkinematiken mit sechs Freiheitsgraden dargestellt.



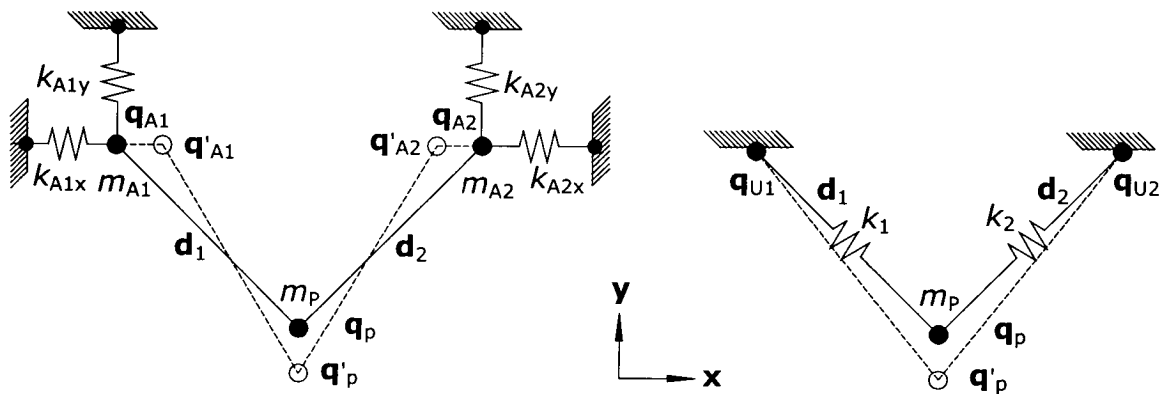
**Abbildung 4.19: Ersatzschema einer Parallelkinematik mit sechs Freiheitsgraden**

Hierbei bezeichnen:

- $W_i$  Antrieb-Umgebungs-Bindung  $i = 1, 2, \dots, 6$
- $V_i$  Plattform-Antrieb-Bindung  $i = 1, 2, \dots, 6$
- $U$  Plattform-Spindel-Bindung
- $m_{A_i}$  Masse der Antriebssysteme (Punktmassen mit drei Freiheitsgraden);  $i = 1, 2, \dots, 6$
- $m_{pL}$  Masse der Plattform (starrer Körper mit sechs Freiheitsgraden)
- $m_{Sp}$  Masse der Werkzeugspindel (starrer Körper mit sechs Freiheitsgraden)

Die Modellierung der einzelnen Bindungen zwischen den Körpern und der Aufbau der dazugehörigen Subsysteme werden in diesem Kapitel für das in Abbildung 4.19 gezeigte Ersatzschema einer Parallelkinematik entwickelt.

Anhand zweier Beispiele, eines Biglides (Parallelkinematik nach dem Glide-Prinzip mit zwei Freiheitsgraden) und eines Bipods (Parallelkinematik nach dem Pod-Prinzip mit zwei Freiheitsgraden), wird der Aufbau der allgemeinen Bewegungsgleichungen und der globalen Matrizen für den zweidimensionalen Fall verdeutlicht. Ausgehend von diesen Beispielen werden dann die allgemeingültigen Gleichungen hergeleitet. Das Ersatzschema der Biglide- und der Bipod-Kinematik wird in Abbildung 4.20 gezeigt.



**Abbildung 4.20: Schematische Darstellung eines Biglides (links) und eines Bipods (rechts)**

Die den Berechnungen zugrunde liegenden Parameter der Biglide- und Bipod-Kinematik sind in Anhang C.5 aufgeführt.

#### Antriebsgruppe: Bindungen Antriebe - Maschinengestell

Bei der Biglide-Kinematik umfasst die Antriebsgruppe die beiden Antriebe, die als Punktmassen  $m_{a1}$  und  $m_{a2}$  bezeichnet sind und über je einen translatorischen Freiheitsgrad in x-Richtung verfügen. Unter der Annahme, dass die Steifigkeiten  $k_{A1}$  und  $k_{A2}$  positionsunabhängig sind, kann die potentielle Energie dieser Bindung über Gleichung 4.29 berechnet werden. Die Steifigkeitsmatrix der Bindungen wird aus den skalaren Werten in x-Richtung  $k_{A,i,x}$  und in y-Richtung  $k_{A,i,y}$  zusammengesetzt:

$$\mathbf{K}_{A,i} = \begin{bmatrix} k_{A,i,x} & 0 \\ 0 & k_{A,i,y} \end{bmatrix} \quad 4.33$$

Die Verschiebungen der Antriebspunkte  $d\mathbf{q}_{A,i}$  werden zu:

$$d\mathbf{q}_{A,i} = \begin{bmatrix} dq_{A,i,x} \\ dq_{A,i,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{A,i,x} - q'_{A,i,x} \\ q_{A,i,y} - q'_{A,i,y} \end{bmatrix} \quad 4.34$$

definiert. Damit lässt sich die potentielle Energie der Kinematik durch:

$$E_{\text{Pot}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} dq_{A,1,x} \\ dq_{A,1,y} \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_{A,1} \begin{bmatrix} dq_{A,1,x} \\ dq_{A,1,y} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} dq_{A,2,x} \\ dq_{A,2,y} \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_{A,2} \begin{bmatrix} dq_{A,2,x} \\ dq_{A,2,y} \end{bmatrix} \quad 4.35$$

ausdrücken. Für die Bipod-Kinematik ist die potentielle Energie dieser Bindung gleich Null, da die Antriebe direkt mit der festen Umgebung verbunden sind (vgl. Abbildung 4.20).

Im allgemeinen Fall (der Hexaglide- oder der 6X Hexapod-Kinematik) werden durch diese Bindungen, die in Abbildung 4.19 mit  $W_1$  bis  $W_6$  bezeichnet sind, die Kopplungen der Antriebe an das Maschinengestell modelliert. Mit dieser Bindung wird bei der Pod-Kinematik die Steifigkeit der Antriebsaufhängung im Maschinengestell und bei der Glide-Kinematik die Steifigkeit der Antriebe modelliert. Die Modellierung dieser Bindung erfolgt für das allgemeine Maschinenmodell mit drei translatorischen Freiheitsgraden.

Die Zulässigkeit dieses Vorgehens soll am Beispiel der Hexaglide-Kinematik dargestellt werden: Die in dieser Parallelkinematik eingesetzten Profilschienenführungen weisen eine minimale Quersteifigkeit von  $1700 \text{ N}/\mu\text{m}$  pro Führungseinheit auf (vgl. Kapitel 3.1.2). Die minimale Quersteifigkeit eines Antriebsschlittens berechnet sich als Parallelschaltung der vier Führungseinheiten, die auf jeder Antriebseinheit montiert sind, zu  $4520 \text{ N}/\mu\text{m}$ . Die Steifigkeit in Antriebsrichtung ergibt sich aus Gleichung 3.5 zu  $25 \text{ N}/\mu\text{m}$  und liegt damit um mehr als zwei Größenordnungen unter der Quersteifigkeit. Da die auf den Schlitten angebrachten Gelenke keine Momente übertragen, reduziert sich die Belastung der Schlitten auf die über die Stäbe eingeleiteten Kräfte. Aus Gründen der direkten Kraftleitung ist ein sehr kompakter Aufbau des Schlittens realisiert worden, so dass sich die Momentenbelastung auf die Momente reduziert, die sich aus dem Abstand der Gelenkpunkte von den Lagerungspunkten der Führungseinheiten ergeben. Da diese Momentenbelastungen im Vergleich zu den translatorischen Belastungen klein sind, können sie vernachlässigt werden.

Mit dem in Kapitel 4.2.1 vorgestellten Formalismus lässt sich die in den SDE gespeicherte Energie über die relative Verschiebung zweier Körper 'i' und 'j' in den generalisierten Koordinaten allgemeingültig beschreiben:

$$E_{\text{Pot},i,j}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_i - \mathbf{L}_j)^T \mathbf{K}_{\text{SDE}} (\mathbf{L}_i - \mathbf{L}_j) \quad 4.36$$

Da sich zwischen den einzelnen Körpern des Strukturmodells nur je ein SDE befindet in dem das Steifigkeitsverhalten mehrerer Maschinenkomponenten zusammengefasst wird, reduzieren sich die generalisierten Verschiebungsmatrizen  $\mathbf{L}_i$  und  $\mathbf{L}_j$  aus Gleichungen 4.31 und 4.32 zu Verschiebungsvektoren  $\mathbf{l}_i$  beziehungsweise  $\mathbf{l}_j$ :

$$E_{\text{Pot},i,j}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j) = \frac{1}{2} (\mathbf{l}_i - \mathbf{l}_j)^T \mathbf{K}_{\text{SDE}} (\mathbf{l}_i - \mathbf{l}_j) \quad 4.37$$

Für die Bindung der Antriebe zum Maschinengestell reduziert sich diese Gleichung auf die Verschiebung der Antriebe im globalen Koordinatensystem, da das Maschinengestell im Rahmen des Modells als feste Umgebung angenommen wird. Da die Antriebe als Punktmassen mit drei Freiheitsgraden definiert sind, ergeben sich die Verschiebungen der Angriffspunkte des SDE, die mit:

$$\mathbf{q}_{W,i} = (dx_{W,i}, dy_{W,i}, dz_{W,i})^T \quad 4.38$$

definiert werden, direkt aus der Verschiebung der Punktmassen. Die Gesamtheit der Längenänderung des SDE und damit die Deformation desselben ergibt sich folglich zu:

$$\mathbf{l}_{W,i} = \mathbf{q}_{W,i} \quad 4.39$$

Die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{W,i}$  für diese Bindung berechnet sich für die Hexaglide-Kinematik durch Transformation der Steifigkeitsmatrix aus dem Antriebskoordinatensystem  $\mathbf{K}'_{W,i}$  (vgl. Gleichung 3.6 auf Seite 18) in das globale Koordinatensystem. Die Matrix  $\mathbf{R}$  enthält hierbei die Winkel, mit denen das Antriebskoordinatensystem in das Maschinenkoordinatensystem gedreht werden kann:

$$\mathbf{K}_{W,i} = \mathbf{R} \mathbf{K}'_{W,i} \quad 4.40$$

Für die Pod-Kinematik berechnet sich die Steifigkeitsmatrix für die Bindung der Antriebe an das Maschinengestell aus der Steifigkeit der Antriebsaufhängung im Maschinengestell. Die Steifigkeitsmatrix wird ebenfalls mit  $\mathbf{K}_{W,i}$  bezeichnet und ist im globalen Koordinatensystem aufzustellen. Die potentielle Energie ergibt sich für die Bindung  $W_j$  damit allgemein zu:

$$E_{\text{Pot},W,i}(\mathbf{q}_{W,i}) = \frac{1}{2} \mathbf{l}_{W,i}^T \mathbf{K}_{W,i} \mathbf{l}_{W,i} \quad 4.41$$

Die Masse des Antriebssystems ist abhängig von der Antriebs- und Bauart der Parallelkinematik. Bei der Pod-Kinematik ergibt sie sich aus den Massen des Antriebs, dem Antriebsgelenk und einem Anteil des Stabs; bei der Glide-Kinematik aus den Massen des Führungsschlittens, des Antriebsgelenks und einem Anteil des Stabs. Werden Lineardirektantriebe eingesetzt, so kommt zusätzlich das Gewicht des Antriebs (ohne das Gewicht des Stators) hinzu.

#### **Antriebsgruppe: Bindungen Antriebe - Plattformgrundkörper**

Die potentielle Energie dieser Bindung ist für die Biglide-Kinematik gleich Null, da sich zwischen den Antriebsmassen und der Plattformmasse kein SDE befindet. Für die Bipod-Kinematik berechnet sich die potentielle Energie dieser Bindung aus der Steifigkeit der SDE  $k_j$  und der Richtung der Stäbe. Für die einzelnen SDE ergeben sich die lokalen Steifigkeitsmatrizen damit aus dem dyadischen Produkt der normierten Richtungsvektoren  $\mathbf{d}_j$  und den skalaren Steifigkeiten  $k_j$ :

$$\mathbf{K}_{V,i} = k_i \begin{bmatrix} n_{i,x} & n_{i,x} & n_{i,x} & n_{i,y} \\ n_{i,y} & n_{i,x} & n_{i,y} & n_{i,y} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{n}_i = \begin{bmatrix} n_{i,x} \\ n_{i,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{d}_i\|} \begin{bmatrix} d_{i,x} \\ d_{i,y} \end{bmatrix} \quad 4.42$$

Definiert man analog zu Gleichung 4.34 die Verschiebung des Punkts  $\mathbf{q}_p$  zu:

$$d\mathbf{q}_p = \begin{bmatrix} dq_{p,x} \\ dq_{p,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dq_{p,x} - dq'_{p,x} \\ dq_{p,y} - dq'_{p,y} \end{bmatrix} \quad 4.43$$

so kann die potentielle Energie der Bindungen für den Bipod bestimmt werden:

$$E_{\text{Pot}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} dq_{p,x} \\ dq_{p,y} \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_{V,1} \begin{bmatrix} dq_{p,x} \\ dq_{p,y} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} dq_{p,x} \\ dq_{p,y} \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_{V,2} \begin{bmatrix} dq_{p,x} \\ dq_{p,y} \end{bmatrix} \quad 4.44$$



Die Bindungen der Antriebe an den Plattformgrundkörper werden im allgemeinen Fall durch sechs SDE, die in Abbildung 4.19 mit  $V_1$  bis  $V_6$  bezeichnet sind, modelliert. Das Deformationsverhalten des Plattformgrundkörpers wird in der Bindung zur Werkzeugspindel berücksichtigt. Bei der Berechnung der potentiellen Energie der Bindung  $V_i$  nach Gleichung 4.37 muss eine mögliche Verdrehung der Plattform in den zugehörigen Verschiebungsvektoren berücksichtigt werden, da die Plattform über sechs Freiheitsgrade verfügt. Dies geschieht nach Weikert [Wei00] durch die Definition einer Bezugsmatrix  $\mathbf{N}_{P,V,i}$ :

$$\mathbf{N}_{P,V,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & dz_{P,V,i} & -dy_{P,V,i} \\ 0 & 1 & 0 & -dz_{P,V,i} & 0 & dx_{P,V,i} \\ 0 & 0 & 1 & dy_{P,V,i} & -dx_{P,V,i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 4.45$$

Hierbei bezeichnen  $dx_{P,V,i}$ ,  $dy_{P,V,i}$  und  $dz_{P,V,i}$  den Abstand des Angriffspunkts des SDE  $V_i$  vom Schwerpunkt der Plattform  $P$  in den drei Raumrichtungen im globalen Koordinatensystem. Diese fallen bei dem Simulationsmodell mit den Gelenkpunkten des Plattformkoordinatensystems zusammen. Über den Verschiebungs- und Verdrehungsvektor der Plattform im globalen Koordinatensystem:

$$\mathbf{q}_P = (q_{P,x}, q_{P,y}, q_{P,z}, q_{P,a}, q_{P,b}, q_{P,c})^T \quad 4.46$$

ergibt sich die Längenänderung des SDE  $V_i$  für die Plattform damit zu:

$$\mathbf{l}_{P,V,i} = \mathbf{N}_{P,V,i} \mathbf{q}_{P,i} \quad 4.47$$

Unter der Annahme, dass die Stäbe nur auf Zug und Druck belastet werden und sich die winkelabhängige Steifigkeit der Gelenke ebenfalls in einem Skalar ausdrücken lässt, ergibt sich für die Bindung  $V_i$  ein skalarer Steifigkeitswert  $k_{V,i}$ . Dieser berechnet sich als Reihenschaltung der antriebsseitigen Gelenke, der Stäbe und der plattformseitigen Gelenke zu:

$$\frac{1}{k_{V,i}} = \frac{1}{k_{AG}(\varphi_{A,i}, \vartheta_{A,i})} + \frac{1}{k_{St}(l_i)} + \frac{1}{k_{PG}(\varphi_{P,i}, \vartheta_{P,i})} \quad 4.48$$

In Gleichung 4.48 bezeichnen:

- $k_{V,i}$  skalare Steifigkeit der Bindung  $V_i$
- $k_{AG}(\varphi_{A,i}, \vartheta_{A,i})$  Steifigkeit des Gelenks als Funktion des am Antriebsgelenk 'i' anliegenden Schwenkwinkels  $\varphi_{A,i}$  und Kippwinkels  $\vartheta_{A,i}$
- $k_{St}(l_i)$  Steifigkeit des Stabs  $i$  (bei Pod-Kinematik: Funktion der Länge  $l_i$ )
- $k_{PG}(\varphi_{P,i}, \vartheta_{P,i})$  Steifigkeit des Gelenks als Funktion des am Plattformgelenk 'i' anliegenden Schwenkwinkels  $\varphi_{P,i}$  und Kippwinkels  $\vartheta_{P,i}$

Die Steifigkeiten der Antriebs- und Plattformgelenke werden für das Simulationsmodell nicht nur als Funktionen der Kippwinkel (vgl. Gleichung 4.37) angenommen, sondern als Funktionen der Kipp- und Schwenkwinkel, da die an dem INA Gelenk durchgeführte Messungen eine Abhängigkeit der Steifigkeit von beiden Gelenkwinkeln gezeigt haben (vgl. Kapitel 3.2).

Die Steifigkeit der Stäbe  $k_{st}(l_i)$  berechnet sich für die Hexaglide-Kinematik über Gleichung 3.7. Für die 6X Hexapod-Kinematik wird sie mit Gleichung 3.22 approximiert.

Mit den Richtungsvektoren der Stäbe im globalen Koordinatensystem  $\mathbf{d}_{i,X}$  (vgl. Anhang A.2.1) ergibt sich die Steifigkeitsmatrix der Bindung  $V_i$  damit zu:

$$\mathbf{K}_{V,i} = k_{V,i} \left( \frac{\mathbf{d}_{i,X}}{\|\mathbf{d}_{i,X}\|} \right) \left( \frac{\mathbf{d}_{i,X}}{\|\mathbf{d}_{i,X}\|} \right)^T \quad 4.49$$

Hiermit berechnet sich die potentielle Energie der Bindung der Antriebe an den Plattformgrundkörper für die kinematische Kette 'i' allgemein zu:

$$E_{\text{Pot},W,P,i}(\mathbf{q}_{W,i}, \mathbf{q}_{P,i}) = \frac{1}{2} (\mathbf{l}_{W,i} - \mathbf{l}_{P,V,i})^T \mathbf{K}_{V,i} (\mathbf{l}_{W,i} - \mathbf{l}_{P,V,i}) \quad 4.50$$

Die Masse und die Trägheiten des Plattformgrundkörpers ergeben sich aus dem verwendeten Material und der Geometrie. Die Bestimmung dieser Matrizen wird in Kapitel 3 dargestellt.

#### **Plattformgruppe: Bindung Plattformgrundkörper - Werkzeugspindel**

Für die Biglide- und die Bipod-Kinematik entfällt diese Bindung, da die Plattform als Punktmasse modelliert ist (vgl. Abbildung 4.20).

Im allgemeinen Fall besteht dieses Subsystem aus zwei starren Körpern, dem Plattformgrundkörper und der Werkzeugspindel, die über ein SDE, das in Abbildung 4.19 mit U bezeichnet wird, miteinander verbunden sind. Die durch die Verschiebungen und Verdrehungen des Plattformgrundkörpers erzeugten Längenänderungen  $\mathbf{l}_{P,U}$  des SDE U werden durch die Bezugsmatrix  $\mathbf{N}_{P,U}$  berücksichtigt. Da die Werkzeugspindel ebenfalls über sechs Freiheitsgrade verfügt, muss für diese, analog zu Gleichung 4.45, eine Bezugsmatrix  $\mathbf{N}_S$  definiert werden, um die Verdrehungen berücksichtigen zu können. Mit dieser lässt sich die Längenänderung des SDE U im globalen Koordinatensystem allgemein durch:

$$\mathbf{l}_S = \mathbf{N}_S \mathbf{q}_S \quad 4.51$$

ausdrücken. Durch  $\mathbf{q}_S$  werden, analog zu Gleichung 4.46, die Verschiebungen und Verdrehungen der Werkzeugspindel im globalen Koordinatensystem beschrieben.

Die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_U$  der Bindung U berechnet sich aus den Steifigkeiten des Plattformgrundkörpers und der Werkzeugspindel. Da diese abhängig von der meist komplexen Geometrie und den Werkstoffen dieser Körper ist, ist die Matrix  $\mathbf{K}_U$  eine 6x6 Matrix, die über geeignete Verfahren berechnet werden muss (vgl. Kapitel 3.3). Die potentielle Energie der Bindung U berechnet sich damit allgemeingültig zu:

$$E_{\text{Pot},P,U}(\mathbf{q}_P, \mathbf{q}_S) = \frac{1}{2} (\mathbf{l}_{P,V} - \mathbf{l}_S)^T \mathbf{K}_U (\mathbf{l}_{P,V} - \mathbf{l}_S) \quad 4.52$$

### 4.2.3 Modellsynthese

Um von der in Gleichung 4.35 beschriebenen potentiellen Energie des Biglides zu der globalen Steifigkeitsmatrix dieser Kinematik zu gelangen, muss die Energie nach den generalisierten Koordinaten  $x$  und  $y$  abgeleitet werden. Mit den in Gleichung 4.42 definierten normalisierten Richtungsvektoren  $\mathbf{n}_i$  kann die in den generalisierten Koordinaten beschriebene Verschiebung des Punkts  $\mathbf{q}_p$  in die anteiligen Richtungskomponenten der Antriebe aufgeteilt werden. Mit der in Gleichung 4.33 definierten lokalen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{A,i}$  lässt sich die Gleichung 4.35 damit zu:

$$E_{\text{Pot}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} n_{1,x} x \\ n_{1,y} y \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_{A,1} \begin{bmatrix} n_{1,x} x \\ n_{1,y} y \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} n_{2,x} x \\ n_{2,y} y \end{bmatrix}^T \mathbf{K}_{A,2} \begin{bmatrix} n_{2,x} x \\ n_{2,y} y \end{bmatrix} \quad 4.53$$

umformulieren. Die partielle Ableitung von Gleichung 4.53 nach den generalisierten Koordinaten  $x$  und  $y$  ergibt:

$$\frac{\partial E_{\text{Pot}}}{\partial x} = k_{A,1,x} n_{1,x}^2 x + k_{A,2,x} n_{2,x}^2 x \quad 4.54$$

$$\frac{\partial E_{\text{Pot}}}{\partial y} = k_{A,1,y} n_{1,y}^2 y + k_{A,2,y} n_{2,y}^2 y \quad 4.55$$

Damit kann die globale Steifigkeitsmatrix in generalisierten Koordinaten aufgestellt werden:

$$\mathbf{K}_{\text{Biglide}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{A,1,x} n_{1,x}^2 + k_{A,2,x} n_{2,x}^2 & 0 \\ 0 & k_{A,1,y} n_{1,y}^2 + k_{A,2,y} n_{2,y}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad 4.56$$

Eine analoge Auswertung für die mit Gleichung 4.44 dargestellte potentielle Energie des Bipods ergibt die globale Steifigkeitsmatrix für diese Kinematik:

$$\mathbf{K}_{\text{Bipod}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 n_{1,x}^2 + k_2 n_{2,x}^2 & k_1 n_{1,x} n_{1,y} + k_2 n_{2,x} n_{2,y} \\ k_1 n_{1,x} n_{1,y} + k_2 n_{2,x} n_{2,y} & k_1 n_{1,y}^2 + k_2 n_{2,y}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad 4.57$$

Für die allgemeine Kinematik erfolgt die Bestimmung der globalen Steifigkeitsmatrix nach dem gleichen Schema. Die allgemeingültige partielle Differentiation der potentiellen Energien der einzelnen Komponenten soll am Beispiel der Bindung U hergeleitet werden.

Eine partielle Differentiation der potentiellen Energie (vgl. Gleichung 4.52) dieser Bindung nach dem Verdrehungs- und Verschiebungsvektor der Werkzeugspindel  $\mathbf{q}_s$  ergibt:

$$\frac{\partial E_{\text{Pot,U}}}{\partial \mathbf{q}_s} = \mathbf{N}_{S,U}^T \mathbf{K}_U \mathbf{N}_{S,U} \mathbf{q}_s - \frac{1}{2} \mathbf{N}_{S,U}^T \mathbf{K}_U \mathbf{N}_{P,U} \mathbf{q}_p - \frac{1}{2} \mathbf{N}_{P,U}^T \mathbf{K}_U \mathbf{N}_{S,U} \mathbf{q}_p \quad 4.58$$

Eine partielle Differentiation nach dem entsprechenden Vektor der Plattform  $\mathbf{q}_p$ :

$$\frac{\partial E_{\text{Pot,U}}}{\partial \mathbf{q}_p} = \mathbf{N}_{P,U}^T \mathbf{K}_U \mathbf{N}_{P,U} \mathbf{q}_p - \frac{1}{2} \mathbf{N}_{S,U}^T \mathbf{K}_U \mathbf{N}_{P,U} \mathbf{q}_s - \frac{1}{2} \mathbf{N}_{P,U}^T \mathbf{K}_U \mathbf{N}_{S,U} \mathbf{q}_s \quad 4.59$$

Da  $\mathbf{K}_U$  symmetrisch und damit  $\mathbf{K}_U = \mathbf{K}_U^T$  ist, gilt:

$$\mathbf{N}_{S,U}^T \mathbf{K}_U \mathbf{N}_{P,U} = \mathbf{N}_{P,U}^T \mathbf{K}_U^T \mathbf{N}_{S,U} = \mathbf{N}_{P,U}^T \mathbf{K}_U \mathbf{N}_{S,U} \quad 4.60$$

Hiermit lassen sich Gleichung 4.58 und Gleichung 4.59 umformen und eine Submatrix der globalen Steifigkeitsmatrix für die Spindel und den Plattformgrundkörper darstellen:

$$\mathbf{K}_{S,P} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_S \\ \mathbf{q}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{S,U}^T \mathbf{K}_U \mathbf{N}_{S,U} & -\mathbf{N}_{S,U}^T \mathbf{K}_U \mathbf{N}_{P,U} \\ -\mathbf{N}_{P,U}^T \mathbf{K}_U \mathbf{N}_{S,U} & \mathbf{N}_{P,U}^T \mathbf{K}_U \mathbf{N}_{P,U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_S \\ \mathbf{q}_P \end{bmatrix} \quad 4.61$$

Durch eine Differentiation der generalisierten Koordinaten nach der Zeit erhält man die Geschwindigkeiten der Körper, woraus sich mit der Massenmatrix der jeweiligen Körper ein Ausdruck für die kinetische Energie der einzelnen Körper ergibt:

$$E_{\text{Kin},i}(\dot{\mathbf{q}}_i) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_i^T \mathbf{M}_i \dot{\mathbf{q}}_i \quad 4.62$$

Summiert man die kinetische und die potentielle Energie über alle  $g$  Körper dieses Systems, so erhält man, unter Vernachlässigung der Dämpfungsenergie, einen Vektor-Matrix-Ausdruck für die Gesamtenergie dieses Systems und damit die Bewegungsgleichung:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}^g + \mathbf{K} \mathbf{q}^g = \mathbf{f}^g \quad 4.63$$

hierbei sind  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{K}$  die globalen Massen- und Steifigkeitsmatrizen,  $\mathbf{q}^g$  der Verschiebungs- und Verdrehungsvektor aller  $g$  Körper und  $\mathbf{f}^g$  der generalisierte Lastvektor.

Da die Werkzeugspindel und der Plattformgrundkörper mit sechs Freiheitsgraden und die sechs Antriebe mit jeweils drei Freiheitsgraden modelliert sind, ergibt sich die globale Steifigkeitsmatrix als eine 30x30 Matrix entsprechend den 30 Freiheitsgraden des Systems. Wird die in den Gleichungen 4.58 bis 4.61 dargestellte partielle Differentiation für alle Bindungen des Simulationsmodells durchgeführt und definiert man wie folgt:

$$\mathbf{A} = \mathbf{N}_{S,U}^T \mathbf{K}_{S,P} \mathbf{N}_{S,U} \quad 4.64$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{N}_{S,U}^T \mathbf{K}_{S,P} \mathbf{N}_{P,U} \quad 4.65$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{N}_{P,U}^T \mathbf{K}_{S,P} \mathbf{N}_{P,U} + \sum_{i=1}^6 \mathbf{N}_{P,V,i}^T \mathbf{K}_{P,A,i} \mathbf{N}_{P,V,i} \quad 4.66$$

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{N}_{P,V,i}^T \mathbf{K}_{P,A,i} \mathbf{N}_{A,V,i} \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad 4.67$$

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{N}_{A,V,i}^T \mathbf{K}_{P,A,i} \mathbf{N}_{A,V,i} + \mathbf{N}_{A,W,i}^T \mathbf{K}_{W,i} \mathbf{N}_{A,W,i} \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad 4.68$$

so lässt sich die globale Steifigkeitsmatrix für den in Abbildung 4.19 gezeigten Modellaufbau zusammenfügen. Hierbei werden die Felder der Matrix besetzt, an denen sich eine Bindung zwischen den einzelnen Körpern befindet.

Hieraus lässt sich die globale Steifigkeitsmatrix mit 30 Freiheitsgraden zu:

$$\mathbf{K}_{30 \times 30} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} A & -B & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -B & C & -D_1 & -D_2 & \dots & -D'_6 \\ 0 & -D_1 & E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -D_2 & 0 & E_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -D_6 & 0 & 0 & \dots & E_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_S \\ q_p \\ q_{A,1} \\ q_{A,2} \\ \dots \\ q_{A,6} \end{bmatrix} \quad 4.69$$

herleiten.

Die für die Bewegungsgleichung (vgl. Gleichung 4.63) notwendige globale Massenmatrix ergibt sich aus den Massenmatrizen der beteiligten Körper in der den jeweiligen Freiheitsgraden entsprechenden Dimension. In der globalen Massenmatrix werden die auf der Diagonalen liegenden Felder mit den einzelnen Massenmatrizen der Körper besetzt. Die übrigen Felder werden auf Null gesetzt.

#### 4.2.4 Auswertungen

Aus den globalen Matrizen können die statischen und dynamischen Eigenschaften der beiden Parallelkinematiken berechnet werden. Im folgenden Abschnitt werden die hierfür notwendigen Auswertungen zusammen mit den an die einzelnen Eigenschaften zu stellenden Anforderungen dargestellt.

##### Statische Steifigkeit

Die Anforderungen an die Steifigkeit einer Werkzeugmaschine ergeben sich aus dem Anwendungsbereich der Maschine. Unabhängig davon sind an das Steifigkeitsverhalten einer solchen Maschine die folgenden vier Anforderungen zu stellen [Kir01]:

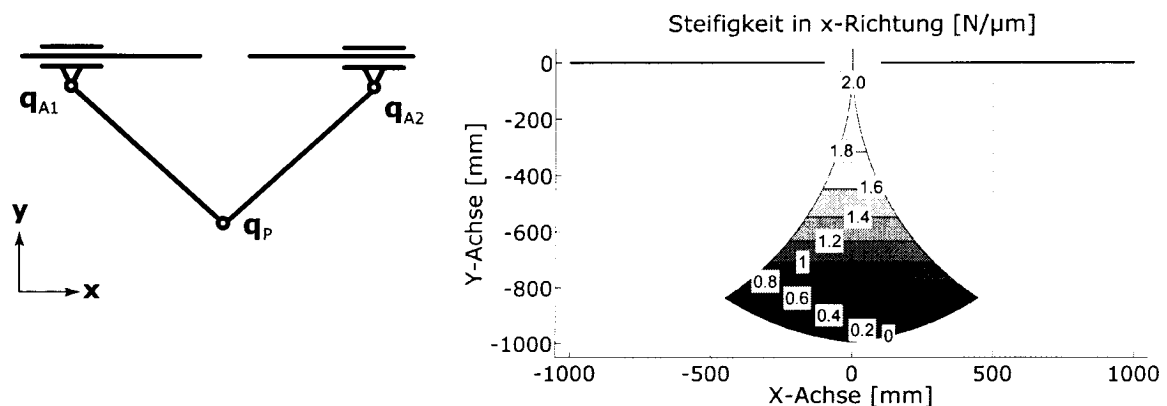
- Für eine hohe Steifigkeit der Struktur muss sich die Steifigkeit einer einzelnen kinematischen Kette möglichst stark im kartesischen Koordinatensystem auswirken (Forderung nach großer Verstärkung).
- Die Steifigkeit soll, wie die meisten Maschineneigenschaften, im Arbeitsraum gleichmäßig hoch sein (Forderung nach Homogenität).
- Die translatorische und die rotatorische Steifigkeit sollen jeweils an jedem Ort im Arbeitsraum in alle Richtungen gleich ausgeprägt sein (Forderung nach Isotropie).
- Die Steifigkeit soll so beschaffen sein, dass die Verformungen möglichst in Krafrichtung auftreten (Forderung nach Orthogonalität).

Um diese Forderungen erfüllen und Schwachstellen einer Kinematik gezielt verbessern zu können, ist eine genaue Kenntnis des Steifigkeitsverhaltens innerhalb des Arbeitsraums notwendig. Legt man ein lineares Kraft-Deformationsverhalten (vgl. Gleichung 4.25) zugrunde, so können die statischen Deformationen des Gesamtmechanismus und der einzelnen Komponenten berechnet werden.

$$\mathbf{q}^g = (\mathbf{K}^g)^{-1} \mathbf{f}^g \quad 4.70$$

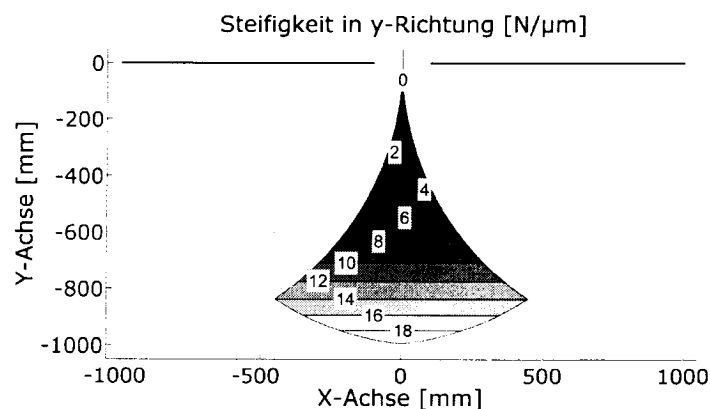
Aus einem gegebenen allgemeinen Lastvektor  $\mathbf{f}^g$ , der für alle  $g$  Körper die zugehörigen Lasten enthält, und der globalen Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^g$  ergeben sich so die zugehörigen Deformationen der einzelnen Komponenten und des Gesamtmechanismus  $\mathbf{q}^g$ .

Für die Biglide- und die Bipod-Kinematik besitzt der Lastvektor zwei Elemente, die den Koordinatenrichtungen entsprechen. Eine Auswertung der in Gleichung 4.56 dargestellten Steifigkeitsmatrix der Biglide-Kinematik ergibt die in Abbildung 4.21 gezeigte Verteilung der Steifigkeit in  $x$ -Richtung. Die Lage und Länge der Führungsbahnen ist durch die schwarzen Linien am oberen Bildrand schematisch dargestellt; die grauschattierte Fläche beschreibt den Arbeitsraum der Kinematik. Für die Auswertung wurden die Steifigkeiten  $k_{A,1,x}$  und  $k_{A,2,x}$  mit  $1 \text{ N}/\mu\text{m}$  angenommen. Die maximale Steifigkeit wird für diese Kinematik bei einer  $y$ -Koordinate von Null erreicht.



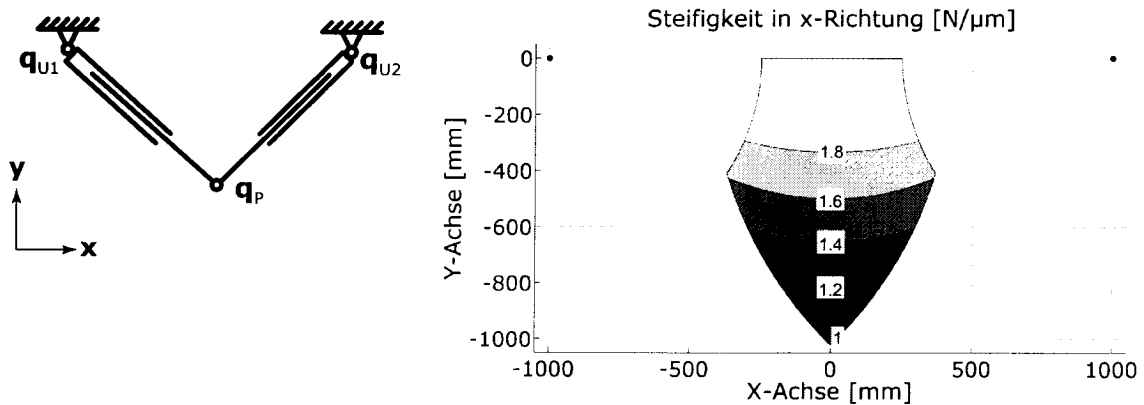
**Abbildung 4.21: Verteilung der statischen Steifigkeit der Biglide-Kinematik in  $x$ -Richtung**

Unter der Annahme, dass die Steifigkeit der Biglide-Kinematik quer zur Antriebsrichtung um eine Größenordnung über der in Antriebsrichtung liegt (vgl. Kapitel 4.2.2), kann die in Abbildung 4.22 gezeigte Verteilung der Steifigkeit in  $y$ -Richtung berechnet werden. Diese hat bei einer minimalen  $y$ -Koordinate ein Maximum.



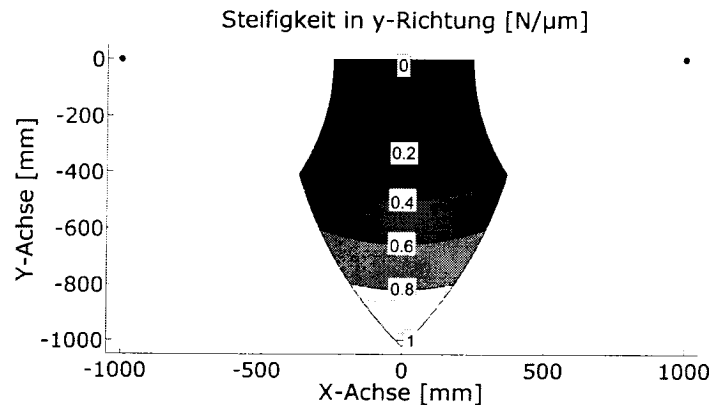
**Abbildung 4.22: Verteilung der statischen Steifigkeit der Biglide-Kinematik in  $y$ -Richtung**

Setzt man die axialen Steifigkeitswerte der Bipod-Kinematik gleich denen der Biglide-Kinematik ( $k_1 = k_2 = 1 \text{ N}/\mu\text{m}$ ), so lässt sich durch die Auswertung von Gleichung 4.57 die Verteilung der Steifigkeit in x- und y-Richtung bestimmen. Die Verteilung der Steifigkeit in x-Richtung wird in Abbildung 4.23 gezeigt. Die Position der Antriebsgelenkpunkte ist durch zwei schwarze Punkte dargestellt. Die Verteilung hat, wie die der Biglide-Kinematik, ein Maximum von  $2 \text{ N}/\mu\text{m}$  bei einer y-Koordinate von Null. Im Gegensatz zur Biglide-Kinematik, deren Steifigkeit in x-Richtung ein Minimum von Null erreicht, sinkt die der Bipod-Kinematik im gesamten Arbeitsraum nicht unter  $1 \text{ N}/\mu\text{m}$ .



**Abbildung 4.23: Verteilung der statischen Steifigkeit der Bipod-Kinematik in x-Richtung**

Die Verteilung der Steifigkeit in y-Richtung ist in Abbildung 4.24 dargestellt. Diese ist der Verteilung der Biglide-Kinematik ähnlich, hat aber mit  $1 \text{ N}/\mu\text{m}$  einen deutlich geringeren Maximalwert.



**Abbildung 4.24: Verteilung der statischen Steifigkeit der Bipod-Kinematik in y-Richtung**

Im Gegensatz zu Kinematiken mit sechs Freiheitsgraden sind diese Ergebnisse für Kinematiken mit nur zwei Freiheitsgraden einfach nachzuvollziehen und anschaulich.

Für die Hexaglide- oder die 6X Hexapod-Kinematik umfasst der Lastvektor für das vorgestellte Strukturmodell 30 Kräfte und Momente. Die Antriebe werden im allgemeinen Fall mit je drei translatorisch wirkenden Kräften belastet.

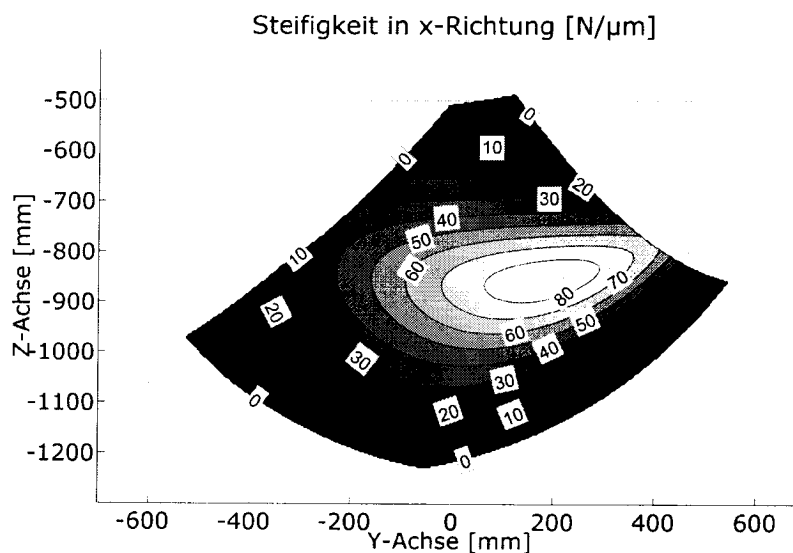
Die Angriffspunkte dieser Kräfte können, da es sich um Punktmassen handelt, in den Schwerpunkt der Antriebe verschoben werden.

Bei der Plattform und der Werkzeugspindel, auf die neben Kräften auch Momente wirken, muss der Abstand des Kraftangriffspunkts zum Schwerpunkt berücksichtigt werden. Hierzu werden, analog zu Gleichung 4.45, zwei Bezugsmatrizen  $\mathbf{N}_{S,F}$  und  $\mathbf{N}_{P,F}$  aufgestellt. Der Lastvektor ergibt sich für diese Körper zu:

$$\mathbf{f}_{(1...6)}^g = \mathbf{N}_{S,F} \mathbf{f}_S \text{ für die Werkzeugspindel} \quad 4.71$$

$$\mathbf{f}_{(7...12)}^g = \mathbf{N}_{P,F} \mathbf{f}_P \text{ für die Plattform} \quad 4.72$$

Die die Bearbeitungsgenauigkeit beeinflussende Verschiebung und Verdrehung des Werkzeugs ergibt sich bei den in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Modellen aus den ersten sechs Komponenten des mit Gleichung 4.70 berechneten Deformationsvektors  $\mathbf{q}^g$ . In Abbildung 4.25 wird am Beispiel der Hexaglide-Kinematik die Verteilung der Steifigkeit in x-Richtung in der Y-Z Ebene (vgl. Kapitel 2) bei einer Werkzeugorientierung von  $a = b = c = 0$  Grad gezeigt. Für die Berechnung wurde der Einfluss der Werkzeugspindel vernachlässigt und eine Werkzeuglänge von Null angenommen. Die dargestellte Verteilung stellt damit die Steifigkeit für eine rein translatorische Belastung der Plattform dar. Wird eine Werkzeuglänge ungleich Null angenommen, so ergibt sich die Steifigkeit aus einer Überlagerung von rotatorischer und translatorischer Steifigkeit (vgl. Abbildung 5.5).



**Abbildung 4.25: Verteilung der statischen Steifigkeit in der Y-Z Ebene in x-Richtung am Beispiel der Hexaglide-Kinematik (Werkzeugorientierung:  $a = b = c = 0$  Grad)**

Ausgehend von den zu erwartenden Prozess- und Beschleunigungskräften können die auftretenden Deformationen und damit die Grenzen der Bearbeitungsgenauigkeit mit diesem Modell berechnet werden. Die für die Dimensionierung der Komponenten wichtigen Deformationen der einzelnen Körper ergeben sich analog hierzu aus den entsprechenden Komponenten des Deformationsvektors.



### Dynamische Steifigkeit

Da Genauigkeit und Oberflächenqualität eines durch Fräsbearbeitung hergestellten Werkstücks unter anderem durch die Eigenschwingungsformen der Maschine beeinflusst werden, kommen diesen bei der Auslegung einer Werkzeugmaschine eine hohe Bedeutung zu. Eine genaue Kenntnis der Eigenfrequenzen und der dazugehörigen Schwingungsformen ermöglicht die Bewertung einer Kinematik hinsichtlich ihrer Eignung für eine gegebene Bearbeitungsaufgabe.

Unabhängig von der Eignung für eine spezielle Aufgabe sind an die dynamische Steifigkeit die folgenden Anforderungen zu stellen:

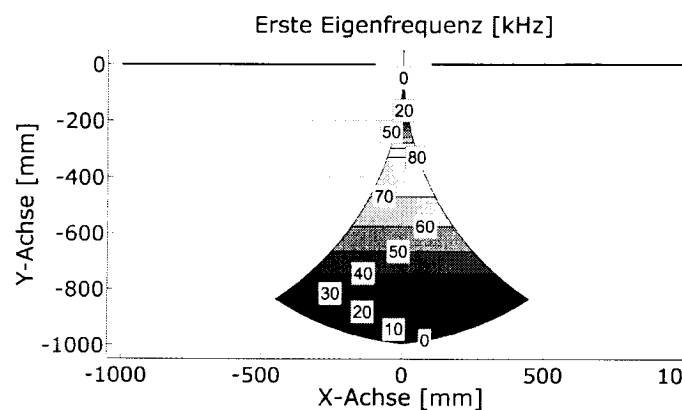
- die erste Eigenfrequenz soll einen hohen Wert haben (hohe Frequenz),
- die Eigenfrequenzen sollen eine gleichmäßige Verteilung im Arbeitsraum aufweisen (große Homogenität).

Die Lösung der Eigenwertaufgabe  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$  (vgl. Gleichung 4.63) führt zu den Eigenfrequenzen des Systems, die sich aus:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \omega_0 \quad 4.73$$

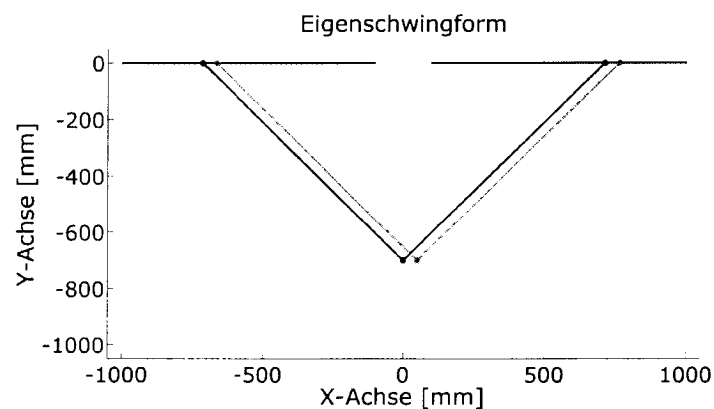
ergeben, wobei  $\omega_0$  die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$  sind. Aus den zu den Eigenfrequenzen gehörigen Eigenvektoren lassen sich die zu erwartenden Schwingungsformen berechnen.

Nimmt man die Steifigkeit der Antriebsbindung in x-Richtung zu  $1 \text{ N}/\mu\text{m}$ , in y-Richtung zu  $10 \text{ N}/\mu\text{m}$ , die Antriebsmassen zu  $m_{A1} = m_{A2} = 10 \text{ kg}$  und die Plattformmasse zu  $m_p = 50 \text{ kg}$  an, so ergibt die Auswertung der Eigenwertaufgabe die in Abbildung 4.26 gezeigte Verteilung der ersten Eigenfrequenz der Biglide-Kinematik. Die Verteilung hat eine maximale Eigenfrequenz von  $80 \text{ Hz}$  bei einer y-Koordinate von  $y = -0.320 \text{ mm}$ .



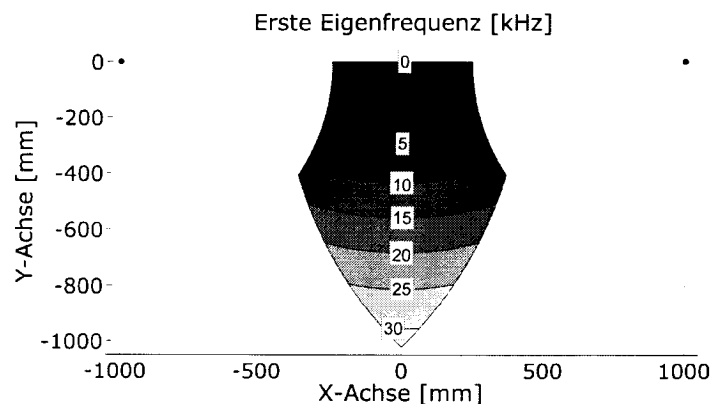
**Abbildung 4.26: Verteilung der ersten Eigenfrequenz der Biglide-Kinematik**

Die Analyse der zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren ergibt an der Position  $x = 0$  und  $y = -707 \text{ mm}$  die in Abbildung 4.27 gezeigte Eigenschwingform. Der Ausgangszustand ist mit schwarzen Linien, der angeregte Zustand mit grauen Linien markiert. Die Kinematik schwingt an der gewählten Position mit  $30 \text{ Hz}$  in x-Richtung. Die Verteilung der ersten Eigenfrequenz der Bipod-Kinematik ist in Abbildung 4.28 dargestellt.



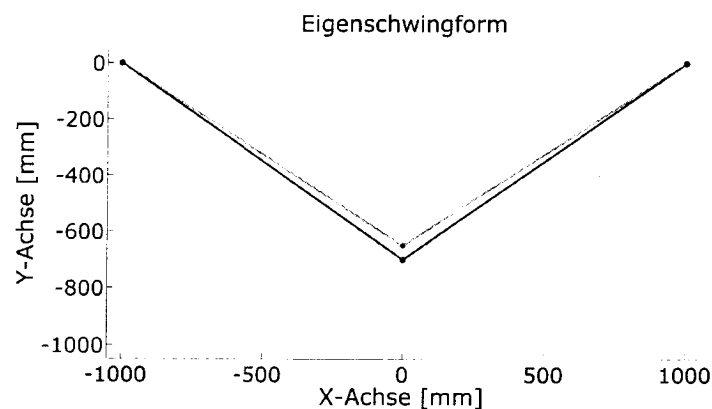
**Abbildung 4.27: Erste Eigenschwingform der Biglide-Kinematik**

Sie berechnet sich unter der Annahme einer Antriebssteifigkeit von  $1 \text{ N}/\mu\text{m}$  für beide Antriebe und einer Plattformmasse von ebenfalls  $50 \text{ kg}$ . Der Maximalwert ist mit  $30 \text{ Hz}$  weniger als halb so groß wie der der Biglide-Kinematik.



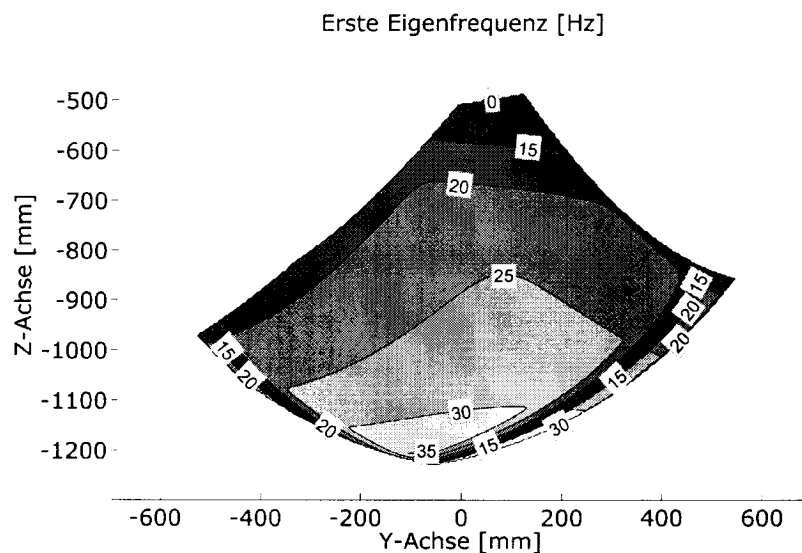
**Abbildung 4.28: Verteilung der ersten Eigenfrequenz der Bipod-Kinematik**

Die für die Position von  $x = 0$  und  $y = -707 \text{ mm}$  durchgeführte Analyse der Eigenschwingform zeigt eine Schwingung in  $y$ -Richtung, deren angeregter Zustand in Abbildung 4.29 durch graue Linien markiert ist. An dieser Position weist die Kinematik eine Eigenfrequenz von  $10 \text{ Hz}$  auf.



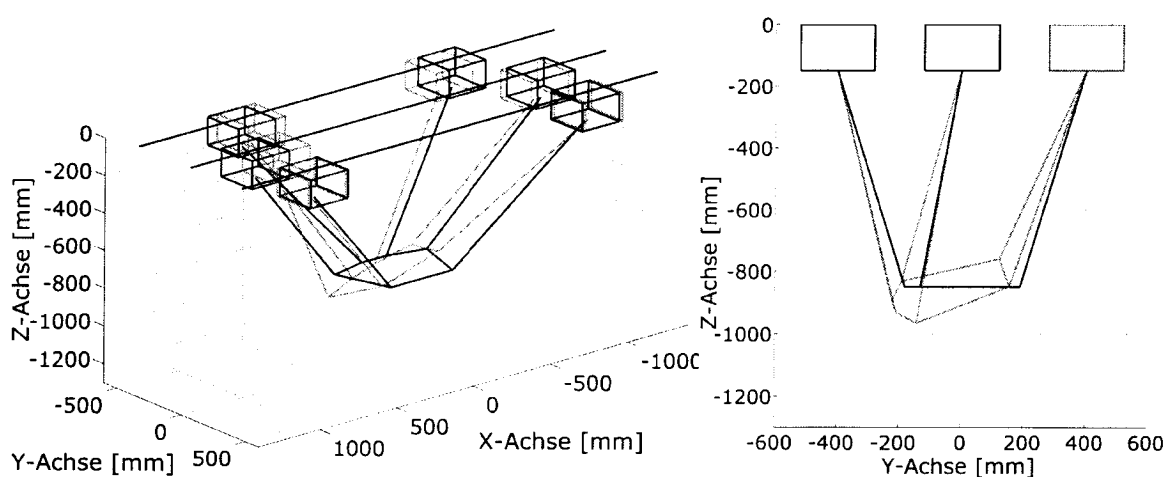
**Abbildung 4.29: Erste Eigenschwingform der Bipod-Kinematik**

Die Lösung der Eigenwertaufgabe für die Parallelkinematiken mit sechs Freiheitsgraden wird am Beispiel der ersten Eigenfrequenz der Hexaglide-Kinematik in Abbildung 4.30 dargestellt. Die Verteilung wurde in der Y-Z Ebene bei einer Orientierung des Werkzeugs von  $a = b = c = 0$  Grad für eine Werkzeuglänge von Null berechnet. Die an den unteren Rändern (negative z-Achse) des Arbeitsraums unregelmäßige Verteilung ist auf die in diesem Bereich schlechte kinematische Übersetzung zurückzuführen, die zu sich ändernden Schwingungsformen führt.



**Abbildung 4.30: Verteilung der ersten Eigenfrequenz am Beispiel der Hexaglide-Kinematik (Werkzeugorientierung:  $a = b = c = 0$  Grad)**

Für die Position  $x = y = 0$  und  $z = -1000$  mm und die gleiche Werkzeugorientierung ist in Abbildung 4.31 die zur ersten Eigenfrequenz von 27.9 Hz gehörende Schwingungsform, die sich aus den Eigenvektoren der Eigenwertaufgabe an dieser Stelle berechnet, gezeigt.



**Abbildung 4.31: Schwingungsform der ersten Eigenfrequenz an der Position  $x = y = 0$  und  $z = -1000$  mm bei einer Werkzeugorientierung von  $a = b = c = 0$  Grad**

Auf der linken Seite ist die perspektivische Ansicht und auf der rechten Seite eine in die Y-Z Ebene projizierte Ansicht gezeigt. Die schwarzen Linien markieren den Ausgangszustand, die grauen Linien den angeregten Zustand. Bei den angegebenen Parametern zeigt die Kinematik eine Schwingung um die x-Achse mit einem zusätzlichen Abkippen um die y-Achse.

### 4.3 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverhalten

Neben den verschiedenen Arbeitsräumen und den statischen und dynamischen Eigenschaften gehört das Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverhalten einer parallelkinematischen Werkzeugmaschine zu den wesentlichen Eigenschaften.

Das Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverhalten einer Parallelkinematik wird durch drei Faktoren bestimmt. Der erste Faktor ist das Übertragungsverhalten der Kinematik. Dies wird durch den Aufbau der Kinematik bestimmt. Die maximale Verfahrgeschwindigkeit der Antriebe ist der zweite Faktor. Diese ist abhängig von der Art des Antriebs (Kugelgewindetrieb oder Lineardirektantrieb) und von der Leistungsfähigkeit des Messsystems. Der dritte Faktor ist die maximale Kraft, die von den Antrieben aufgebracht werden kann.

#### 4.3.1 Übertragungsverhalten

Das Übertragungsverhalten einer Kinematik wird durch die Jakobimatrix beschrieben. Diese bildet die Eingangsgrößen der Antriebe  $\mathbf{q}$  (Geschwindigkeiten, Kräfte) auf die Ausgangsgrößen  $\mathbf{x}$  am Werkzeugbezugspunkt ab:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{J} d\mathbf{q} \quad 4.74$$

Sind der minimale und der maximale Singularwert der Jakobimatrix identisch, ist die Verstärkung der Eingangsgrößen isotrop, d. h. die Eingangsgrößen werden ohne Verzerrung auf die Ausgangsgrößen abgebildet. Je größer der Unterschied zwischen dem minimalen und dem maximalen Singularwert wird, desto größer wird die Verzerrung der Ausgangsgrößen durch die Kinematik.

Bei der Auslegung einer Kinematik können zwei unterschiedliche Ziele verfolgt werden:

- zum einen eine möglichst geringe Verzerrung der Ausgangsgrößen (große Übertragungsgüte) und
- zum anderen eine möglichst gleichverteilte Verzerrung im Arbeitsraum (große Homogenität).

#### Wert der Übertragungsgüte

Nach Wieland [Wie00] liegt das Ziel einer Parallelkinematikauslegung in einer möglichst großen Übertragungsgüte derselben. Bei der Berechnung der Übertragungsgüte der Hexaglide- oder der 6X Hexapod-Kinematik muss beachtet werden, dass deren Jakobimatrix über inhomogene Einheiten verfügt, da die Antriebe sich ausschließlich translatorisch das Werkzeug sich aber translatorisch und rotatorisch bewegt. Da die zu einer inhomogenen Jakobimatrix gehörenden Normen ebenfalls inhomogen sind, sind diese daher nicht aussagekräftig. Für die Berechnung des Übertragungsverhaltens muss die Jakobimatrix daher homogenisiert werden. Dies kann auf zwei verschiedene Arten erfolgen.

Von Angeles [Ang92] wird die Einführung einer mit Einheiten behafteten Wichtungsmatrix  $\mathbf{W}$  vorgeschlagen. Damit ergibt sich die Übertragungsgüte  $U$  der Jakobimatrix über die Spektralnorm zu:

$$U = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{W}\mathbf{J})}\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{J}^{-1}\mathbf{W}^{-1})}} \quad 4.75$$

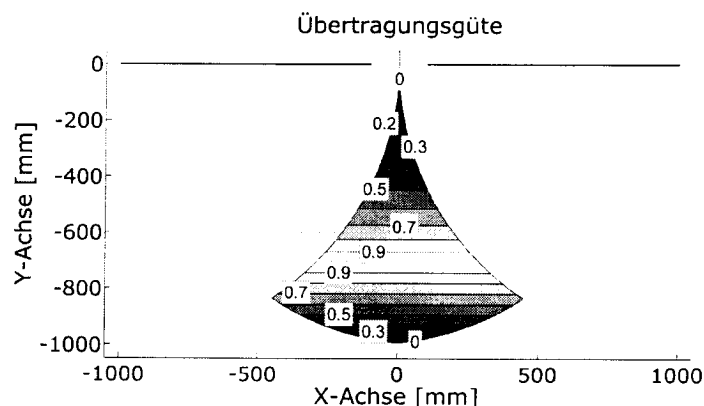
Kirchner [Kir01] definiert zur Berechnung der Übertragungsgüte eine normierte kinematische Jakobimatrix  $\mathbf{J}_{Cg}$ , deren rotative Anteile auf den Abstand des Gelenkpunkts vom Drehpunkt der Plattform normiert sind. Die Übertragungsgüte ergibt sich dann direkt aus:

$$U = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{J}_{Cg})}\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{J}_{Cg}^{-1})}} \quad 4.76$$

Der Wert der so bestimmten Übertragungsgüte wird wesentlich durch die Wahl der Normierungs- beziehungsweise Wichtungsfaktoren bestimmt, mit denen die Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten zueinander gewichtet werden. Durch eine entsprechende Wahl dieser Faktoren kann daher auch ein gewünscht anisotropes Übertragungsverhalten (zum Beispiel bei der Bearbeitungsart Bohr-Fräsen, bei dem eine hohe Kraftverstärkung in eine Richtung und eine hohe Geschwindigkeitsverstärkung in den anderen Richtungen benötigt wird) zu einer hohen Übertragungsgüte führen.

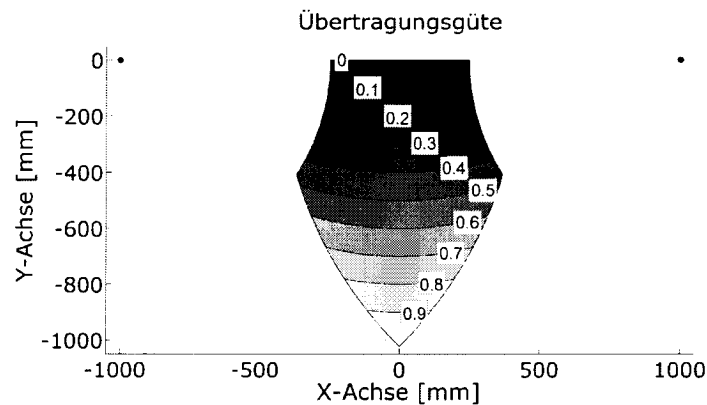
Im Folgenden erfolgt die Homogenisierung der Jakobimatrix mit einer Wichtungsmatrix, da diese gegenüber einer normierten kinematischen Jakobimatrix wesentlich anschaulicher ist.

Bei der Biglide- und der Bipod-Kinematik entfällt die Wichtungsmatrix, da die zugehörige Jakobimatrix ausschließlich Translationsbewegungen beschreibt und ihre Einheiten damit homogen sind. Die Verteilung der Übertragungsgüte der inversen Jakobimatrix im Arbeitsraum der Biglide-Kinematik ist in Abbildung 4.32 dargestellt. Bilden die Stäbe der Kinematik einen rechten Winkel, was bei der dargestellten Konfiguration ungefähr einer  $y$ -Koordinate von  $-707$  mm entspricht, erreicht die Übertragungsgüte einen Wert von 1, so dass eine isotrope Eigenschaftverteilung und damit eine maximale Übertragungsgüte erreicht wird.



**Abbildung 4.32: Verteilung der Übertragungsgüte der Biglide-Kinematik**

Die Verteilung der Übertragungsgüte der Bipod-Kinematik, die in Abbildung 4.33 dargestellt ist, hat eine isotrope Eigenschaftsverteilung für die minimale y-Koordinate. Diese befindet sich damit am Rand des Arbeitsraums. Im Gegensatz hierzu wird die maximale Übertragungsgüte der Biglide-Kinematik in der Mitte des Arbeitsraums erreicht.



**Abbildung 4.33: Verteilung der Übertragungsgüte der Bipod-Kinematik**

Bei der Berechnung der Übertragungsgüte der Hexaglide- und 6X Hexapod-Kinematik wird die Wichtungsmatrix so gewählt, dass die translatorischen Bewegungen untereinander gleich gewichtet werden. Die rotatorischen Bewegungen werden untereinander ebenfalls gleich und gegenüber den translatorischen mit einem Faktor  $w$  gewichtet. Hierdurch ergibt sich die Wichtungsmatrix zu:

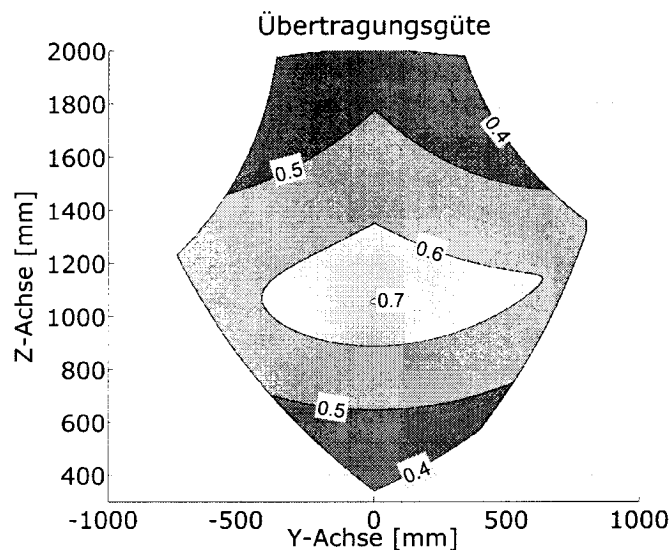
$$\mathbf{W} = \text{diag}[1, 1, 1, w, w, w] \quad 4.77$$

Wählt man für die 6X Hexapod-Kinematik die Wichtungsfaktoren  $w$  so, dass eine Rotationsbewegung von 60 Grad gleich gewichtet wird wie eine Translationsbewegung von 0.63 m [Wei01]:

$$w = \frac{0.63}{\frac{\pi}{3}} \left[ \frac{\text{m}}{\text{rad}} \right] \quad 4.78$$

so ergibt sich die in Abbildung 4.34 dargestellte Verteilung der Übertragungsgüte in der Y-Z-Schnittebene. Der Maximalwert dieser Verteilung beträgt 0.71 und wird in der Mitte des Arbeitsraums erreicht.

Der Einfluss der Rotationsfreiheitsgrade führt dazu, dass die Verteilung der Konditionszahl der 6X Kinematik die maximale Übertragungsgüte in der Mitte des Arbeitsraums und nicht wie der Bipod am Rand des Arbeitsraums aufweist.



**Abbildung 4.34: Verteilung der Übertragungsgüte am Beispiel der 6X Hexapod-Kinematik (Werkzeugorientierung  $a = b = c = 0$  Grad)**

#### Homogenität der Übertragungsgüte

Die Bewertung der Homogenität der Verteilung im Arbeitsraum ist abhängig von der konkreten Aufgabenstellung der Werkzeugmaschine. So kann erwünscht sein, am Rande des Arbeitsraums eine hohe Geschwindigkeitsverstärkung zu erreichen (kurze Werkzeugwechselzeiten), während im Zentrum des Arbeitsraums eine hohe Kraftverstärkung benötigt wird. Für die meisten Werkzeugmaschinen wird allerdings eine große Homogenität innerhalb des Arbeitsraums angestrebt. Die in Abbildung 4.34 gezeigte Verteilung der Übertragungsgüte der 6X Hexapod-Kinematik hat im Gegensatz zur Biglide- und Bipod-Kinematik eine deutlich größere Homogenität.

#### 4.3.2 Maximale Geschwindigkeit des Werkzeugs

Die maximale Bahngeschwindigkeit des Werkzeugs hängt von zwei Faktoren ab: dem kinematischen Aufbau und der maximalen Verfahrgeschwindigkeit der Antriebe. Der Einfluss der Kinematik wird durch die inverse kinematische Jakobimatrix  $\mathbf{J}_C^{-1}$  beschrieben (vgl. Anhang A.3). Der Geschwindigkeitsvektor der Antriebe lässt sich damit durch die einfache Ableitung von Gleichung 4.74 nach der Zeit zu:

$$d\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_C^{-1} d\dot{\mathbf{x}} \quad 4.79$$

bestimmen. Die maximale Geschwindigkeit des Werkzeugs kann mit dem Auslegungswerkzeug sowohl an einem Punkt für die drei translatorischen Raumrichtungen berechnet werden als auch in den in Kapitel 4.1.1 eingeführten Schnittebenen.

#### 4.3.3 Maximale Beschleunigung des Werkzeugs

Die maximale Beschleunigung des Werkzeugs ist, wie die Geschwindigkeit, von der inversen kinematischen Jakobimatrix abhängig und kann für einen Punkt im Arbeitsraum oder in den oben genannten Schnittebenen berechnet werden. Die Darstellung in den Schnittebenen erlaubt eine Isotropiebetrachtung und Bewer-

tion über den Arbeitsraum; die Darstellung an einem Punkt ermöglicht einen direkten Vergleich der Beschleunigungsfähigkeit in den drei translatorischen Raumrichtungen.

Die Bewegungsgleichungen, die die Gelenkmomente in Abhängigkeit der Bewegung der Maschine beschreiben, können in der folgenden allgemeinen Form beschrieben werden [Cra86]:

$$\tau_a = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}) \quad 4.80$$

mit:

- $\tau_a$  Vektor der Gelenkmomente
- $\mathbf{q}$  Antriebspositionen im Antriebskoordinatensystem
- $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  Massenmatrix im Antriebskoordinatensystem
- $\mathbf{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  Matrix der Zentrifugal- und Coriolisterme
- $\mathbf{g}(\mathbf{q})$  Vektor der Gewichtskräfte
- $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}})$  Vektor der Reibungskräfte

Wenn neben den kinematischen Größen im kartesischen Raum auch die Antriebskoordinaten bekannt sind, ist es möglich, die Bewegungsgleichungen in beiden Koordinatenräumen aufzustellen [Hon99]:

$$\tau_a = \mathbf{M}_S(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_q(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{J}_C^T \cdot [\mathbf{M}_P(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{V}_P(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}_P(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_X(\dot{\mathbf{x}})] \quad 4.81$$

hierbei bezeichnen zusätzlich:

- $\mathbf{M}_A(\mathbf{q})$  Massenmatrix der Antriebe im Antriebskoordinatensystem
- $\mathbf{f}_q(\dot{\mathbf{q}})$  Vektor der Reibungskräfte der Antriebe
- $\mathbf{J}_C^T$  Transponierte kinematische Jakobimatrix
- $\mathbf{M}_P(\mathbf{x})$  Massenmatrix der Plattform in kartesischen Koordinaten
- $\mathbf{V}_P(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  Zentrifugal- und Coriolisterme der Plattform in kartesischen Koordinaten
- $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  Vektor der Gewichtskräfte in kartesischen Koordinaten
- $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{x}})$  Vektor der Reibungskräfte in kartesischen Koordinaten

Durch diese Trennung können die zugehörigen Massenmatrizen in den beiden Koordinatenräumen aufgestellt werden. Die Massenmatrix der Antriebe im Antriebskoordinatensystem ist die Diagonalmatrix der einzelnen Antriebsmassen (vgl. Gleichung 3.10). Da für die Berechnung des Beschleunigungsvermögens ein quasistatisches Modell ausreichend ist, können die Zentrifugal- und Corioliskräfte vernachlässigt werden und die Gleichung 4.81 zu:

$$\tau_a = \mathbf{M}_A(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_q(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{J}_C^T (\mathbf{M}_P(\mathbf{x})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}_P(\mathbf{x})) \quad 4.82$$

reduziert werden. Der Vektor der Reibungskräfte in kartesischen Koordinaten wird hierbei, unter der Annahme reibungsfreier Gelenke, ebenfalls vernachlässigt.



Die zweifache Ableitung von Gleichung 4.74 nach der Zeit ergibt:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_C^{-1} \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{J}}_C^{-1} \dot{\mathbf{x}} \quad 4.83$$

Wird bei der Berechnung des Beschleunigungsvermögens des Werkzeugs von einer Beschleunigung aus dem Stillstand ausgegangen wird, gilt:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad 4.84$$

Durch Einsetzen von Gleichung 4.83 in Gleichung 4.82 erhält man damit:

$$\tau_a - \mathbf{f}_q(\dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{M}_A(\mathbf{x}) \mathbf{J}_C^{-1} + \mathbf{J}_C^T \mathbf{M}_P(\mathbf{x})) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{J}_C^T \mathbf{g}_P(\mathbf{x}) \quad 4.85$$

Eine Zusammenfassung der Massenmatrizen zu:

$$\mathbf{M}_q(\mathbf{x}) = \mathbf{M}_A(\mathbf{x}) \mathbf{J}_C^{-1} + \mathbf{J}_C^T \mathbf{M}_P(\mathbf{x}) \quad 4.86$$

erlaubt die numerische Inversion der Gleichung, die damit einen Ausdruck für die Beschleunigungsfähigkeit des Werkzeugs im kartesischen Koordinatensystem ergibt:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}_q^{-1}(\mathbf{x}) (\tau_a - \mathbf{f}_q(\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{J}_C^T \mathbf{g}_P(\mathbf{x})) = \mathbf{M}_q^{-1}(\mathbf{x}) \tau_{\text{eff}} \quad 4.87$$

Die an den Antrieben effektiv zur Verfügung stehenden Kräfte  $\tau_{\text{eff}}$  ergeben sich aus den maximalen Kräften  $\tau_{q,\text{max}}$  abzüglich einer geforderten Kraftreserve  $\tau_{q,\text{min}}$ , der Reibungs-  $\mathbf{f}_q$  und der Gravitationskräfte  $\tau_g$ :

$$\tau_{\text{eff}} = \tau_{q,\text{max}} - \tau_{q,\text{min}} - \mathbf{f}_q(\dot{\mathbf{q}}) - \tau_g(\mathbf{x}) \quad 4.88$$

Die Kraftreserve  $\tau_{q,\text{min}}$  ist abhängig von den zu überwindenden Haftreibungskräften und einer Sicherheitsreserve. Die Reibungskräfte  $\mathbf{f}_q$  setzen sich aus einem coulombschen und aus einem viskoelastischen Teil zusammen. Die coulombsche Reibungskraft ist der Bewegungsrichtung entgegengesetzt und berechnet sich als Produkt der Diagonalmatrix  $\mathbf{C}$ , die die entsprechenden Reibungskoeffizienten enthält, mit den Vorzeichen des Geschwindigkeitsvektors des Antriebs  $\dot{\mathbf{q}}_A$ . Die viskoelastische Reibungskraft ergibt sich aus der Multiplikation der Diagonalmatrix  $\mathbf{V}$ , die die entsprechenden Koeffizienten enthält, mit dem Geschwindigkeitsvektor  $\dot{\mathbf{q}}_A$ . Die Reibungskräfte lassen sich damit durch:

$$\mathbf{f}_q(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C} \text{sign}(\dot{\mathbf{q}}_A) + \mathbf{V} \dot{\mathbf{q}}_A \quad 4.89$$

berechnen. Die auf die Antriebe wirkenden Gravitationskräfte sind abhängig von der Summe der einzelnen Massen, der Gravitationskonstante  $g$ , dem Richtungsvektor der Schwerkraft  $\mathbf{u}$  und dem Übertragungsverhalten der Kinematik, das in der transponierten kinematischen Jakobimatrix berücksichtigt wird:

$$\tau_g = \mathbf{J}_C^T \mathbf{g}_P(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_C^T \left( \left( \sum_i m_i \right) \cdot g \cdot \mathbf{u} \right) \quad 4.90$$

Ausgehend von den Kinematiken mit zwei Freiheitsgraden (Biglide- und Bipod) soll die Berechnung der maximalen Beschleunigung im Folgenden dargestellt werden.

Die Massenmatrix der Antriebe  $\mathbf{M}_A$  und die Massenmatrix der Plattform  $\mathbf{M}_p$  der Biglide-Kinematik ergeben sich zu:

$$\mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} m_{A1} & 0 \\ 0 & m_{A2} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_p \end{bmatrix} \quad 4.91$$

Die Beschleunigungsfähigkeit dieser Kinematik kann über die Gleichung:

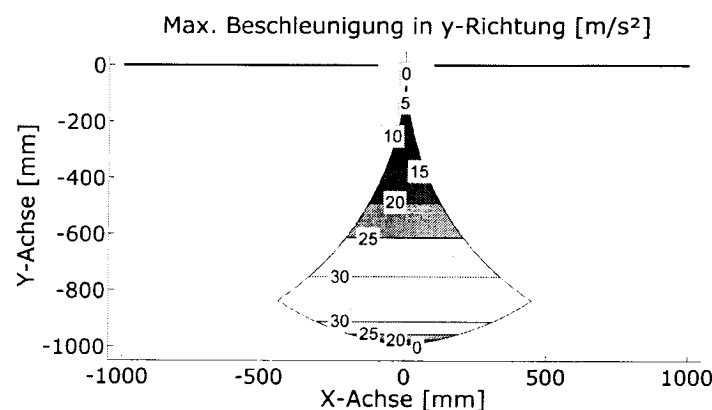
$$\ddot{\mathbf{x}} = (\mathbf{M}_S \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}^T \mathbf{M}_p)^{-1} \tau_{\text{eff}} \quad 4.92$$

für die beiden Raumrichtungen berechnet werden. Über die Gleichung:

$$\tau_{\text{eff}} = (\mathbf{M}_S \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}^T \mathbf{M}_p) \ddot{\mathbf{x}} \quad 4.93$$

kann der das Beschleunigungsvermögen begrenzende Antrieb für eine gewünschte Beschleunigungsrichtung identifiziert und der sich aus dem Übertragungsverhalten ergebende Skalierungsfaktor bestimmt werden. Aus dem Produkt der effektiv an dem identifizierten Antrieb zur Verfügung stehenden Kraft und dem Skalierungsfaktor ergibt sich das maximale Beschleunigungsvermögen des Werkzeugs in der gewünschten Raumrichtung.

Die Jakobimatrix berechnet sich für die Biglide-Kinematik nach Gleichung A.24. Unter der Annahme, dass die Antriebe der Kinematik über eine effektive Kraft von 1000 N verfügen, kann die Verteilung der Beschleunigungsfähigkeit des Plattformpunkts berechnet werden. Die in Abbildung 4.35 dargestellte Verteilung der maximalen Beschleunigung der Biglide-Kinematik in y-Richtung hat ein Maximum von  $31 \text{ m/s}^2$  im unteren Bereich des Arbeitsraums und ist bei einer x-Koordinate von  $x = 0 \text{ mm}$  symmetrisch zur y-Achse.

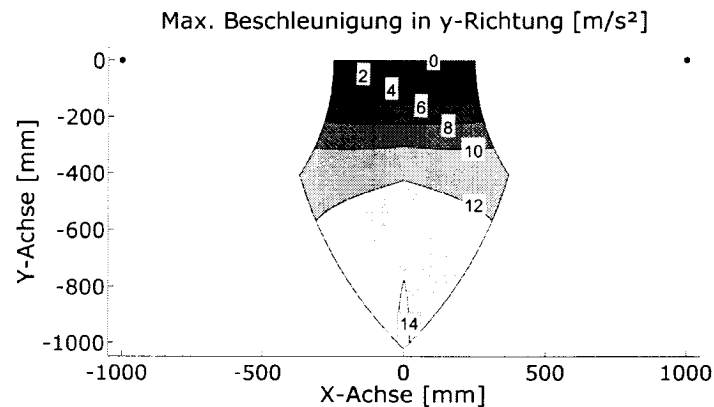


**Abbildung 4.35: Verteilung der maximalen Beschleunigungsfähigkeit des Plattformpunkts in y-Richtung der Biglide-Kinematik für eine maximale Antriebskraft von 1000 N.**

Da die Massenmatrix der Antriebe für die Bipod-Kinematik Null ist, reduziert sich die Gleichung für diese Kinematik zu:

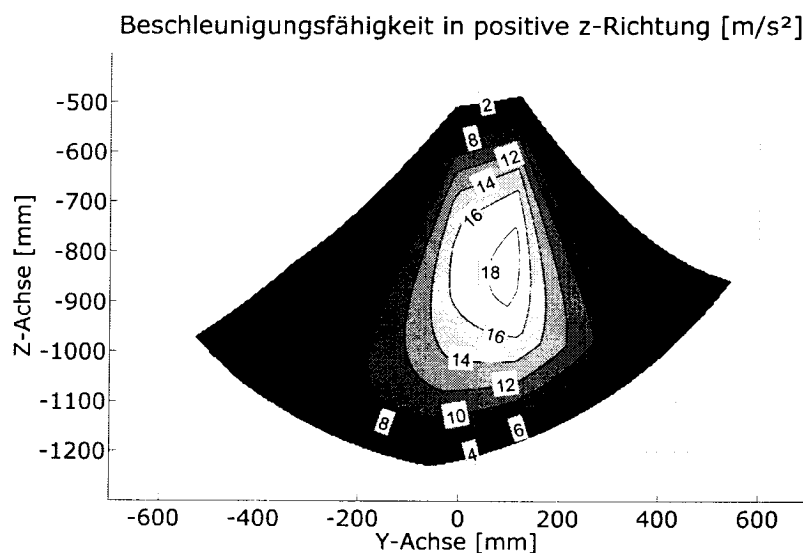
$$\ddot{\mathbf{x}} = (\mathbf{J}^T \mathbf{M}_p)^{-1} \tau_{\text{eff}} \quad 4.94$$

Die Jakobimatrix für den Bipod ergibt sich aus Gleichung A.25. Wird für die beiden Antriebe der Bipod-Kinematik ebenfalls eine effektive Kraft von 1000 N angenommen, so kann die resultierende Beschleunigungsfähigkeit berechnet werden. Die Verteilung der Beschleunigungsfähigkeit in y-Richtung wird in Abbildung 4.36 dargestellt. Diese ist ähnlich der maximalen Geschwindigkeit und erreicht mit  $14 \text{ m/s}^2$  weniger als die Hälfte des Werts der Biglide-Kinematik.



**Abbildung 4.36: Verteilung der maximalen Beschleunigungsfähigkeit des Plattformpunkts in y-Richtung der Bipod-Kinematik für eine maximale Antriebskraft von 1000 N**

Werden für die Hexaglide-Kinematik die in Kapitel 3 ermittelten Parameterwerte zugrunde gelegt, kann die Verteilung der maximal möglichen Beschleunigung berechnet werden. In Abbildung 4.37 wird diese für die positive z-Richtung in der Y-Z Schnittebene gezeigt.



**Abbildung 4.37: Verteilung der maximal möglichen Beschleunigung des Werkzeugs in positive z-Richtung in der Y-Z Schnittebene für die Hexaglide-Kinematik bei einer Werkzeugorientierung von  $a = b = c = 0$  Grad**

## 5 Simulationen und Messungen von Parallelkinematiken

Um die Genauigkeit der in Kapitel 3 und 4 entwickelten Simulationsmodelle zu verifizieren und die Bedeutung des Einflusses der Komponenten aufzuzeigen, wurden verschiedene Eigenschaften von unterschiedlichen parallelkinematischen Werkzeugmaschinen mithilfe des Simulationswerkzeugs berechnet und die Ergebnisse mit an den Maschinen gemessenen Werten verglichen. In diesem Kapitel werden die Ergebnisse dieser Simulationen anhand verschiedener Beispiele diskutiert.

Im ersten Beispiel werden zwei von Kirchner [Kir01] mithilfe genetischer Algorithmen optimierte Varianten der Hexaglide-Kinematik mit der Originalkonfiguration verglichen. Ein Vergleich verschiedener Eigenschaften dieser Kinematiken zeigt die Bedeutung der optimalen Konfiguration von Parallelkinematiken und die Grenzen von kinematikbasierten Optimierungen.

In dem zweiten Beispiel werden ausgewählte Eigenschaften verschiedener Hexaglide- und Hexapod-Kinematiken mit sechs Freiheitsgraden dargestellt. Der Einfluss der unterschiedlichen Bauarten auf die Eigenschaften einer Kinematik wird am Beispiel der Form des Arbeitsraums und der Orientierungsmöglichkeiten des Werkzeugs untersucht.

Mit dem dritten Beispiel wird gezeigt, wie mithilfe des Simulationswerkzeugs gezielt Schwachstellen von Parallelkinematiken identifiziert werden können. Die Bedeutung der einzelnen Maschinenkomponenten und das Potential ihrer gezielten Optimierung werden am Beispiel der Gelenke der Hexaglide-Kinematik untersucht. Die mit dem Simulationswerkzeug berechneten Verbesserungen werden gemessenen Werten gegenübergestellt.

Als viertes Beispiel wird das Potential von Geometrieoptimierungen an der Orientierung der Antriebsgelenke der Hexaglide-Kinematik untersucht. Hierbei kann gezeigt werden, dass sich die Steifigkeit der Kinematik durch eine optimierte Orientierung der Antriebsgelenke steigern lässt.

Im abschließenden fünften Beispiel wird die Genauigkeit der dem Simulationswerkzeug zugrunde liegenden Modelle an verschiedenen Eigenschaften der Hexaglide-Kinematik untersucht.

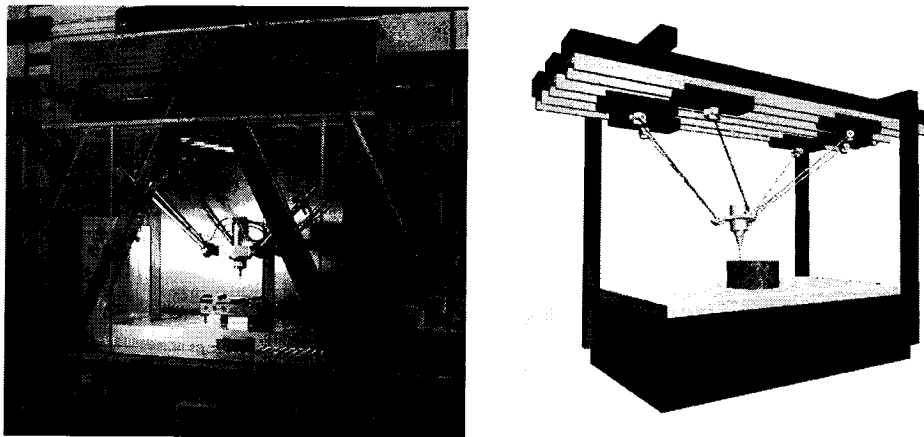
### 5.1 Varianten der Hexaglide-Kinematik

Kirchner [Kir01] stellt in seiner Arbeit einen Algorithmus zur mehrkriteriellen Optimierung von Parallelkinematiken vor. Grundlage dieser Optimierung ist ein genetischer Algorithmus, der, ausgehend von zwei Anfangszuständen, die zu optimierende Kinematik solange verändert, bis eine Pareto-Optimale Lösung erreicht wird. Der Algorithmus zielt ausschließlich auf die Verbesserung der Kinematik ab, deren Übertragungsverhalten mithilfe verschiedener Kennzahlen bewertet wird.

In diesem Abschnitt werden verschiedene Arbeitsräume sowie statische und dynamische Eigenschaften der beiden von Kirchner optimierten Varianten untersucht. Wesentliche Eigenschaften der Originalkonfiguration und der beiden optimierten Varianten werden im letzten Teil dieses Kapitels vergleichend gegenübergestellt.

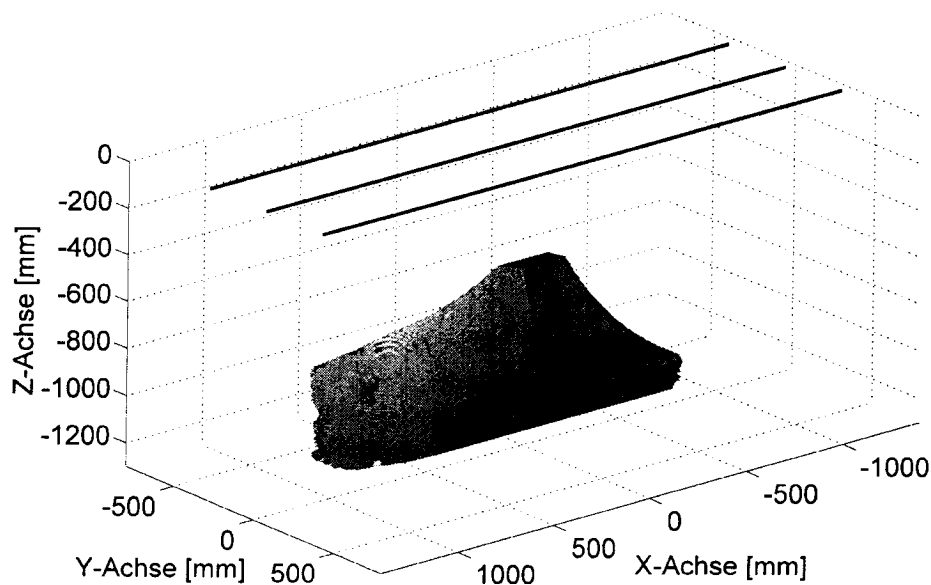
### 5.1.1 Originalzustand der Hexaglide-Kinematik

Die Hexaglide-Kinematik verfügt über drei parallele Führungsbahnen, die in einer Ebene angeordnet sind. Auf jeder Führungsbahn befinden sich zwei Antriebseinheiten, die über Stäbe mit konstanter Länge mit der mobilen Plattform, die die Werkzeugspindel trägt, verbunden sind. In Abbildung 5.1 ist auf der linken Seite ein Foto der Hexaglide-Werkzeugmaschine gezeigt. Auf der rechten Seite dieser Abbildung ist eine Prinzipskizze dieser Kinematik dargestellt. Die den Simulationen zugrunde liegenden Geometriedaten sind in Anhang C.1.1 aufgelistet, die Parameterwerte der einzelnen Maschinenkomponenten sind in Kapitel 3 aufgeführt.



**Abbildung 5.1: Die Hexaglide-Kinematik: auf der linken Seite ein Foto der Maschinenstudie und auf der rechten Seite eine Prinzipskizze [Hon99]**

Der mit dem in Kapitel 4.1.4 entwickelten Octree-Algorithmus berechnete *Arbeitsraum bei konstanter Orientierung* wird in Abbildung 5.2 für eine Werkzeugorientierung von  $a = b = c = 0$  Grad dargestellt. Die relative Lage der Führungsbahnen zum Arbeitsraum wird durch drei schwarzen Linien am oberen Bildrand gezeigt.

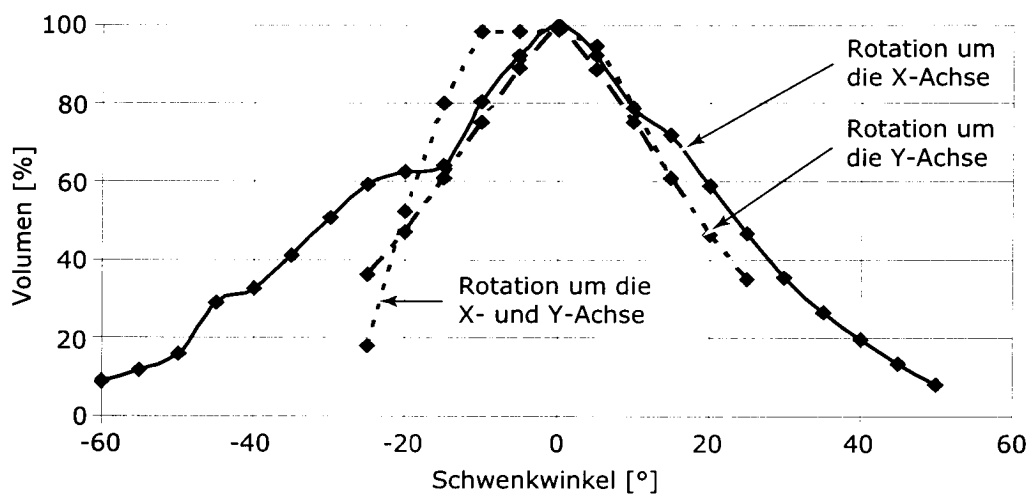


**Abbildung 5.2: Perspektivische Ansicht des Arbeitsraums der Hexaglide-Kinematik**

Der Arbeitsraum hat die Form eines Halbzylinders, der nach oben durch zwei gerade Flanken und an den Seiten durch zwei Kugelsegmente begrenzt wird. Die Begrenzung des Arbeitsraums in negative z-Richtung (Halbzylinder) ist durch die Länge der Stäbe gegeben. In positive z-Richtung wird der Arbeitsraum an den Seiten (Flanken) durch die maximal zulässigen Gelenkwinkel und Kollisionen der Stäbe mit der Plattform beschränkt. In der Mitte des Arbeitsraums (y-Koordinate:  $-10 \text{ mm} < y < 180 \text{ mm}$ ) begrenzt die durch die Kinematik übersetzte Schwerkraft den Arbeitsraum in positive z-Richtung. Die Ränder in positiver und negativer x-Richtung (Kugelsegmente) sind durch die zulässigen Verfahrenswege der Antriebseinheiten gegeben. Das mit dem Tetraederverfahren bei einer Auflösung von  $\epsilon = 3.125 \text{ mm}$  (vgl. Kapitel 4.1.4) berechnete Volumen des Arbeitsraums beträgt  $1.29 \text{ m}^3$ .

Aus der Berechnung des *rotatorischen Arbeitsraums an einem Punkt* in der Mitte des Arbeitsraums ( $x=0, y=0, z=-900 \text{ mm}$ ) lässt sich durch eine Projektion die in Abbildung 4.5 gezeigte Verteilung der maximal zulässigen Rotationswinkel ableiten. Der maximale Rotationswinkel um die y-Achse (b-Winkel) ist auf Grund der Symmetrie der Maschine zur Y-Z Ebene symmetrisch. Da die Hexaglide-Kinematik keine weiteren Symmetrien aufweist, sind die maximalen Rotationswinkel an diesem Punkt ebenfalls nicht symmetrisch und weisen, wie auf der rechten Seite von Abbildung 4.5 dargestellt, eine sehr ungleichmäßige Verteilung auf. Die zwei kreisförmigen Löcher, die auf der linken Seite der Abbildung zu erkennen sind, sind auf Kollisionen der Stäbe mit der Plattform zurückzuführen.

Eine weitere für die Beurteilung von Parallelkinematiken wichtige Größe ist die Abhängigkeit des Arbeitsraums von der Orientierung des Werkzeugs. Wird das Arbeitsraumvolumen bei verschiedenen Orientierungen berechnet und über den anliegenden Winkeln aufgetragen, so ergeben sich bei Normierung des Volumens die in Abbildung 5.3 gezeigte Abhängigkeiten.



**Abbildung 5.3: Volumen des Arbeitsraums der Hexaglide-Kinematik in Abhängigkeit der Orientierung des Werkzeugs**

Wird für eine Bearbeitungsaufgabe ein Rotationsvermögen des Werkzeugs von  $\pm 20$  Grad um eine Achse benötigt, so reduziert sich der Arbeitsraum der Originalkonfiguration auf 60 Prozent. Ist dieses Rotationsvermögen um die x- und die y-Achse für eine Bearbeitungsaufgabe erforderlich, so reduziert sich der Arbeitsraum noch deutlicher auf unter 50 Prozent des Ausgangsvolumens. Wird für eine Fünfseitenbearbeitung ein zulässiges Rotationsvermögen um eine Achse von mindestens  $\pm 45$  Grad gefordert, so reduziert sich das Arbeitsraumvolumen auf unter 20 Prozent. Bei einem Ausgangsvolumen von  $1.29 \text{ m}^3$  stehen damit nur noch  $0.258 \text{ m}^3$  für eine Bearbeitung zur Verfügung, was im Verhältnis zum Maschinenvolumen als unzureichend bewertet werden muss.

Da sich die Bewertungsfunktion des von Kirchner [Kir01] entwickelten Optimierungsalgorithmus auf die Jakobimatrix und deren Eigenschaften stützt, wird für einen Vergleich mit den optimierten Varianten die Verteilung der Übertragungsgüte für die Originalkonfiguration in Abbildung 5.4 dargestellt. Für die Berechnung der Übertragungsgüte nach Gleichung 4.75 wurden die Wichtungsfaktoren  $w$  so gewählt, dass eine Rotation von 20 Grad gleich gewichtet wird wie eine Translation von 0.5 m:

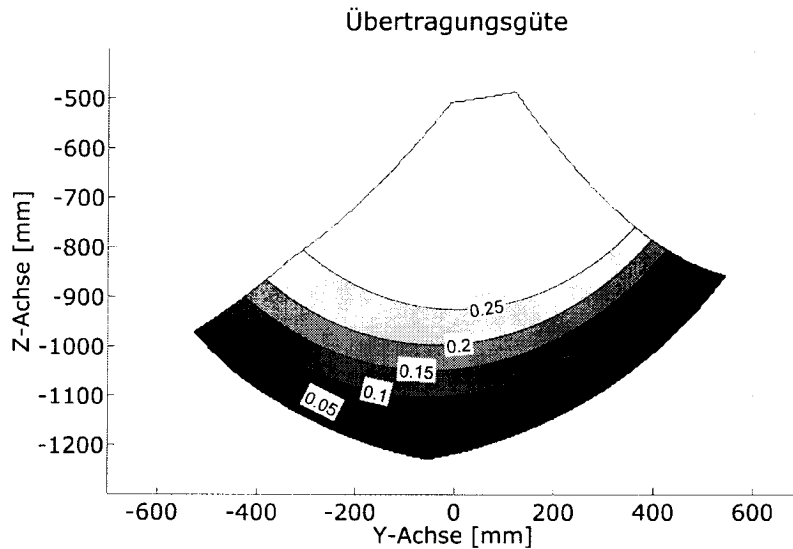
$$w = \frac{0.5}{\frac{\pi}{9}} \left[ \frac{\text{m}}{\text{rad}} \right] \quad 5.1$$

Damit werden die Rotationsbewegungen im Vergleich zur 6X Hexapod-Kinematik (vgl. Gleichung 4.78) geringer gewichtet, was auf das unterschiedliche Aufgabenspektrum der beiden Werkzeugmaschinen zurückzuführen ist: Die Hexaglide-Kinematik wurde zu hochdynamischen Bearbeitung von Strukturbauteilen in der Flugzeugindustrie ausgelegt und die 6X Hexapod-Kinematik zur Bearbeitung von Gesenkbauteilen.

Der im Vergleich zur 6X Hexapod-Kinematik geringere Maximalwert der Übertragungsgüte ergibt sich aus dem kinematischen Aufbau der Hexaglide-Kinematik, die eine Vorzugsrichtung aufweist. Diese Vorzugsrichtung wird in der Wichtungsmatrix nicht berücksichtigt, da die untersuchten Varianten alle eine Vorzugsrichtung aufweisen und deren Berücksichtigung für einen Vergleich daher ohne Bedeutung ist. Die dargestellte Übertragungsgüte wichtet daher alle Translationsbewegungen gleich, was den geringern Maximalwert der Übertragungsgüte zur Folge hat.

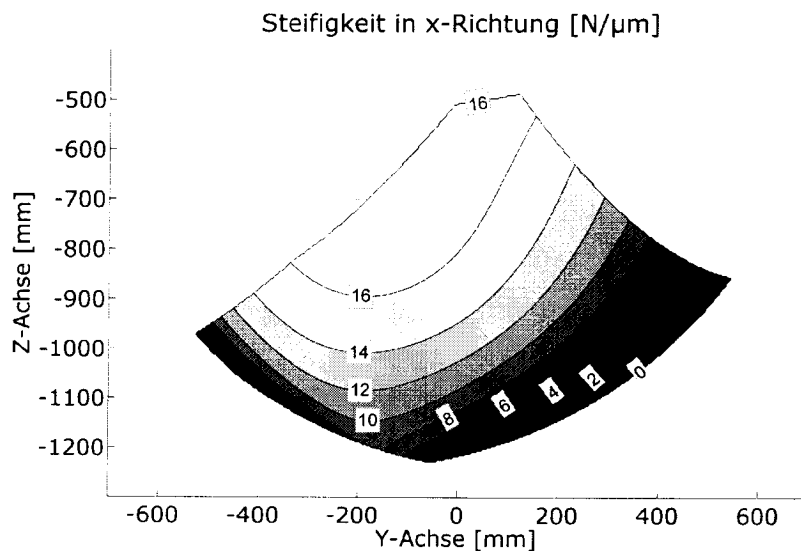
Der Vergleich der statischen und dynamischen Eigenschaften der Varianten mit der Originalkonfiguration wird im Folgenden am Beispiel der statischen Steifigkeit in x-Richtung und der maximalen Verfahrgeschwindigkeit in y-Richtung durchgeführt. Die statische Steifigkeit wird für den Werkzeug Bezugspunkt berechnet und hängt damit auch von der Länge des Werkzeugs ab. Da der Einfluss der Momentensteifigkeit um die Koordinatenachsen mit zunehmender Werkzeuglänge wächst, wird für die Berechnung eine einheitliche Werkzeuglänge von 150 mm angenommen. Hierdurch ergibt sich die Steifigkeit in x-Richtung aus einer Überlagerung der translatorischen und rotatorischen Steifigkeiten. Für die Originalkonfiguration wird in Abbildung 5.5 die Verteilung der so berechneten Steifigkeit gezeigt.

Diese hat ein Maximum in der Mitte des oberen Rands des Arbeitsraums von  $17.84 \text{ N}/\mu\text{m}$ .



**Abbildung 5.4: Verteilung der Übertragungsgüte der Hexaglide-Kinematik**

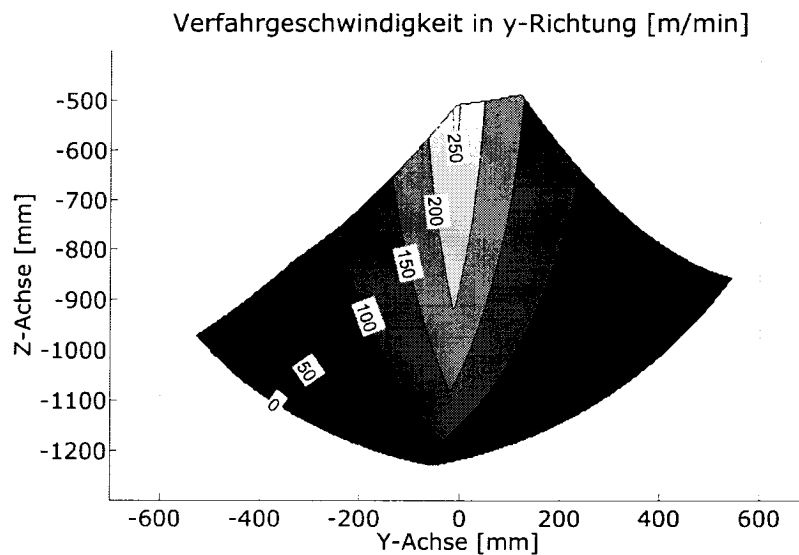
Die durchschnittliche Steifigkeit in der gezeigten Schnittebene beträgt  $11.52 \text{ N}/\mu\text{m}$  (zur Wahl der Vergleichswerte vgl. Anmerkung zu Tabelle 3.2).



**Abbildung 5.5: Verteilung der Steifigkeit in x-Richtung der Hexaglide-Kinematik am Werkzeugbezugspunkt**

Die Verteilung der maximalen Verfahrgeschwindigkeit des Werkzeugbezugspunkts in y-Richtung wird in Abbildung 5.6 gezeigt. Sie hat ein Maximum von  $257 \text{ m}/\text{min}$  in einem schmalen Streifen in der Mitte des Arbeitsraums und nimmt zu den Rändern hin deutlich ab. Der Durchschnitt der Verteilung der Verfahrgeschwindigkeit in y-Richtung liegt mit  $102 \text{ m}/\text{min}$  bei 40 Prozent dieses Maximalwerts.





**Abbildung 5.6: Verteilung der maximalen Verfahrensgeschwindigkeit des Werkzeugbezugs punkts in y-Richtung der Hexaglide-Kinematik**

Die Arbeitsräume und die statischen und dynamischen Eigenschaften der Originalkonfiguration werden in Kapitel 5.1.4 den Werten der beiden Varianten direkt gegenübergestellt.

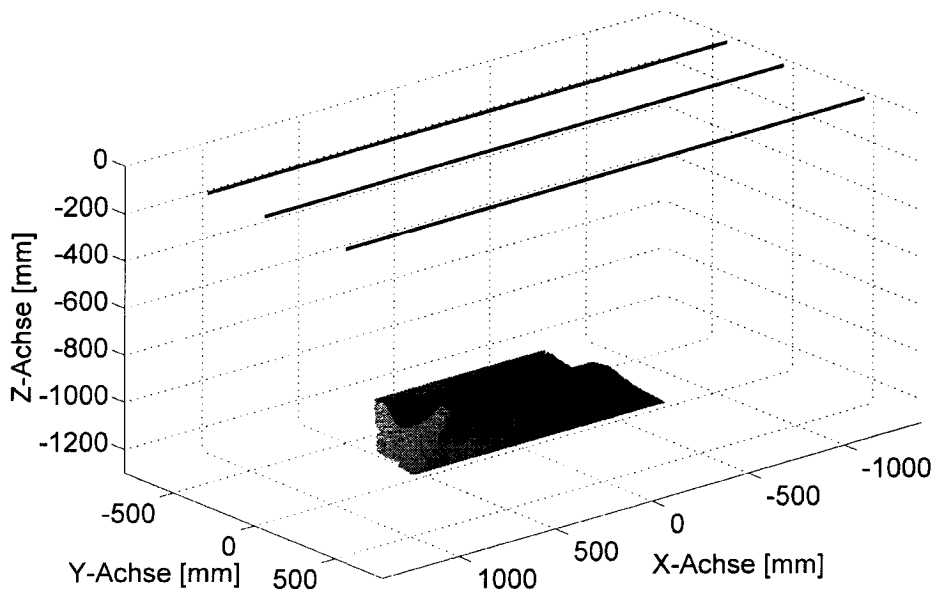
### 5.1.2 Variante 1 der Hexaglide-Kinematik

Im Vergleich zur Originalkonfiguration wurden bei der Variante 1 der Abstand der Führungsbahnen, die Länge der Stäbe und die Geometrie der Plattform verändert. Der Abstand der Führungsbahnen ist im Gegensatz zur Originalkonfiguration ungleich groß und die Gelenkpunkte auf der Plattform liegen nicht mehr in einer Ebene. Die zu dieser Variante gehörenden Geometriedaten sind im Anhang C.1.2 aufgelistet, die Parameterdaten der Komponenten entsprechen den der Originalkonfiguration.

Der *Arbeitsraum bei konstanter Orientierung* der von Kirchner mit Variante 1 bezeichneten Modifikation der Hexaglide-Kinematik wird in Abbildung 5.7 für eine Orientierung von  $a = b = c = 0$  Grad dargestellt. Mit einem Arbeitsraumvolumen von  $0.56 \text{ m}^3$  (Tetraederverfahren bei einer Auflösung von  $\varepsilon = 3.125 \text{ mm}$ ) verfügt dieser bei ähnlicher Maschinengröße über einen um 56 Prozent kleineren Arbeitsraum als die Originalkonfiguration.

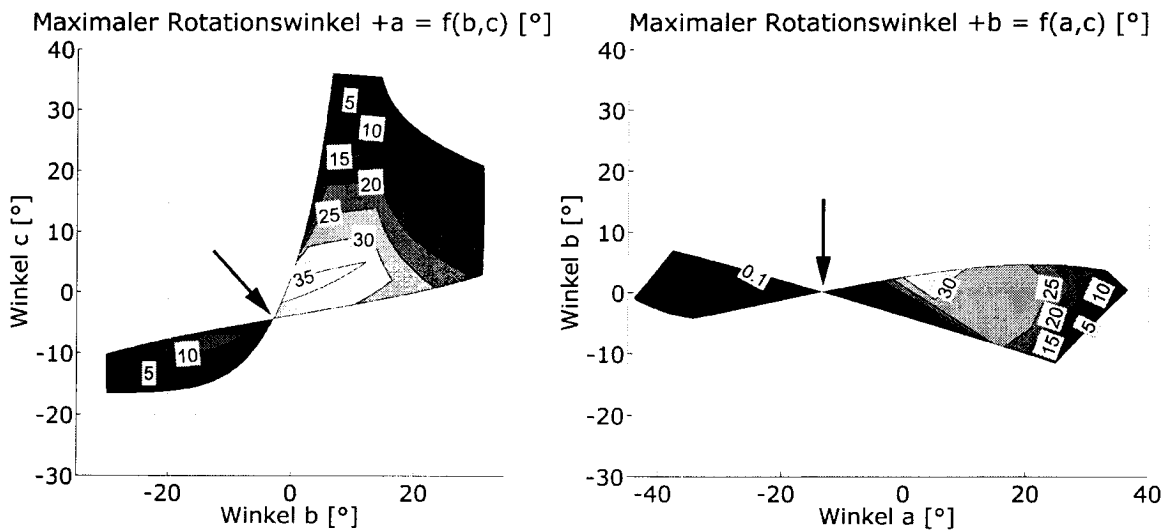
Wie in der Schnittdarstellung (vgl. Abbildung 5.9) darüber hinaus deutlich wird, weist der Arbeitsraum eine sehr unregelmäßige Form auf. Dies führt dazu, dass von dem theoretischen Arbeitsraumvolumen von  $0.56 \text{ m}^3$  in der Praxis nur etwa die Hälfte für Bearbeitungsaufgaben zur Verfügung stehen dürfte.

Ein Vergleich des in Abbildung 5.8 gezeigten *rotatorischen Arbeitsraums an einem Punkt* ( $x=0, y=0, z=-1150 \text{ mm}$ ) mit dem der Originalkonfiguration zeigt ein deutlich geringeres Rotationsvermögen des Werkzeugs.



**Abbildung 5.7: Perspektivische Ansicht des Arbeitsraums der Variante 1**

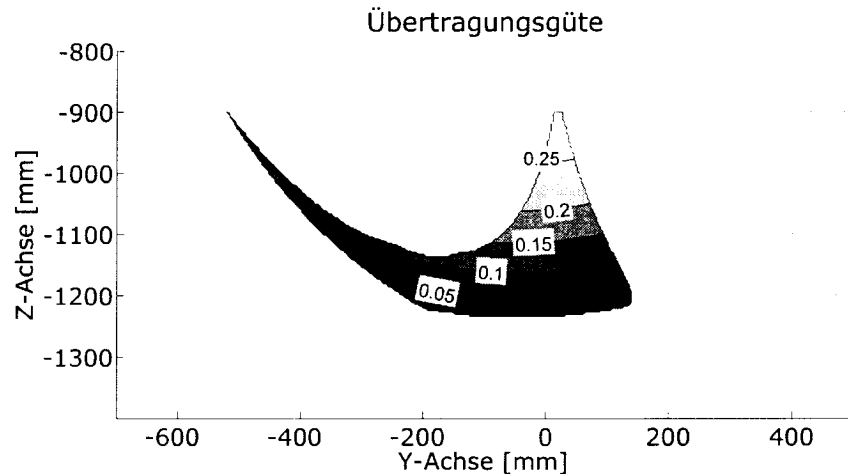
Da sowohl bei der Rotation um die x-Achse als auch bei der Rotation um die y-Achse Nullstellen vorhanden sind (in der Abbildung durch Pfeile markiert), können die im negativen Bereich dieser Stellen liegenden Rotationswinkel nicht genutzt werden. Mit Ausnahme der Orientierung um die y-Achse (b-Winkel) sind daher nur Werkzeugorientierungen in positiver Richtung möglich.



**Abbildung 5.8: Maximale Rotationswinkel der Variante 1 der Hexaglide-Kinematik in +a Richtung als Funktion der Rotationswinkel b und c (links) und in +b Richtung als Funktion der Rotationswinkel a und c (rechts)**

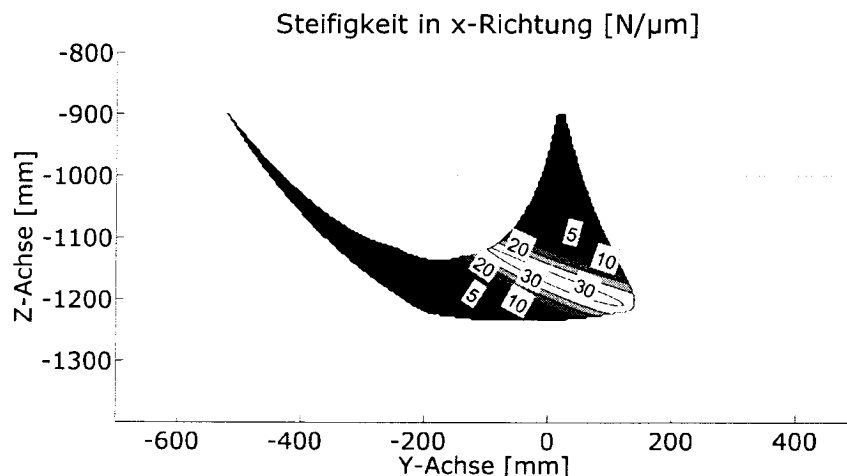
Die Abhängigkeit des Arbeitsraums von der Orientierung des Werkzeugs wird nicht dargestellt, da mit dieser Konfiguration in keiner Richtung Rotationswinkel von  $\pm 20$  Grad erreicht werden können. Legt man bei der Berechnung der Übertragungsgüte die gleichen Wichtungsfaktoren zugrunde wie bei der Originalkonfiguration (vgl. Gleichung 5.1), so ergibt sich die in Abbildung 5.9 dargestellte Ver-

teilung. Die Verteilung der Übertragungsgüte innerhalb des Arbeitsraums ist gleichmäßiger als bei der Originalkonfiguration, aber der Durchschnittswert der Übertragungsgüte liegt mit 0.11 aber 40 Prozent unter dem Wert der Originalkonfiguration.



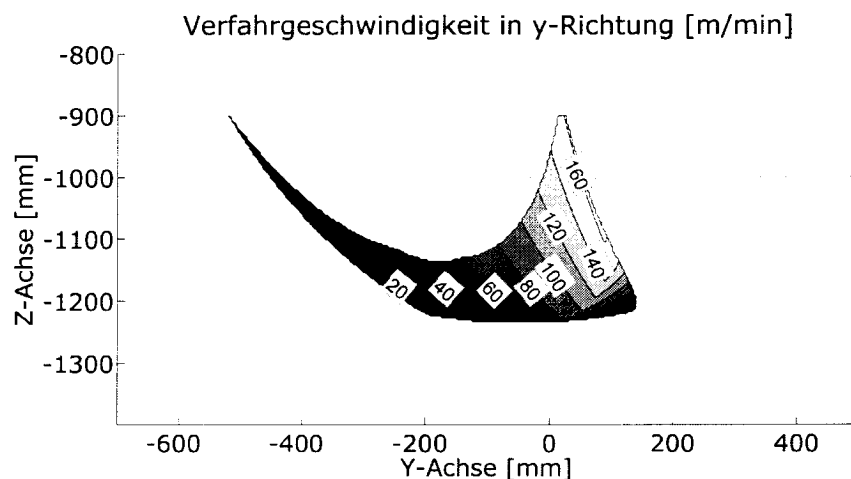
**Abbildung 5.9: Verteilung der Übertragungsgüte der Variante 1**

Ein Vergleich der in Abbildung 5.10 gezeigten Verteilung der statischen Steifigkeit in x-Richtung mit der Verteilung der Originalkonfiguration zeigt, dass der von dieser Kinematik erreichte Maximalwert von  $31.49 \text{ N}/\mu\text{m}$  bei 176 Prozent des Werts der Originalkonfiguration liegt. Allerdings liegt die durchschnittliche Steifigkeit in x-Richtung mit  $9.82 \text{ N}/\mu\text{m}$  bei nur 85 Prozent der Originalkonfiguration. Hieraus wird deutlich, dass die für eine Bearbeitung wichtige Homogenität der Verteilung der Eigenschaften innerhalb des Arbeitsraums durch die Optimierung nicht verbessert wurde.



**Abbildung 5.10: Verteilung der Steifigkeit in x-Richtung der Variante 1**

Die Verteilung der maximalen Verfahrensgeschwindigkeit in y-Richtung (vgl. Abbildung 5.11) hat in der Y-Z Schnittebene einen Durchschnittswert von  $80 \text{ m}/\text{min}$ ; dies entspricht 78.8 Prozent des Werts der Originalkonfiguration.



**Abbildung 5.11: Verteilung der maximalen Verfahrensgeschwindigkeit in y-Richtung der Variante 1**

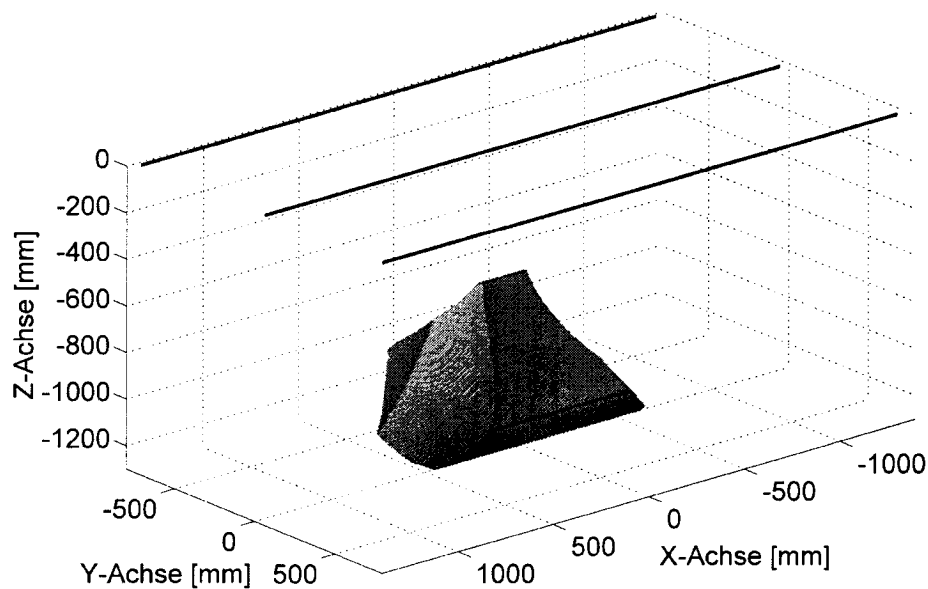
Die Variante 1 der Hexaglide-Kinematik kann aufgrund des im Verhältnis zur Originalkonfiguration deutlich kleineren Arbeitsraums und der erheblich geringeren Durchschnittswerte bei den statischen und dynamischen Eigenschaften nicht als Optimierung angesehen werden.

### 5.1.3 Variante 2 der Hexaglide-Kinematik

Die Variante 2 der Hexaglide-Kinematik weist im Vergleich zur Originalkonfiguration einen vergrößerten Abstand der parallelen Führungsbahnen und eine größere Länge der äußeren Stäbe auf. Wie bei Variante 1 sind auch bei Variante 2 die Plattformgelenkpunkte nicht in einer Ebene angeordnet. Die Geometriedaten dieser Variante sind in Anhang C.1.3 aufgelistet, die Parameterdaten entsprechen den Werten der Originalkonfiguration.

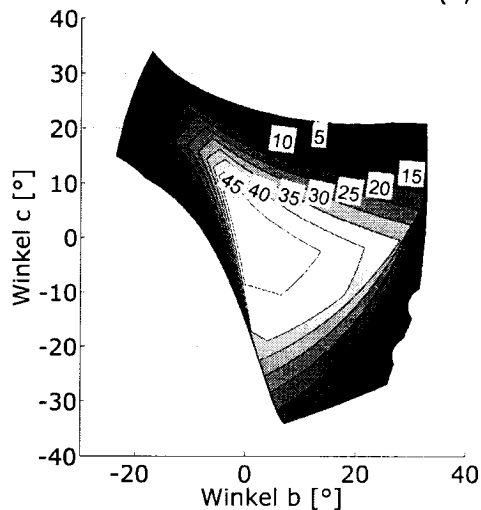
Der *Arbeitsraum bei konstanter Orientierung* wird in Abbildung 5.12 dargestellt. Die Orientierung des Werkzeugs beträgt, wie bei der Originalkonfiguration und der Variante 1,  $a = b = c = 0$  Grad. Der Arbeitsraum hat eine Tropfenform und verfügt mit einem Volumen von  $0.7 \text{ m}^3$  (Tetraederverfahren bei einer Auflösung von  $\varepsilon = 3.125 \text{ mm}$ ) über 54 Prozent des Volumens der Originalkonfiguration.

Die Projektion des *rotatorischen Arbeitsraums an einem Punkt* in der Mitte des Arbeitsraums ( $x=0, y=-200, z=-1000 \text{ mm}$ ) ergibt die in Abbildung 5.13 gezeigten maximalen Rotationswinkel. Da diese Variante keinen symmetrischen Aufbau aufweist, ist die Verteilung des Rotationsvermögens ebenfalls nicht symmetrisch. Im Vergleich zur Originalkonfiguration ist das Rotationsvermögen sowohl um die x- als auch um die y-Achse größer und weist eine homogenere Verteilung auf.

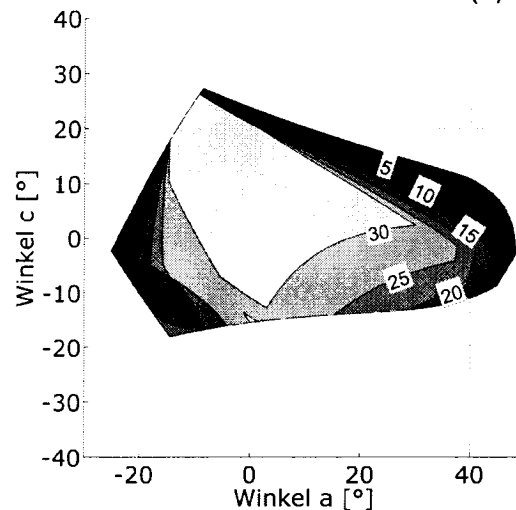


**Abbildung 5.12: Perspektivische Ansicht des Arbeitsraums der Variante 2**

Maximaler Rotationswinkel  $+a = f(b,c)$  [°]



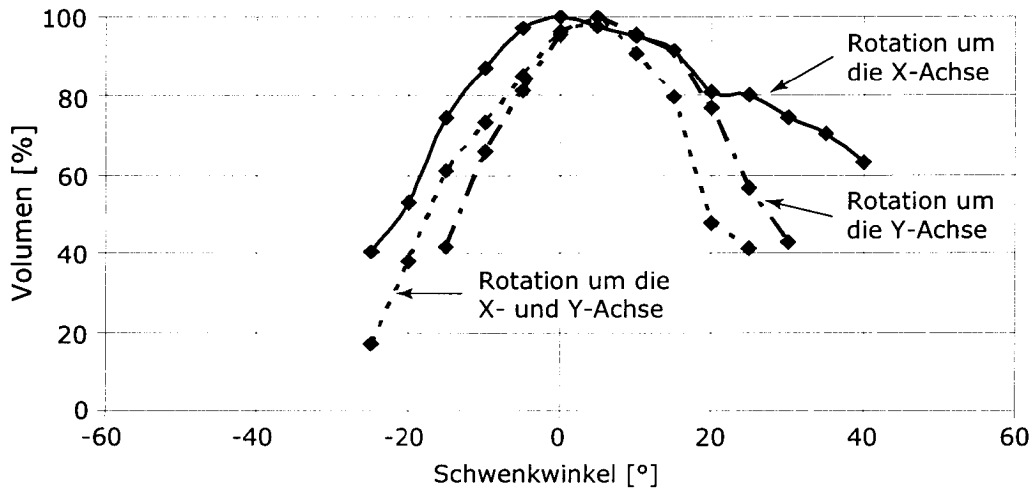
Maximaler Rotationswinkel  $+b = f(a,c)$  [°]



**Abbildung 5.13: Maximale Rotationswinkel der Variante 2 der Hexaglide-Kinematik in +a Richtung als Funktion der Rotationswinkel b und c (links) und in +b Richtung als Funktion der Rotationswinkel a und c (rechts)**

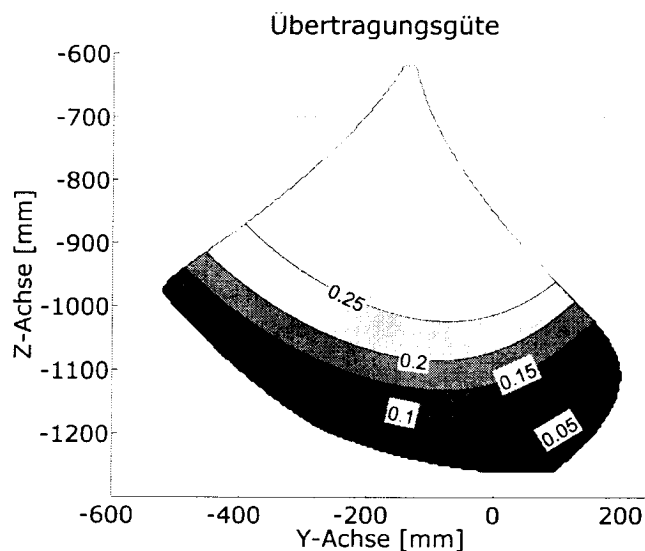
Die Abhängigkeit des Arbeitsraumvolumens von der Orientierung des Werkzeugs ist in Abbildung 5.14 gezeigt. Im Gegensatz zur Originalkonfiguration kann das Werkzeug bis zu 40 Grad in positive Richtung um die x-Achse geschwenkt werden, bis sich das Arbeitsraumvolumen auf 60 Prozent des Ausgangsvolumens reduziert hat. Bei einer Rotation in negativer Richtung um die x-Achse stehen bei einer Orientierung von -20 Grad 53 Prozent des Ausgangsvolumens für Bearbeitungsaufgaben zur Verfügung. Bei gleichzeitiger Rotation um die x- und y-Achse können bei einem Rotationsvermögen von  $\pm 20$  Grad 40 Prozent des Ausgangsvolumens genutzt werden. Damit weist die Variante 2 der Hexaglide-Kinematik ein

prozentual größeres Arbeitsvolumen bei diesen Orientierungen auf. In absoluten Zahlen ist das Volumen aufgrund des kleineren Ausgangsvolumens allerdings kleiner als das der Originalkonfiguration.



**Abbildung 5.14: Volumen des Arbeitsraums der Variante 2 in Abhängigkeit der Orientierung des Werkzeugs**

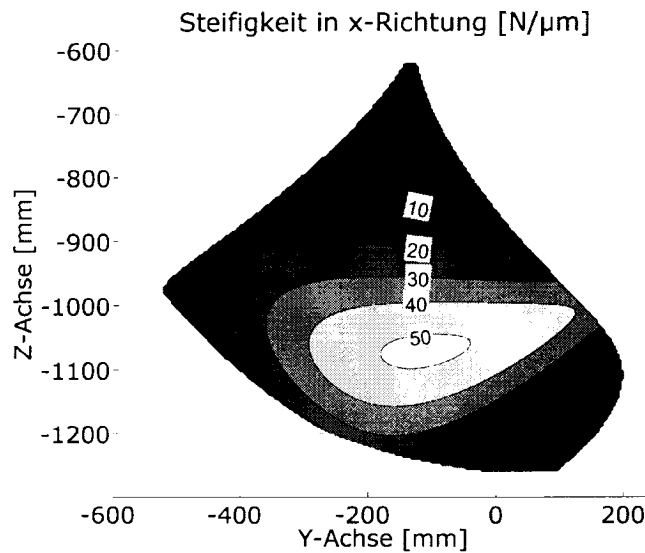
Die Verteilung und die Werte der Übertragungsgüte, die mit den gleichen Wichtungsfaktoren berechnet worden sind wie die Originalkonfiguration, sind für diese Variante in Abbildung 5.15 dargestellt. Die Verteilung der Übertragungsgüte innerhalb des Arbeitsraums ist ähnlich der Originalkonfiguration. Mit einer Übertragungsgüte von maximal 0.286 und einem Durchschnitt von 0.19 weist die Verteilung dieser Variante auch vergleichbare Werte auf.



**Abbildung 5.15: Verteilung der Übertragungsgüte der Variante 2**

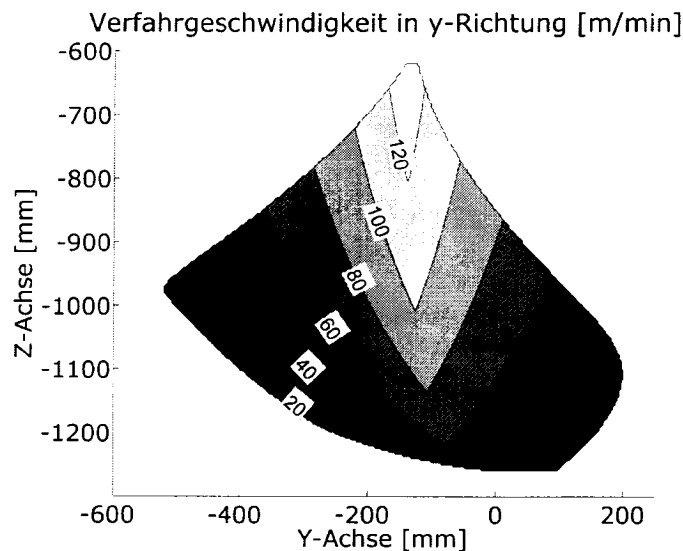
Die Verteilung der Steifigkeit in x-Richtung dieser Variante ist in Abbildung 5.16 gezeigt. Der Maximalwert der Steifigkeit in x-Richtung beträgt  $51.44 \text{ N}/\mu\text{m}$ . Dieser Wert liegt damit bei 288 Prozent des Werts der Originalkonfiguration.

Der Durchschnitt der Steifigkeit liegt mit  $24.36 \text{ N}/\mu\text{m}$  ebenfalls um mehr als einen Faktor 2 über dem der Originalkonfiguration.



**Abbildung 5.16: Verteilung der Steifigkeit in x-Richtung der Variante 2**

Diese Erhöhung der Steifigkeit ergibt sich aus einer höheren Übersetzung durch die Kinematik. Dies führt dazu, dass die maximal erreichbare Verfahrensgeschwindigkeit in y-Richtung um den gleichen Faktor 2 reduziert ist, wie in Abbildung 5.17 dargestellt. Die Verteilung der Verfahrensgeschwindigkeit ist ähnlich der der Originalkonfiguration und erreicht in einem dünnen Streifen in der Mitte der Schnittebene einen Wert von  $131 \text{ m}/\text{min}$ . Diese Verteilung ist auf das der Originalkonfiguration und den beiden Varianten zugrunde liegende Kinematikprinzip zurückzuführen.



**Abbildung 5.17: Verteilung der maximalen Verfahrensgeschwindigkeit in y-Richtung der Variante 2**

Die Variante 2 der Hexaglide-Kinematik weist im Vergleich zur Originalkonfiguration ein um 46 Prozent reduziertes Arbeitsraumvolumen auf. Die statischen und dynamischen Eigenschaften innerhalb dieses Arbeitsraums sind in Richtung einer größeren Steifigkeit bei kleinerer maximaler Verfahrensgeschwindigkeit verschoben.

#### 5.1.4 Vergleich der Varianten mit der Originalkonfiguration

Eine bisher ungelöste Aufgabenstellung ist die Bewertung von Parallelkinematiken. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Bewertung der einzelnen Eigenschaften nicht nur Maximal- oder Minimalwerte, sondern auch deren Verteilung innerhalb des Arbeitsraums berücksichtigen muss. Ein Beispiel hierfür ist die statische Steifigkeit in x-Richtung, die bei der Variante 1 einen höheren Maximalwert und einen kleineren Durchschnittswert als die Originalkonfiguration aufweist. Die Wahl eines angemessenen Kriteriums ist von der konkreten Aufgabenstellung abhängig und kann daher nicht allgemeingültig beantwortet werden.

Für einen Vergleich müssen die einzelnen Kriterien darüber hinaus gegeneinander gewichtet werden. Die Wahl der Wichtungsfaktoren hängt dabei ebenfalls von der konkreten Aufgabenstellung ab. Da sowohl die Wahl der Kriterien als auch die Wahl der Wichtungsfaktoren das Ergebnis von Vergleichen erheblich beeinflussen, kann ein sinnvoller Vergleich von Parallelkinematiken nur anhand gegebener Bearbeitungsaufgaben durchgeführt werden.

Aus diesem Grund beschränkt sich der Vergleich der in diesem Kapitel vorgestellten Konfigurationen auf die in Tabelle 5.1 gezeigte Gegenüberstellung verschiedener Eigenschaften.

	original	Variante 1		Variante 2	
	absolut	absolut	%	absolut	%
Arbeitsraumvolumen	1.29	0.56	43.4	0.70	54.2
Übertragungsgüte Maximum	0.287	0.273	95.1	0.286	99.7
Übertragungsgüte Durchschnitt	0.183	0.110	60.1	0.190	103.8
Steifigkeit in x-Richtung Maximum	17.84	31.49	176.5	51.44	288.3
Steifigkeit in x-Richtung Durchschnitt	11.52	9.82	85.2	24.36	211.5
Geschwindigkeit y-Richtung Maximum	256.8	166.2	64.7	130.8	50.9
Geschwindigkeit y-Richtung Durchschnitt	102.0	80.4	78.8	65.4	64.1

**Tabelle 5.1: Vergleichende Gegenüberstellung der Varianten der Hexaglide-Kinematik mit der Originalkonfiguration**

Mit Ausnahme der Variante 1, für die aufgrund des im Verhältnis zur Maschinengröße sehr kleinen Arbeitsraums und geringer Rotationsmöglichkeiten keine sinnvolle Anwendung möglich ist, können für die beiden anderen Konfigurationen durchaus spezifische Anwendungsgebiete gefunden werden. Für ein Anwendungsgebiet, das eine höhere Steifigkeit bei geringeren Geschwindigkeiten erfordert (z. B. Fertigung von Gesenken), wäre die Variante 2 vorzuziehen. Werden hohe Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gefordert (wie z. B. bei Strukturbauteilen der Luftfahrtindustrie) wäre die Originalkonfiguration vorzuziehen.



Anhand dieses Beispiels kann gezeigt werden, wie stark die Verteilung der für eine Bearbeitung wesentlichen Eigenschaften einer Parallelkinematik von deren Konfiguration abhängt. An der Variante 1 konnte gezeigt werden, dass der genetische Algorithmus von Kirchner [Kir01] auch pareto optimale Lösungen findet, die nur lokale Maxima darstellen und nicht praxistauglich sind.

## 5.2 Verschiedene Hexaglide- und Hexapod-Kinematiken

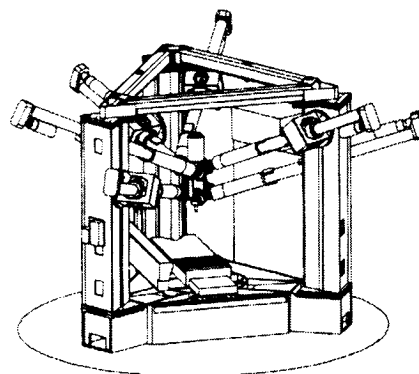
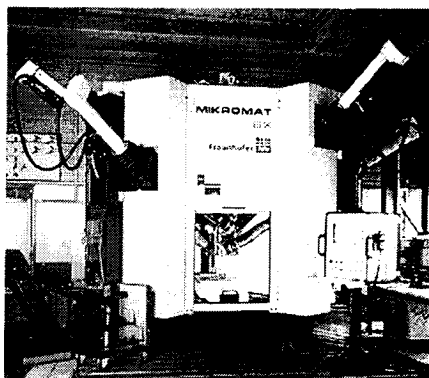
Am Beispiel verschiedener Hexaglide- und Hexapod-Kinematiken wird der Einfluss der unterschiedlichen Bauarten auf die Eigenschaften der Kinematiken untersucht. Neben der Hexaglide-Kinematik, deren Eigenschaften im Kapitel 5.1 dargestellt sind, umfasst die Auswahl folgende Kinematiken:

- die 6X Hexapod-Kinematik, die am Institut für Werkzeugmaschinen und Umformtechnik der Fraunhofer Gesellschaft in Chemnitz in Zusammenarbeit mit der Firma Mikromat entwickelt worden ist,
- die Linapod-Kinematik, die am Institut für Steuerungstechnik der Werkzeugmaschinen und Fertigungseinrichtungen der Universität Stuttgart im Rahmen des Dynamil-Projekts zwischen 1995 und 1999 entwickelt worden ist,
- die Paralix-Kinematik, die vom Zentrum Fertigungstechnik Stuttgart im Rahmen eines Projekts von 1997 bis 2001 entwickelt worden ist.

Da sich am *Arbeitsraum bei konstanter Orientierung* und dem maximalen Rotationsvermögen in eine Richtung die prinzipbedingten Unterschiede von Hexaglide- und Hexapod-Kinematiken gut darstellen lassen, werden diese im folgenden Kapitel für eine vergleichende Gegenüberstellung verwendet.

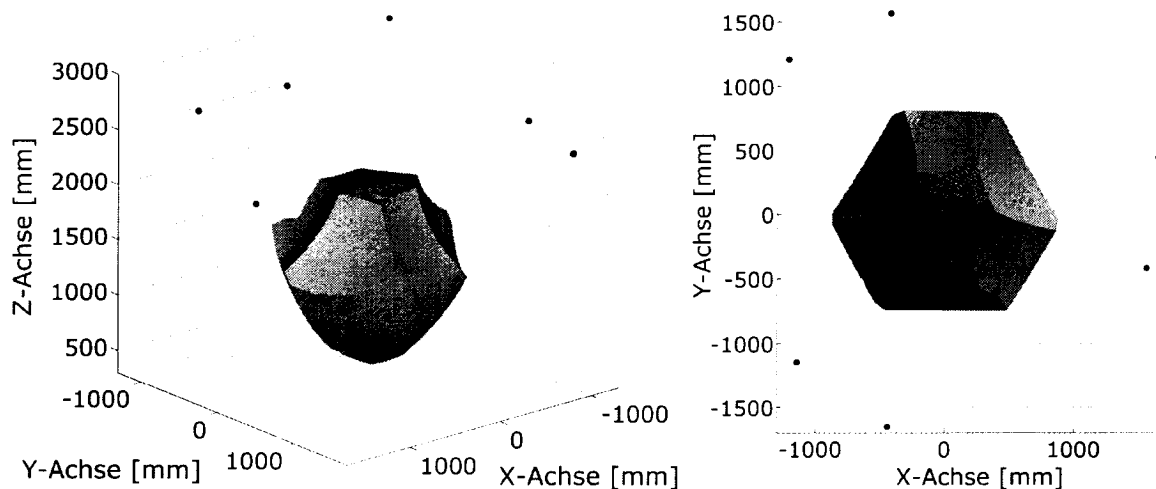
### 5.2.1 6X Hexapod-Kinematik

Die 6X Hexapod-Kinematik weist sechs längenveränderliche Stäbe auf, die in einem Gestell mit dreieckigem Grundriss aufgehängt sind. Die Stäbe sind mit der Plattform, die die Werkzeugspindel trägt, über sechs Gelenke mit je drei Freiheitsgraden verbunden. Der Aufbau der Maschinenstudie wird auf der rechten Seite der Abbildung 5.18 schematisch gezeigt.



**Abbildung 5.18: 6X Hexapod-Kinematik: auf der linken Seite ein Foto der Maschinenstudie und auf der rechten Seite eine Prinzipskizze [Kir01]**

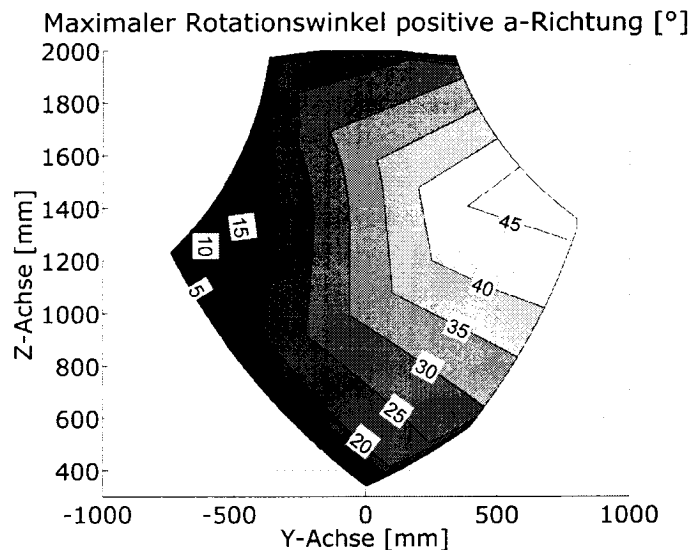
Der mit dem in Kapitel 4.1.4 entwickelten Octree-Verfahren berechnete *Arbeitsraum bei konstanter Orientierung* wird in Abbildung 5.19 in zwei Ansichten dargestellt. In der auf der linken Seite dargestellten perspektivischen Ansicht wird die Begrenzung des Arbeitsraums durch sechs Kugelsektoren deutlich. Die Begrenzung des Arbeitsraums durch Kugelsektoren ist auf den minimalen beziehungsweise maximalen Hub der Stäbe zurückzuführen. In der X-Y Ebene, die auf der rechten Seite der Abbildung dargestellt ist, ist der durch die Anordnung der Antriebsgelenke im Gestell bedingte sechseckige Grundriss des Arbeitsraums erkennbar. Die antriebsseitigen Gelenkpunkte sind in den Abbildungen durch sechs schwarze Punkte dargestellt. Die Auflösung der Berechnung beträgt wie bei den anderen Kinematiken  $\varepsilon = 3.125$  mm und wurde für eine senkrechte Werkzeugorientierung ( $a = b = c = 0$  Grad) durchgeführt. Das mit dem Tetraeder-Verfahren berechnete Volumen dieses *Arbeitsraums bei konstanter Orientierung* beträgt  $2.45 \text{ m}^3$ .



**Abbildung 5.19: Arbeitsraum der 6X Hexapod-Kinematik  
Perspektivische Ansicht (links) und X-Y-Ebene (rechts)**

Die Verteilung des maximal zulässigen Rotationswinkels in positive  $a$ -Richtung ist in Abbildung 5.20 gezeigt. In der dargestellten Y-Z Schnittebene kann ein maximaler Winkel von 47 Grad in positiver Schwenkrichtung erreicht werden. Die durchschnittlich zulässige Orientierung beträgt in dieser Richtung 27.6 Grad.

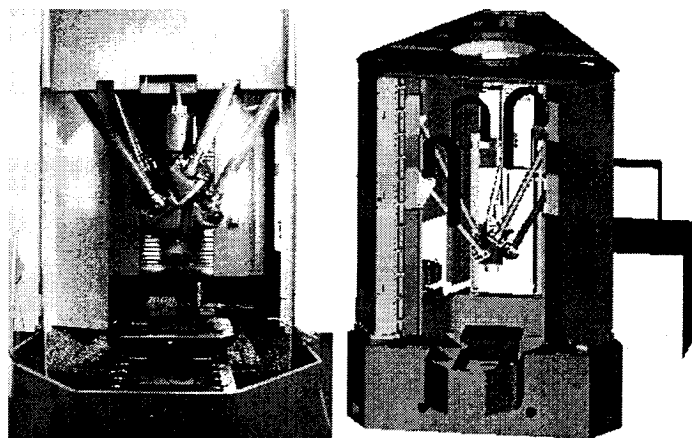
Im Gegensatz zu der in Abbildung 4.3 gezeigten Verteilung der Hexaglide-Parallelkinematik, deren Rotationsvermögen um eine Achse in der Mitte des Arbeitsraums am größten ist, hat die 6X Hexapod-Kinematik ihr größtes Rotationsvermögen am Rand des Arbeitsraums.



**Abbildung 5.20: Verteilung des maximal zulässigen Rotationswinkels in positive  $\alpha$ -Richtung der 6X Hexapod-Kinematik**

### 5.2.2 Linapod-Kinematik

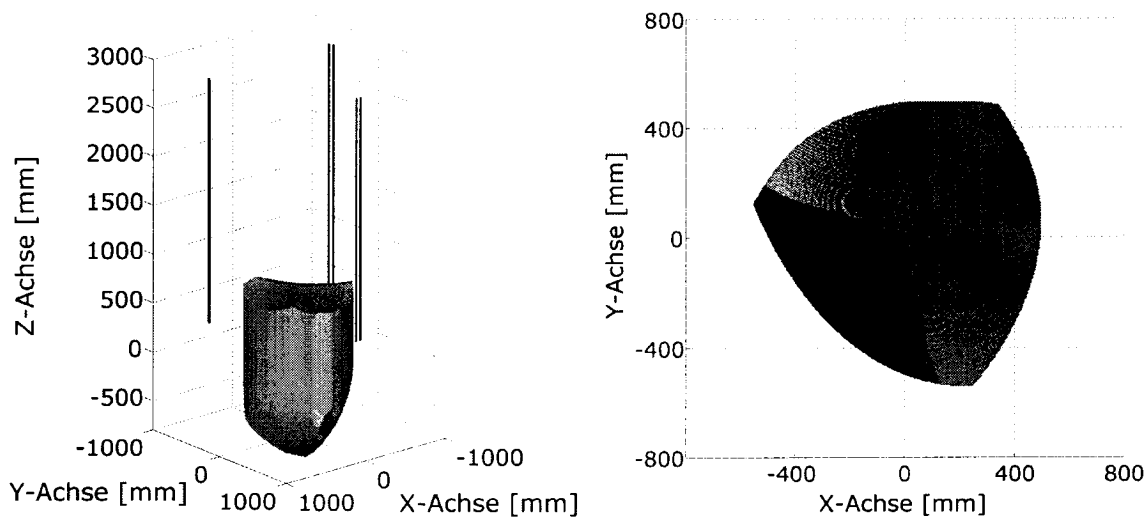
Die Linapod-Kinematik wurde für einen ähnlichen Einsatzbereich konzipiert wie die 6X Hexapod-Kinematik. Im Unterschied zu dieser wurde bei der Linapod-Kinematik aber das Prinzip des bewegten Fußpunkts verwendet. Die vertikalen Führungsbahnen der Linapod-Kinematik sind auf einem dreieckigen Grundriss angeordnet und parallel ausgerichtet. Im Unterschied zur Hexaglide-Kinematik ist die Spindelachse parallel zu den Führungsbahnen. Der Aufbau der Kinematik ist zusammen mit einem Foto der Maschinenstudie in Abbildung 5.21 schematisch dargestellt.



**Abbildung 5.21: Linapod-Kinematik: auf der linken Seite ein Foto der Maschinenstudie und auf der rechten Seite eine Prinzipskizze [Gar01]**

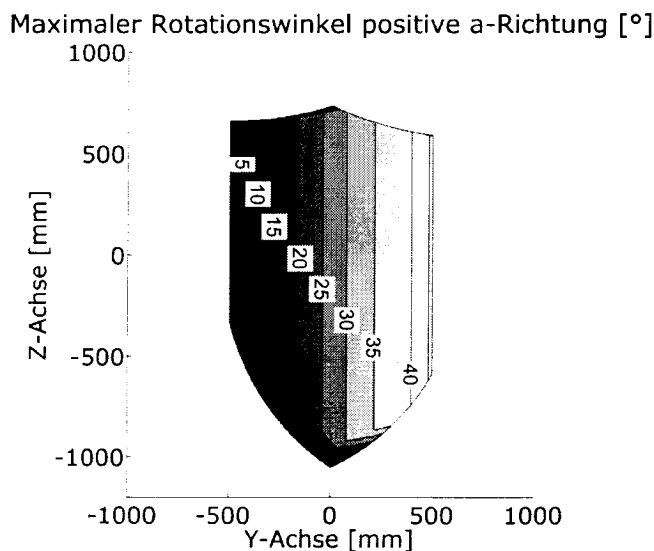
Der Arbeitsraum dieser Kinematik wird in Abbildung 5.22 in zwei Ansichten dargestellt: eine perspektivische Ansicht und eine Draufsicht. Die Lage der Führungsbahnen wird auf der linken Seite dieser Abbildung durch schwarze Linien gezeigt.

Der Arbeitsraum ist polygonförmig und hat ein Volumen von  $1.07 \text{ m}^3$  (Tetraeder-Verfahren mit einer Auflösung von  $\varepsilon = 3.125 \text{ mm}$ ). Die Begrenzung des Volumens in positive und negative z-Richtung ist durch drei Kugelsegmente gegeben.



**Abbildung 5.22: Arbeitsraum der Linapod-Kinematik**  
**Perspektivische Ansicht (links) und X-Y-Ebene (rechts)**

Für die Y-Z-Schnittebene werden in Abbildung 5.23 die maximal zulässigen Orientierungen des Werkzeugs in positive a-Richtung aufgetragen. Die durchschnittliche Orientierbarkeit des Werkzeugs beträgt für diese Richtung 24.9 Grad, der maximal zulässige Winkel beträgt 42 Grad. Die Verteilung ist ähnlich der der 6X Hexapod-Kinematik, der Bereich mit dem größten Rotationsvermögen des Werkzeugs liegt am Rande des Arbeitsraums.



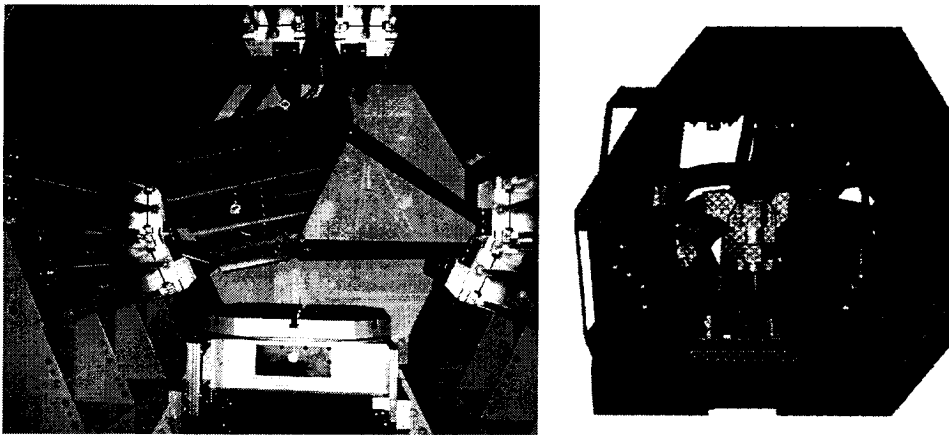
**Abbildung 5.23: Verteilung der maximal zulässigen Rotationswinkel**  
**in positive a-Richtung der Linapod-Kinematik**

Dem symmetrischen Aufbau der Kinematik entsprechend ist die Verteilung eine Funktion der y-Koordinate. Der Maschinentisch der Linapod-Kinematik befindet sich parallel zur X-Y Ebene bei einer z-Koordinate von Null. Wie in Abbildung 5.23

zu erkennen ist, liegt damit die Hälfte des kinematisch möglichen Arbeitsraums unterhalb des Maschinentisches und ist somit für Bearbeitungsaufgaben nicht nutzbar.

### 5.2.3 Paralix-Kinematik

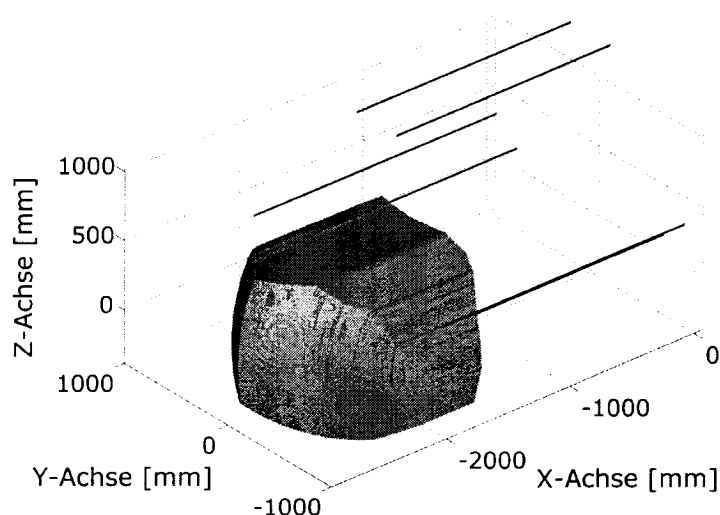
Bei der in Abbildung 5.24 gezeigten Paralix-Kinematik handelt es sich um eine Kinematik nach dem Glide-Prinzip. Die Führungsbahnen sind bei dieser Kinematik parallel und auf einem dreieckigen Grundriss horizontal angeordnet. Im Gegensatz zur Linapod-Kinematik ist die Spindelachse senkrecht zu den Führungsbahnen angeordnet. Der Einsatzbereich dieser Maschine ist die Gesenkfertigung. Um die für diesen Einsatzbereich notwendigen großen Schwenkwinkel zu realisieren, wurde die Kinematik so ausgelegt, dass ein großer Schwenkwinkel um eine Achse möglich wird. Durch eine Kombination mit einem Drehtisch, der auf der linken Seite der Abbildung zu erkennen ist, kann eine Fünfseitenbearbeitung ermöglicht werden.



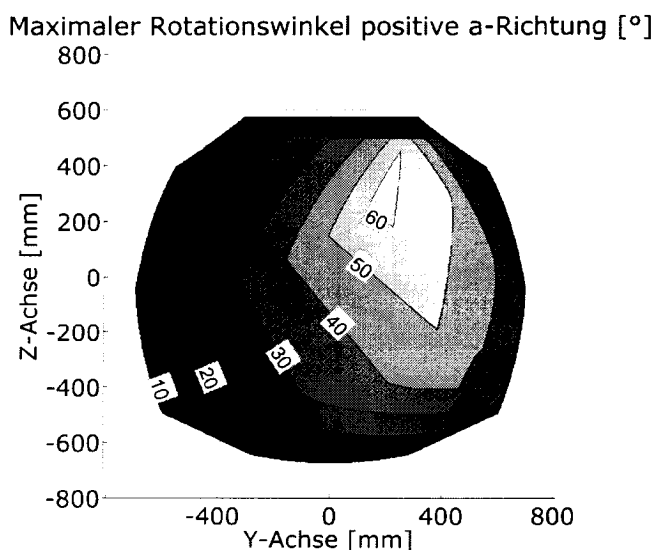
**Abbildung 5.24: Paralix-Kinematik: auf der linken Seite ein Foto der Maschinenstudie und auf der rechten Seite eine Prinzipskizze [Boe01]**

Der Arbeitsraum dieser Kinematik ist in Abbildung 5.25 dargestellt. Die Lage der sechs Führungsbahnen ist schematisch mit schwarzen Linien dargestellt. Die Begrenzung des Volumens erfolgt in x-Richtung durch Kugelsegmente, in y-Richtung durch Halbkreise und in z-Richtung durch Ebenen. Der Arbeitsraum hat eine annähernd quaderförmige Form und hat ein Volumen von  $3.4 \text{ m}^3$  (Tetraeder-Verfahren mit einer Auflösung von  $\varepsilon = 3.125 \text{ mm}$ ).

In Abbildung 5.26 wird der nahezu rechteckige Querschnitt des Arbeitsraums mit der Verteilung der maximal zulässigen Rotationswinkel des Werkzeugs um die positive a-Achse gezeigt. Die zur Berechnung gewählte Schnittebene hat eine x-Koordinate von  $x = -2000 \text{ mm}$ . Der maximal mögliche Rotationswinkel des Werkzeugs beträgt 62 Grad und der Durchschnittswert 30.5 Grad. Im Vergleich zu den anderen in diesem Kapitel vorgestellten Kinematiken weist diese Maschine damit die größten zulässigen Rotationswinkel auf. Ähnlich der Verteilung der Hexaglide-Kinematik wird der maximal mögliche Rotationswinkel innerhalb des Arbeitsraums erreicht.



**Abbildung 5.25: Perspektivische Ansicht des Arbeitsraums der Parolix-Kinematik**



**Abbildung 5.26: Verteilung der maximal zulässigen Rotationswinkel in positive  $\alpha$ -Richtung der Parolix-Kinematik**

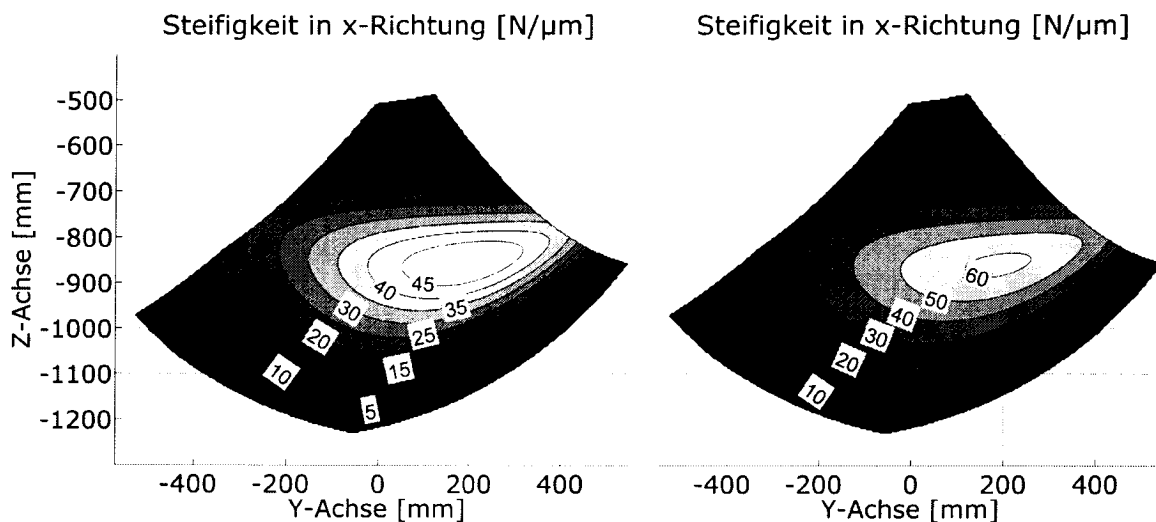
Ein Vergleich der verschiedenen Kinematiken zeigt sowohl die bauartbedingten Unterschiede bei den Arbeitsräumen als auch deren Einfluss auf die Eigenschaftsverteilung innerhalb des Arbeitsraums. Der direkte Vergleich der 6X Hexapod-Kinematik mit der Linapod-Kinematik zeigt darüber hinaus die Bedeutung des kinematischen Prinzips auf die Verteilung der Eigenschaften im Arbeitsraum. Durch das Beispiel wird deutlich, wie wesentlich eine genaue Anwendungsorientierung bei der Wahl des kinematischen Prinzips ist.

### 5.3 Komponentenoptimierung am Beispiel des Hexaglides

Die in Kapitel 4 entwickelten Simulationsmodelle können nicht nur für die Auslegung neuer Parallelkinematiken, sondern auch zur Schwachstellenanalyse bestehender Kinematiken eingesetzt werden. Das Potential einer auf einer solchen Schwachstellenanalyse basierenden Komponentenoptimierung wird am Beispiel der Gelenke der Hexaglide-Kinematik untersucht. Eine Variation verschiedener Eigenschaftswerte einzelner Maschinenkomponenten mit anschließendem Vergleich der Simulationsergebnisse zeigt, dass die in der Hexaglide-Kinematik eingesetzten Gelenke die schwächsten Glieder der kinematischen Kette sind. Eine Erhöhung der Steifigkeit der Gelenke wirkt sich damit direkt auf die Steifigkeit der Gesamtmaschine aus.

Die mit dem Simulationswerkzeug berechnete Verteilung der statischen Steifigkeit in x-Richtung für die alten und die verbesserten Gelenke wird in Abbildung 5.27 gezeigt. Die diesen Verteilungen zugrunde liegenden winkelabhängigen Steifigkeiten und die zur Erhöhung der Steifigkeit durchgeführten Änderungen an den Gelenken sind in Kapitel 3.2 zusammengefasst.

Die Verteilung weist für beide Darstellungen ein Maximum in der Mitte und gegen den Rand hin abnehmende Steifigkeitswerte auf. Dies zeigt, dass im Zentrum des Arbeitsraums der Einfluss der einzelnen Maschinenkomponenten und am Rand der Einfluss der Kinematik für die Steifigkeit der Parallelkinematik entscheidend sind.



**Abbildung 5.27: Verteilung der statischen Steifigkeit in x-Richtung der Hexaglide-Kinematik mit alten (links) und verbesserten (rechts) Gelenken**

Der in Tabelle 5.2 dargestellte Vergleich der maximalen und der durchschnittlichen Steifigkeitswerte bestätigt dieses Ergebnis. Die Maximalwerte der Steifigkeit steigen in x-Richtung um 30 Prozent und in y- und z-Richtung um 60 Prozent. Die Durchschnittswerte steigen dagegen nur zwischen 25 und 35 Prozent. Daraus wird deutlich, dass der Verbesserung der statischen und dynamischen Eigenschaften durch Komponentenoptimierung Grenzen gesetzt sind. Es zeigt aber auch das Potential einer gezielten Verbesserung steifigkeitsbestimmender Bauteile.

Steifigkeiten [N/ $\mu$ m]	alte Gelenke	verbesserte Gelenke	
	abs	abs	%
x-Richtung Maximum	49.56	64.69	+30.6
x-Richtung Durchschnitt	19.32	24.27	+25.6
y-Richtung Maximum	5.54	9.01	+62.3
y-Richtung Durchschnitt	2.69	3.50	+30.1
z-Richtung Maximum	120.90	191.44	+58.3
z-Richtung Durchschnitt	17.52	23.50	+34.1

**Tabelle 5.2: Vergleich der Steifigkeitswerte mit alten und verbesserten Gelenken**

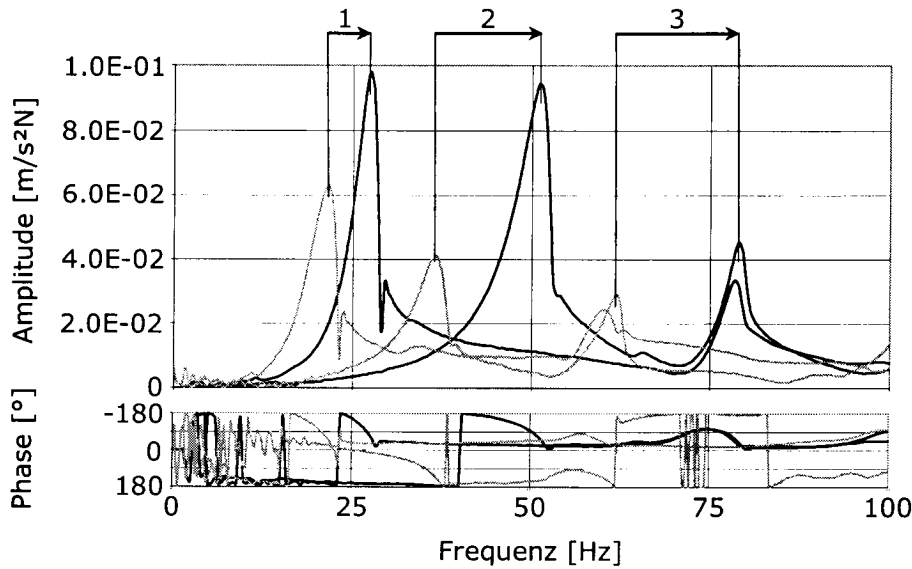
Die Verwendung von Stahl anstelle von Aluminium bei den Gelenken führt zu einer erhöhten Gelenkmasse an den Antriebssystemen und an der Plattform. Für die Gelenke mit zwei Freiheitsgraden beträgt der Massenzuwachs 1.8 kg und für die Gelenke mit drei Freiheitsgraden 2.35 kg. Die an der Kinematik mit alten und neuen Gelenken durchgeführten Modalanalysen zeigen, dass die ersten drei Eigenfrequenzen des Systems trotz des Gewichtszuwachses um mindestens 27 Prozent erhöht wurden, was auf die erhöhte Steifigkeit der Gelenke zurückzuführen ist.

Die Schwingungsantwort der Plattform in x- und y-Richtung für eine Position in der Mitte des Arbeitsraums ( $x = y = 0$ ,  $z = -950$  mm) und eine senkrechte Orientierung des Werkzeugs ( $a = b = c = 0$  Grad) ist in Abbildung 5.28 dargestellt. Der Frequenzverlauf der Kinematik mit verbesserten Gelenken ist mit schwarzen Linien und der mit alten Gelenken mit grauen Linien dargestellt. Die Verschiebung der Eigenfrequenzen durch den Einsatz der neuen Gelenke ist mit Pfeilen und den Nummern 1, 2 und 3 bezeichnet.

Die zur ersten Eigenfrequenz gehörende Schwingungsform ist in Abbildung 4.31 gezeigt. Es handelt sich um eine Rotation um die x-Achse mit einem zusätzlichen leichten Abkippen um die y-Achse. Die zur zweiten Eigenfrequenz gehörende Schwingungsform beschreibt eine Rotation um die y-Achse und die der dritten eine Rotation um die z-Achse. In Abbildung 5.28 sind diese Zusammenhänge durch die Systemantworten in x- (1. Eigenfrequenz), in y- (2. Eigenfrequenz) und in x- und y-Richtung (3. Eigenfrequenz) zu erkennen.

Neben der Verschiebung der Eigenfrequenzen ist eine deutliche Erhöhung der Schwingungsamplituden durch die neuen Gelenken zu erkennen. Dies ist auf die geringere Systemdämpfung durch die Reduktion der Schnittstellen in den neuen Gelenken zurückzuführen.





**Abbildung 5.28: Frequenzgang und die ersten drei Eigenfrequenzen der Hexaglide-Kinematik mit alten Gelenken (graue Linien) und verbesserten Gelenken (schwarze Linien)**

Die absoluten und relativen Änderungen der Frequenzen und Amplituden sind in Tabelle 5.3 für die alten und die verbesserten Gelenke gegenübergestellt.

Nr	Frequenz und Amplitude	alte Gelenke			neue Gelenke	
		absolut	absolut	%	absolut	%
1	Frequenz [Hz]	21.6	27.5	+27.3		
	Amplitude [m/s²N]	$6.2 \cdot 10^{-2}$	$9.8 \cdot 10^{-2}$	+58.1		
2	Frequenz [Hz]	36.9	51.0	+38.2		
	Amplitude [m/s²N]	$4.1 \cdot 10^{-2}$	$9.4 \cdot 10^{-2}$	+129.3		
3	Frequenz [Hz]	61.8	79.0	+27.8		
	Amplitude [m/s²N]	$2.8 \cdot 10^{-2}$	$4.5 \cdot 10^{-2}$	+71.4		

**Tabelle 5.3: Vergleich der Eigenfrequenzen und der Schwingungsamplituden mit alten und verbesserten Gelenken**

Die durch die Verbesserung der Gelenke um 27 Prozent erhöhte erste Eigenfrequenz der Hexaglide-Kinematik hat eine um 58 Prozent erhöhte Schwingungsamplitude zur Folge. Da sowohl die Frequenz als auch die Größe der entsprechenden Schwingungsamplitude einen Einfluss auf die Genauigkeit und die Oberflächenqualität eines Werkstücks haben, müssen beide bei der Auslegung und Optimierung einer Parallelkinematik beachtet werden.

Am Beispiel einer Schwachstellenanalyse konnten das Potential und die Grenzen einer Komponenteoptimierung aufgezeigt werden. Wie das Ergebnis zeigt, können die statischen und dynamischen Eigenschaften nur in den Bereichen verbessert werden, in denen die kinematische Übersetzung nicht der begrenzende Faktor ist. Der Verbesserung der Eigenschaften von Parallelkinematiken durch Optimie-

rung einzelner Maschinenkomponenten sind damit Grenzen gesetzt. Das in diesem Beispiel dargestellte Verbesserungspotential zeigt aber auch die Bedeutung einer gezielten Schwachstellenanalyse.

#### 5.4 Geometrieoptimierung am Beispiel des Hexaglides

Neben der Optimierung einzelner Maschinenkomponenten können die in Kapitel 4 entwickelten Simulationsmodelle auch zur Geometrieoptimierung eingesetzt werden. Am Beispiel der Antriebsgelenke der Hexaglide-Kinematik werden die Auswirkungen einer optimierten Orientierung dieser auf die Verteilung der Steifigkeit der Gesamtmaschine untersucht. Die Untersuchung konzentriert sich auf die Antriebsgelenke, da die Orientierung der Plattformgelenke nicht ohne Einschränkungen bei den maximal zulässigen Schwenkwinkeln der Plattform verändert werden kann. Da die Antriebsgelenke aber über eine deutliche geringere winkelabhängige Steifigkeit verfügen (vgl. Abbildung 3.32), wirkt sich eine höhere Steifigkeit dieser direkt auf die Steifigkeit der Gesamtmaschine aus.

Die auf der linken Seite von Abbildung 3.34 gezeigte Verteilung des Kippwinkels des ersten Antriebsgelenks führt zu den in Tabelle 3.4 zusammengefassten maximalen und durchschnittlichen Steifigkeitswerten der Antriebsgelenke. Bei dieser Konfiguration der Hexaglide-Kinematik sind die Antriebsgelenke senkrecht auf die Antriebschlitzen montiert, woraus sich die auf der linken Seite von Tabelle 5.4 gezeigten Richtungsvektoren für die erste Gelenkachse und den Winkelbezugsvektor ergeben.

i	Ausgangsorientierung		Optimierte Orientierung	
	$a_i$	$b_i$	$a_i$	$b_i$
1	-1.000	-1.000	-0.478	-0.956
	0.000	0.000	-0.146	-0.292
	0.000	0.000	-0.866	0.000
2	-1.000	1.000	0.478	0.956
	0.000	0.000	-0.146	-0.292
	0.000	0.000	-0.866	0.000
3	-1.000	-1.000	-0.446	-0.982
	0.000	0.000	-0.086	-0.191
	0.000	0.000	-0.891	0.000
4	-1.000	1.000	0.446	-0.982
	0.000	0.000	-0.086	0.191
	0.000	0.000	-0.891	0.000
5	-1.000	-1.000	-0.427	-0.940
	0.000	0.000	0.155	0.342
	0.000	0.000	-0.891	0.000
6	-1.000	1.000	0.427	0.940
	0.000	0.000	0.155	0.342
	0.000	0.000	-0.891	0.000

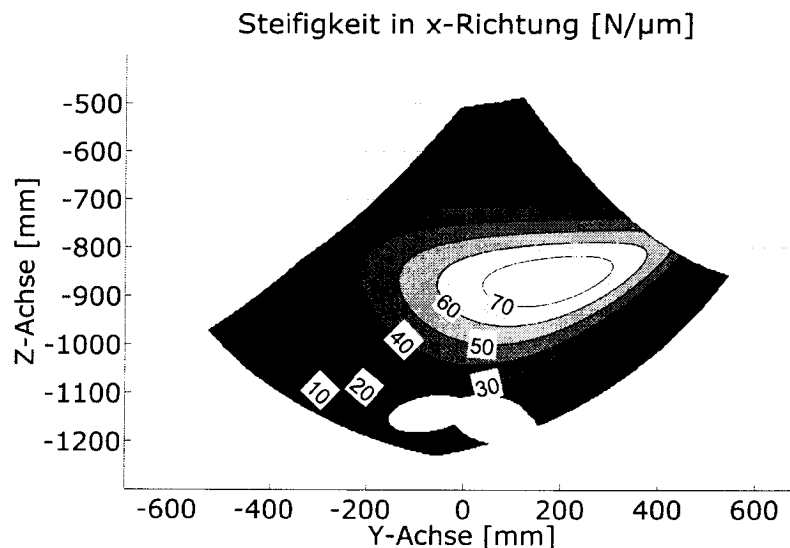
**Tabelle 5.4: Orientierung der Antriebsgelenke der Hexaglide-Kinematik (für die Lage von  $a_i$  und  $b_i$  vgl. Abbildung 3.11)**

Durch eine Veränderung der Orientierung der Antriebsgelenke können die innerhalb des Arbeitsraums anliegenden Gelenkwinkel zu kleineren Werten verschoben werden. Die Maximal-, Durchschnitts- und Minimalwerte der Kippwinkel, die mit der auf der rechten Seite von Tabelle 5.4 dargestellten optimierten Orientierung erreicht werden, sind in Tabelle 5.5 den Werten der Ausgangsorientierung gegenübergestellt.

	Ausgangsorientierung		optimierte Orientierung		Erhöhung der Steifigkeit [%]
	Kippwinkel [Grad]	Steifigkeit [N/ $\mu\text{m}$ ]	Kippwinkel [Grad]	Steifigkeit [N/ $\mu\text{m}$ ]	
Max. Winkel	79.0	30.3	49.8	44.5	+46.9
Durch. Winkel	52.1	42.6	27.2	78.8	+85.0
Min. Winkel	21.8	98.4	5.0	218.5	+122.0

**Tabelle 5.5: Verteilung der Kippwinkel und der zu diesen Winkeln gehörenden Gelenksteifigkeiten bei der Ausgangsorientierung und der optimierten Orientierung der Antriebsgelenke**

Wie aus Tabelle 5.5 deutlich wird, verschiebt die optimierte Orientierung der Antriebsgelenke die Verteilung der Kippwinkel zu kleineren Winkeln. Dies führt aufgrund des in Abbildung 3.32 gezeigten Zusammenhangs zu höheren Steifigkeitswerten der Gelenke. Wird mit dieser optimierten Orientierung der Antriebsgelenke die Steifigkeit der Kinematik in x-Richtung bestimmt, so ergibt sich die in Abbildung 5.29 dargestellte Verteilung.



**Abbildung 5.29: Verteilung der statischen Steifigkeit in x-Richtung der Hexaglide-Kinematik mit optimierter Orientierung der Antriebsgelenke**

Der Arbeitsraum der Kinematik wird durch die optimierte Orientierung der Antriebsgelenke in z-Richtung beschnitten. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der minimal zulässige Kippwinkel der Antriebsgelenke von dem Simulationswerkzeug

auf 5 Grad begrenzt wird, da sich die Gelenke bei kleineren Winkeln einer singulären Lage annähern. Der in z-Richtung beschnittene Arbeitsraum ist in der Praxis allerdings nicht von Bedeutung, da das Maschinenbett bei  $z = -1100$  mm liegt.

Die veränderte Orientierung der Antriebsgelenke erhöht die Maximal- und Durchschnittswerte der Steifigkeit in x- und z-Richtung wie Tabelle 5.6 zeigt. In y-Richtung wird der maximale Steifigkeitswert um 14 Prozent vermindert, der Durchschnittswert aber um 22 Prozent erhöht.

Steifigkeiten [N/ $\mu$ m]	Ausgangsorientierung	optimierte Orientierung	
	absolut	absolut	%
x-Richtung Maximum	64.69	76.97	+19.0
x-Richtung Durchschnitt	24.27	31.87	+31.3
y-Richtung Maximum	9.01	7.80	- 14.3
y-Richtung Durchschnitt	3.50	4.27	+22.0
z-Richtung Maximum	191.44	235.63	+23.1
z-Richtung Durchschnitt	23.50	25.70	+ 9.4

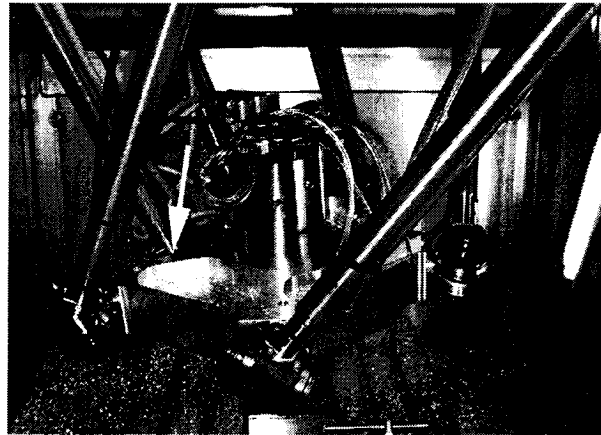
**Tabelle 5.6: Vergleich der Steifigkeitswerte bei verschiedenen Vororientierungen der Antriebsgelenke**

Mit diesem Beispiel konnte die Bedeutung einer sorgfältigen geometrischen Auslegung bei Parallelkinematiken gezeigt werden. Im Gegensatz zur Optimierung einzelnen Maschinenkomponenten können mit einer sorgfältigen Geometrieauslegung nicht nur die Maximalwerte sondern vor allem die im Einsatz wichtigen Durchschnittswerte der Eigenschaftsverteilung innerhalb des Arbeitsraums verbessert werden.

### 5.5 Vergleich Simulation - Messung

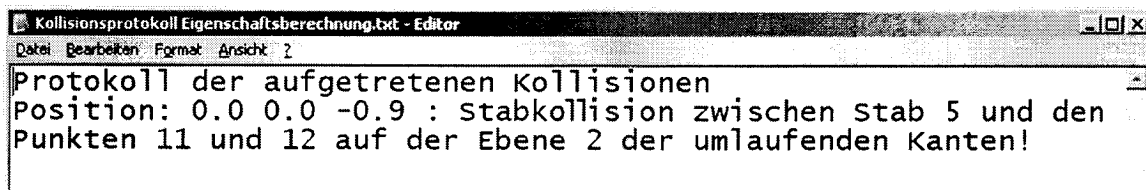
Zur Verifikation der in Kapitel 3 und 4 aufgestellten Modelle wurden an der Hexaglide-Kinematik verschiedene Versuche und Messungen durchgeführt. Da sich die kinematischen Eigenschaften am Rand des Arbeitsraums durch Singularitäten und extreme Hebelverhältnisse stark verschlechtern, können in diesen Bereichen nur sehr eingeschränkt Messungen durchgeführt werden. Die zur Prüfung der Modelle durchgeführten Messungen beschränken sich daher auf zentrale Bereiche des Arbeitsraums.

Zur Prüfung der in Anhang B dargestellten geometrischen und physikalischen Randbedingungen wurden mit dem Simulationswerkzeug verschiedene Positionen und Orientierungen ermittelt, an denen Kollisionen zwischen einzelnen Gliedern der kinematischen Kette auftreten, die ausreichend weit von einer Singularität entfernt sind. Die Hexaglide-Werkzeugmaschine wurde anschließend an diese Positionen und Orientierungen herangefahren und die physikalisch zulässige Grenzlage mit den Simulationsergebnissen verglichen. In Abbildung 5.30 wird eine solche Prüfung für die Rotation um die z-Achse gezeigt. Die zu erwartende Kollision ist mit einem weißen Pfeil markiert und stimmt mit der Vorhersage aus dem Kollisionsprotokoll des Simulationswerkzeugs überein.



**Abbildung 5.30: Plattform der Hexaglide-Parallelkinematik bei einer Orientierung von  $a = 8$ ,  $b = 15$ ,  $c = -51$  Grad**

Der Auszug des zu dieser Position und Orientierung gehörenden Kollisionsprotokolls, das durch das Simulationswerkzeug erstellt wurde, ist in Abbildung 5.31 gezeigt.



**Abbildung 5.31: Kollisionsprotokoll des Simulationswerkzeugs**

Es konnte gezeigt werden, dass die in Anhang B aufgestellten Randbedingungen die geometrischen und physikalischen Grenzen des Arbeitsraums erfassen. Die mit dem Simulationswerkzeug berechneten Grenzen des Arbeitsraums stimmen daher mit den an der Maschine messbaren Grenzen überein.

Zur Prüfung des Strukturmodells wurden die an der Maschine gemessenen Steifigkeitswerte in den drei Raumrichtungen mit verschiedenen Simulationsergebnissen verglichen (vgl. Tabelle 5.7). Zum einen wurden für die Simulation die Gelenksteifigkeitswerte verwendet, die mithilfe der FEM-Analyse bestimmt wurden (vgl. Kapitel 3.2.2) und zum anderen die Gelenksteifigkeitswerte, die mit den Messungen auf der Zugprüfmaschine ermittelt wurden (vgl. Kapitel 3.2.3).

Der Vergleich der verschiedenen Simulationsergebnisse mit den Messwerten zeigt, dass die genaue Kenntnis des winkelabhängigen Steifigkeitsverhaltens der Gelenke für die Genauigkeit der Simulationsergebnisse entscheidend ist. Da die Steifigkeit der Gelenke mit zwei Freiheitsgraden bis zu 100 Prozent von den Werten abweicht, die mithilfe der FEM-Analysen berechnet wurden, weichen die hierauf basierenden Simulationsergebnisse deutlich von den gemessenen Eigenschaftswerten ab.

Werden der Simulation die auf der Zugprüfmaschine ermittelten Steifigkeitswerte der Gelenke zugrunde gelegt, weichen die Simulationsergebnisse nur wenig von den gemessenen Eigenschaftswerten der Kinematik ab. Die dargestellten Werte

beziehen sich auf einen Punkt in der Mitte des Arbeitsraums ( $x = y = 0$ ,  $z = -1000$  mm) bei senkrechter Orientierung des Werkzeugs ( $a = b = c = 0$  Grad).

Statische Steifigkeit	Messung	Simulation basierend auf FEM Analysen	Simulation basierend auf Komponentenmessungen
x-Richtung	32.5 N/ $\mu$ m	27.5 N/ $\mu$ m	33.8 N/ $\mu$ m
y-Richtung	2.5 N/ $\mu$ m	2.6 N/ $\mu$ m	2.7 N/ $\mu$ m
z-Richtung	50.0 N/ $\mu$ m	36.1 N/ $\mu$ m	50.9 N/ $\mu$ m

**Tabelle 5.7: Vergleich von Mess- und Simulationswerten der statischen Steifigkeit an der Position  $x = y = 0$  und  $z = -1000$  mm bei einer Plattformorientierung von  $a = b = c = 0$  Grad**

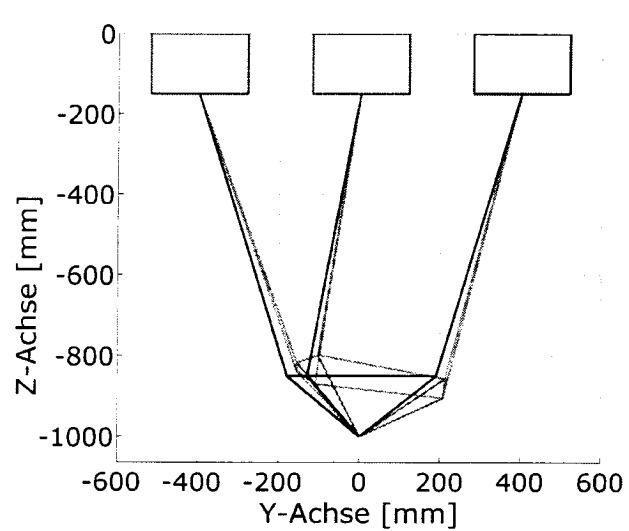
Ein Vergleich der gemessenen und berechneten ersten Eigenfrequenzen für die gleiche Position und Orientierung zeigt ebenfalls die Bedeutung der genauen Kenntnis der Komponenteneigenschaften. Die Abweichungen der Simulationswerte von den gemessenen Eigenschaftswerten der Kinematik ist für die Simulationswerte, die auf den gemessenen Komponenteneigenschaften beruhen wesentlich geringer, als für die mithilfe der FEM-Analysen ermittelten Werte. Der Vergleich der verschiedenen Simulationswerte und der Messwerte ist in Tabelle 5.8 gezeigt.

Eigenfrequenz	Messung	Simulation basierend auf FEM Analysen	Simulation basierend auf Komponentenmessungen
1. Eigenfrequenz	27.5 Hz	21.9 Hz	26.3 Hz
2. Eigenfrequenz	51.0 Hz	36.4 Hz	49.1 Hz
3. Eigenfrequenz	79.0 Hz	58.6 Hz	76.7 Hz

**Tabelle 5.8: Vergleich von Mess- und Simulationswerten der ersten Eigenfrequenzen an der Position  $x = y = 0$ ,  $z = -1000$  mm bei einer Plattformorientierung von  $a = b = c = 0$  Grad**

Die zur ersten Eigenfrequenz gehörende Schwingungsform ist in Abbildung 5.32 dargestellt. Der Abbildung liegen die gemessenen Eigenschaftswerte der Gelenke zugrunde. Auf der linken Seite der Abbildung ist die mit einer Modalanalyse identifizierte Schwingungsform und auf der rechten Seite die mit dem Simulationswerkzeug berechnete Schwingungsform dargestellt. Beide Abbildungen zeigen übereinstimmend eine Schwingung um die x-Achse mit einem leichten Abkippen über die y-Achse. Die zu den Eigenfrequenzen gehörende Schwingungsformen können mit dem Simulationswerkzeug eindeutig identifiziert werden.

An den aufgeführten Messungen konnte in diesem Beispiel die Genauigkeit der dem Simulationswerkzeug zugrunde liegenden Modelle bestimmt werden. Wie ein Vergleich der Simulationswerte zeigt, ist die genaue Kenntnis der Eigenschaften der einzelnen Maschinenkomponenten für die Genauigkeit der Simulationswerte entscheidend. Werden die gemessenen Eigenschaftswerte der Komponenten dem in Kapitel 4.2 vorgestellte Strukturmodell zugrunde gelegt, so ergibt sich eine gute Übereinstimmung von Simulation und Messung.



**Abbildung 5.32: Erste Eigenschwingform der Hexaglide-Kinematik. Auf der linken Seite das Ergebnis einer Modalanalyse und auf der rechten Seite die simulierte Schwingform basierend auf den Komponentenmessungen**

Das Strukturmodell berücksichtigt damit die wesentlichen Einflussparameter einer Parallelkinematik mit sechs Freiheitsgraden. Es konnte gezeigt werden, dass die Grenzen des Arbeitsraums durch die in Anhang B zusammengefassten geometrischen und physikalischen Randbedingungen bestimmt werden. Darüber hinaus wird deutlich, dass das statische und dynamische Verhalten einer Parallelkinematik mit den in Kapitel 3 und 4 entwickelten Modellen hinreichend genau berechnet werden kann.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

### 6.1 Zusammenfassung

Die statischen und dynamischen Eigenschaften einer parallelkinematischen Werkzeugmaschine werden maßgeblich von zwei Faktoren bestimmt: dem Aufbau der Kinematik und den Eigenschaften der eingesetzten Maschinenkomponenten. Während im Bereich der kinematischen Analyse und Optimierung bereits sehr umfassende Untersuchungen durchgeführt worden sind, wurden die Eigenschaften der einzelnen Maschinenkomponenten und deren Einfluss auf die Gesamtmaschine bisher weitestgehend vernachlässigt.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit konnte gezeigt werden, dass der Einfluss der Antriebe und der Gelenke auf die statischen und dynamischen Eigenschaften einer parallelkinematischen Werkzeugmaschine wesentlich ist und daher nicht vernachlässigt werden darf. Anhand von zwei Beispielen, der Hexaglide-Kinematik, die auf dem Prinzip des bewegten Fußpunkts basiert, und der 6X Hexapod-Kinematik, die auf dem Prinzip der längenveränderlichen Stäbe aufbaut, ist der Einfluss der Antriebe und der Gelenke untersucht und quantifiziert worden. Grundlage dieser Berechnungen sind die in dieser Arbeit aufgestellten Komponenten- und Kinematikmodelle und ihre Integration in ein Simulationswerkzeug.

Im Rahmen der Untersuchungen und Modellierungen der Maschinenkomponenten konnten die folgenden Zusammenhänge aufgezeigt werden.

Der Einfluss der hubabhängigen Steifigkeit von Kugelgewindetrieben mit indirektem Messsystem auf die Verteilung der Steifigkeit innerhalb des Arbeitsraums einer Parallekinematik wurde am Beispiel der 6X Hexapod-Kinematik untersucht. Im Vergleich zu einer als konstant angenommenen Steifigkeit ergeben sich bei Berücksichtigung der hubabhängigen Steifigkeit der Kugelgewindetribe Abweichungen der statischen Steifigkeit der Kinematik in z-Richtung von 19 Prozent. Durch die Wahl eines Antriebssystems mit hubunabhängiger Steifigkeit kann die Steifigkeit der 6X Hexapod-Kinematik damit um diesen Betrag gesteigert werden. Um den Einfluss verschiedener Antriebssysteme berechnen zu können, wurden daher im Rahmen dieser Arbeit Antriebsmodelle sowohl für Lineardirektantriebe als auch Kugelgewindetribe mit direktem und indirektem Messsystem entwickelt.

Da die winkelabhängige Steifigkeit der in parallelkinematischen Werkzeugmaschinen eingesetzten Gelenke bisher nicht untersucht wurde, stellt deren Bestimmung und Modellierung einen Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit dar. Ausgehend von der Berechnung der für die Modellierung notwendigen Gelenkwinkel ist der Einfluss des Kippwinkels auf die Steifigkeit eines Gelenks an einem einfachen analytischen Modell approximiert worden. Durch an einem INA-Kardangeln bei verschiedenen Winkellagen durchgeführte Steifigkeitsmessungen konnte gezeigt werden, dass die für das analytische Modell getroffene Annahme, den Einfluss der Gelenkbauteile mit Ausnahme der Axial- und Radiallager zu vernachlässigen, unzulässig ist. Die an diesem Gelenk durchgeführten Versuche zeigten darüber hinaus, dass die Steifigkeit eines solchen Gelenks aufgrund des komplexen mechanischen Aufbaus nicht nur von dem Kipp- sondern auch von dem Schwenkwinkel abhängig ist. Um eine möglichst hohe Steifigkeit innerhalb des Arbeitsraums si-



cherzustellen, muss bei der Auslegung einer Parallelkinematik die Vororientierung der Gelenke so gewählt werden, dass die durchschnittlichen Schwenk- und Kippwinkel mit den Steifigkeitsmaxima der Gelenke zusammenfallen.

An den Gelenken der Hexaglide-Kinematik mit zwei und drei Freiheitsgraden konnte anhand eines Vergleichs von Mess- und Simulationswerten nachgewiesen werden, dass die Genauigkeit von Finiten-Element-Analysen durch die Komplexität des Aufbaus der Gelenke begrenzt ist. Bei den Gelenken mit drei Freiheitsgraden, bei denen hauptsächlich die Biegesteifigkeit einer Welle die Steifigkeit des Gelenks bestimmt, konnte eine gute Übereinstimmung zwischen FEM-Simulation und Messung festgestellt werden. Diese bei den Gelenken mit zwei Freiheitsgraden deutlich schwächer ausgeprägte Übereinstimmung kann auf die sehr komplexen Deformationen der inneren Gelenkbauteile zurückgeführt werden. Die bei den Messungen an diesen Gelenken beobachtete Abweichung des qualitativen Verlaufs der winkelabhängigen Steifigkeit von dem analytisch erwarteten Verlauf, konnte mit Untersuchungen an Finiten-Element-Modellen nicht nachvollzogen werden. Die Bedeutung der winkelabhängigen Steifigkeit der Gelenke für die Verteilung der statischen Steifigkeit in x-Richtung ist am Beispiel der statischen Steifigkeit der Hexaglide-Kinematik gezeigt worden. Bei diesem Beispiel ergaben sich Abweichungen von bis zu 42 Prozent zu den Werten, die mit konstanter Gelenksteifigkeit berechnet wurden.

Die Modelle der Maschinenkomponenten wurden mit weiteren kinematischen Modellen und Algorithmen zu einem Simulationswerkzeug zusammengefasst, mit dem sich wesentliche Eigenschaften einer Parallelkinematik berechnen lassen. Zu diesen wesentlichen Eigenschaften gehören verschiedene Arbeitsräume, statische und dynamische Steifigkeiten und das Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverhalten.

Zur Berechnung der verschiedenen Arbeitsräume und der darin möglichen Werkzeugorientierungen sind im Rahmen der vorliegenden Arbeit für zwei mathematische Verfahren, die bisher noch nicht in diesem Bereich eingesetzt worden sind, Algorithmen entwickelt worden, die im Gegensatz zu den bisher verwendeten Algorithmen wesentliche Vorteile bieten. So können mit den auf dem Octree- und dem Prädiktor-Korrektor-Verfahren beruhenden Algorithmen sowohl verschiedene Arbeitsräume der Hexaglide- als auch der 6X Hexapod-Kinematik in sehr kurzer Zeit mit hoher Auflösung und bei gleichmäßigem Randpunktabstand berechnet werden. Die höhere Leistungsfähigkeit der Algorithmen führt bei dem Arbeitsraum der Hexaglide-Kinematik in Abhängigkeit der gewählten Auflösung zu einer Reduktion der Rechenzeit zwischen 97 und 99.6 Prozent.

Um die statischen und dynamischen Eigenschaften sowohl von der Hexaglide- als auch von der 6X Hexapod-Kinematik in einem Modell berechnen zu können, wurden die oben dargestellten Komponentenmodelle in ein von Weikert [Wei00] vorgestelltes Mehrkörpermodell integriert, das hierzu von 12 auf 30 Freiheitsgrade erweitert und verallgemeinert worden ist. Im Gegensatz zu Weikerts Modell sind mit dem in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Modell nicht nur qualitative, sondern auch quantitative Aussagen möglich. Am Beispiel einer Biglide- und einer Bipod-Kinematik wird der Aufbau des Mehrkörpermodells und die kinematikbedingten Unterschiede zwischen Glide- und Pod-Kinematiken veranschaulicht.

In das Simulationsmodell wurden darüber hinaus Algorithmen integriert, mit denen das Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverhalten von Parallelkinematiken in Abhängigkeit von der Position und Orientierung des Werkzeugs berechnet werden können. Im Gegensatz zu bestehenden Modellen wurde hierbei sowohl die Schwerkraft als auch die an den Antrieben auftretende Reibung berücksichtigt.

Anhand von verschiedenen Beispielen ist abschließend der Einfluss von Maschinenkomponenten auf die Verteilung der Eigenschaften von parallelkinematischen Werkzeugmaschinen untersucht worden. Hierbei ist gezeigt worden, dass nicht nur die Eigenschaften, sondern auch die geometrische Ausrichtung der Maschinenkomponenten einen erheblichen Einfluss auf die Eigenschaften einer Parallelkinematik haben. Am Beispiel unterschiedlicher Hexaglide- und Hexapod-Kinematiken sind darüber hinaus die bauartbedingten Unterschiede der beiden kinematischen Prinzipien (Glide - Pod) gezeigt worden.

Das im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelte Simulationswerkzeug, das nicht nur den Einfluss der Kinematik sondern auch den Einfluss der einzelnen Maschinenkomponenten berücksichtigt, ermöglicht damit die zielgerichtete Untersuchung und Optimierung von parallelkinematischen Werkzeugmaschinen und deren Komponenten.

## 6.2 Ausblick

Die im Rahmen dieser Arbeit entstandene Software stellt eine Simulationsumgebung dar, in die verschiedenste Algorithmen integriert worden sind. Durch eine Weiterentwicklung des Simulationswerkzeugs und den Einbezug weiterer Komponentenmodelle kann die Anwendungstauglichkeit und Genauigkeit weiter erhöht werden. Folgende Schwerpunkte sollten in zukünftigen Arbeiten gesetzt werden:

- Da bei der Entwicklung des Simulationswerkzeugs der Werkzeugmaschinenbau im Vordergrund stand, wurden nur Linearachsen als Antriebe berücksichtigt. Durch eine Erweiterung des Simulationswerkzeugs um Rundachsen als Antriebe könnte das Simulationswerkzeug auch im Robotikbereich eingesetzt werden.
- Das Simulationswerkzeug sollte um eine Bewertungsmethodik erweitert werden, die eine gewichtete Bewertung der berechneten Kennwerte und Verteilungen ermöglicht. Hierdurch würde der Vergleich verschiedener Kinematiken erleichtert.
- Durch die Einbindung eines Optimierungsalgorithmus kann das Simulationswerkzeug zu einer Entwicklungsumgebung ausgebaut werden, die den Ingenieur nicht nur passiv unterstützt, sondern aktiv Gestaltungsvorschläge erzeugt.
- Durch eine Parallelisierung der verwendeten Algorithmen kann die zur Simulation benötigte Rechenzeit weiter reduziert und die Anwendungstauglichkeit erhöht werden. Dies hat vor allem in einem industriellen Entwicklungsumfeld hohe Bedeutung.
- Die Eingabe der für die Simulation notwendigen Daten erfolgt zur Zeit über verschiedene Eingabefenster. Um das Simulationswerkzeug in einer industriellen Entwicklungsumgebung besser integrieren zu können, sollte in Zukunft eine Schnittstelle zu den dort eingesetzten CAD-Programmen geschaffen werden.

## Anhang A: Kinematische Grundlagen

In diesem Anhang werden die für die Simulation wesentlichen kinematischen Grundlagen von Parallelkinematiken dargestellt.

### A.1 Allgemeine Lagebeschreibungen

Bei Werkzeugmaschinen und Robotern lassen sich in der Regel mindestens zwei verschiedene Koordinatensysteme unterscheiden. Zum einen ein kartesisches Koordinatensystem, in dem das Werkzeug bewegt wird. Da dieses Koordinatensystem absolut und raumfest ist, kommt es dem menschlichen Vorstellungsvermögen entgegen. Die Programmierung einer Werkzeugmaschine oder eines Roboters erfolgt daher meist in diesem Koordinatensystem. Da dieses Koordinatensystem fest mit der Maschine verbunden ist, wird es im Folgenden als Maschinenkoordinatensystem bezeichnet.

Zum anderen wird ein Antriebskoordinatensystem verwendet, bei dem jeder Antriebsachse eine Koordinate zugeordnet wird. Die Bewegung auf der jeweiligen Antriebsachse wird durch den maximalen Verfahrweg beschränkt, der sich als Abstand der minimalen und der maximalen Koordinate auf der Achse ergibt (vgl. Anhang B.1). Die Position und Orientierung des Werkzeugs wird durch die Kombination der Antriebskoordinaten festgelegt, wobei diese Zuordnung nicht eindeutig sein muss. Eine gegebene Werkzeugposition kann je nach Anordnung und Lage der Antriebsachsen durch mehrere voneinander verschiedene Antriebskoordinaten erreicht werden.

Die Umrechnung der Antriebskoordinaten in die Lage des Werkzeugs wird als Transformation bezeichnet. Die Transformation aus dem Antriebskoordinatensystem in das Maschinenkoordinatensystem wird als Vorwärtstransformation bezeichnet, die aus dem Maschinenkoordinatensystem in das Antriebskoordinatensystem als Rückwärtstransformation. Ist eine solche Transformation bei herkömmlichen, seriellen Werkzeugmaschinen in der Regel einfach und anschaulich, da die Achsen orthogonal im Maschinenkoordinatensystem angeordnet sind und keine kinematischen Kopplungen zwischen den einzelnen Antrieben bestehen, so wird diese bei parallelen Werkzeugmaschinen mit zunehmender Achsenanzahl schnell abstrakt und nicht mehr vorstellbar.

Zusätzlich zu den beiden beschriebenen Koordinatensystemen wird in dieser Arbeit ein weiteres Koordinatensystem verwendet: das Werkzeugkoordinatensystem.

Es handelt sich hierbei um ein nicht ortsfestes Koordinatensystem, das an das Werkzeug gebunden ist und seine Lage im Raum beschreibt. Da ein kartesischer Raum über sechs Freiheitsgrade, drei translatorische und drei rotatorische, verfügt, wird die Lage dieses Koordinatensystems durch sechs Koordinaten, die im Folgenden als globale Koordinaten bezeichnet werden, eindeutig definiert. Während die Position des Werkzeugkoordinatensystems eindeutig bestimmt ist, muss bei der Bestimmung der Orientierung die Reihenfolge der Drehungen beachtet werden. Es kommen verschiedene Varianten zum Einsatz, die unter anderem von Kirchner [Kir01] ausführlich dargestellt wurden und daher an dieser Stelle nicht weiter vertieft werden sollen. Im Rahmen der Simulation wurde ausschließlich die

Notation in Kardanwinkeln verwendet, da diese im Gegensatz zu der Notation in Euler-Winkeln eindeutig ist und keine formale Singularität aufweist. Der Nachteil der schlechteren Anschaulichkeit dieser Notation wird hierfür in Kauf genommen.

Die Drehung eines Körpers im Raum kann in drei Elementardrehungen aufgeteilt werden. Bei der Notation in Kardanwinkeln erfolgt zuerst eine Drehung um die x-Achse mit dem Winkel  $a$  über die Drehmatrix  $\mathbf{R}_a$ :

$$\mathbf{R}_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a) & -\sin(a) \\ 0 & \sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix} \quad \text{A.1}$$

Hieran anschließend erfolgt eine Drehung mit dem Winkel  $b$  um die nun gedrehte y-Achse durch die Drehmatrix  $\mathbf{R}_b$ :

$$\mathbf{R}_b = \begin{bmatrix} \cos(b) & 0 & \sin(b) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(b) & 0 & \cos(b) \end{bmatrix} \quad \text{A.2}$$

Abschließend erfolgt dann eine letzte Drehung um die ebenfalls gedrehte z-Achse mit dem Winkel  $c$  über die Drehmatrix  $\mathbf{R}_c$ :

$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} \cos(c) & -\sin(c) & 0 \\ \sin(c) & \cos(c) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{A.3}$$

Eine Multiplikation dieser drei Drehmatrizen ergibt die Drehmatrix  $\mathbf{R}$  für die gesamte Drehung:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_a \mathbf{R}_b \mathbf{R}_c \quad \text{A.4}$$

Die resultierende Drehmatrix lautet hiermit:

$$\mathbf{R} = \quad \text{A.5}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(a)\cos(b) & -\sin(a)\cos(b) & \sin(b) \\ \cos(a)\sin(b)\sin(c) + \sin(a)\cos(c) & -\sin(a)\sin(b)\sin(c) + \cos(a)\cos(c) & -\cos(b)\sin(c) \\ -\cos(a)\sin(b)\cos(c) + \sin(a)\sin(c) & \sin(a)\sin(b)\cos(c) + \cos(a)\sin(c) & \cos(b)\cos(c) \end{bmatrix}$$

## A.2 Allgemeine Koordinatentransformation

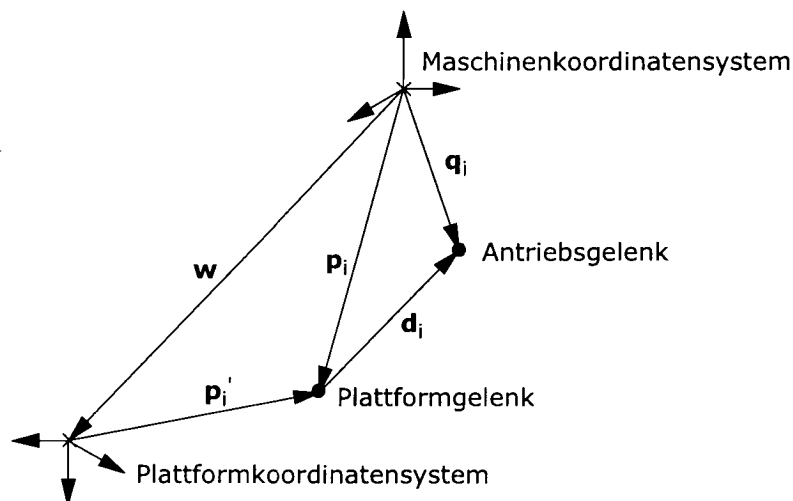
Im folgenden Abschnitt werden die mathematischen Grundlagen der Vorwärts- und Rückwärtstransformationen von Parallelkinematiken dargestellt. Diese Transformationen sind die Grundlage der Kinematikanalyse und stellen die Basis aller darauf aufbauenden Berechnungen dar.

### A.2.1 Rückwärtstransformation

Die Rückwärtstransformation - die Berechnung der Antriebskoordinaten aus Werkzeugkoordinaten - ist für Parallelkinematiken auf einfache mathematische Gleichungen zurückzuführen, wenn von einer idealen Konfiguration (keine Komponentenabweichungen) ausgegangen wird. Dabei muss zwischen kinematischen Ketten des Pod- und Glide-Prinzips unterschieden werden.

#### Pod-Kinematiken

Der schematische Aufbau einer kinematischen Kette einer Pod-Kinematik wird in Abbildung A.1 gezeigt.



**Abbildung A.1: Schematische Darstellung einer kinematischen Kette einer Pod-Kinematik**

Hierbei definieren:

- $w$  Ortsvektor des Werkzeugbezugspunkts
- $p_i'$  Ortsvektor des Gelenkpunkts 'i' im Werkzeugkoordinatensystem
- $p_i$  Ortsvektor des Gelenkpunkts 'i' im absoluten Koordinatensystem
- $d_i$  Vektor vom Plattform- zum Antriebsgelenk im absoluten Koordinatensystem
- $q_i$  Ortsvektor des Antriebsgelenkpunkts 'i' im absoluten Koordinatensystem

Die gesuchte Länge des Stabs 'i' der kinematischen Kette ergibt sich damit als Abstand zweier Punkte im Raum zu:

$$\|d_i\| = \|p_i - q_i\| = \sqrt{(p_{ix} - q_{ix})^2 + (p_{iy} - q_{iy})^2 + (p_{iz} - q_{iz})^2} \quad \text{A.6}$$

Die Koordinaten des Plattformgelenkpunkts im Maschinenkoordinatensystem berechnen sich aus der in Gleichung A.5 definierten Drehmatrix zu:

$$p_i = w + R p_i' \quad \text{A.7}$$

Fasst man die Gleichungen A.6 und A.7 zusammen, so lässt sich ein allgemeiner Ausdruck für die gesuchte Stablänge einer kinematischen Pod-Kette zu:

$$\|\mathbf{d}_i\| = \|\mathbf{w} + \mathbf{R} \mathbf{p}'_i - \mathbf{q}_i\| \quad \text{A.8}$$

formulieren.

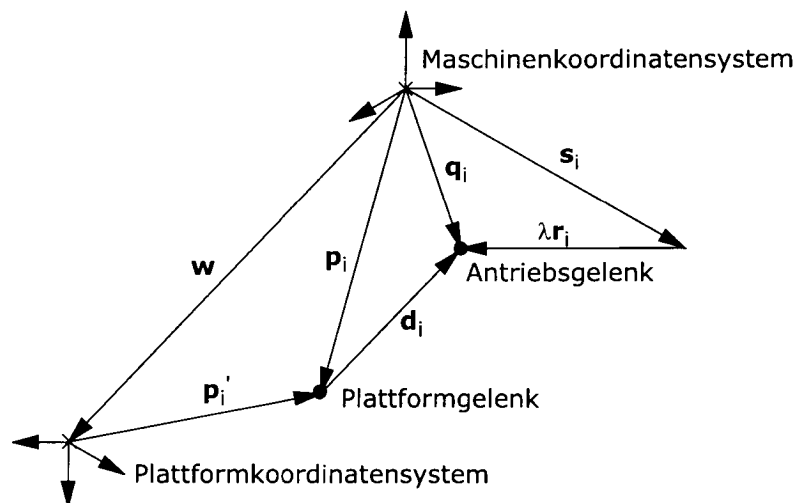
### Glide-Kinematiken

Zusätzlich zu den bei Pod-Kinematiken definierten Größen kommen bei Glide-Kinematiken noch zwei Koordinaten hinzu:

$\mathbf{s}_i$  Ortsvektor der Führungsbahn 'i'

$\lambda \mathbf{r}_i$  Richtungsvektor der Führungsbahn 'i' ( $\lambda$  bestimmt die Position des Antriebs)

Hiermit lässt sich eine kinematische Kette nach dem Glide-Prinzip darstellen, wie in Abbildung A.2 gezeigt. Die analytische Berechnung der Position der Antriebe stellt sich mathematisch als Schnittpunkt einer Gerade mit einer Kugel dar. Der die Führungsbahn darstellende Vektor wird mit einer Kugel geschnitten, die um den in das Maschinenkoordinatensystem transformierten Plattformgelenk mit dem Radius der Stablänge gebildet wird.



**Abbildung A.2: Schematische Darstellung einer kinematischen Kette einer Glide-Parallelkinematik**

Die Position des jeweiligen Antriebs  $\mathbf{q}_i$  im Maschinenkoordinatensystem lässt sich damit über folgende Vektorgleichung darstellen:

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{s}_i + \lambda_i \mathbf{r}_i \quad \text{A.9}$$

Das zugehörige  $\lambda_i$  lässt sich über die Lösung von:

$$\lambda_{i(1,2)} = -\frac{\|\mathbf{r}_i(\mathbf{s}_i - \mathbf{p}_i)\|}{\|\mathbf{r}_i\|^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\|\mathbf{r}_i(\mathbf{s}_i - \mathbf{p}_i)\|}{\|\mathbf{r}_i\|^2}\right)^2 - \frac{\|\mathbf{s}_i - \mathbf{p}_i\| - \|\mathbf{d}_i\|^2}{\|\mathbf{r}_i\|^2}} \quad \text{A.10}$$

bestimmen. Da die quadratische Gleichung über zwei Lösungen verfügt, muss je nach Konfiguration der Kinematik das Vorzeichen entsprechend gewählt werden. Bei dem in der Arbeit vorgestellten Simulationswerkzeug ist die Achskonfiguration

so festzulegen, dass die kleinere Lösung der quadratischen Gleichung geometrisch plausibel ist. Für einen allgemeinen Ausdruck für die Position des Antriebs  $\mathbf{q}_i$  im Maschinenkoordinatensystem müssen Gleichung A.10 und Gleichung A.7 in Gleichung A.9 eingesetzt werden:

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{s}_i + \left( -\frac{\|\mathbf{r}_i(\mathbf{s}_i - (\mathbf{w} + \mathbf{R}\mathbf{p}'_i))\|}{\|\mathbf{r}_i\|^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\|\mathbf{r}_i(\mathbf{s}_i - (\mathbf{w} + \mathbf{R}\mathbf{p}'_i))\|}{\|\mathbf{r}_i\|^2}\right)^2 - \frac{\|\mathbf{s}_i - (\mathbf{w} + \mathbf{R}\mathbf{p}'_i)\| - \|\mathbf{d}_i\|^2}{\|\mathbf{r}_i\|^2}} \right) \mathbf{r}_i \quad \text{A.11}$$

### A.2.2 Vorwärtstransformation

Im Gegensatz zu seriellen Kinematiken ist die Vorwärtstransformation bei Parallelkinematiken mit mehr als drei Freiheitsgraden in der Regel nicht mehr geschlossen analytisch darstellbar, da die Schließbedingungen aller kinematischen Ketten gleichzeitig erfüllt werden müssen. Hierzu müssen bei einer parallelkinematischen Struktur mit bewegtem Fußpunkt die um die sechs Antriebsgelenkpunkte gebildeten Kugeln gleichzeitig die jeweiligen Plattformgelenkpunkte schneiden. Dies führt zu einer Vielzahl von mathematisch korrekten Lösungen, die dann über verschiedene Randbedingungen auf ihre technische Plausibilität überprüft werden müssen. Eine allgemeingültige analytische Darstellung der Vorwärtstransformation ist daher nur bei wenigen speziellen geometrischen Konfigurationen möglich.

Aus diesem Grund wird die Vorwärtstransformation in der Regel iterativ mithilfe der numerisch invertierten inversen Jakobimatrix (vgl. Anhang A.3) durchgeführt, die das System lokal linearisiert. Da die Konvergenz eines solchen Iterationsverfahrens wesentlich von der Position des gewählten Startwerts abhängt und nur bei geringer Abweichung von diesem auch garantiert werden kann, beschränkt sich seine Nutzung entsprechend. Darüber hinaus muss bei der Auswahl des Startpunkts der Iteration auf hinreichenden Abstand zu einer Singularität geachtet werden, da das Verfahren sonst nicht zuverlässig konvergiert. Als Iterationsverfahren bietet sich das Newton-Verfahren an:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \mathbf{J}(\mathbf{x}_i) (\mathbf{q}(\mathbf{x}^\circ) - \mathbf{q}(\mathbf{x}_i)) \quad \text{A.12}$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_i)$  die numerisch invertierte inverse Jakobimatrix des Startwerts  $\mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{q}(\mathbf{x}_i)$  die zugehörigen Antriebskoordinaten des Startwerts und  $\mathbf{q}(\mathbf{x}^\circ)$  die veränderten Antriebskoordinaten der gesuchten Koordinaten  $\mathbf{x}^\circ$ .

Es ist allerdings zu beachten, dass dieses Verfahren mit folgenden Einschränkungen verbunden ist [Bro93]:

- Die Matrix  $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_i)$  muss positiv definit sein.
- Das Verfahren konvergiert nur für hinreichend gute Startwerte.
- Es gibt keine Schrittweitensteuerung.
- Das Verfahren ist im Allgemeinen kein Abstiegsverfahren.
- Der Aufwand zur Berechnung von  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_i)$  ist mitunter recht groß.



Die für das Newton-Verfahren notwendige Invertierung der inversen Jakobimatrix bedingt eine Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \text{A.13}$$

Da dieses lineare Gleichungssystem aufgrund von Rundungsfehlern numerisch nicht exakt lösbar ist, wird sich ein Restvektor  $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_m)^T$  mit:

$$\mathbf{r} = \mathbf{Ax} - \mathbf{b} \quad \text{A.14}$$

ergeben. Man wird daher  $\mathbf{x}$  so bestimmen, dass

$$\sum_{i=1}^m r_i^2 = \mathbf{r}^T \mathbf{r} = (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = \min \quad \text{A.15}$$

gilt. Der Vektor  $\mathbf{x}$  ist genau dann eine Lösung dieser Gleichung, wenn der Restvektor  $\mathbf{r}$  orthogonal zu allen Spalten von  $\mathbf{A}$  ist. Dies bedeutet:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{r} = \mathbf{A}^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad \text{A.16}$$

Die Matrix  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  ist für alle nicht singulären Matrizen  $\mathbf{A}$  symmetrisch und positiv definit. Die Gleichung A.13 ist damit ein lineares Quadratmittelproblem, das sich numerisch gut über Orthogonalisierungsverfahren lösen lässt. Von den zur Verfügung stehenden Verfahren bietet sich das Householder-Verfahren an, da es numerisch gutartig ist [Bro93]. Dieses Verfahren beruht auf einer Faktorisierung der Matrix  $\mathbf{A}$  in eine orthogonale Matrix  $\mathbf{Q}$  und eine Dreiecksmatrix  $\mathbf{R}$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR} \quad \text{A.17}$$

Die Anwendbarkeit des Newton-Verfahrens wird durch die numerische Invertierbarkeit der inversen Jakobimatrix  $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_i)$  (vgl. Anhang A.3) begrenzt. Ein Maß für diese Invertierbarkeit ist die Konditionszahl  $\kappa$  einer Matrix, die sich aus der Wurzel des Quotienten des größten und kleinsten Singularwerts einer Matrix  $\mathbf{A}$  berechnet:

$$\kappa = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{A})}{\sigma_{\min}(\mathbf{A})} = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}{\lambda_{\min}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}} \quad \text{A.18}$$

Übersteigt die Konditionszahl einen bestimmten Wert, so ist die Matrix so schlecht konditioniert, dass die Grenzen der numerischen Genauigkeit des verwendeten Rechners erreicht werden, die Matrix also numerisch singulär wird. Dieser Wert ist abhängig von der Genauigkeit der verwendeten Datentypen und beträgt bei einfacher Präzision (float: 32 Bits)  $10^6$  und für doppelte Präzision (double: 64 Bits)  $10^{12}$  [Num97]. Da physikalisch singuläre Lagen einer Parallelkinematik bereits deutlich eher erreicht werden, wird in den Simulationsmodellen eine Konditionszahl größer  $10^8$  als singulär angenommen und die Position als unzulässig bezeichnet (vgl. Anhang B.3).

### A.3 Jakobimatrix

Die Matrix der partiellen Ableitungen der kartesischen Koordinaten nach den Antriebskoordinaten wird als Jakobimatrix bezeichnet. Sie stellt eine lokale Linearisierung der Transformationsgleichung dar, mit der die Auswirkung kleiner Änderungen der Antriebskoordinaten auf die kartesischen Koordinaten berechnet werden können:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}} \quad \text{A.19}$$

Die Jakobimatrix wird hierbei mit  $\mathbf{J}$ , die kartesischen Koordinaten mit  $\mathbf{x}$  und die Antriebskoordinaten mit  $\mathbf{q}$  bezeichnet. Da die Vorwärtstransformation (vgl. Anhang A.2.2) bei parallelen Kinematiken nur in wenigen Sonderfällen geschlossen darstellbar ist, ist eine analytische Berechnung auf die Berechnung der inversen Jakobimatrix beschränkt, die sich allgemein zu:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x} & \frac{\partial q_1}{\partial y} & \frac{\partial q_1}{\partial z} & \frac{\partial q_1}{\partial a} & \frac{\partial q_1}{\partial b} & \frac{\partial q_1}{\partial c} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x} & \frac{\partial q_2}{\partial y} & \frac{\partial q_2}{\partial z} & \frac{\partial q_2}{\partial a} & \frac{\partial q_2}{\partial b} & \frac{\partial q_2}{\partial c} \\ \frac{\partial q_3}{\partial x} & \frac{\partial q_3}{\partial y} & \frac{\partial q_3}{\partial z} & \frac{\partial q_3}{\partial a} & \frac{\partial q_3}{\partial b} & \frac{\partial q_3}{\partial c} \\ \frac{\partial q_4}{\partial x} & \frac{\partial q_4}{\partial y} & \frac{\partial q_4}{\partial z} & \frac{\partial q_4}{\partial a} & \frac{\partial q_4}{\partial b} & \frac{\partial q_4}{\partial c} \\ \frac{\partial q_5}{\partial x} & \frac{\partial q_5}{\partial y} & \frac{\partial q_5}{\partial z} & \frac{\partial q_5}{\partial a} & \frac{\partial q_5}{\partial b} & \frac{\partial q_5}{\partial c} \\ \frac{\partial q_6}{\partial x} & \frac{\partial q_6}{\partial y} & \frac{\partial q_6}{\partial z} & \frac{\partial q_6}{\partial a} & \frac{\partial q_6}{\partial b} & \frac{\partial q_6}{\partial c} \end{bmatrix} \quad \text{A.20}$$

berechnet. Die in die Gleichung einzusetzenden  $q_{1-6}$  ergeben sich je nach Kinematik aus Gleichung A.8 beziehungsweise Gleichung A.11. Die partiellen Ableitungen liefern dann die inverse Jakobimatrix in den Kardanwinkeln im absoluten Koordinatensystem.

Eine weitere Jakobimatrix, die die Auswirkungen der Lageänderungen des Werkzeugs auf die Antriebskoordinaten im Werkzeugkoordinatensystem beschreibt, ist die relative inverse Jakobimatrix. Bei dieser Jakobimatrix stehen die Kardanwinkel  $a'$ ,  $b'$  und  $c'$  immer senkrecht aufeinander, was bei Transformationen notwendig ist, bei denen die Orthogonalität gefordert ist.

Die relative Jakobimatrix in Kardanwinkeln berechnet sich zu:

$$\mathbf{J}'_{\mathbf{R}}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}'} = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x} & \frac{\partial q_1}{\partial y} & \frac{\partial q_1}{\partial z} & \frac{\partial q_1}{\partial a'} & \frac{\partial q_1}{\partial b'} & \frac{\partial q_1}{\partial c'} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x} & \frac{\partial q_2}{\partial y} & \frac{\partial q_2}{\partial z} & \frac{\partial q_2}{\partial a'} & \frac{\partial q_2}{\partial b'} & \frac{\partial q_2}{\partial c'} \\ \frac{\partial q_3}{\partial x} & \frac{\partial q_3}{\partial y} & \frac{\partial q_3}{\partial z} & \frac{\partial q_3}{\partial a'} & \frac{\partial q_3}{\partial b'} & \frac{\partial q_3}{\partial c'} \\ \frac{\partial q_4}{\partial x} & \frac{\partial q_4}{\partial y} & \frac{\partial q_4}{\partial z} & \frac{\partial q_4}{\partial a'} & \frac{\partial q_4}{\partial b'} & \frac{\partial q_4}{\partial c'} \\ \frac{\partial q_5}{\partial x} & \frac{\partial q_5}{\partial y} & \frac{\partial q_5}{\partial z} & \frac{\partial q_5}{\partial a'} & \frac{\partial q_5}{\partial b'} & \frac{\partial q_5}{\partial c'} \\ \frac{\partial q_6}{\partial x} & \frac{\partial q_6}{\partial y} & \frac{\partial q_6}{\partial z} & \frac{\partial q_6}{\partial a'} & \frac{\partial q_6}{\partial b'} & \frac{\partial q_6}{\partial c'} \end{bmatrix} \quad \text{A.21}$$

Wie Kirchner [Kir01] gezeigt hat, kann aus der relativen Jakobimatrix die kinematische Jakobimatrix  $\mathbf{J}_C$  hergeleitet werden. Diese lässt sich mithilfe der Matrix  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad \text{A.22}$$

und der relativen Jakobimatrix zu:

$$\mathbf{J}_C = \mathbf{J}'_{\mathbf{R}} \mathbf{H}^T \quad \text{A.23}$$

berechnen.  $\mathbf{R}$  bezeichnet hierbei die Drehmatrix gemäß Gleichung A.5. Diese wird, wie von Merlet [Mer97] und Kirchner [Kir01] gezeigt, für die Transformation von Kräften und Geschwindigkeiten vom Antriebskoordinatensystem in das absolute Koordinatensystem benötigt.

Für die in Kapitel 4 als Beispiel dargestellte Biglide-Kinematik (vgl. Abbildung 4.20) berechnet sich die inverse Jakobimatrix zu:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{q_{A1y}-y}{\sqrt{\|\mathbf{d}_1\|^2 - (q_{A1y}-y)^2}} \\ 1 & \frac{q_{A2y}-y}{\sqrt{\|\mathbf{d}_2\|^2 - (q_{A2y}-y)^2}} \end{bmatrix} \quad \text{A.24}$$

Für die auf der rechten Seite dieser Abbildung dargestellte Bipod-Kinematik ergibt sie sich zu:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{q_{A1x}-x}{\sqrt{(q_{A1x}-x)^2 + (q_{A1y}-y)^2}} & -\frac{q_{A1y}-y}{\sqrt{(q_{A1x}-x)^2 + (q_{A1y}-y)^2}} \\ -\frac{q_{A2x}-x}{\sqrt{(q_{A2x}-x)^2 + (q_{A2y}-y)^2}} & -\frac{q_{A2y}-y}{\sqrt{(q_{A2x}-x)^2 + (q_{A2y}-y)^2}} \end{bmatrix} \quad \text{A.25}$$

## Anhang B: Geometrische und physikalische Randbedingungen

Der zulässige translatorische Arbeitsraum einer Parallelkinematik und die in diesem Raum zulässigen Orientierungen werden durch eine Vielzahl geometrischer und physikalischer Randbedingungen begrenzt. Diese Randbedingungen ergeben sich zum einen aus den Bewegungsgrenzen der einzelnen Komponenten der Parallelkinematik und zum anderen aus der Kombination derselben, die konfigurationsabhängig ist. Der folgende Abschnitt stellt die für eine zulässige Position innerhalb des Arbeitsraums zu erfüllenden Randbedingungen dar.

### B.1 Zulässigkeit der Antriebsposition

Bei der Prüfung der Zulässigkeit der Antriebspositionen muss zwischen kinematischen Ketten nach dem Pod- und nach dem Glide-Prinzip unterschieden werden.

#### Pod-Kinematiken

Der mit Gleichung A.8 berechnete Abstand zwischen dem Antriebsgelenkpunkt und dem Plattformgelenkpunkt stellt dann eine physikalisch zulässige Lösung dar, wenn dieser sich zwischen der minimalen Länge  $l_{\min}$  und der maximalen Länge  $l_{\max}$  der jeweiligen Teleskopstrebe 'i' bewegt:

$$l_{i, \min} \leq d_i \leq l_{i, \max} \quad \text{B.1}$$

#### Glide-Kinematiken

Damit die in Gleichung A.11 bestimmte Antriebsposition eine physikalisch zulässige Lösung darstellt, das heißt, dass der Antrieb sich innerhalb des zulässigen Bereiches der Führungsbahn befindet, muss für  $\lambda_i$  gelten:

$$0 \leq \lambda_i \leq t_i \quad \text{B.2}$$

Da die Länge eines Vektors im Raum immer positiv ist, muss die Position des Antriebs komponentenweise geprüft werden, falls die jeweilige Komponente des Richtungsvektors ungleich Null ist.

Befinden sich mehrere Antriebe auf einer Führungsbahn, muss ein Mindestabstand  $d_{\min}$  zwischen den einzelnen Antrieben eingehalten werden, um eine Kollision auszuschließen. Der Positionsabstand der jeweiligen Antriebe 'i' und 'j' muss größer sein als der Mindestabstand, der sich aus den geometrischen Abmessungen der Antriebsmodule und einer Sicherheitszugabe  $s$  ergibt:

$$d_i = \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\| > d_{i, \min} + s \quad \text{B.3}$$

Eine weitere Einschränkung muss beachtet werden, wenn sich bei mehreren Antrieben auf einer Führungsbahn Kopplungen (Energieketten, Faltenbälge...) zwischen den einzelnen Antrieben befinden. Diese können den maximal zulässigen Abstand zwischen zwei Antrieben beschränken. Daraus resultiert ein Maximalabstand  $d_{\max}$ , der sich aus dem maximal zulässigen Abstand abzüglich einer Sicherheitsmarge  $s$  berechnet:

$$d_i = \|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\| < d_{i, \max} - s \quad \text{B.4}$$

Während die Randbedingung aus Gleichung B.2 immer erfüllt sein muss, um eine physikalisch zulässige Lösung sicherzustellen, ist die Notwendigkeit zur Erfüllung der Gleichungen B.3 und B.4 von der gewählten Konfiguration der Kinematik abhängig.

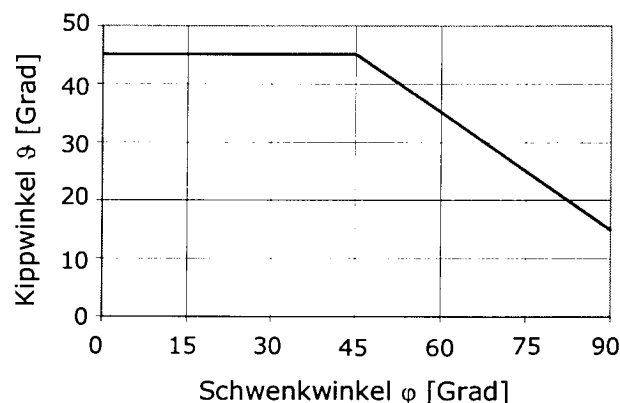
## B.2 Gelenkwinkelprüfung

Die in den Kinematiken eingesetzten Gelenke weisen physikalische und kinematische Beschränkungen der zulässigen Winkellagen auf. Die physikalischen Grenzen ergeben sich aus den Grenzwinkeln, bis zu denen das Gelenk um die einzelnen Achsen rotiert werden kann. Die kinematischen Grenzen sind von der Bauart des Gelenks abhängig und ergeben sich bei nicht eindeutigen Winkellagen. Wird bei einem Gelenk der Hexaglide-Kinematik der Kippwinkel Null Grad, so ist der Schwenkwinkel um die erste Gelenkachse nicht mehr eindeutig gegeben. Hierdurch kann sich dieser Winkel soweit verändern, dass ein Kippen des Gelenks um die zweite Achse nicht möglich ist.

Die Berechnung der einzelnen Gelenkwinkel ist in Kapitel 3.2 dargestellt. Um die Zulässigkeit dieser Winkel zu prüfen, müssen die zulässigen Grenzwinkel bestimmt werden. Diese ergeben sich aus der Bauart der Gelenke. Die Schwenk- und Kippwinkel sind zulässig, wenn sie innerhalb der maximal zulässigen Winkellagen liegen:

$$\varphi_{\min} \leq \varphi_i \leq \varphi_{\max} \quad \text{und} \quad \vartheta_{\min} \leq \vartheta_i \leq \vartheta_{\max} \quad \text{B.5}$$

Bei der Verwendung von Kardangelenken (vgl. Abbildung 3.13) ist der zulässige Gelenkwinkelbereich durch mögliche Kollisionen zwischen dem Gelenkschaft und dem Gehäuse weiter eingeschränkt. Der maximal zulässige Kippwinkel bei diesen Gelenken ist in Abhängigkeit des anliegenden Schwenkwinkels begrenzt, wie in Abbildung B.1 gezeigt wird.



**Abbildung B.1: Zulässiger Winkelbereich der Kardangelenkbauweise der Firma INA [Ina99]**

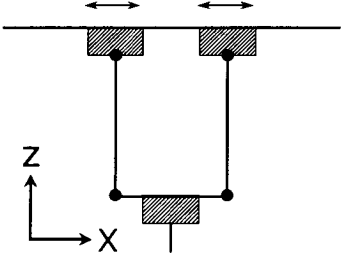
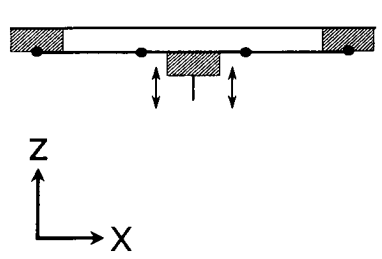
Für diese Gelenke muss neben den Bedingungen aus Gleichung B.5 die folgende Gleichung erfüllt sein:

$$\vartheta_i \leq 75 - \frac{2}{3}\varphi_i \quad \text{B.6}$$

Je nach verwendetem Gelenktyp können daher in den Simulationsmodellen verschiedene und voneinander abhängige Begrenzungen zwischen den einzelnen Winkellagen definiert werden.

### B.3 Prüfung auf singuläre Lagen

Wird eine Lage erreicht, bei der der Mechanismus aufgrund seiner geometrischen Konfiguration einen Bewegungsfreiheitsgrad verliert oder der Wert der Steifigkeit in eine Richtung gleich Null wird, so liegt eine singuläre Lage vor. Je nach vorliegendem Fall wird hierbei entweder die Determinante der Jakobimatrix oder die der inversen Jakobimatrix gleich Null. In Tabelle B.1 werden die beiden bei einer Parallelkinematik möglichen Singularitäten am Beispiel einer Biglide-Kinematik gezeigt.

	Singularität der ersten Art	Singularität der zweiten Art
Skizze		
Beschreibung	Wird ein Antrieb in x-Richtung bewegt, so ändert sich die Lage des Werkzeugs in z-Richtung nicht mehr.	Eine weitere Bewegung des rechten Antriebs in x-Richtung führt zur Zerstörung des Mechanismus.
Eigenschaft	Verlust der Steifigkeit in x-Richtung	Verlust der Steifigkeit in z-Richtung
Mathematische Konsequenz	$\det(\mathbf{J}) = 0$	$\det(\mathbf{J}^{-1}) = 0$

**Tabelle B.1: Singularitäten der ersten und der zweiten Art**

Singularitäten sowohl der ersten als auch der zweiten Art sind bei Parallelkinematiken unerwünscht, da sie besonders bei Singularitäten der zweiten Art zu schweren Beschädigungen des Mechanismus führen können. Bei der Auslegung eines solchen Mechanismus muss daher darauf geachtet werden, dass der Kernarbeitsraum von Singularitäten freigehalten wird. Ist dies nicht möglich, muss der Arbeitsraum durch eine Steuerungsprogrammierung entsprechend begrenzt werden. Der minimal einzuhaltende Abstand zu einer singulären Lage hängt hierbei von den gewählten Bearbeitungsparametern ab. Da sich die physikalischen Eigenschaften bereits im Umfeld einer Singularität stark verschlechtern, wird im Rahmen der Berechnungen eine Determinante unterhalb eines konfigurationsabhängigen Schwellwerts als Null angenommen und der Arbeitsraum somit auf einen unkritischen Bereich beschränkt (vgl. Anhang A.2.2).

### B.4 Stabkollisionsprüfung und Plattformkollisionsprüfung

Wie schon von Masory, Merlet, Bonev und Kirchner [Mas92, Mer97, Bon98, Kir01] gezeigt, sind ein weiterer den Arbeitsraum einer Parallelkinematik einschränkender Aspekt die Kollisionen zwischen einzelnen Stäben. Darüber hinaus stellen Kollisionen zwischen Stäben und Kanten der Plattform eine weitere Einschränkung des Arbeitsraums dar, die bis heute, auch in der oben genannten Literatur, vernachlässigt worden ist. Im Rahmen der Analyse des Hexaglides hat sich gezeigt, dass diese Kollisionen den verfügbaren Arbeitsraum erheblich einschränken und daher nicht vernachlässigt werden dürfen.

Eine Kollision zweier Stäbe liegt immer dann vor, wenn deren Abstand  $d$  kleiner als die Summe der beiden Radien der Stäbe 'i' und 'j' ist:

$$d < r_i + r_j \quad \text{B.7}$$

Der Abstand zweier Stäbe berechnet sich über den Abstand zweier Geraden im Raum. In Abbildung B.2 sind allgemein die Lage und der Abstand zweier Stäbe im Raum dargestellt.

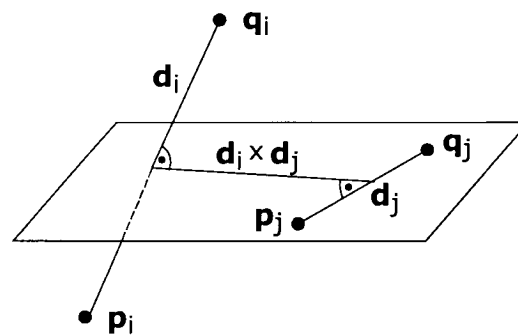


Abbildung B.2: Abstand zweier Stäbe im Raum

Zur Berechnung des Abstands werden die beiden Stäbe als Geraden im Raum:

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{p}_i + \nu_i(\mathbf{q}_i - \mathbf{p}_i) \quad \text{B.8}$$

beziehungsweise:

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{p}_j + \mu_j(\mathbf{q}_j - \mathbf{p}_j) \quad \text{B.9}$$

definiert. Sind die beiden Stäbe parallel, ist also das Kreuzprodukt ihrer Richtungsvektoren gleich Null:

$$\mathbf{d}_i \times \mathbf{d}_j = 0 \quad \text{B.10}$$

so lässt sich die Distanz zwischen den Stäben als Abstand eines Fußpunktes  $\mathbf{p}_i$  zu dem anderen Stab bestimmen. Sind die Stäbe nicht parallel, erfolgt die Berechnung von  $\mu_j$  und  $\nu_i$  über den geschlossenen Vektorzug:

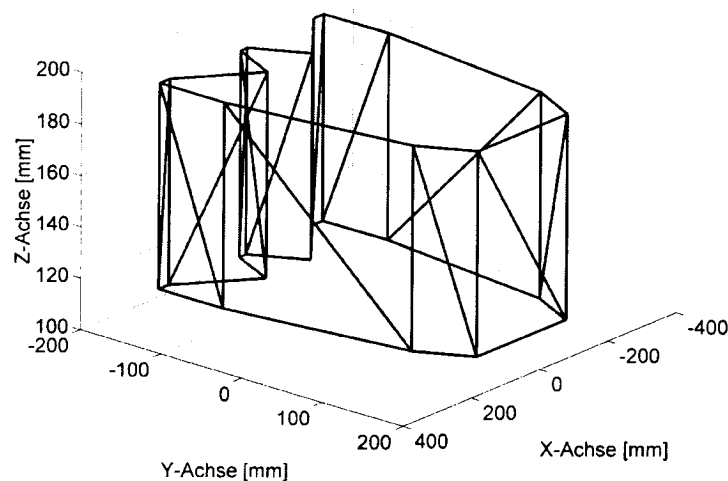
$$\mu \mathbf{d}_j + \tau(\mathbf{d}_i \times \mathbf{d}_j) - \nu \mathbf{d}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j \quad \text{B.11}$$

Nach Lösung des Gleichungssystems ergibt sich der Abstand je nach Größe von  $v_i$  und  $\mu_j$  gemäß Tabelle B.2.

		Abstand
$v \leq 0$	$\mu \leq 0$	$d = \ \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\ $
$v \leq 0$	$\mu \geq l_j$	$d = \ \mathbf{p}_i - \mathbf{q}_j\ $
$v \leq 0$	$0 \leq \mu \leq l_j$	$d = \ \mathbf{p}_j + \mu \mathbf{d}_j - \mathbf{p}_i\ $
$0 \leq v \leq l_i$	$\mu \leq 0$	$d = \ \mathbf{p}_i + v \mathbf{d}_i - \mathbf{p}_j\ $
$0 \leq v \leq l_i$	$\mu \geq l_j$	$d = \ \mathbf{p}_i + v \mathbf{d}_i - \mathbf{q}_j\ $
$0 \leq v \leq l_i$	$0 \leq \mu \leq l_j$	$d = \ (\mathbf{p}_i + v \mathbf{d}_i) - (\mathbf{p}_j + \mu \mathbf{d}_j)\ $
$v \geq l_i$	$0 \leq \mu \leq l_j$	$d = \ \mathbf{p}_j + \mu \mathbf{d}_j - \mathbf{q}_i\ $
$v \geq l_i$	$\mu \leq 0$	$d = \ \mathbf{q}_i - \mathbf{p}_j\ $
$v \geq l_i$	$\mu \geq l_j$	$d = \ \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j\ $

**Tabelle B.2: Abstand zweier Stäbe im Raum**

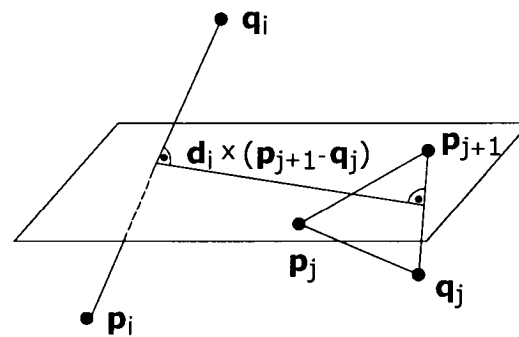
Analog zu der Kollisionsbetrachtung der Stäbe untereinander lässt sich die Kollisionsbetrachtung zwischen den einzelnen Stäben und der mobilen Plattform durchführen. Hierzu wird ein Polyeder definiert, der durch umlaufende Kanten begrenzt wird und die mobile Plattform umhüllt. In Abbildung B.3 wird als Beispiel die Hüllkurve für die Plattform des Hexaglides gezeigt.



**Abbildung B.3: Hüllkurve der Hexaglide-Plattform**

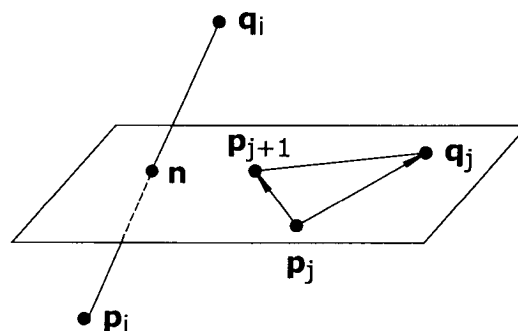
Für die Kollisionsbetrachtung wird der Polyeder, der über seine Eckpunkte definiert ist, trianguliert. Hierzu wird aus jeweils drei Eckpunkten ein Dreieck gebildet und der Abstand der Begrenzungslinien zu den Stäben mit den Gleichungen aus Tabelle B.2 berechnet. In Abbildung B.4 wird der Abstand am Beispiel eines das Polygon begrenzenden Dreiecks gezeigt. Beträgt der Abstand zwischen einer Dreieckskante und dem Stab weniger als der Radius des Stabs, so liegt eine Kollision zwischen diesen vor.





**Abbildung B.4: Abstand eines Stabes von einer Seite eines die mobile Plattform begrenzenden Dreiecks im Raum**

Neben einem ausreichenden Abstand muss sichergestellt werden, dass der Stab die vom Dreieck umschlossene Fläche nicht durchstößt. Dies ist notwendig, da ein ausreichender Abstand kein hinreichendes Kriterium für eine Kollisionsfreiheit ist. Um diese mathematisch zulässige, aber physikalisch unzulässige Lösung, auszuschließen, wird der Durchstoßpunkt  $\mathbf{n}$  des Vektors durch die vom Dreieck aufgespannte Ebene bestimmt.



**Abbildung B.5: Durchstoßpunkt  $\mathbf{n}$  der Geraden durch die durch das Dreieck aufgespannte Ebene**

Lassen sich die Koordinaten des Durchstoßpunktes  $\mathbf{n}$  durch die Gleichung:

$$\mathbf{n} = \mathbf{p}_j + \alpha(\mathbf{p}_{j+1} - \mathbf{p}_j) + (1 - \alpha)(\mathbf{q}_j - \mathbf{p}_j) \quad \text{mit } 0 \leq \alpha \leq 1 \quad \text{B.12}$$

darstellen, so liegt der Punkt innerhalb des Dreiecks und es liegt damit eine Kollision des Stabes mit der mobilen Plattform vor.

### B.5 Prüfung der statischen Antriebsbelastung

Der Arbeitsraum einer Parallelkinematik wird außer über die oben gezeigten Beschränkungen noch durch eine weitere Randbedingung eingeschränkt: der begrenzten Kraft der eingesetzten Antriebe. In Abhängigkeit von der Konfiguration und der Masse der eingesetzten Komponenten werden die Antriebe durch eine statische Kraft belastet, die zum Ausgleich der auf die Kinematik einwirkenden Schwerkraft benötigt wird. Erreicht ein Antrieb durch diese Belastung seine zulässige Nennkraft, die sich aus der Maximalkraft  $\tau_{q,\max}$  abzüglich einer notwendigen Kraftreserve  $\tau_{q,\min}$  und den Reibungskräften  $\mathbf{f}_q$  berechnet, so ist diese Lage nicht

zulässig. Mit der Reibungskraft, die sich aus Gleichung 4.89 ergibt, und der auf die Antriebe wirkenden Gewichtskraft, die mit Gleichung 4.90 gegeben ist, wird eine Lage immer dann unzulässig, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\tau_{q, \max} - \tau_{q, \min} - \mathbf{f}_q(\dot{\mathbf{q}}) - \tau_g(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{B.13}$$

Die Kraftübersetzung der Kinematik wird durch die kinematische Jakobimatrix berücksichtigt, die die Belastungen in das Antriebskoordinatensystem transformiert.

## Anhang C: Parameterlisten

Der folgende Abschnitt enthält die den Berechnungen zugrunde liegenden Geometriedaten.

### C.1 Hexaglide - Kinematik

Bei der Hexaglide-Kinematik lassen sich drei verschiedene Strukturen unterscheiden. Zum einen die realisierte Maschinenstudie, deren Geometriedaten im Folgenden unter Originalzustand aufgelistet werden. Daneben gibt es zwei von Kirchner [Kir01] mithilfe eines genetischen Algorithmus optimierte Strukturvorschläge, die in diesem Abschnitt analog zu der von Kirchner gewählten Bezeichnung mit Variante 1 und Variante 2 bezeichnet werden.

#### C.1.1 Originalzustand

Die folgenden Tabellen enthalten die Strukturdaten, die Gelenkkkoordinaten (vgl. Tabelle C.1) und die Randpunkte (vgl. Tabelle C.2) der Hüllkurve der realisierten Maschinenstudie des Hexaglides.

i	Führungsschienen			Stäbe	Antriebsgelenke			Plattformgelenke		
	$s_i$	$r_i$	$t_i$	$l_i$	$q_i$	$a_i$	$b_i$	$p'_i$	$m'_i$	$n'_i$
1	1.35	-1.0	2.7	1.0	0.00	-1.0	-1.0	0.20	0.7071	0.0
	0.80	0.0			0.00	0.0	0.0	0.19	0.7071	0.0
	0.00	0.0			-0.15	0.0	0.0	0.15	0.0000	1.0
2	-1.35	1.0	2.7	1.0	0.00	-1.0	1.0	-0.20	-0.7071	0.0
	0.80	0.0			0.00	0.0	0.0	0.19	0.7071	0.0
	0.00	0.0			-0.15	0.0	0.0	0.15	0.0000	1.0
3	1.35	-1.0	2.7	0.95	0.00	-1.0	-1.0	0.30	1.0000	0.0
	0.40	0.0			0.00	0.0	0.0	-0.13	0.0000	0.0
	0.00	0.0			-0.15	0.0	0.0	0.15	0.0000	1.0
4	-1.35	1.0	2.7	0.95	0.00	-1.0	1.0	-0.30	-1.0000	0.0
	0.40	0.0			0.00	0.0	0.0	-0.13	0.0000	0.0
	0.00	0.0			-0.15	0.0	0.0	0.15	0.0000	1.0
5	1.35	-1.0	2.7	0.95	0.00	-1.0	-1.0	0.08	0.7071	0.0
	0.00	0.0			0.00	0.0	0.0	-0.18	-0.7071	0.0
	0.00	0.0			-0.15	0.0	0.0	0.15	0.0000	1.0
6	-1.35	1.0	2.7	0.95	0.00	-1.0	1.0	-0.08	-0.7071	0.0
	0.00	0.0			0.00	0.0	0.0	-0.18	-0.7071	0.0
	0.00	0.0			-0.15	0.0	0.0	0.15	0.0000	1.0

**Tabelle C.1: Geometriedaten der Hexaglide-Kinematik im Originalzustand**

Ebene 1			Ebene 2		
0.011	0.064	0.212	0.011	0.064	0.212
-0.167	-0.111	-0.170	-0.167	-0.111	-0.170
0.110	0.110	0.110	0.190	0.190	0.190
0.242	0.242	0.187	0.242	0.242	0.187
-0.170	-0.090	-0.121	-0.170	-0.090	-0.121
0.110	0.110	0.110	0.190	0.190	0.190
0.131	-0.131	-0.187	0.131	-0.131	-0.187
-0.177	-0.177	-0.121	-0.177	-0.177	-0.121
0.110	0.110	0.110	0.190	0.190	0.190
-0.242	-0.242	-0.212	-0.242	-0.242	-0.212
-0.090	-0.170	-0.170	-0.090	-0.170	-0.170
0.110	0.110	0.110	0.190	0.190	0.190
-0.067	-0.011		-0.067	-0.011	
-0.111	-0.167		-0.111	-0.167	
0.110	0.110		0.190	0.190	

Tabelle C.2: Randpunkte der Hüllkurve der Plattform

### C.1.2 Variante 1

Die folgenden Tabellen fassen die vom Originalzustand des Hexaglides abweichenden Geometriedaten der Variante 1 zusammen. In Tabelle C.3 werden die Struktur, die Gelenkparameter und die Hüllkurve der Plattform zusammengefasst.

i	$s_i$	$t_i$	$p'_i$	$m'_i$	Ebene 1	Ebene 2
1	1.350	1.077	0.117	0.562	-0.101	-0.101
	0.856		0.172	0.827	0.148	0.148
	0.000		0.138	0.000	0.138	0.170
2	-1.350	1.077	-0.117	-0.562	-0.164	-0.060
	0.856		0.172	0.827	0.045	-0.126
	0.000		0.170	0.000	0.138	0.170
3	1.350	0.95	0.193	0.964	0.060	0.164
	0.353		-0.053	-0.264	-0.126	0.045
	0.000		0.170	0.000	0.138	0.170
4	-1.350	0.95	-0.193	-0.964		
	0.353		-0.052	-0.264		
	0.000		0.138	0.000		
5	1.350	1.153	0.074	0.430		
	0.000		-0.156	-0.903		
	0.000		0.138	0.000		
6	-1.350	1.153	-0.074	0.430		
	0.000		-0.156	-0.903		
	0.000		0.170	0.000		

Tabelle C.3: Geometriedaten der Gelenke der Variante 1 und der zugehörigen Hüllkurve der Plattform

### C.1.3 Variante 2

Die Abweichungen der Variante 2 von Struktur, Gelenkparameter und Hüllkurve vom Originalzustand sind in Tabelle C.4 zusammengefasst.

i	$s_i$	$t_i$	$p'_i$	$m'_i$	Ebene 1	Ebene 2
1	1.350	1.031	0.155	0.309	0.145	-0.145
	1.510		0.475	0.951	0.447	0.447
	0.000		0.165	0.000	0.165	0.285
2	-1.350	1.031	-0.155	-0.309	-0.306	-0.082
	1.510		0.475	0.951	-0.069	-0.122
	0.000		0.285	0.000	0.165	0.285
3	1.350	0.95	0.336	0.975	0.082	0.306
	0.722		-0.075	-0.219	-0.122	-0.069
	0.000		0.285	0.000	0.165	0.285
4	-1.350	0.95	-0.336	-0.975		
	0.722		-0.075	-0.219		
	0.000		0.165	0.000		
5	1.350	1.188	0.099	0.556		
	0.000		-0.148	-0.831		
	0.000		0.165	0.000		
6	-1.350	1.188	-0.099	-0.556		
	0.000		-0.148	-0.831		
	0.000		0.285	0.000		

**Tabelle C.4: Geometriedaten der Gelenke der Variante 2 und der zugehörigen Hüllkurve der Plattform**

## C.2 Linapod - Kinematik

Die folgenden Tabellen enthalten die Geometriedaten der Linapod-Kinematik gemäß [Gar01].

i	Führungsschienen			Stäbe	Antriebsgelenke		Plattformgelenke		
	$s_i$	$r_i$	$t_i$	$l_i$	$a_i$	$b_i$	$p'_i$	$m'_i$	$n'_i$
1	0.025	0.0	2.5	1.25	1.000	0.000	-0.126	-0.516	0.166
	0.886	0.0			0.000	-1.000	0.180	-0.607	0.621
	2.900	-1.0			0.000	0.000	0.435	0.604	0.766
2	-0.779	0.0	2.5	1.25	-0.500	0.866	-0.093	0.784	-0.621
	-0.421	0.0			0.866	0.500	-0.199	-0.144	-0.166
	2.900	-1.0			0.000	0.000	0.435	0.604	0.766
3	0.755	0.0	2.5	1.25	-0.500	-0.866	0.219	-0.267	0.455
	-0.465	0.0			-0.866	0.500	0.019	0.751	-0.455
	2.900	-1.0			0.000	0.000	0.435	0.604	0.766
4	-0.025	0.0	2.5	1.7	1.000	0.000	0.145	0.517	-0.166
	0.886	0.0			0.000	-1.000	0.164	-0.607	0.621
	2.900	-1.0			0.000	0.000	0.635	0.604	0.766
5	-0.755	0.0	2.5	1.7	-0.500	0.866	-0.199	0.267	-0.455
	-0.465	0.0			0.866	0.500	0.017	0.751	0.455
	2.900	-1.0			0.000	0.000	0.635	0.604	0.766

**Tabelle C.5: Geometriedaten der Linapod-Kinematik**

i	Führungsschienen			Stäbe	Antriebsgelenke		Plattformgelenke		
	$s_i$	$r_i$	$t_i$	$l_i$	$a_i$	$b_i$	$p'_i$	$m'_i$	$n'_i$
6	0.779	0.0	2.5	1.7	-0.500	-0.866	0.485	-0.784	0.621
	-0.421	0.0			-0.866	0.500	-0.181	-0.144	-0.166
	2.900	-1.0			0.000	0.000	0.635	0.604	0.766

Tabelle C.5: Geometriedaten der Linapod-Kinematik

Ebene 1			Ebene 2		
-0.127	-0.035	-0.074	-0.134	-0.021	-0.033
0.243	0.189	0.143	0.293	0.238	0.195
0.332	0.356	0.401	0.393	0.417	0.364
0.099	-0.138	-0.230	-0.136	-0.125	-0.217
0.113	0.067	0.122	0.073	0.117	0.171
0.432	0.477	0.453	0.453	0.538	0.513
-0.147	-0.146	-0.087	-0.197	-0.196	-0.152
-0.232	-0.124	-0.135	-0.245	-0.138	-0.126
0.332	0.356	0.401	0.393	0.417	0.364
-0.048	0.011	0.009	0.005	-0.039	-0.040
-0.142	-0.153	-0.260	-0.155	-0.166	-0.374
0.432	0.477	0.485	0.485	0.538	0.514
0.274	0.181	0.161	0.310	0.217	0.185
-0.012	-0.064	-0.008	-0.048	-0.101	-0.069
0.332	0.356	0.401	0.393	0.417	0.363
0.147	0.127	0.221	0.132	0.164	0.257
0.029	0.086	0.139	0.081	0.049	0.102
0.432	0.477	0.453	0.485	0.538	0.514
Ebene 3			Ebene 4		
0.240	0.116	0.155	0.010	0.103	0.115
0.173	0.227	0.182	0.222	0.277	0.233
0.556	0.532	0.577	0.617	0.593	0.540
0.181	0.219	0.127	0.128	0.206	0.114
0.151	0.106	0.051	0.112	0.155	0.101
0.607	0.653	0.677	0.660	0.714	0.738
-0.161	-0.254	-0.234	-0.197	-0.290	-0.259
-0.066	-0.014	0.043	-0.103	-0.050	-0.052
0.556	0.053	0.577	0.617	0.593	0.539
-0.221	-0.201	-0.107	-0.205	-0.237	-0.143
0.083	0.136	0.084	0.098	0.100	0.048
0.607	0.677	0.677	0.660	0.714	0.738
0.138	0.139	0.080	0.188	0.189	0.145
-0.106	-0.214	-0.224	-0.120	-0.227	-0.215
0.556	0.532	0.577	0.617	0.593	0.540
0.041	-0.017	-0.019	-0.011	0.032	0.031
-0.232	-0.242	-0.135	-0.244	-0.256	-0.148
0.607	0.653	0.677	0.660	0.714	0.738

Tabelle C.6: Randpunkte der Hüllkurve der Plattform der Linapod-Kinematik

### C.3 Parallax - Kinematik

Die folgende Tabelle enthält die Geometriedaten der Parallax-Kinematik gemäß [Boe01].

i	Führungsschienen			Stäbe	Antriebsgelenke		Plattformgelenke		
	$s_i$	$r_i$	$t_i$	$l_i$	$a_i$	$b_i$	$p'_i$	$m'_i$	$n'_i$
1	0.000	-1.00	1.54	1.365	0.000	-0.500	0.100	0.500	0.866
	-0.708	0.00			-0.423	0.785	-0.090	0.866	-0.500
	0.200	0.00			0.906	0.366	0.200	0.000	0.000
2	0.000	-1.00	1.96	1.365	0.000	-0.500	0.100	0.423	0.875
	-0.907	0.00			0.000	0.866	-0.350	0.906	-0.408
	0.360	0.00			1.000	0.000	0.750	0.000	-0.259
3	0.000	-1.00	1.73	1.365	0.000	-0.500	0.100	0.000	0.866
	-0.109	0.00			1.000	0.000	-0.190	1.000	0.000
	1.330	0.00			0.000	-0.866	0.650	0.000	0.500
4	0.000	-1.00	1.73	1.365	0.000	-0.500	0.100	0.000	0.866
	0.190	0.00			1.000	0.000	0.190	1.000	0.000
	1.330	0.00			0.000	-0.866	0.650	0.000	0.500
5	0.000	-1.00	1.96	1.365	0.000	-0.500	0.100	-0.423	0.875
	0.907	0.00			0.000	-0.866	0.350	0.906	0.408
	0.360	0.00			1.000	0.000	0.750	0.000	-0.259
6	0.000	-1.00	1.54	1.365	0.000	-0.500	0.100	-0.500	0.866
	0.708	0.00			0.423	-0.785	0.090	0.866	0.500
	0.200	0.00			0.906	0.366	0.200	0.000	0.000

Tabelle C.7: Geometriedaten der Parallax-Struktur

### C.4 6X Hexapod - Kinematik

Die folgende Tabelle enthält die Strukturdaten, die Gelenkkordinaten und die Randpunkte der Hüllkurve der 6X Hexapod-Kinematik gemäß [Ihl02].

i	Stablänge		Antriebsgelenke			Plattformgelenke		
	min	max	$q_i$	$a_i$	$b_i$	$p'_i$	$m'_i$	$n'_i$
1	1.28	2.57	-0.419	0.069	0.089	-0.253	0.000	0.000
			1.564	-0.611	-0.782	0.024	-0.608	0.793
			2.884	0.788	-0.615	0.495	0.793	0.608
2	1.28	2.57	-1.145	0.494	0.633	0.105	-0.527	-0.687
			-1.145	0.366	0.468	-0.232	-0.304	-0.396
			2.884	0.788	-0.615	0.495	-0.793	0.608
3	1.28	2.57	1.564	-0.564	-0.722	0.148	0.527	0.687
			0.419	0.245	0.314	0.207	-0.304	-0.396
			2.884	0.788	-0.615	0.495	-0.793	0.608
4	1.28	2.57	1.651	-0.458	-0.794	0.148	0.365	0.784
			0.442	-0.199	-0.345	-0.207	0.211	0.453
			2.300	0.866	-0.500	0.160	-0.906	0.422

Tabelle C.8: Geometriedaten der 6X Hexapod-Kinematik

i	Stablänge		Antriebsgelenke			Plattformgelenke		
	min	max	$q_i$	$a_i$	$b_i$	$p'_i$	$m'_i$	$n'_i$
5	1.28	2.57	-1.209	0.401	0.696	0.105	-0.365	-0.784
			1.209	-0.297	-0.515	0.232	0.211	0.453
			2.300	0.866	-0.500	0.160	-0.906	0.422
6	1.28	2.57	-0.442	0.056	0.098	-0.253	0.000	0.000
			-1.651	0.496	0.860	-0.024	-0.422	-0.906
			2.300	0.866	-0.500	0.160	-0.906	0.422

Tabelle C.8: Geometriedaten der 6X Hexapod-Kinematik

### C.5 Biglide- und Bipod-Kinematik

Die folgende Tabelle enthält die Geometriedaten der Biglide- und der Bipod-Kinematik.

i	Biglide				Bipod		
	Führungsschienen			Stäbe	Stablänge		Antriebspunkte
	$s_i$	$r_i$	$t_i$	$l_i$	min	max	$q_i$
1	-1.0	1.0	0.9	1.00	0.75	1.43	-1.0
	0.0	0.0					0.0
2	1.0	-1.0	0.9	1.00	0.75	1.43	1.0
	0.0	0.0					0.0

Tabelle C.9: Geometriedaten der Biglide- und der Bipod-Kinematik





**Literatur**

- [Ack91] Ackermann, J.: Kugelgewinde und Linearführungen, Präzisionsmaschinenelemente für die Linearbewegungstechnik, Verlag Moderne Industrie AG & Co, Landsberg Lech, 1991.
- [Ali94] Alizade, R. I.; Tagiyev, N. R.; Duffy, J.: A Forward and Reverse Displacement Analysis of a 6-DOF IN-Parallel Manipulator, Mechanical Machining Theory, Vol. 29, S. 115-124, 1994.
- [Ang90] Angeles, J.; Anderson, K.; Gosselin, C.: Constrained Design Optimisation Using Orthogonal Decomposition, ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 112, S. 255 - 256, Juni 1990.
- [Ang92] Angeles, J.; López-Cajún, C. S.: Kinematic Isotropy and the Conditioning Index of Serial Robotic Manipulators, International Journal of Robotics Research, Vol. 11, No. 6, S. 560-571, 12/1992.
- [Bac81] Backhaus, E.; Fordran, U., Strübing, W.: Berechnung großer Schwingungssysteme mit Hilfe der Reduktion von Untersystemen, Studententexte zur Dynamik großer Systeme, Sektion Grundlagen des Maschinenwesens, Technische Universität Dresden, Heft 4/81.
- [Bag71] Bagci, C.: Degrees of Freedom of Motion in Mechanisms, Transactions of the ASME, S. 140 -148, 1971.
- [Ben96] Benea, R.: Contribution à l' étude des robots pleinement parallèles de type 6 R-RR-S, Dissertation, Université de Savoie, Annecy, 1996.
- [Bes96] Bessala, J.; Bidaud, P.; Ben Oueddou, F.: Analytica Study of Stewart Platforms Workspaces, Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Minneapolis, Minnesota, S. 3179-3184, April 1996.
- [Bha95] Bhattacharya, S.; Hatwal, H.; Hosh, A.: On the Optimum design of Stewart platform type parallel manipulators, Robotica, Vol.13, S.133-140, 1995.
- [Bod98] Bode, H.; Heisel, U.: Gestaltung und Bewertung von Gelenkeinheiten für Maschinen mit Hexapod-Kinematik Teil 2, Proceedings of the Chemnitz Parallel Kinematics Seminar, 28/29 April 1998, Verlag Wissenschaftliche Scripten, Zwickau, S. 41-50, 1998
- [Boe01] Böhler, H.: Private Kommunikation, Zentrum Fertigungstechnik Stuttgart, Nobelstrasse 15, D-70569 Stuttgart.
- [Bon98] Bonev, I. A.: Analysis and Design of 6-DOF 6-PRRS Parallel Manipulators, Thesis for Master's degree, Departmens of Mechantronics, Kwangju In-situte of Science & Technology, 1998.
- [Bon99] Bonev, I.A.; Ryu, J.: Orientation Workspace Analysis of 6-DOF Parallel Manipulators, Proceedings of the 1999 ASME Design Engineering Technical Conferences, September 12-15, Las Vegas, Nevada, 1999.
- [Bon99a] Bonev, I. A; Ryu, J.: Workspace Analysis of 6 PRPS Parallel Manipulators based on the Vertex Space Concept, Proceedings of the 1999 ASME Design Engineering Technical Conferences, September 12-15, Las Vegas, Nevada, 1999.

- [Bon99b] Bonev, I. A.; Ryu, J.; Kim, N.-J.; Lee, S.-K.: A Simple New Closed Form Solution of the Direct Kinematics of Parallel Manipulators Using Three Linear Extra Sensors, Proceedings of the 1999 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, September 19-23, Atlanta, S. 526-530, 1999.
- [Bon00] Bonev, I.A.; Gosselin, C.M.: A Geometric Algorithm for the computation of the constant-orientation Workspace of 6\_RUS Parallel Manipulators, Proceedings of DETC 2000, ASME 2000 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Baltimore, Maryland, September 2000.
- [Bro93] Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.; Musiol, G.; Mühlig, H.: Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 1993.
- [Car00] Carretero, J. A.; Podhorodeski, R. P.; Nahon, M. A.; Gosselin, C. M.: Kinematic Analysis and Optimization of a New Three Degree of Freedom Spatial Parallel Manipulator, Journal of Mechanical Design, Vol. 122, S. 17-23, März 2000.
- [Cha98] Chablat, D.; Wenger, Ph.: Working modes and aspects in fully parallel manipulators, Proceedings IEEE, International Conference on Robotics and Automation, Leuven, Belgium, S. 1964-1969, 1998.
- [Cha98a] Chablat, D.; Wenger, Ph.; Angeles, J.: The Isoconditioning Loci of a class of closed chain manipulators, Proceedings IEEE, International Conference on Robotics and Automation, Leuven, Belgium, S. 1970-1975, 1998.
- [Che92] Chen, N. X.; Song, S. M.: Direct Position Analysis of the 4-6 Stewart Platforms, Proceedings Robotics, Spatial Mechanisms and Mechanical Systems, Vol. 45, ASME, S. 75-80, 1992.
- [Che93] Cheok, K. C.; Overholt, J. L.; Beck, R. R.: Exact Methods for Determining the Kinematics of a Stewart Plattform Using Additional Displacement Sensors, Journal of Robotic Systems, Vol. 10(5), S. 689 - 707, 1993.
- [Che99] Chen, J.-S.: Geometric error analysis and calibration of a Stewart platform, Proceedings of the ASPE anual meeting October 31 - November 5, Vol 20, S. 384 - 387, 1999.
- [Cli97] Clinton, C. M.; Zhang, G.; Wavering, A. J.: Stiffness modelling of a stewart platform based milling machine, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, Maryland, 1997.
- [Cob01] Cobet, M: Werkzeugmaschinen mit paralleler Kinematik, Problematik: Auslegung, Tagungsband Ausbruch aus dem Koordinatensystem, Institut für Werkzeugmaschinen und Fertigung, Zürich, 6. November 2001.
- [Cob02] Cobet, M.: Designing PKMs: Working Volume, Stiffness, Frequencies, Proceedings of the 3rd Chemnitz Parallel Kinematics Seminar, 23-25 April 2002, Verlag Wissenschaftliche Scripten, Zwickau, S. 83-103, 2002.
- [Con98] Conti, J. P.; Clinton, C. M.; Zhang, G.; Wavering, A. J.: Workspace Variation of a Hexapod Machine Tool, NISTIR 6135, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD, March 1998.
- [Cra86] Craig, J.: Introduction to Robotics, Addison-Wesley Publishing Company, 1986.

- [Die97] Dietl, P.: Damping and Stiffness Characteristics of Rolling Element Bearings, Dissertation, Fakultät für Maschinenbau, Technische Universität Wien, 1997.
- [Dub95] Beitz, W., Küttner, K.-H.: Dubbel Taschenbuch für den Maschinenbau, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1995.
- [Ete95] ETEL S. A.: Lineare, Kollektorlose Motoren grosser Kraft, Zone Industrielle, 2112 Môtiers, Schweiz, 1995.
- [Fal97] Falco, J. A.: Simulation Tools for Collaborative Exploration of Hexapod Machine Capabilities and Applications, Proceedings of the 1997 International Simulation Conference and Technology Showcase, Auburn Hills, MI, September 29 - October 3, 1997.
- [Fun96] Funabashi, H.; Horie, M.; Kubota, T., Takeda, Y.: Development of Spatial Parallel Manipulators with Six Degrees of Freedom, Japan Society of Mechanical Engineers International Journal, Series C, Vol. 34, No. 3, S. 382-387, 1996.
- [Gar01] Garber, T.: Private Kommunikation, Institut für Steuerungstechnik der Werkzeugmaschinen und Fertigungseinrichtungen, Universität Stuttgart, 2001.
- [Gas87] Gasch, R.; Knothe, K.: Strukturdynamik: Band 1: Diskrete Systeme, Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1987.
- [Gos90] Gosselin, C. M.: Stiffness Mapping for Parallel Manipulators, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 6, No. 3, S. 377-382, Juni 1990.
- [Gos90a] Gosselin, C.: Determination of the Workspace of 6-DOF Parallel Manipulators, ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 112, S. 331-336, September 1990.
- [Gos90b] Gosselin, C.; Angeles, J.: Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains, IEEE Transactions on Robotics and Automation, Vol. 6, No. 3, S. 281-290, Juni 1990.
- [Gos90c] Gosselin, C.; Angeles, J.: Kinematic Inversion of parallel Manipulators in the presence of incompletely specified Tasks, ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 112, S. 494 - 500, Dezember 1990.
- [Gos92] Gosselin, J. M.; Lavoie, E.; Toutant, P.: An Efficient Algorithm for the Graphical Representation of the Three Dimensional Workspace of Parallel Manipulators, ASME Robotics, Spatial Mechanisms and Mechanical Systems, Vol. 46, S. 323-328, 1992.
- [Gos96] Gosselin, C. M.; Jean, M.: Determination of the workspace of planar parallel Manipulators with joint limits, Robotics and Autonomous Systems 17, S. 129-138, 1996.
- [Gro81] Gross, H.: Elektrische Vorschubantriebe für Werkzeugmaschinen, Siemens Aktiengesellschaft, Berlin, 1981.
- [Hau96] Haug, E. J.; Luh, C. M.; Adkins, F. A.; Wang, J.-Y.: Numerical Algorithms for Mapping Boundaries of Manipulator Workspaces, ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 118, S. 228-234, Juni 1996.

- [Heb00] Hebsacker, M: Entwurf und Bewertung paralleler Werkzeugmaschinen – das Hexaglide, Dissertation an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, Nr. 13467, 2000.
- [Hei98] Heisel, U.; Maier, V.: Gestaltung und Bewertung von Gelenkeinheiten für Maschinen mit Hexapod-Kinematik Teil 1, Proceedings of the Chemnitz Parallel Kinematics Seminar, 28/29 April 1998, Verlag Wissenschaftliche Scripten, Zwickau, S. 27-40, 1998.
- [Hei00] Heisel, U.; Hestermann, J.-O.; Böhler, H.; Plischke, N.; Thaysen, O.: Realization of sizeable pivoting angles for the 5 side machining with PKM-machine tools, Proceedings of the 2000 Parallel Kinematic Machines International Conference, September 13-15, Ann Arbor, S. 212-222, 2000.
- [Hes01] Hestermann, J.-O.: Problematik: Streben und Gelenke - die Kernkomponenten von PKM, Tagungsband Ausbruch aus dem Koordinatensystem, Institut für Werkzeugmaschinen und Fertigung, Zürich, 6. November 2001.
- [Hon99] Honegger, M.: Konzept einer Steuerung mit Adaptiver Nichtlinearer Regelung für einen Parallelmanipulator, Dissertation an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, Nr. 13162, 1999.
- [Hua98] Huang, T.; Whitehouse, D. J.; Jinsong, W.: The local dexterity, optimal architecture and design criteria of parallel machine tools, Annals of the CIRP, Vol. 47/1, S. 347-353, 1998.
- [Hua00] Huang, T.; Whitehouse, D. J.: A Simple yet effective Approach for Error Compensation of a tripod based Parallel Kinematic Machine, Annals of the CIRP, Vol.49/1/2000, S. 285-288, 2000.
- [Hus92] Husain, M.; Waldron, K. J.: Direct Position Kinematics of the 3-1-1-1 Stewart Platforms, Proceedings Robotics, Spatial Mechanisms and Mechanical Systems ASME, S. 89-97, 1992.
- [Ihl02] Ihlenfeldt, S.: Private Kommunikation, Institut für Werkzeugmaschinen und Umformtechnik, Fraunhofer Gesellschaft, Chemnitz, 2002.
- [Ina99] INA-Sonderdruck aus Werkstatt und Betrieb, Heft Nr. 5, Carl Hanser Verlag, München, Mai 1999.
- [Ina99a] Linearführungen, Profilführungen, Laufrollenführungen, Wellenführungen, Druckschrift LIF, INA Lineartechnik oHG, Homburg, 1999.
- [Ina00] Komponenten für parallele Kinematiken, Baureihen GLK und GLAE, Marktinformation MAI 66, INA-Schaeffler KG, Herzogenaurach, 1999.
- [Inn93] Innocenti, C.; Parenti-Castelli, V.: Forward Kinematics of the General 6-6 Fully Parallel Mechanism: An Exhaustive Numerical Approach Via a Mono-Dimensional-Search Algorithm, Transactions of the ASME, Vol. 115, S. 932-937, Dezember 1993.
- [Inn95] Innocenti, C.: Algorithms for kinematik calibration of fully-parallel manipulators, Computational Kinematics, Kluwer Academic Publishers, S. 241-250, 1995.
- [ISO142] ISO/TR 14253-2:1998, Geometrical product specifications (GPS) - Inspection by measurement of workpieces and measuring equipment, Guide to the estimation of uncertainty in GPS measurement in calibration of measuring equipment and in product verification, International Organization of Standardization, Genf, 1998.

- [ISO230] ISO 230-1:1996(E), Test Code for machine tools - Part 1: Geometric accuracy of machines operating under no-load or finishing conditions, International Organization of Standardization, Genf, 1996.
- [ISO841] ISO/FDIS 841:2000, Industrial automation systems - Numerical control of machines - Coordinate system and motion nomenclature, International Organization of Standardization, Genf, 2000.
- [Ji94] Ji, Z.: Workspace Analysis of Stewart Platforms via Vertex Space, *Journal of Robotic Systems* 11(7), S. 631-639, 1994.
- [Jok99] Jokiel, B.; Ziegert, J. C.: Sequential Determination of Kinematic Parameters in Assembled Parallel Kinematic Mechanismus, *Proceedings of the ASPE anual meeting October 31 - November 5, Vol 20, S. 456 - 460, 1999.*
- [Jok00] Jokiel, B.; Bieg, L.; Ziegert, J. C.: Stewart Platform Calibration Using Sequential Determination of Kinematic Parameters, *Proceedings of the 2000 Parallel Kinematic Machines - International Conference, September 13 - 15, Ann Arbor, S. 14 - 23, 2000.*
- [Kha98] El-Khasawneh, B. S.; Ferreira, P. M.: Computation of stiffness and stiffness bounds for parallel link manipulators, *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 39, S. 321-342, 1998.
- [Kim99] Kim, D.; Chung, W.; Youm, Y.: Singularity Analysis of 6-DOF Manipulators with the Analytical Representation of the Determinant, *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics & Automation, Detroit, Michigan, USA, S. 889-894, May 1999.*
- [Kim99a] Kim, J.; Park, F. C.; Lee, J. M.: A new Parallel Mechanism Machine Tool Capable of Five-face Machining, *Annals of the CIRP, Vol.48, No.1, S. 337-340, 1999.*
- [Kir01] Kirchner, J.: Mehrkriterielle Optimierung von Parallelkinematiken, *Dissertation, Verlag Wissenschaftliche Scripten, Zwickau, 2001.*
- [Kna01] Knapp, W.: Werkzeugmaschinen mit paralleler Kinematik: Problem Messtechnik, *Tagungsband Ausbruch aus dem Koordinatensystem, Institut für Werkzeugmaschinen und Fertigung, Zürich, 6. November 2001.*
- [Kug94] Kugiumtzis, D.; Lillekjendlie, B.: Estimation Model for Kinematic Calibration of Manipulators with a Parallel Structure, *Journal of Robotic Systems* 11(5), S. 399-410, 1994.
- [Laz94] Lazard, D.; Merlet, J.-P.: The (true) Stewart Platform has 12 configurations, *Transactions IEEE* 1050 - 4729/94, S. 2160 -2165, 1994.
- [Leb93] Lebret, G.; Liu, K.; Lewis, F. L.: Dynamic Analysis and Control of a Stewart Platform Manipulator, *Journal of Robotic Systems*, Vol. 10 (5), S. 629 - 655, 1993.
- [Liu93] Liu, K.; Fitzgerald, J. M.; Lewis, F. L.: Kinematic Analysis of a Stewart Platform Manipulator, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, Vol. 40, No. 2, S. 282-293, April 1993.
- [Mas92] Masory, O., Wang, J.: Workspace Evaluation of Stewart Platforms, *Proceedings Robotics, Spatial Mechanisms and Mechanical Systems, ASME, S. 337-346, 1992.*
- [Mas93] Masory, O.; Wang, J.; Zhuang, H.: On the Accuracy of a Stewart Platform - Part II Kinematik Calibration and Compensation, *Transactions IEEE* 1050-4729/93, S. 725-731, 1993.

- [Mer91] Merlet, J. P.: Designing a parallel manipulator for a specific workspace, Forschungsbericht Nr 2527, INRA Sophia Antipolis, April 1995.
- [Mer92] Merlet, J. P.: Manipulateurs parallèles, 5<sup>e</sup> partie: Détermination de l'espace de travail à orientation constante, Rapport de Recherche 1645, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, März 1992.
- [Mer94] Merlet, J. P.: Détermination de l'espace de travail d'un robot parallèle pour une orientation constante, Mechanism and Machine Theory, Vol. 29, No. 8, S. 1099-1113, 1994.
- [Mer95] Merlet, J. P.: Determination of the Orientation Workspace of Parallel Manipulators, Journal of Intelligent and Robotic Systems, Vol. 13, S. 143-160, 1995.
- [Mer96] Merlet, J. P.: Workspace-oriented methodology for designing a parallel manipulator, Proceedings of the IEEE, International Conference on Robotics and Automation, Mineapolis, Minnesota, S. 3726-3731, April 1996.
- [Mer97] Merlet, J. P.: Les Robots parallèles, 2e Edition Hermes, Paris, 1997.
- [Mer98] Merlet, J. P.: The Importance of Optimal Design for Parallel Structures, Proceedings First European-American Forum on Parallel Kinematic Machines, 31.8.-1.9.1998, Milano, Italy, 1998.
- [Mer02] Merlet, J.-P.: The Need for a Systematic Methodology for the Evaluation and Optimal Design of Parallel Manipulators, Proceedings of the 3rd Chemnitz Parallel Kinematics Seminar, 23-25 April 2002, Verlag Wissenschaftliche Scripten, Zwickau, S. 49-61, 2002.
- [Mol00] Molinari-Tosatti, I.; Bianchi, G.; Fassi, I.; Boër, C. R.: An Integrated Tool for Parallel Kinematic Machine Design, Proceedings of the 2nd Chemnitz Parallel Kinematics Seminar, 12./13. April 2000, Verlag Wissenschaftliche Scripten, Zwickau, S. 57-71, 2000.
- [Mse75] Metoda sztywnych elementow skonczonech, Arkady Warszawa, 1975.
- [Mse99] Metoda sztywnych elementow skonczonech w dynamice konstrukcji, Wydawnictwa Naukonwo Techniczne, Warzwa, 1999.
- [Muk00] Mukhopadhyay, M.: Vibrations, Dynamics and Structural Systems, Second Edition, A. A. Balkema / Rotterdam / Brookfield, 2000.
- [Neu98] Neugebauer, R.; Wieland, F.; Ihlenfeld, S: Parallelstrukturen mit längenveränderlichen Streben, Proceedings of the Chemnitz Parallel Kinematics Seminar, 28/29 April 1998, Verlag Wissenschaftliche Scripten, Zwickau, S. 129-142, 1998.
- [Neu00] Neugebauer, R.; Harzbecker, C.; Stoll, A: Parallelkinematiken im Werkzeugmaschinenbau, Proceedings of the 2nd Chemnitz Parallel Kinematics Seminar, 12./13. April 2000, Verlag Wissenschaftliche Scripten, Zwickau, S. 29-53, 2000.
- [Neu02] Neugebauer, R.; Harzbecker, C.; Drossel, W.-G.; Stoll, A.; Ihlenfeldt, S.: Parallel Kinematic Structures in Manufacturing, Proceedings of the 3rd Chemnitz Parallel Kinematics Seminar, 23-25 April 2002, Verlag Wissenschaftliche Scripten, Zwickau, S. 17-48, 2002.
- [Neu02a] Neugebauer, R.; Weidemann, F.: Structure Optimization of Machine Tools with Parallel Kinematics, Proceedings of the 3rd Chemnitz Parallel Kinematics Seminar, 23-25 April 2002, Verlag Wissenschaftliche Scripten, Zwickau, S. 105-118, 2002.

- [Ngu89] Nguyen, C. C.; Pooran, F. J.: Kinematic Analysis and Workspace Determination of a 6 DOF CKCM Robot End-Effector, *Journal of Mechanical Technology*, Vol. 20, S. 283-294, 1989.
- [Num97] Press, W. H.; Teukolsky, S. A.; Vetterling, W. T.; Flannery, B. P.: *Numerical Recipes in C*, Second Edition, Cambridge University Press, 1997.
- [Oll95] Olliviers, M. O.; Mayer, J. R.: Global Kinematic Calibration of a Stewart Platform, *Proceedings of the ASME Dynamic Systems and Control Division*, ASME DSC-Vol. 57-1, S.129-136, 1995.
- [Oph86] Ophey, L.: Dämpfungs- und Steifigkeitseigenschaften vorgespannter Schrägkugellager, *Fortschrittsberichte VDI, Reihe 1: Konstruktionstechnik/Maschinenteile*, Nr. 138, VDI Verlag, 1986.
- [Par90] Parenti-Castelli, V.; Innocenti, C.: Forward Displacement Analysis of Parallel Mechanisms: Closed Form Solution of PRR-3S and PPR-3S Structures, *Proceedings 21st Biennial Mechanisms Conference of the American Society of Mechanical Engineers*, Transactions of the ASME, Vol. 114, S. 68-73, 1990.
- [Pas00] Pasek, Z. J.: Statistical Approach to PKM Accuracy Analysis, *Proceedings of the 2000 Parallel Kinematic Machines - International Conference*, Ann Arbor, USA, September 13 - 15, S. 14 - 23, 2000.
- [Pat97] Patel, A. J.; Ehmann, K. F.: Volumetric Error Analysis of a Stewart Platform-Based Machine Tool, *Annals of the CIRP*, Vol 46/1/1997, S. 287-291, 1997.
- [Pri00] Pritschow, G.: Parallel Kinematic Machines (PKM) - Limitations and New Solutions, *Annals of the CIRP*, Vol. 49/1/2000, S. 275-278, 2000.
- [Rom94] Romdhane, L.: Orientation Workspace of Fully Parallel Mechanisms, *European Journal of Mechanics, A/Solids*, Vol. 13, No. 4, S. 541-553, 1994.
- [Ryu98] Ryu, S. J. et al.: ECLIPSE : An Overactuated Parallel Mechanism for Rapid Machining, *1998 ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, USA, Vol. 8, S. 681-689, 1998.
- [Sch94] Schmidt, S.: Einflüsse auf das Schwingungsverhalten von Maschinenstrukturen durch Rollenumlaufschuh-Führungen, *VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 11: Schwingungstechnik* Nr. 220, 1994.
- [Sch98] Schönherr, J.: Bemessen, Bewerten und Optimieren von Parallelstrukturen, *Proceedings of the Chemnitz Parallel Kinematics Seminar*, 28./29. April 1998, Verlag Wissenschaftliche Scripten, Zwickau, S. 85-96, 1998.
- [Sch99] Schwertassek, R., Wallrapp, O.: *Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme*, Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1999.
- [Sch02] Firmenschrift der Schneeberger AG, Schneeberger Holding AG, Roggwil, Schweiz, 2002.
- [Shi92] Shi, X.; Fenton, R. G.: Solution of the Forward Instantaneous Kinematics for a General 6-DOF Stewart Platform, *Mechanical Machining Theory* Vol. 27, No. 27, S. 251-259, 1992.
- [Shi94] Shi, X.; Fenton, R. G.: A Complete and General Solution to the Forward Kinematics Problem of Platform-Type Robotic Manipulators, *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Transactions IEEE 1050-4729/94, S. 3055-3062, 1994.



- [Sta99] Star Kugelgewindetriebe, Firmenschrift RD 83 301/12.99 der Bosch Rexroth AG, Lohr am Main, 1999.
- [Tah95] Tahmasebi, F.; Tsai, L.-W.: On the Stiffness of a Novel Six-Degree-of-Freedom Parallel Manipulator, *Journal of Robotic Systems*, Vol. 12(12), S. 845-856, 1995.
- [Tak95] Takeda, Y.; Funabashi, H.: Motion Transmissibility of In-Parallel Actuated Manipulators, *Japan Society of Mechanical Engineers International Journal, Series C*, Vol. 38, No. 4, S. 749-755, 1995.
- [Tak96] Takeda, Y.; Funabashi, H.: Kinematic and Static Characteristics of In-Parallel Actuated Manipulators at Singular Points and in Their Neighborhood, *Japan Society of Mechanical Engineers International Journal, Series C*, Vol. 39, No. 1, S. 85-93, 1996.
- [Tak96a] Takeda, Y.; Funabashi, H.; Sasaki, Y.: Development of a Spherical In-Parallel Actuated Mechanism with three Degrees of Freedom with Large Working Space and High Motion Transmissibility (Evaluation of Motion Transmissibility and Analysis of Working Space), *Japan Society of Mechanical Engineers International Journal, Series C*, Vol. 39, No. 3, S. 541-548, 1996.
- [Tak97] Takeda, Y.; Funabashi, H.; Ichimaru, H.: Development of Spatial In-Parallel Actuated Manipulators with Six Degrees of Freedom with High Motion Transmissibility, *Japan Society of Mechanical Engineers International Journal, Series C*, Vol. 40, No. 2, S. 299-308, 1997.
- [Tak99] Takeda, Y.; Funabashi, H.: Kinematic Synthesis of In-Parallel Actuated Mechanisms Based on the Global Isotropy Index, *Journal of Robotics and Mechatronics*, Vol. 11, No. 5, S. 404-410, 1999.
- [Tak99a] Takeda, Y.; Funabashi, H.; Kimura, M.: Development of a Spatial Six Degree of Freedom In-Parallel Actuated Worktable with Rolling Spherical Bearings, *Proceedings of the ninth International Conference on Advanced Robotics*, Tokyo, Japan, Oct. 25-27, S. 551-555, 1999.
- [Tak00] Takeda, Y.; Funabashi, H.; Shen, G.; Ichikawa, K.; Hirose, K.: Stiffness Analysis of a spatial Six-Degree-of-Freedom In-Parallel Actuated Mechanism with Rolling Spherical Bearings, *Proceedings of the Year 2000 Parallel Kinematic Machines International Conference*, September 13-15, S. 264 - 273, 2000.
- [Tay94] Taylor, B. N.; Kuyatt, C. E.: Guidelines for Evaluating and Expressing the Uncertainty of NIST Measurement Results, *National Institute of Standards and Technology (NIST), Technical Note 1297*, 1994.
- [Wec91] Weck, M.: *Werkzeugmaschinen und Fertigungssysteme, Band 1, Maschinenarten, Bauformen und Anwendungsbereiche*, 4. Auflage, VDI Verlag, Düsseldorf, 1991.
- [Wec98] Weck, M.; Giesler, M.: Dyna-M - Ein neues Werkzeugmaschinenkonzept auf Basis ebener Koppelkinematiken, *Proceedings of the Chemnitz Parallel Kinematics Seminar*, 28/29 April 1998, Verlag Wissenschaftliche Scripten, Zwickau, S. 97-113, 1998.
- [Wec00] Weck, M.; Staimer, D.: Accuracy Issues of Parallel Kinematic Machine Tools: Compensation and Calibration, *Proceedings of the 2000 Parallel Kinematic Machines - International Conference*, Ann Arbor, USA, September 13-15, S. 35-41, 2000.

- [Wec02] Weck, M.; Staimer, D.: Parallel Kinematic Machine Tools - Current State and Future Potentials, *Annals of the CIRP*, Vol. 51/2, S. 1-13, 2002.
- [Wei00] Weikert, S.: Beitrag zur Analyse des dynamischen Verhaltens von Werkzeugmaschinen, Dissertation an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, Nr. 13596, 2000.
- [Wei01] Weidermann, F.: Strukturoptimierung von parallelkinematischen Werkzeugmaschinen, Dissertation, Verlag Wissenschaftliche Scripten, Zwickau, 2001.
- [Wei02] Weidermann, F.: Verbesserung des statischen Verhaltens eines Bohrwerks, NAFEMS Seminar: Modelling of Assemblies and Joints for FE Analyses, Wiesbaden, April 24 - 25, 2002.
- [Wen87] Weng, T.-C.; Sandor, G. N.; Xu, Y.; Kohli, D.: On the Workspace of Closed-Loop Manipulators with Ground Mounted Rotary-Linear Actuators and Finite Size Platform, *Proceedings Advances in Design and Automation ASME*, Vol.2 , S. 55-61, 1987.
- [Wie00] Wieland, F.: Entwicklungsplattform für Parallelkinematiken und Prototyp einer Werkzeugmaschine, Dissertation, Verlag Wissenschaftliche Scripten, Zwickau, 2000.
- [Yan94] Yang, F.- C.; Haug, E. J.: Numerical Analysis of the Kinematic Working Capability of Mechanisms, *ASME Journal of Mechanical Design*, Vol 116, S. 111-118, März 1994.
- [Yi93] Yi, B.-J.; Freeman, R. A.: Geometric Analysis of Antagonistic Stiffness in Redundantly Actuated Parallel Mechanisms, *Journal of Robotic Systems*, Vol. 10(5), S. 581-603, 1993.
- [Zan95] Zanganeh, K. E.; Angeles, J.: On the Isotropic Design of General Six-Degree of Freedom Parallel Manipulators, *Computational Kinematics*, Kluwer Academic Publishers, S. 213-220, 1995.
- [Zan97] Zanganeh, K. E.; Angeles, J.: Kinematic Isotropy and the Optimum Design of Parallel Manipulators, *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 16, No. 2, S. 185-197, April 1997.
- [Zha92] Zhang, C.; Song, S.-M.: Forward Kinematics of a Class of Parallel (Stewart) Platforms with Closed-Form Solutions, *Journal of Robotic Systems* 9(1), S. 93-112, 1992.
- [Zir96] Zirn, O.: Beitrag zum Entwurf von Vorschubantrieben für die Hochgeschwindigkeitsbearbeitung, Dissertation an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich, Nr. 11676, 1996.
- [Zla95] Zlatanov, D.; Fenton, R. G.; Benhabib, B.: Identification and Classification of the Singular Configurations of Mechanisms, *Computational Kinematics*, Kluwer Academic Publishers, S. 163-172, 1995.

## Lebenslauf

Name: Matthias Jochen Hermann Cobet

Geburtstag und Ort: 20.07.1973 in Kassel, Deutschland

Familienstand: verheiratet

1980 - 1984

Grundschule Mülheim an der Ruhr

1984 - 1993

Otto-Pankok-Schule Mülheim an der Ruhr

Okt. 1993 - Sep. 1999

Studium des Maschinenbaus an der Universität  
Karlsruhe (TH), Deutschland

Diplomingenieur

1993 - 1997

Studienbegeleitende Praktika

Sep. 1996 - Aug. 1997

Studium an der University of Waterloo, Canada

Mai 1998 - Sep. 1998

Diplomarbeit bei der Firma ADtranz Daimler-Benz