

DISS. ETH Nr. 20597

BIEGEKNICKEN UND LOKALES BEULEN VON STAHLSTÜTZEN IM BRANDFALL

ABHANDLUNG
zur Erlangung des Titels

DOKTOR DER WISSENSCHAFTEN

der

ETH ZÜRICH

vorgelegt von

DIEGO SOMAINI

MSc ETH Bau-Ing., ETH Zürich

geboren am 12. Mai 1982

von Mon, Graubünden

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. Mario Fontana
Prof. Dr.-Ing. Peter Schaumann

2012

Vorwort

Die vorliegende Dissertationsarbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter von Herrn Professor Dr. Mario Fontana am Institut für Baustatik und Konstruktion der Eidgenössischen Technischen Hochschule (ETH) Zürich. Ein besonderer Dank geht an Herrn Professor Dr. Mario Fontana der mir die Durchführung des Doktorats ermöglichte. Seine wertvollen Ratschlägen und seine stets freundliche Unterstützung trugen wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Für die Übernahme des Korreferates und die fachlich kompetenten Ratschläge danke ich ganz herzlich Herrn Professor Dr. Peter Schaumann. Sein Einsatz und seine fachlichen Kenntnisse im Bereich Stabilität von Stahlstützen haben mich sehr beeindruckt. Ein spezieller Dank geht an Jacqueline Pauli und an Simon Zweidler, die während meiner gesamten wissenschaftlichen Tätigkeit mit zahlreichen fachlichen Diskussionen und wertvollen Ratschlägen den Inhalt dieser Arbeit wesentlich mitgestaltet haben. Danken möchte ich auch Herrn Dr. Markus Knobloch für die Unterstützung und Wegleitung bei den fachlichen Publikationen sowie Herrn Patrik Morf für seine grosse Hilfe bei der Durchführung der Versuche und das freundschaftliche Arbeitsverhältnis.

Meinen Kolleginnen und Kollegen am Institut für Baustatik und Konstruktion an der ETH Zürich und insbesondere denjenigen des Fachbereichs für Stahl-, Holz- und Verbundbau danke ich für das stets angenehme und freundschaftliche Arbeitsumfeld. Daraus hab ich während meiner Tätigkeit am Institut Kraft und Motivation schöpfen können.

Ringrazio di cuore la mia famiglia, in modo particolare i miei genitori e mia moglie, per il loro continuo sostegno.

Solothurn, November 2012

Diego Somaini

Kurzfassung

Die vorliegende Promotionsarbeit befasst sich mit der globalen und lokalen Stabilität der zentrisch und exzentrisch gedrückten Stützen, die nichtlineares Materialverhalten aufweisen. Das Tragverhalten solcher Stützen sowie der Einfluss verschiedener Parameter wie Geometrie, Eigenspannungen, Belastungsart oder Kriechen soll anhand einfacher Modellvorstellungen erläutert werden. Das Augenmerk gilt besonders den zentrisch und exzentrisch gedrückten Stahlstützen im Brandfall. Dennoch haben die erarbeiteten Berechnungsmodelle in der Regel allgemeine Gültigkeit und gelten somit auch für Stützen aus Aluminium oder hochlegierten Stählen bei Raumtemperatur.

Die Beschreibung des Tragverhaltens von Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten erfordert ein Berechnungsmodell, welches die mechanischen Eigenschaften des Systems im wesentlichen abbildet. Dazu gehört nebst dem Stoffgesetz und dem Gleichgewicht mindestens eine Verträglichkeitsbedingung. Das Gleichgewichtsmodell, welches das Zusammenspiel der treibenden und der rückhaltenden Kräfte entlang der Stütze in Funktion deren Verformung beschreibt, eignet sich besonders dafür. Dieses Modell ermöglicht es auf einfache Weise unterschiedliche Einflüsse auf das Tragverhalten der Stütze in einem Momenten-Krümmungs-Diagramm zu veranschaulichen und ist eine grosse Hilfe zur Förderung des Verständnisses dieser Stabilitätsprobleme. Nebst der Traglast erlaubt das Gleichgewichtsmodell eine Abschätzung der Verformungen und Schnittkräften nach Theorie 2^{ter} Ordnung mit Berücksichtigung des nichtlinearen Materialverhaltens. Somit kann das Last-Verformungs-Verhalten der Stütze vollständig beschrieben werden, auch im abfallenden Ast des Last-Verformungs-Pfades.

Erfüllt das Gleichgewichtsmodell sowohl das Stoffgesetz wie die Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen an jedem Punkt entlang der Stützenachse, so wird das Tragverhalten der gedrückten Stütze mit nichtlinearem Materialverhalten sehr genau beschrieben. Dies erfordert eine numerische Lösung des Problems, ermöglicht jedoch nebst dem Last-Verformungs-Verhalten auch die Berechnung der Verformungsfigur der Stütze in Funktion deren Belastung. Zudem kann der Einfluss von Eigenspannungen, thermischen Verzerrungen sowie Kriechen erfasst werden. Nebst diesem Modell, welches versucht das mechanische Verhalten möglichst genau zu erfassen, werden vereinfachte Berechnungsmodelle von diesen abgeleitet, die eine gute und schnelle Beurteilung der globalen Stabilität von Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten ermöglichen. Die Vereinfachungen, die besonders die Berechnung der Momenten-Krümmungs-Beziehung der Stütze betreffen sowie deren Verformungsfigur führen zu einem neuen vereinfachten Gleichgewichtsmodell, das ohne jegliches iterativen Vorgehen die Stabilität einer Stütze mit nichtlinearem Materialverhalten überprüfen kann und sich dementsprechend für die Bemessung eignet.

Der zweite Teil der Arbeit befasst sich mit dem Beulen von dreiseitig und vierseitig gelenkig gelagerten Platten mit nichtlinearem Materialverhalten. Ein neues analytisches Modell zur Berechnung der Verzweigungslast dieser Platten mit kombinierter Belastung durch Druck und Biegung wird erläutert. Zusammen mit der Methode der mitwirkenden Breiten ermöglicht dieses Modell die einfache Beurteilung der Tragfähigkeit sowie des Verformungsverhaltens dreiseitig und vierseitig gelenkig gelagerten Platten mit nichtlinearem Materialverhalten. Verknüpft mit dem Gleichgewichtsmodell, welches unter anderem die Momenten-Krümmungs-Beziehung des Stützenquerschnittes berechnet, gelingt es, die Querschnittstragfähigkeit einer mehraxial belasteten Stütze abzuschätzen. Dies ermöglicht die Einbeziehung der Querschnittsstabilität bei der Beurteilung des Tragverhaltens knickgefährdeter Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten.

Abstract

The present work studies the global and local stability of centrally and eccentrically loaded columns with nonlinear material behaviour. The load carrying behaviour of these columns as well as the influence of different parameters like geometry, residual stresses, loading conditions or creep is explained by the use of simply analytical models. The main interest concerns steel columns in case of fire subjected to centric or eccentric load. However the presented models have a generic validity and are therefore also suitable for columns in aluminium or stainless steel at ambient temperature.

The description of the load carrying behaviour of columns with nonlinear material necessitates a model which correctly considers the main mechanical properties of the static system. For this purpose at least one compatibility condition, besides the constitutive laws of the material and the equilibrium conditions, has to be considered. All these conditions can be fulfilled by the equilibrium model which describes the interaction between the drift and retention forces along the columns axis in function of the column deformation. The model allows easily to illustrate the different influences on the load carrying behaviour of the column in a moment-curvature-diagram and is therefore suitable to promote a better understanding of this kind of stability problems. Beside the buckling load the equilibrium model allows to calculate the deformations and forces of second order along the column axis considering the nonlinear material behaviour. This allows the calculation of the full load deflection path of the column including the decreasing branch.

The equilibrium model describes the load carrying behaviour of the column with nonlinear material very precisely if the constitutive laws, the equilibrium and the compatibility conditions are fulfilled at every point along the column axis. This requires a numerical solution procedure but allows, beside the load deflection path, to calculate the geometrical shape of the deflected column in function of the loading as well. In addition, the influence of residual stresses, thermal strains and creep can be analysed. Complementary to this model which tries to describe the mechanical behaviour the best possible other models including different simplifications are developed. These simplified models allow a good and fast verification of the global stability of column considering nonlinear material behaviour. The simplifications, mainly concerning the calculation of the moment curvature relationship and the geometrical shape of the deflected column axis, leads to a new simplified equilibrium model which checks the stability of the columns without an iterative process and is therefore suitable for design.

The second part of the present work studies the buckling behaviour of plates with nonlinear material behaviour which are simply supported along three or four edges. For these plates subjected to compression and bending, a new analytical model for the calculation of the bifurcation load is presented. Combined with the effective width method this new analytical model allows the calculation of the ultimate load and deformation of plates with nonlinear material behaviour simply supported along three or four edges. Knowing the moment-curvature-relationship which is calculated by the equilibrium model and the load carrying behaviour of the single plate, the bearing capacity of entire cross sections subjected to axial load and bending moments about both axes can be calculated. This allows to include in the evaluation of the global column stability the local bearing capacity of the cross section considering nonlinear material behaviour.

Riassunto

La presente dissertazione studia la stabilità globale e locale di colonne soggette a carichi centrici ed eccentrici con caratteristiche di materiale non lineari. Il comportamento strutturale di queste colonne e l'influsso di diversi parametri come geometria della sezione, forze residue, genere di carico oppure deformazioni viscosse è descritto con semplici modelli analitici. L'attenzione principale di questo lavoro è dedicata a colonne in acciaio in caso d'incendio soggette a carichi centrici ed eccentrici. Ciò nonostante i modelli di calcolo presentati hanno di regola validità generale e quindi adatti anche per la valutazione del carico di rottura di colonne in alluminio oppure in acciaio inossidabile a temperatura ambiente.

La descrizione del comportamento strutturale di colonne con materiale non lineare e in particolare la valutazione della loro stabilità esige un modello di calcolo in grado di considerare le principali proprietà meccaniche del sistema. A queste appartengono insieme alle regole costitutive, l'equilibrio delle forze e almeno una relazione di compatibilità cinematica tra deformazioni e spostamenti. Queste proprietà meccaniche sono descritte in modo adeguato dal modello d'equilibrio capace di descrivere le forze d'influenza e di ritenzione che agiscono lungo l'asse della colonna in funzione della deformazione della colonna stessa. Rappresentando la forza di flessione in funzione della curvatura, questo modello permette di visualizzare molteplici influssi sul comportamento strutturale delle colonne e quindi aiuta a comprendere meglio le caratteristiche meccaniche considerando del materiale a caratteristiche non lineari. Il modello d'equilibrio non solo permette di calcolare il carico di rottura di colonne con materiale non lineare, ma rende possibile anche la valutazione delle deformazioni di secondo ordine della colonna stessa in funzione del carico applicato. Di conseguenza il modello permette la descrizione del comportamento strutturale lungo tutto il percorso di carico.

Considerando le regole costitutive, l'equilibrio delle forze e le relazioni di compatibilità cinematica in ogni punto della colonna, il modello d'equilibrio riesce a descrivere il comportamento strutturale della colonna in maniera molto precisa diventando però un modello matematicamente complesso che esige una soluzione numerica. D'altro canto il modello permette di calcolare la forma geometrica dell'asse della colonna deformata in funzione del carico a cui è soggetta e di descrivere l'influsso di forze residue, deformazioni termiche o deformazioni viscosse. Basandosi su questo modello di calcolo il cui scopo è di descrivere il comportamento meccanico nel migliore dei modi, vengono sviluppati dei modelli di calcolo più semplici che permettono una valutazione veloce ma comunque precisa della stabilità globale di colonne con materiale a caratteristiche non lineari. Le semplificazioni concernenti in particolar modo l'approssimazione della relazione tra la forza di flessione e la curvatura ma anche la geometria della colonna deformata, conducono ad un modello d'equilibrio semplificato capace di valutare la stabilità globale senza necessitare di nessuna procedura iterativa. Un tale modello d'equilibrio semplificato è adatto al dimensionamento della stabilità di colonne con materiale non lineare.

La seconda parte della dissertazione tratta l'imbozzamento delle piastre con materiale non lineare. In particolare viene presentato un nuovo modello analitico capace di calcolare il carico di biforcazione della piastra sollecitata a pressione e flessione. Questa soluzione analitica integrata nel modello delle larghezze efficaci sviluppata da Kármán permette la valutazione del carico d'imbozzamento di una piastra affetta da imperfezioni geometriche, diverse condizioni di supporto e materiale non lineare. Ciò permette inoltre l'approssimazione del carico di rottura di colonne sollecitate in più direzioni includendo sia la stabilità globale che quella locale.



Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Problemstellung	1
1.2	Zielsetzung	1
1.3	Übersicht	2
1.4	Abgrenzung	3
2	Verzweigungslast des Knickstabes	5
2.1	Geschichtlicher Rückblick	5
2.2	Verzweigungslast bei linear elastischem Materialverhalten	6
2.3	Verzweigungslast bei nichtlinearem Materialverhalten	7
2.3.1	Knickmodul nach Engesser-Kármán	8
2.3.2	Verzweigungslast von Stahlstützen im Brandfall	9
2.4	Zusammenfassung und Schlussfolgerungen	11
3	Tragverhalten gedrückter Stützen mit Biegung	13
3.1	Geschichtlicher Rückblick	13
3.2	Linear elastisches Materialverhalten	16
3.3	Nichtlineares Materialverhalten	20
3.3.1	Reduziertes Gleichgewichtsmodell	20
3.3.2	Erweitertes Gleichgewichtsmodell	24
3.3.3	Energiemethode für zentrisch gedrückte Stützen	28
3.4	Diskussion und Vergleich	33
3.4.1	Einfluss von Material und Eigenspannungen	33
3.4.2	Einfluss der geometrische Imperfektion	37
3.4.3	Verformungsfigur	38
3.4.4	Kriechen	45
3.4.5	Vergleich mit Versuchen	47
3.5	Zusammenfassung und Schlussfolgerungen	48
4	Vereinfachte Berechnungsmodelle zum Knicken	51
4.1	Vorhandene Berechnungsmodelle für zentrisches Knicken	51
4.1.1	Linear elastisches Modell	51
4.1.2	Eurocode und SIA 263 bei Raumtemperatur	52
4.1.3	Zentrisches Knicken im Brandfall nach Eurocode	55

4.1.4	Zentrisches Knicken im Brandfall nach SIA 263	57
4.1.5	Biegeknicken im Brandfall nach Toh (Rankine-Modell)	57
4.1.6	Weitere Berechnungsmodelle zum zentrischen Knicken	58
4.2	Neue Berechnungsmodelle zum Knicken im Brandfall	59
4.2.1	Vereinfachtes Spannungsmodell	59
4.2.2	Vereinfachtes Gleichgewichtsmodell	65
4.3	Zusammenfassung und Schlussfolgerungen	75
5	Verzweigungslast der Platte	77
5.1	Geschichtlicher Rückblick	77
5.2	Numerische Berechnungsmodelle	80
5.2.1	Modell mit Berücksichtigung der elastischen Entlastung	80
5.2.2	Modell ohne Berücksichtigung der elastischen Entlastung	83
5.3	Vereinfachte analytische Berechnungsverfahren	86
5.3.1	Lösung von Iljuschin	86
5.3.2	Elastisch orthotrope Platte	89
5.3.3	Modell mit belastungsabhängiger Plattensteifigkeit	93
5.3.4	Vereinfachtes Modell	98
5.4	Zusammenfassung und Schlussfolgerungen	99
6	Querschnittstragfähigkeit	101
6.1	Geschichtlicher Rückblick	101
6.2	Traglast von Platten	102
6.2.1	Methode der wirksamen Breiten	102
6.3	Querschnittstragfähigkeit	106
6.3.1	Rechteckige Hohlquerschnitte	106
6.3.2	Offene I- oder H-Querschnitte	112
6.4	Interaktion Knicken und Beulen	116
6.5	Vergleich mit Versuchen	117
6.6	Zusammenfassung und Schlussfolgerungen	119
7	Zusammenfassung und Folgerungen	121
7.1	Zusammenfassung	121
7.2	Folgerungen	123
7.3	Ausblick	124

Anhang A	Materialverhalten des Baustahls	127
A.1	Dreidimensionaler Spannungszustand	127
A.2	Zweidimensionaler Spannungszustand	129
A.3	Eindimensionaler Spannungszustand	131
Anhang B	Numerische Berechnungsmodelle	133
B.1	Reduziertes Gleichgewichtsmodell	133
B.2	Energiemethode	135
Anhang C	Eigenstressen	139
C.1	Entstehung der Eigenstressen	139
C.1.1	Relaxation infolge Kriechen	143
C.2	Veränderung der Eigenstressen im Brandfall	144
Anhang D	Gleichgewichtsmodell, Näherungslösung nach Jezek	145
D.1	Last-Verformungs-Beziehung	145
D.2	Knickspannungslinien	148
Anhang E	Berechnungsbeispiele	149
E.1	Zentrisch belastete Stütze	149
E.1.1	Vereinfachtes Spannungsmodell	149
E.1.2	Vereinfachtes Gleichgewichtsmodell	150
E.2	Exzentrisch belastete Stütze	153
E.2.1	Vereinfachtes Gleichgewichtsmodell	154
Anhang F	Aluminiumstützen	157
Anhang G	Verzeichnisse	161
G.1	Bezeichnungen	161
G.2	Literaturverzeichnis	163



1 Einführung

1.1 Problemstellung

Ungeschützte Stahlprofile erwärmen sich während eines Brandereignisses in Folge ihres üblicherweise grossen Flächen-Volumen-Verhältnisses und der hohen Wärmeleitfähigkeit des Materials sehr rasch auf. Beim Aufwärmen verliert Baustahl bereits ab Temperaturen über 100°C an Steifigkeit und ab Temperaturen oberhalb 400°C an Festigkeit. Zudem wird die für Baustahl bei Raumtemperatur annähernd linear elastische - ideal plastische Spannungs-Dehnungs-Beziehung bei erhöhten Temperaturen ausgeprägt nichtlinear, was zusammen mit der reduzierten Steifigkeit zu einem weicheren Last-Verformungs-Verhalten von Stahlbauteilen führt. Besonders die globale, sowie die lokale Stabilität der zentrisch oder exzentrisch gedrückten Stützen wird massgeblich vom veränderten Tragverhalten beeinflusst. Dies kann bei einem Brandereignis zu einem frühzeitigen Versagen der gesamten Stahlkonstruktion führen oder dessen Tragsicherheit vermindern. Dementsprechend ist es von grosser Bedeutung, das Tragverhalten stabilitätsgefährdeter Stützen mit nicht-linearem Materialverhalten gut zu verstehen und Berechnungsmodelle zu entwickeln, die sowohl die Traglast wie auch das Verformungsverhalten dieser Stützen zuverlässig abschätzen. Dies im Hinblick einer sicheren und wirtschaftlichen Konstruktion von Stahlbauten, wobei die Brandschutzzielen sowie die Sicherheit der Menschen, der Umwelt und die Begrenzung von Sachschäden berücksichtigt werden.

Globale oder lokale Stabilitätsversagen sind stets die Folge einer Abnahme der Steifigkeit des belasteten Bauteils, wobei die Verminderung der Steifigkeit durch die Verformung des Bauteils einerseits, aber auch durch das Materialverhalten und besonders dessen Nichtlinearität verursacht wird. Die heute zur Verfügung stehenden Berechnungsmodelle zur Bemessung der Stabilität von Stahlstützen im Brandfall beruhen auf Berechnungsmodellen zur Beurteilung der Stabilität bei Raumtemperatur und berücksichtigen das nichtlineare Materialverhalten nicht in expliziter Weise. Dies führt zu grossen Unsicherheiten bei der Bemessung stabilitätsgefährdeter Bauteile, da Berechnungsmodelle fehlen, die das mechanische Verhalten der gedrückten Stütze und deren nichtlineares Materialverhalten bei erhöhten Temperaturen explizit berücksichtigen.

1.2 Zielsetzung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht in der Erarbeitung von Berechnungsmodellen zur Beschreibung des Tragverhaltens zentrisch und exzentrisch gedrückter Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten. Ein besonderes Augenmerk gilt dem Beul- und Knickverhalten sowie deren Interaktion bei Stahlstützen im Brandfall. Dennoch wurde darauf geachtet, möglichst allgemein gültige Berechnungsmodelle zu entwickeln, die auch für andere Materialien mit nichtlinearem Verhalten wie zum Beispiel Aluminium oder hochlegierte Stähle bei Raumtemperatur ihre Gültigkeit behalten. Im Vordergrund stehen Berechnungsmodelle, die das mechanische Verhalten der Stützen möglichst vollständig erfassen, sowohl im linear elastischen wie auch im nichtlinear plasti-

schen Bereich der Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Materials. Die Berechnungsmodelle sollen nebst der Bestimmung der Traglast auch den Verformungszustand der betrachteten Stütze in Funktion der Belastung beschreiben. Insbesondere sollen die Verzerrungen und die Schnittkräfte 2^{ter} Ordnung im meist beanspruchten Stützenquerschnitt berechnet werden und damit die lokale Querschnittsstabilität überprüft werden.

Des Weiteren soll das Tragverhalten dreiseitig und vierseitig gelenkig gelagerter Platten, die den Stützenquerschnitt bilden, untersucht werden. Von Interesse sind besonders Platten mit nicht-linearem Materialverhalten, die in ihrer Ebene durch Druck und Biegung belastet sind. Nebst der Traglast soll die Aufmerksamkeit auch der Verzweigungslast solcher Platten gelten, da mit ihr ein Verlust der Querschnittssteifigkeit verbunden ist, der wiederum das gesamte Tragverhalten der Stütze beeinflusst.

1.3 Übersicht

Der erste Teil der Arbeit widmet sich dem eindimensionalen Stabilitätsversagen, das heisst dem Knicken und Biegeknicken von zentrisch und exzentrisch belasteten Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten. Dabei wird in einem ersten Schritt die Verzweigungslast des zentrisch gedrückten Knickstabes untersucht, welche einem oberen Grenzwert der Stütztraglast entspricht. In einem zweiten Schritt wird das mechanische Verhalten der geometrisch imperfekten Stützen anhand numerischer Berechnungsmodelle untersucht und der Einfluss des nichtlinearen Materialverhaltens erläutert. Ein besonderes Augenmerk gilt dem Zusammenspiel zwischen den treibenden und rückhaltenden Kräften, die entlang der verformten Stütze wirken, sowie der geometrischen Form der Biegelinie der Stütze und deren Veränderung während der Belastung. Zusätzlich werden unterschiedliche Einflüsse wie Eigenspannungen, Querschnittsgeometrie, Belastungsart oder Kriechen mit den numerischen Berechnungsmodellen untersucht und anhand von Momenten-Krümmungs-Diagrammen veranschaulicht.

Im zweiten Teil der Arbeit werden vereinfachte Berechnungsmodelle zum Knicken und Biegeknicken von Stahlstützen im Brandfall entwickelt. Diese bauen auf den im ersten Teil der Arbeit gewonnen Erkenntnissen auf und gründen teilweise auf den gleichen mechanischen Grundprinzipien wie die oben erwähnten numerischen Modelle. Besonders die einfache, aber dennoch möglichst realitätsnahe Abbildung der treibenden und rückhaltenden Kräfte in Funktion der Stützenverformung ermöglicht mit dem erläuterten vereinfachten Gleichgewichtsmodell eine zuverlässige und gute Abschätzung der Traglast und des Tragverhaltens zentrisch und exzentrisch gedrückter Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten.

Der dritte Teil befasst sich ausschliesslich mit der Verzweigungslast von Platten mit nichtlinearem Materialverhalten, die in ihrer Ebene durch Druck und Biegung belastet sind. Zur besseren Untersuchung verschiedener Effekte wie Belastungskombination oder Lagerungsart werden zwei numerische Modelle erläutert, die eine Lösung des Verzweigungsproblems der Platte mit oder ohne Berücksichtigung der elastischen Entlastung ermöglichen. Auf der Grundlage dieser Modelle wird ein vereinfachtes Berechnungsverfahren zur Bestimmung des Beulfaktors von Platten entwickelt, die im plastischen Bereich des Materialverhaltens ausbeulen.

Aufbauend auf dem dritten Teil befasst sich der vierte Teil der Arbeit mit der Traglast und der zugehörigen Stauchung der dreiseitig oder vierseitig gelenkig gelagerten Platte. Dank der Lösung des Verzweigungsproblems kann das Tragverhalten von ausgebeulten Platten mit nichtlinearem Materialverhalten mit der Methode der wirksamen Breiten auf einfache Weise abgeschätzt werden. Zusammen mit der Verknüpfung der Plattenstauchungen mit der Verformung des gesamten Stützenquerschnittes, welcher aus diesen Platten gebildet ist, kann die Querschnittstragfähigkeit der Stütze abgeschätzt werden. Dabei wird auf eine Einteilung der Querschnitte in Klassen und den zugehörigen Nachweisverfahren plastisch-plastisch, elastisch-plastisch, elastisch-elastisch und elas-

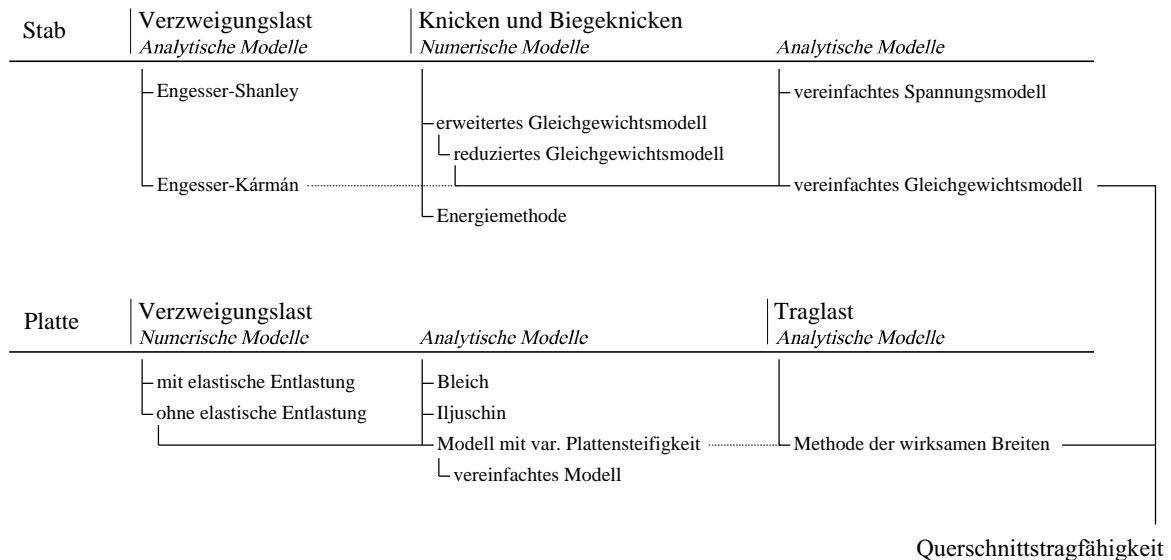


Abb. 1-1: Schematische Einordnung der numerischen und analytischen Modelle zur Beurteilung der Tragfähigkeit gedrückter Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten.

tisch-elastisch-reduziert verzichtet. Zudem kann mit Verknüpfung der lokalen Stauchungen mit der Querschnittsverformung überprüft werden, ob die Schnittkräfte 2^{ter} Ordnung der zentrisch oder exzentrisch gedrückten Stütze zu einem lokalen Beulen des meist beanspruchten Querschnittselements führen. Ein solches lokales Stabilitätsversagen führt zu einem grossen Steifigkeitsverlust des gesamten Stützenquerschnittes, was in der Regel zum Versagen der Stütze führt.

1.4 Abgrenzung

Sämtlichen Untersuchungen zum Stabilitätsverhalten der Stütze und des Stützenquerschnitts sind die Materialmodelle des Eurocodes zugrundegelegt worden. Zudem sind die Eigenspannungen im Stützenquerschnitt bei Raumtemperatur vereinfachend angenommen und deren Entwicklung wird während der Brandeinwirkung nur grob abgeschätzt. Sowohl die Entstehung der Eigenspannungen beim Herstellungsprozess wie auch deren Veränderung im Brandfall ist eine Folge sehr komplexer physikalischer Phänomene, die schwer zu erfassen und stark von Materialeigenschaften, Temperaturgradienten, Geometrie, Zeit und weiteren Parametern abhängig sind. In der vorliegenden Arbeit wird lediglich der Einfluss möglicher Eigenspannungen bei erhöhten Temperaturen aufgezeigt, ohne dass dieser genau quantifiziert wird.

Bei den Untersuchungen der globalen und lokalen Stabilität gedrückter Stützen im Brand wird stets eine gleichmässige Erwärmung des Stützenquerschnitts angenommen. Einflüsse von Temperaturgradienten entlang der Stütze sowie im Stützenquerschnitt wurden nicht untersucht, da sie je nach Brandentwicklung und Brandsituation unterschiedlich sind und nicht zur Verbesserung des Verständnisses vom Tragverhalten stabilitätsgefährdeter Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten beitragen.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ausschliesslich zentrisches Knicken, Knicken mit zusätzlicher Biegung in der gleiche Belastungsebene sowie Beulen untersucht.

2 Verzweigungslast des Knickstabes

Das Verzweigungsproblem der, imperfektionsfreien und zentrisch gedrückten Stütze bildet die Grundlage zur Behandlung des Knickstabes, sowohl für linear elastisches wie für nichtlineares Materialverhalten. Dabei entspricht die Verzweigungslast der maximalen Last bei welcher das idealisierte System gerade noch frei von Verformungen bleibt. Wird diese überschritten, kommt es direkt zum Versagen, da bei gedrückten stabförmigen, statisch bestimmten Systemen im Gegensatz zur Platte keine Umlagerung der Spannungen möglich ist. Somit entspricht die Verzweigungslast der Stütze einem oberen Grenzwert der Traglast und ist dementsprechend bei der Betrachtung von Stabilitätsproblemen von Stützen von zentraler Bedeutung.

Nach einem geschichtlichen Rückblick über die Entwicklung von Berechnungsmodellen zum Verzweigungsproblem der gedrückten Stütze, beschäftigt sich dieses Kapitel mit der Berechnung von Verzweigungslasten bei nichtlinearem Materialverhalten. Das Verzweigungsproblem ist im Kapitel 2.2 für linear elastisches Materialverhalten und im Kapitel 2.3 für nichtlineares Materialverhalten erläutert. Die mathematische Behandlung des Stabilitätsproblems erfolgt zuerst für ein allgemein nichtlineares Materialverhalten, welches durch eine Proportionalitätsgrenze (ϵ_p, f_p) , einem E-Modul E für den elastischen Bereich, dem Tangentenmodul T im nichtlinearen Bereich und einer Fließgrenze (ϵ_y, f_y) gekennzeichnet ist. Anschliessend wird die Lösung des Verzweigungsproblems der gedrückten Stahlstütze im Brandfall näher betrachtet, wobei die Temperatur θ , als Parameter für die Nichtlinearität des Materials betrachtet werden kann.

2.1 Geschichtlicher Rückblick

Mit der Infinitesimalrechnung am elastischen Balken schaffte Jakob Bernoulli schon früh die mathematischen Grundlagen zur Behandlung von Stabilitätsproblemen von gedrückten Stäben. Beruhend auf dieser Arbeit und der Erkenntnis von Daniel Bernoulli (1742), dass die Verformungsfigur des Balkens energetisch einem Minimum entsprechen muss, konnte Euler im Jahre 1744 nicht nur die elastische Biegelinie von J. Bernoulli mit Verwendung der Balkendifferentialgleichung beweisen, sondern auch das Verzweigungsproblem des elastischen Knickstabes lösen [20][66]. Die noch heute sehr wichtige Euler'sche Formel zur Berechnung der Verzweigungslast einer elastischen Stütze basiert somit auf dem Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit. Fast 100 Jahre später, im Jahre 1826, erkannte Navier [48] die Grenzen der elastischen Lösung des Verzweigungsproblems nach Euler. Er bemerkte, dass besonders bei gedrungenen Stützen die Traglast nicht nur von der Verzweigungslast, sondern auch durch den plastischen Widerstand des Stützenquerschnittes gegeben ist. Der von ihm in der Folge entwickelte Bemessungsansatz, welcher der Tetmajer'schen Gerade (1893) sehr nahe kam, fand jedoch in der Fachwelt keine Beachtung, was in den folgenden Jahren zu mehreren tragischen Unfällen führte.

Die Euler'sche Knicklast blieb somit die einzige Berechnungsgrundlage für Stabilitätsprobleme in einer Zeit, in der durch das Aufkommen des Stahlbaus versucht wurde leichter, schlanker und möglichst kostengünstig zu bauen. Als Baumaterialien kamen Flusseisen, Gusseisen oder Schweisseisen zur Anwendung, die nebst einem elastischen Bereich ein ausgeprägtes nichtlineares Material-

verhalten aufweisen. Erst im Jahr der Fertigstellung des Eiffelturms (1889) erkannte Considère [11] die Ungültigkeit der Euler'schen Formel im nichtlinearen Bereich des Materialverhaltens. Er stellte fest, dass in diesem Bereich des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens des Materials der Elastizitätsmodul in der Euler'schen Formel durch einen Knickmodul ersetzt werden muss, der einen Wert zwischen dem Tangentenmodul und dem Elastizitätsmodul annimmt. Unabhängig davon veröffentlichte Engesser [17] im gleichen Jahr eine Lösung des Verzweigungsproblems für gedrungene Stützen, die bei Spannungen oberhalb der Proportionalitätsgrenze ausknicken. Engesser ersetzte in seiner Lösung den Elastizitätsmodul in der Euler'schen Formel durch den Tangentenmodul, der von der Normalspannung im Stützenquerschnitt abhängig ist.

Als Folge von mehreren Stabilitätsversagen bei Baustrukturen und insbesondere in Folge des Versagens der Birsbrücke bei Münchenstein 1891 [55] wurde durch Tetmajer eine gross angelegte experimentelle Untersuchung zum Stabilitätsverhalten von Stützen veranlasst. Aus den Erkenntnissen dieser Versuche entstand 1893 die empirisch gefundene Tetmajer'sche Gerade, die in der Schweizer Baunorm bis und mit der Ausgabe 1974 als einzige Berechnungsgrundlage für gedrungene Stützen aufgeführt war. Bei schlanken Stützen kam nach wie vor die Euler'sche Knicklast zur Anwendung. Obwohl die Versuche von Tetmajer die neue Berechnungsmethode bestätigten und diese auch mit der Lösung von Engesser gut übereinstimmte, fehlte nach wie vor eine begründete rationale Lösung des Verzweigungsproblems für nichtlineares Materialverhalten, welche die Verunsicherung in der Fachwelt beantwortet hätte.

Kurz nach den Versuchen von Tetmajer entbrannte eine Diskussion zwischen Jasinski [26][27] und Engesser [18][19] über die Richtigkeit der von Engesser vorgeschlagenen Berechnungsmethode der Verzweigungslast im nichtlinearen Materialbereich. Jasinski stützte sich auf die Überlegungen von Considère und wies im Jahre 1895 Engesser darauf hin, dass der Knickmodul bei der Euler'schen Formel grösser als der Tangentenmodul aber kleiner als der Elastizitätsmodul sein soll. Dies beruht darauf, dass sich der durch das Ausknicken entlastende Querschnittsbereich im Gegensatz zum restlichen Querschnitt elastisch verhält. Noch im gleichen Jahr korrigierte Engesser seinen Vorschlag, indem er zum ersten Mal einen Knickmodul einführte. Es war jedoch Kármán [34] der diesen im Jahre 1910 für einzelne doppelsymmetrische Querschnittsgeometrien analytisch erarbeitete. Zusätzlich führte Kármán Versuche durch, welche die verbesserte Berechnungsmethode nach Engesser bestätigten. Weitere Versuche, die von Templin [69] im Jahre 1938 durchgeführt wurden, zeigten jedoch eine bessere Übereinstimmung mit dem ersten Berechnungsvorschlag nach Engesser. Erst im Jahre 1947 gelang es Shanley [63], in dieser Angelegenheit Klarheit zu schaffen, indem er zeigte, dass bei einer infinitesimal kleinen Auslenkung der Stütze in der Theorie keine elastische Entlastung stattfindet. Somit ist die Verzweigungslast mit Verwendung des Tangentenmoduls die grösste mögliche Belastung, für welche eine perfekt gerade Stütze ohne Imperfektionen keine Verformungen aufweist. Erst bei einer finiten Auslenkung der Stütze kommt es zu einer elastischen Entlastung, welche eine Laststeigerung ermöglicht.

2.2 Verzweigungslast bei linear elastischem Materialverhalten

Für die Entwicklung seiner Theorie bediente sich Euler eines Hooke'schen Idealwerkstoffes mit unbegrenztem elastischem Verhalten und vernachlässigte die Einflüsse der Schubverzerrungen. Diese sind bei vollen Querschnitten von untergeordneter Bedeutung, während sie bei aufgelösten Stäben einen wesentlichen Anteil an die Verformungen leisten und deswegen nicht vernachlässigt werden dürfen. Mit der zusätzlichen Annahme, dass ein zur Stabachse normaler, ebener Querschnitt auch in der verformten Lage eben und normal zur verformten Stabachse bleibt (Bernoulli-Navier Hypothese), lässt sich die Verzweigungslast aus der elastischen Differentialgleichung des Balkens berechnen (Gl. 2.1). In dieser bezeichnet M_R das elastische innere Widerstandsmoment, welches sich aus der Steifigkeit EI und der Stabkrümmung ergibt, und M_E das von aussen einwir-

kende Biegemoment, welches sich aus der einwirkenden Normalkraft N_E und der Stabverformung w zusammensetzt.

$$M_R + M_E = EI \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_E \cdot w = 0 \quad (2.1)$$

Dabei ist die Beziehung zwischen der Stabkrümmung χ und der Stabverformung w gemäss folgender Gleichung linearisiert.

$$\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \dots \right) \approx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.1a)$$

Mit einem sinusförmigen Ansatz der geometrischen Form der ausgelenkten Stützenachse lässt sich die Differentialgleichung 2.1 lösen. Dabei ergibt sich die Verzweigungslast nach der bekannten Euler'schen Knickformel.

$$N_E = N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.2)$$

Dieser obere Grenzwert der Traglast für die elastische Stütze entspricht der maximalen Last, für welche eine perfekt gerade und imperfektionsfreie Stütze nicht von ihrer idealisierten Lage ausgelenkt wird. Eine Steigerung der Last würde zum Ausknicken und dementsprechend zum unmittelbaren Versagen der Stütze führen.

2.3 Verzweigungslast bei nichtlinearem Materialverhalten

Die Lösung der Differentialgleichung 2.1 gilt nur, wenn das Material im elastischen Bereich, das heisst unterhalb der Proportionalitätsgrenze des Materials, beansprucht wird. Während diese Grenze für Aluminium oder hochlegierte Stähle gemäss Eurocode bei 0.01% plastischer Dehnung festgelegt ist [15], ist sie für Baustahl durch die temperaturabhängigen Materialkennwerte $f_{p,\theta}$ und $\varepsilon_{p,\theta}$ gegeben (Abb. 2-1 links). Wird die Proportionalitätsgrenze im Allgemeinen durch die Spannung f_p charakterisiert, so bleiben alle Stützen mit einer grösseren bezogenen Schlankheit $\bar{\lambda}_K$ als die Grenzschlankheit $\bar{\lambda}_{K,grenz}$ elastisch.

$$\bar{\lambda}_{K,grenz} = \sqrt{\frac{f_y}{f_p}} \quad (2.3)$$

Für diese schlanken Stützen ist die Verzweigungslast stets durch die Gleichung 2.2 gegeben. Bei gedrungenen Stützen führen die plastischen Spannungen im Stützenquerschnitt zu einem Steifigkeitsverlust, der sich stark auf die Verzweigungslast auswirkt. Wie schon im Kapitel 2.1 erwähnt, war dies Anlass für eine über ein halbes Jahrhundert andauernde Diskussion. Daraus entstanden nebst der empirischen Lösung von Tetmajer die zwei analytischen Lösungen nach Engesser-Shanley und Engesser-Kármán. Wie in Abbildung 2-1 rechts dargestellt, entspricht die Verzweigungslast nach Engesser-Shanley der maximalen axiale Belastung, für welche die Stütze gerade noch keine Verformungen aufweist, während die Verzweigungslast nach Engesser-Kármán eine elastische Entlastung der aussenliegenden Querschnittsbereiche berücksichtigt und deshalb eine geringe Laststeigerung für kleine Verformungen der Stütze ermöglicht. Während sich die Lösung nach Engesser-Shanley aus einem genauen analytischen Modell ergibt, baut die Berechnung der Verzweigungslast nach Engesser-Kármán auf gewisse Vereinfachungen auf. So wird der Steg des Stüt-

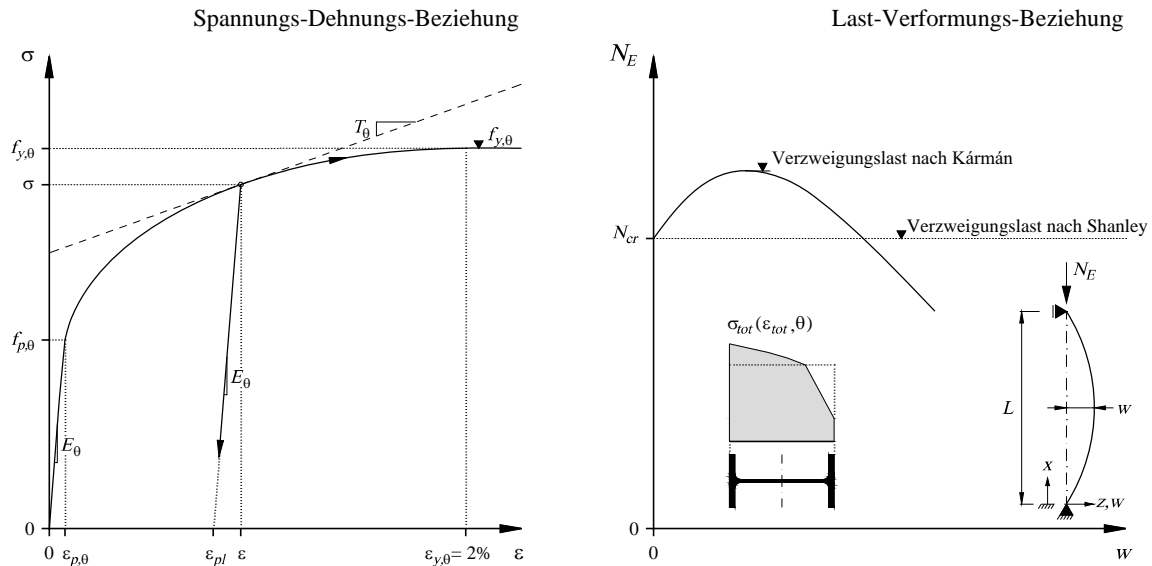


Abb. 2-1: Links: Nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Stahl bei erhöhter Temperatur θ . Rechts: Gegenüberstellung der Verzweigungslast Engesser-Shanley mit derjenige von Engesser-Kármán.

zenquerschnitts bei der Berechnung des Knickmoduls oder Biegesteifigkeit vernachlässigt. Andererseits werden jedoch auch die infolge der verformten Stütze auftretenden treibenden Kräfte nicht berücksichtigt.

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 T I}{L^2} \quad \text{Verzweigungslast nach Engesser-Shanley} \quad (2.4a)$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 T_K I}{L^2} \quad \text{Verzweigungslast nach Engesser-Kármán} \quad (2.4b)$$

Aus der Betrachtung nach Shanley von infinitesimal kleinen Verformungen folgt, dass selbst für nichtlineares Materialverhalten die minimale Formänderungsarbeit stets durch eine sinusförmige Verformungsfigur erreicht wird. Erst durch die Verformung kommt es zu unterschiedlichen Steifigkeiten entlang der Stütze und somit zu einer Abweichung der Verformungsfigur von der Sinusfunktion. Trotz der Betrachtung von infinitesimal kleinen Verformungen sei in der Folge der Knickmodul nach Engesser-Kármán näher erläutert, denn dieser entspricht einer Näherung des oberen Grenzwertes für die Knicklast einer Stütze. Des Weiteren kommt ihm eine wichtige Bedeutung bei der Betrachtung von Stützen mit geometrischen Imperfektionen zu, da er für die Momenten-Krümmungs-Beziehung einer Stütze die anfängliche Steifigkeit beschreibt (Abb. 4-8).

2.3.1 Knickmodul nach Engesser-Kármán

Für die Berechnung des Knickmoduls nach Engesser-Kármán wird das Ebenbleiben des Querschnittes (Bernoulli-Navier Hypothese) vorausgesetzt. Des Weiteren werden einfachheitshalber nur die beiden Flanschen des I-Profiles betrachtet, da diese den Hauptanteil am Biege­widerstandes haben (Abb. 2-2). Die Stütze sei frei von Eigenspannungen, anfänglich unverformt und durch eine Normalkraft N_E belastet, die im Stützenquerschnitt eine Dehnung ϵ_0 und eine Spannung σ_0 erzeugt. Verformt sich die Stütze, so entsteht eine Krümmung χ , die zusätzliche Dehnungen $\Delta\epsilon$ im Stützenquerschnitt verursacht. In der Abbildung 2-2 sind nur die zusätzlichen Dehnungen $\Delta\epsilon$ und die sich daraus ergebenden Spannungen $\Delta\sigma$ dargestellt. Im Querschnittsbereich, der ein Zuwachs an Dehnungen verspürt, können die Spannungen mit dem Tangentenmodul T beschrieben wer-

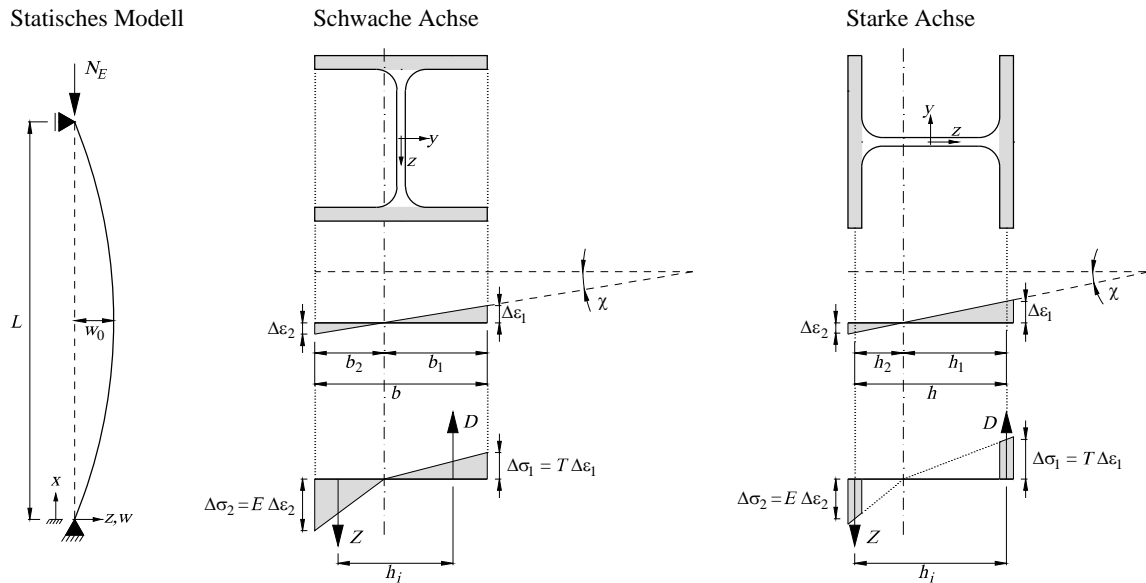


Abb. 2-2: Statisches Modell zur Berechnung des Knickmoduls nach Engesser-Kármán für doppelsymmetrische I-Querschnitte.

den, während im restlichen Querschnitt eine elastische Entlastung stattfindet, die mit dem E-Modul E beschrieben wird. Die resultierenden Kräfte Z und D in Abbildung 2-2 müssen in der Summe Null ergeben, da die Normalkraft N_E in der Stütze unverändert bleibt. Mit dieser Bedingung kann die Nulllinie der zusätzlichen Dehnungen $\Delta\epsilon$ (strichpunktierte Linie) gefunden werden. Ist diese bekannt, so ergibt sich der Knickmodul zu:

$$T_K = \frac{4TE}{(\sqrt{E} + \sqrt{T})^2} \quad \text{I-Profil um die schwache Achse belastet} \quad (2.5a)$$

$$T_K = \frac{2TE}{E + T} \quad \text{I-Profil um die starke Achse belastet} \quad (2.5b)$$

Der Ausdruck 2.5a gilt auch für volle Rechteckquerschnitte, während der Ausdruck 2.5b auch für rechteckige Hohlquerschnitte verwendet werden darf.

2.3.2 Verzweigungslast von Stahlstützen im Brandfall

Da die Berechnungsmethoden nach Engesser, Kármán und Shanley das nichtlineare Materialverhalten berücksichtigen, können sie für die Berechnung der Verzweigungslast für Stahlstützen im Brandfall verwendet werden. Die Grenزشlankheit bei Raumtemperatur, welche die Trennung des elastischen vom inelastischen Bereich beschreibt, kann wie folgt angegeben werden

$$\bar{\lambda}_{K, \text{grenz}} = \sqrt{\frac{k_E}{k_p}} \quad (2.6)$$

Dabei sind k_E und k_p Abminderungsfaktoren für den E-Modul E_θ und für die Proportionalitätsgrenze $f_{p,\theta}$ bei einer gegebenen Temperatur θ . Für Stützen mit einer bezogenen Schlankheit grösser

Tabelle 2-1: Grenزشlankheiten für unterschiedliche Temperaturen [14]

θ [°C]	20	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
$\bar{\lambda}_{K, \text{grenz}}$	1.00	1.00	1.06	1.14	1.29	1.29	1.31	1.32	1.34	1.34	1.34

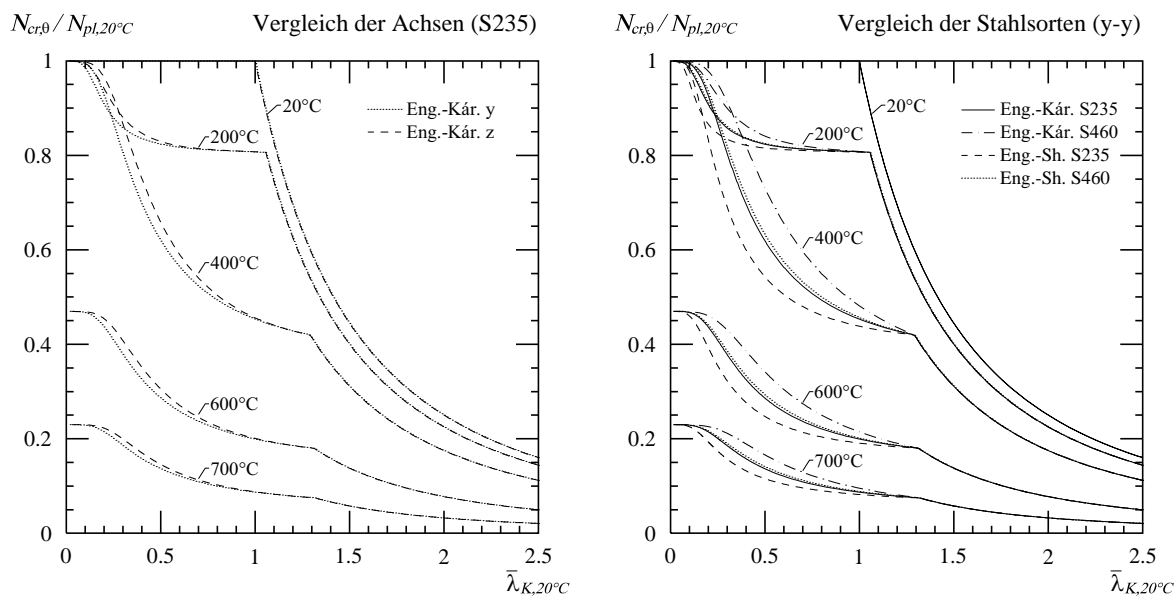


Abb. 2-3: Links: Einfluss der Knickrichtung bei der Verzweigungslast nach Engesser-Kármán. Rechts: Einfluss der Stahlsorte, sowie Vergleich der Modelle nach Engesser-Kármán und Engesser-Shanley.

als die Grenzschlankheit nach Gleichung 2.6, erfolgt das Ausknicken im elastischen Bereich. Die Verzweigungslast kann wie folgt angegeben werden

$$N_{cr, \theta} = \frac{\pi^2 E_{\theta} I}{L^2} \quad \text{für } \bar{\lambda}_K \geq \bar{\lambda}_{K, \text{grenz}} \quad (2.7a)$$

Bei Stützen mit einer bezogenen Schlankheit kleiner als die Grenzschlankheit bleibt eine imperfektionsfreie Stütze perfekt gerade, solange die Belastung kleiner als folgende Verzweigungslast bleibt

$$N_{cr, \theta} = \frac{\pi^2 T_{\theta} I}{L^2} \quad \text{für } \bar{\lambda}_K < \bar{\lambda}_{K, \text{grenz}} \quad (2.7b)$$

Der obere Grenzwert für die maximale Belastung N_E , welche eine Stütze aufnehmen kann, ist jedoch mit der Verzweigungslast nach Engesser-Kármán zu berechnen. In Abbildung 2-3 links ist der Einfluss der Belastungsrichtung bei den Verzweigungslasten nach Engesser-Kármán für unterschiedliche Stahltemperaturen dargestellt. Es ist ersichtlich, dass eine gedrungene Stütze, welche um die schwache Achse belastet wird, eine höhere Verzweigungslast aufweist als eine Stütze gleicher bezogener Schlankheit, welche um die starke Achse belastet wird. Dies ergibt sich aus den Gleichungen 2.5a und 2.5b und dem Stoffgesetz, nicht aber durch die Querschnittsgeometrie. Knickt die Stütze um die starke Achse, so bedarf es einer grösseren Verschiebung der Nulllinie um die inneren Kräfte D und Z in Abbildung 2-2 ins Gleichgewicht zu bringen, als wenn bei gleicher Krümmung χ die Stütze sich um die schwache Achse verformen würde. Dies hat eine kleinere Biegesteifigkeit zur Folge, was sich in den Gleichungen 2.5a und 2.5b widerspiegelt. Des Weiteren erkennt man in Abbildung 2-3 links, wie die Grenzschlankheit in Funktion der Temperatur zunimmt. Beträgt sie bei Raumtemperatur noch 1.0, so erreicht sie für Materialkennwerte gemäss Eurocode [14] bei 700°C schon den Wert 1.32, während der Maximalwert von 1.34 bei Temperaturen von 800°C und höher erreicht wird (Tab. 2-1).

In der Abbildung 2-3 rechts ist einerseits der Einfluss der Stahlsorte und andererseits der Unterschied zwischen den Berechnungsmodellen Engesser-Kármán und Engesser-Shanley dargestellt. Durch die Erhöhung der Materialfestigkeit verändert sich nach dem Materialmodell des Eurocodes [14] die Krümmung im nichtlinearen Bereich des Spannungs-Dehnungs-Diagramms, da einerseits der E-Modul und andererseits die Dehnung bei Fließbeginn ($\epsilon_y = 2\%$) gleich bleiben.

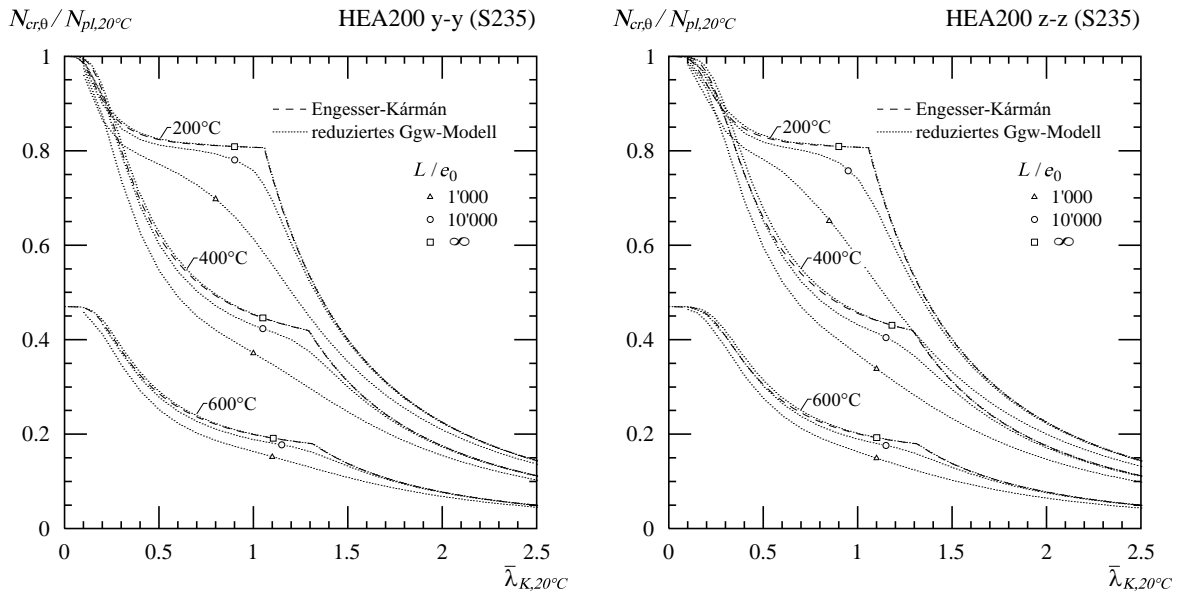


Abb. 2-4: Vergleich zwischen der Verzweigungslast nach Engesser-Kármán mit numerischen Ergebnisse des reduzierten Gleichgewichtsmodell gemäss Kapitel 3.3.1

Diese Veränderung der nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung hat einen starken Einfluss auf die Verzweigungslast über den gesamten Schlankheitsbereich gedrungener Stützen ($\bar{\lambda}_K < \bar{\lambda}_{K,grenz}$). Ähnliches gilt für den Unterschied zwischen den zwei Berechnungsmodellen der Verzweigungslasten.

Wie erwähnt ist die Lösung des Verzweigungsproblems nach Engesser-Kármán nur eine Näherung, da einerseits der Steifigkeitsbeitrag des Steges und andererseits die infolge der Verformung auftretenden Ablenkkräfte nicht berücksichtigt werden. Die Abbildung 2-4 zeigt ein Vergleich dieser Lösung mit Ergebnissen des reduzierten Gleichgewichtsmodell, welches in Kapitel 3.3.1 erläutert ist. Bei diesem numerischen Modell wird die Steifigkeit des gesamten Stützenquerschnitts iterativ berechnet. Zudem berücksichtigt es geometrischen Imperfektionen wie auch Ablenkkräfte, die an der verformten Stütze einwirken. Wie in der Abbildung ersichtlich, nähern sich die Lösungen der beiden Modelle je kleiner die geometrischen Imperfektionen angenommen werden. Für unendlich kleine Imperfektionen ist die Knicklast einzig von der Biegesteifigkeit der Stütze abhängig. Wird diese mit dem reduzierten Gleichgewichtsmodell für den gesamten Stützenquerschnitt berechnet, können Traglasten erreicht werden, die ein wenig oberhalb der Verzweigungslast nach Engesser-Kármán liegen. Dieser sehr kleine Unterschied ist auf die Vereinfachungen in der Berechnung des Knickmoduls nach Engesser-Kármán zurückzuführen. Je dicker der Steg des Stützenquerschnittes, desto grösser wird der Unterschied der beiden Modelle. Dennoch kann der obere Grenzwert der Traglast mit dem Modell nach Engesser-Kármán insbesondere für Stützen mit einer endlichen geometrischen Imperfektion gut angenähert werden.

2.4 Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

- Das nichtlineare Materialverhalten hat einen erheblichen Einfluss auf die Verzweigungslast gedrückter Stützen mit bezogener Schlankheit kleiner als die Grenzschlankheit.
- Mit dem Berechnungsmodell von Engesser-Shanley lässt sich die maximale Belastung berechnen, für die eine idealisierte Stütze mit nichtlinearem Materialverhalten ohne geometrische und strukturelle Imperfektionen nicht von ihrer Lage ausgelenkt wird.
- Verformt sich die Stütze, entlasten sich die äusseren Querschnittsbereiche elastisch. Die dabei aktivierte zusätzliche Steifigkeit ermöglicht eine weitere Laststeigerung, die sich mit

dem Knickmodul nach Engesser-Kármán gut abschätzen lässt. Die maximale Traglast nach Engesser-Kármán der idealisierten Stütze bildet eine Näherung des oberen Grenzwertes für die Knicklast einer gedrückten Stütze mit nichtlinearem Materialverhalten.

- Mit dem Berechnungsmodell nach Engesser-Kármán kann die maximale Biegesteifigkeit einer idealisierten Stütze ohne geometrische und strukturelle Imperfektionen mit Berücksichtigung der elastischen Entlastung und der einwirkenden Normalkraft angenähert werden.

3 Tragverhalten gedrückter Stützen mit Biegung

In diesem Kapitel soll der physikalische Hintergrund zum Knickvorgang von durch Normalkraft und Biegung belasteten Stützen mit geometrischen und strukturellen Imperfektionen insbesondere bei nichtlinearem Materialverhalten näher erläutert werden. Ein besonderes Augenmerk gilt der Veränderung der Biegesteifigkeit in der Stütze während der Belastung, sowie dem Biege- und Tragwiderstand des Stützenquerschnitts in Funktion von dessen Verformung. Lokale Instabilitäten, welche den Tragwiderstand und das Knickverhalten der Stütze beeinflussen, sowie das Kippen der Stütze sind in diesem Kapitel nicht behandelt.

Mit einem Rückblick über die geschichtliche Entwicklung der Forschung zum Tragverhalten gedrückter Stützen der letzten 250 Jahre werden verschiedene Auffassungen des Knickproblems und die daraus entstandenen Berechnungsmethoden vorgestellt. Der Schwerpunkt liegt beim physikalischen Verständnis des Tragverhaltens gedrückter Stützen mit nichtlinearem Material, welches zu Berechnungsmodellen führt, die für die heutige Problemstellung von Stahlstützen im Brandfall oder für Stützen aus Aluminium oder hochlegiertem Stahl bei Raumtemperatur übernommen werden könnten. Das mechanische Verhalten der gedrückten Stütze wird in der Folge in einem ersten Schritt an einer Stütze mit linear elastischem Material erläutert, bevor drei Berechnungsmodelle vorgestellt werden, welche das Tragverhalten von Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten beschreiben. Diese sind nicht für eine Bemessung baupraktischer Probleme gedacht, sondern helfen dem besseren Verständnis des Tragverhaltens von Stützen. Die ersten beiden Berechnungsmodelle geben einen vertieften Einblick in das Zusammenspiel zwischen Einwirkung, Verformung und Widerstand einer gedrückten Stütze, während das dritte Modell die Energiezustände des Gesamtsystems aufzeigt. Mit diesen Berechnungsmodellen können unterschiedliche Einflüsse wie geometrische und strukturelle Imperfektionen, Materialeigenschaften, geometrische Form der Biegelinie und Belastungsart analysiert werden. Eine Übersicht der Berechnungsmodelle und deren Eigenschaften ist in Tabelle 3-1 enthalten.

3.1 Geschichtlicher Rückblick

Schon früh bemerkte man die Grenzen der Anwendbarkeit der Euler'schen Knicklast zur Bemessung von druckbelasteten Stäben. Deshalb wurde diese um die Wende des 19^{ten} ins 20^{te} Jahrhundert kaum benutzt und hauptsächlich durch empirische Formeln, die sich besser an Versuchswerte anpassen liessen, ersetzt (Abb. 3-1). Unter der Vielzahl empirischer Formeln ist sicher diejenige von Hodgkinson zu erwähnen die als eine der ersten angewendet wurde, während die meist gebrauchte Formel vor der Jahrhundertwende diejenige nach Rankine [54] war (auch nach Gordon, Navier oder Schwarz benannt). Rankine betrachtete den Knickvorgang als *Spannungsproblem*, wobei die maximale Kantenpressung des Stützenquerschnitts nach Theorie 2^{ter} Ordnung zu berechnen und durch die Materialfestigkeit zu begrenzen ist. Diese in ihrer Natur eher empirische Formel wurde 1887 durch die Versuche von Bauschinger [4] widerlegt. Es folgten ähnliche Berechnungsansätze unter denen diejenigen von Ayrton und Perry [2], Johnson [31], Ostenfeld [51] zu erwähnen sind, sowie die für lange Zeit in den Normen weitverbreitete Tetmajer'sche

Tabelle 3-1: Zusammenstellung und Überblick der in der vorliegende Arbeit verwendeten Berechnungsmodelle zur Beschreibung des Tragverhaltens von gedrückten Stützen

Gleichgewichtsmodell	
erweitertes Ggw-Modell (Kapitel 3.3.2)	<ul style="list-style-type: none"> • Das Gleichgewicht wird überall entlang der Stützenachse erfüllt • Die M-χ-Beziehung wird numerisch berechnet • Das Modell berechnet die Verformungsfigur der Stütze in Funktion der vorhandenen Belastung • Grosser Berechnungsaufwand mit vielen Iterationsschritten notwendig • Innerhalb der Modellannahmen wird die vollständige Lösung numerisch angenähert
reduziertes Ggw-Modell (Kapitel 3.3.1)	<ul style="list-style-type: none"> • Das Gleichgewicht wird an einem einzigen Kontrollpunkt erfüllt • Die M-χ-Beziehung wird numerisch berechnet • Die Verformungsfigur der Stütze wird angenommen • Mittleren Berechnungsaufwand mit iterativem Vorgehen
vereinfachtes Ggw-Modell (Kapitel 4.2.2)	<ul style="list-style-type: none"> • Das Gleichgewicht wird an einem einzigen Kontrollpunkt erfüllt • Die M-χ-Beziehung wird mit einem analytischen Modell angenähert • Die Verformungsfigur der Stütze wird angenommen • Kleiner Berechnungsaufwand ohne iteratives Vorgehen • Eignet sich für die Bemessung von zentrisch und exzentrisch gedrückten Stützen und für Stützen mit zusätzlicher Biegebelastungen 1^{ter} Ordnung
Energiemethode (Kapitel 3.3.3)	<ul style="list-style-type: none"> • Berechnet die am Gesamtsystem geleistete Arbeit infolge der Belastung und der Stützenverformung • Erlaubt die Berechnung derjenigen Verformungsfigur, welche die potentielle Energie des Systems minimiert • Grosser Berechnungsaufwand mit vielen Iterationsschritten notwendig • Innerhalb der Modellannahmen wird die vollständige Lösung numerisch angenähert
Vereinfachtes Spannungsmodell (Kapitel 4.2.1)	<ul style="list-style-type: none"> • Berechnet die Spannungsverteilung im Stützenquerschnitt nach Theorie 2^{ter} Ordnung mit einem elastischen Modell • Die Grenzspannung, welche das Knickkriterium des Systems definiert, wird als Funktion der Stützenschlankheit bestimmt • Dieses vereinfachte Modell eignet sich für die Bemessung zentrisch gedrückten Stützen

Gerade [72]. Ausser der Tetmajer'schen Gerade, die rein auf Versuchsergebnissen basiert, gehen die vorgeschlagenen Berechnungsformeln stets von einer geometrischen Imperfektion aus und berechnen die grösste Randspannung des Stützenquerschnittes infolge der Normalkraft und der Stützensauslenkung. Schon Ostenfeld selbst bemerkte, dass deren Lösungen und insbesondere die damit verbundene Last-Verformungs-Beziehung nur solange Gültigkeit hat, wie die maximalen Randspannungen im Querschnitt die Proportionalitätsgrenze nicht überschreiten.

Kármán war im Jahre 1910 der erste, der das Knicken als ein *Gleichgewichtsproblem* behandelte und somit die dazu exakte analytische Lösung erarbeitete [34]. Für ihn ist allein das Gleichgewicht zwischen dem Angriffsmoment der Druckkraft und dem resultierenden Biegemoment der auftretenden Normalspannungen für die Tragfähigkeit der Stütze entscheidend. Mit zwei Gleichgewichtsbedingungen, die eine für die Normalkraft, die andere für das Biegemoment, und eine Verträglichkeitsbedingung konnte Kármán die Mechanik des Knickproblems vollständig erfassen. Diese drei Gleichungen bilden die Basis des von ihm entwickelten Integrationsverfahrens, welches nebst der Knicklast den gesamten Last-Verformungs-Pfad der gedrückten Stütze beschreibt. Die Auffassung des Knickvorganges als *Gleichgewichtsproblem* führte zu einem umfassenden Verständnis des Knickproblems und erlaubte eine auf rationeller Basis geführte Diskussion verschiedenster Einflüsse. So war es auch Kármán, der zeigen konnte, dass bei nichtlinearem Materialverhalten die maximal zu erreichende Knicklast - im Gegensatz zur elastischen Lösung - stark von der anfänglichen Stabauslenkung beeinflusst wird. In seiner Arbeit weist Kármán auf die Schwierigkeit hin, die von ihm genannten unberechenbaren Einflüsse wie geometrische und strukturelle Imperfektionen quantifizieren zu können. Dies und das aufwändige Integrationsverfahren bewogen ihn dazu, für das Bemessen von Knickstäben die einfachere Lösung der Verzweigungslast nach Engesser-Kármán (Kapitel 2.3) zu verwenden und die Einflüsse der Imperfektionen mit einem Sicherheitsfaktor abzudecken. Zudem konnte Kármán zeigen, dass die empirisch gefundene Tetmajer'sche Gerade [72] verglichen mit der genauen Lösung des *Gleichgewichtsproblems* stets zu kleineren Knicklasten führt und somit für eine Bemessung auf der sicheren Seite zu liegen kommt.

In den nachfolgenden Jahren befassten sich einige Wissenschaftler und Ingenieure mit dem *Gleichgewichtsproblem* des Knickstabes. Darunter seien insbesondere Ros [58], Chwalla [7]-[10] und Jezek [28]-[30] erwähnt, denen die Einführung der Begriffe *Spannungsproblem* und *Gleichgewichtsproblem* zu verdanken ist. Während Kármán sich bei seinen Untersuchungen auf kleine Exzentrizitäten beschränkte, erweiterte Chwalla dessen Methode auf Stützen mit beliebig veränderlichen Querschnitten, beliebig grossen Exzentrizitäten sowie unterschiedlichen Lagerungsbedingungen. In seiner experimentellen Untersuchung [7] gelingt es Chwalla zudem, den bei Knickversuchen abfallende Ast der Last-Verformungs-Beziehung zu messen und er findet eine gute Übereinstimmung mit dem analytischen Berechnungsmodell des *Gleichgewichtsproblems*.

Bis anhin wurde die geometrische Form der Biegelinie von gedrückten Stützen durch aufwändige Integrationsverfahren genau berechnet. Es waren Ros [58], Westergaard-Osgood [80], Jezek [30] und weitere, die um 1934 anstatt die Biegelinie genau zu berechnen, deren geometrische Form durch eine Sinusfunktion ersetzen. Somit beschränkten sich die zwei Gleichgewichtsbedingungen und die Verträglichkeitsbedingung auf einen einzigen Kontrollpunkt in Stützenmitte, was den Berechnungsaufwand erheblich reduzierte. Jezek vereinfachte das *Gleichgewichtsproblem* weiter, indem er ein linear elastisches - ideal plastisches Stoffgesetz annahm und Näherungslösungen für unterschiedliche Querschnittsformen sowie unterschiedliche Belastungskonfigurationen entwickelte. Den Spezialfall eines exzentrisch gedrückten Stabes mit rechteckigem Vollquerschnitt konnte er analytisch geschlossen lösen (Anhang D).

Obwohl die Auffassung des Knickvorganges als *Gleichgewichtsproblem* mehrmals durch Versuche bestätigt [24] und als einzig rationelle Lösung angesehen wurde, konnte sie sich in der Baupraxis hauptsächlich wegen dem grossen Rechenaufwand nicht durchsetzen. Wie schon Kármán fand auch Chwalla, dass für planmässig zentrisch belastete Stützen eine Knicklast mit der Verzweigungslast nach Engesser-Kármán zu berechnen sei. Die Fehler der idealisierten Voraussetzungen des

3 Tragverhalten gedrückter Stützen mit Biegung

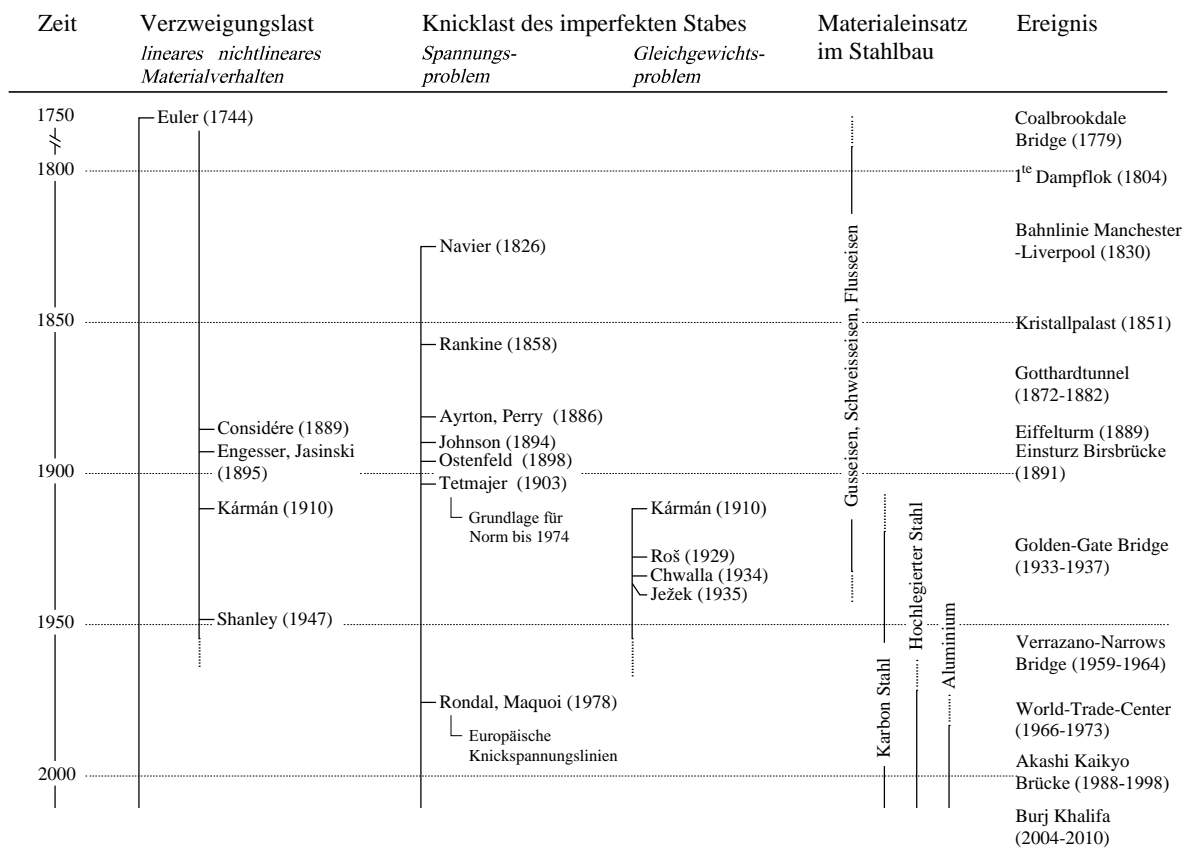


Abb. 3-1: Überblick zur historischen Entwicklung der experimentellen und analytischen Forschung zur Knicklast.

Berechnungsmodells seien mit der Knicksicherheitszahl zu decken. Nur bei planmässig exzentrisch belasteten Stützen müsse die Ausmittigkeit der Last berücksichtigt werden, da diese das Tragvermögen stark reduzieren [7]. Insbesondere für diese exzentrisch belasteten Stützen entwickelte Chwalla ein vereinfachtes Verfahren mit sogenannten β -Faktoren, welche aus von ihm erstellten Tafelwerken zu entnehmen waren [9].

In den folgenden Jahren konzentrierten sich die Forschungsarbeiten mehr auf den Knickvorgang aufgefasst als *Spannungsproblem*, da dieser im Vergleich zur ganzheitlichen Lösung des *Gleichgewichtsproblems* wesentlich einfacher anzuwenden war. Andererseits wurde durch die Verbesserung der Produktion von Baustahl, der ein annähernd linear elastischen - ideal plastischen Materialverhalten aufzeigte, die Auffassung des Knickvorganges als *Spannungsproblem* zusätzlich begünstigt. Im Rahmen eines umfangreichen Forschungsprogramms in den Jahren 1955 bis 1970 wurden eine Grosszahl von Knickversuchen und zusätzliche numerische Traglastberechnungen mit geometrischen und strukturellen Imperfektionen durchgeführt [5]. Aus diesem Forschungsprogramm entstanden die noch heute verwendeten europäischen Knickspannungslinien nach Maquoi und Rondal [46] für planmässig zentrisch belastete Stützen.

Wie in Abbildung 3-1 ersichtlich, verschwand in den folgenden Jahren die vollständige Lösungen des *Gleichgewichtsproblems* zur Berechnung der Knicklasten aus der Stahlbauforschung. Dies obwohl das Vorhandensein von Eigenspannungen in den Walzprofilen und deren Einfluss auf die Stabilitätsprobleme mehr und mehr in den Vordergrund rückte und immer häufiger hochlegierte Stähle und Aluminium, die ein ausgeprägtes nichtlineares Materialverhalten aufweisen, im Bau verwendet wurden. Die Lösungen, welche das Knickproblem als *Gleichgewichtsproblem* auffassen, wurden jedoch für die Berechnung von Stützen aus anderen Werkstoffen wie zum Beispiel Stahlbeton verwendet und sind noch heute in den entsprechenden Normen in einer abgeschwächten Form enthalten.

Ähnlich wie die Forschung an Aluminiumstützen oder an hochlegierten Stahlstützen, konzentrierten sich die Forschungsarbeiten für Stahlstützen im Brandfall auf die Lösung des *Spannungs-*

problems, obwohl auch in diesem Falle ein ausgeprägtes nichtlineares Materialverhalten zu beobachten war. Zu den wichtigsten Arbeiten gehören diejenigen von Franssen [21][22][67] und diejenige von Toh [75], welche sowohl für das zentrische Knicken wie auch für das Biegeknicken empirische Lösungen vorschlagen. Diese empirischen Lösungen basieren meistens auf den Berechnungsmodellen von Ayrton und Perry [2] beziehungsweise Rankine [54].

3.2 Linear elastisches Materialverhalten

Um sich der Mechanik gedrückter Stäbe mit nichtlinearem Materialverhalten anzunähern, wird in diesem Kapitel vorerst der streng linear elastische Fall behandelt. Hier können die analytischen Beziehungen zwischen Belastung und Verformung der Stütze mathematisch beschrieben werden und für alle Randbedingungen geschlossen gelöst werden. Obwohl bei Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten das mechanische Problem nicht mehr analytisch gelöst werden kann, bleibt das Grundgerüst der Beziehungen zwischen den einwirkenden Belastungen, der Stützenverformung und den dadurch erzeugten inneren Widerstandskräften identisch. Die Lösung wird bei nichtlinearem Materialverhalten jedoch iterativ gesucht.

Das Zusammenspiel der inneren und äusseren Kräfte ist bei einer Stütze mit unbeschränkt linear elastischem Materialverhalten einfach zu beschreiben. In der Folge werden sich die Erläuterungen auf eine Stütze mit konstanter Normalkraft und konstantem Querschnitt sowie homogenem, isotropem Materialverhalten entlang der Stützenlänge beschränken. Folgende Differentialgleichung beschreibt für diese Bedingungen das Zusammenspiel der inneren und äusseren Kräfte für eine Stütze mit geometrischer Imperfektion e , Verformung w , einem einwirkenden Biegemoment 1^{ter} Ordnung $M_{E,I}$ sowie einer Normalkraft N_E .

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_E(e + w) + M_{E,I} = 0 \quad (3.1)$$

Der erste Term der Differentialgleichung beschreibt den inneren Biege­widerstand in Funktion der Stützenverformung, wobei die Beziehung zwischen der Stützenverformung w und der Stützenkrümmung linearisiert ist (Gl. 2.1 a). Dem inneren Biege­widerstand wird eine äussere Einwirkung gleichgesetzt, welche sich aus den zwei weiteren Termen in der Differentialgleichung ergibt. Nebst der Gleichgewichtsbedingung erfüllt die Differentialgleichung auch die Verträglichkeitsbedingung, da sowohl der Stützenwiderstand wie auch die einwirkende Belastung von der gleichen Verformung abhängig sind. Da nebst den Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen zusätzlich auch das Stoffgesetz des linear elastischen Materialverhaltens erfüllt ist, beschreibt die Differentialgleichung 3.1 das mechanische Verhalten der Stütze innerhalb der Modellannahmen. Bei einer zentrisch belasteten Stütze mit einer geometrischen Imperfektion e sowie einem Biegemoment $M_{E,I}$, die affin zu einer Sinusfunktion sind, lässt sich die Differentialgleichung 3.1 mathematisch lösen, wodurch auch die Verformung w affin zur Sinusfunktion sein wird.

$$w = w_m \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad w_m: \text{Auslenkung in Stützenmitte} \quad (3.1 a)$$

$$e = e_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad e_0: \text{Imperfektionen in Stützenmitte} \quad (3.1 b)$$

$$M_{E,I} = M_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad M_0: \text{Biegemoment in Stützenmitte} \quad (3.1 c)$$

Die Definition der Koordinaten sowie das statische System ist in der Abbildung 3-2 ersichtlich. Die Lösung der Differentialgleichung kann in Form einer Last-Verformungs-Beziehung angegeben werden, wobei die Verformung 2^{ter} Ordnung $w_{m,II}$ die gesamte Auslenkung in Stützenmitte inklusive der geometrischen Imperfektionen bezeichnet.

$$w_{m,II} = w_m + e_0 = \frac{\frac{M_0}{N_{cr}} + e_0}{1 - \frac{N_E}{N_{cr}}} = k \cdot \left(\frac{M_0}{N_{cr}} + e_0 \right) \quad \text{mit } k = \frac{1}{1 - \frac{N_E}{N_{cr}}} \quad (3.2)$$

Daraus ergibt sich der Vergrößerungsfaktor 2^{ter} Ordnung k , welcher bei der Berechnung der Traglasten von Stützen und anderer Stabilitätsproblemen oft verwendet wird. Wirkt keine Normalkraft auf die Stütze, sondern nur ein Biegemoment, dessen Verteilung affin zu einer Sinusfunktion ist, so ergibt sich aus der Lösung der Differentialgleichung folgende Durchbiegung in Stützenmitte.

$$w_{m,II} = \frac{M_0}{N_{cr}} \quad (3.3)$$

Diese Lösung ist exakt, falls die Verteilung der quer zur Stützenachse wirkenden Linienlast auf den Biegebalken einer Sinusfunktion folgt. Ist die Linienlast konstant über die Stablänge, so ergibt sich eine parabolische Verteilung des Biegemoments. In diesem Fall unterschätzt die Gleichung 3.3 die Verformungen um 2.8%. Dischinger [57] erarbeitete Näherungslösungen für die Differentialgleichung 3.1 bei unterschiedlichen Verteilungen der einwirkenden Biegemomente, indem er den Vergrößerungsfaktor 2^{ter} Ordnung durch die Einführung eines Korrekturbeiwertes δ modifizierte (Tab. 3-2).

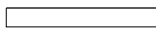

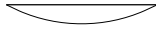

$$k = \frac{1 + \delta \frac{N_E}{N_{cr}}}{1 - \frac{N_E}{N_{cr}}} \quad (3.4)$$

In Abbildung 3-2 links ist die elastische Last-Verformungs-Beziehung einer zentrischen gedrückten Stütze mit ideal elastischem Materialverhalten und einer anfänglichen Imperfektion e_0 durch die punktierte Linie dargestellt. Nebst der Verformung kann für jeden Belastungszustand der Stütze die Spannungsverteilung im Stützenquerschnitt mit folgendem Ausdruck berechnet werden.

$$\sigma_x(x) = \frac{N_E}{A} + k \cdot \frac{e(x)N_E}{I} \cdot z \quad z: \text{Koordinate senkrecht zur Knickachse} \quad (3.5)$$

Die exakte Lösung des Stabilitätsproblems einer zentrisch gedrückten Stütze mit linear elastischem Materialverhalten erlaubt die Berechnung sämtlicher Spannungs- und Dehnungszustände in jedem Querschnittspunkt, solange eine allfällige Beschränkung des elastischen Bereichs durch das Stoffgesetz nicht überschritten wird.

Tabelle 3-2: Korrekturbeiwerte δ nach Dischinger [57]

Momentenfläche		δ
	Konstant	+0.27
	Dreieck	-0.19
	Parabel	+0.03
	Sinus	0

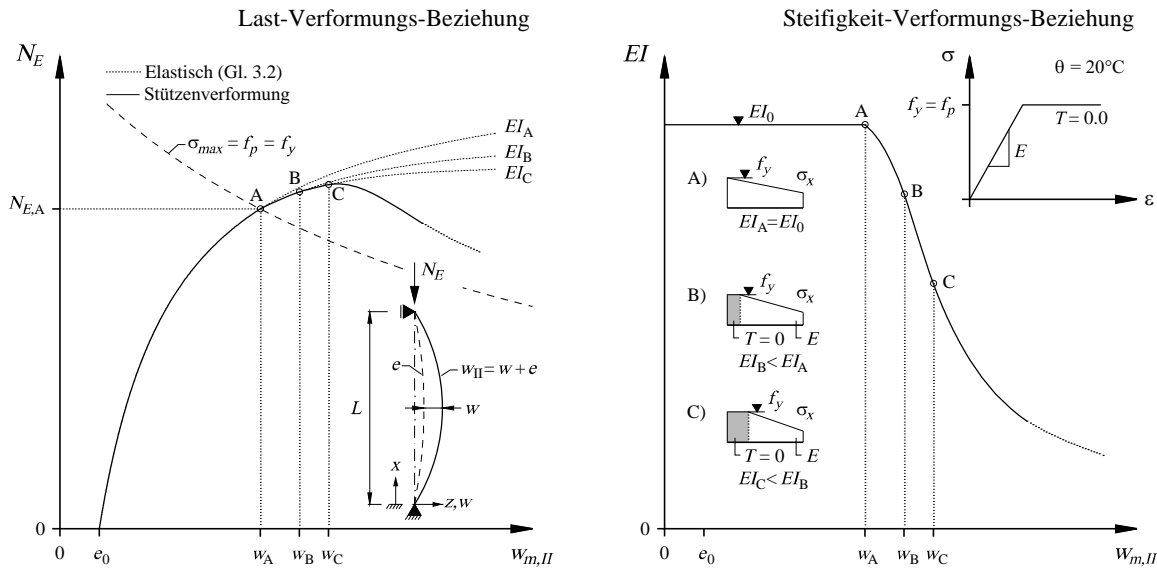


Abb. 3-2: Last-Verformungs-Beziehung (links) und Steifigkeitsabfall (rechts) beim Knicken eines Stabes mit linear elastischem - ideal plastischem Materialverhalten.

Linear elastisches, ideal plastisches Materialverhalten

Aus Gleichung 3.5 ist ersichtlich, dass die Randspannungen im Querschnitt einer zentrisch belasteten Stütze überproportional zur Normalkraft N_E ansteigen. Je schlanker die Stütze, desto schneller steigen die Spannungen in Funktion der Normalkraft an. Ist das Materialverhalten nicht uneingeschränkt elastisch, so wird sich das Verhalten der Stütze beim Erreichen der Proportionalitätsgrenze verändern. In Abbildung 3-2 ist das Zusammenwirken zwischen den Verformungen und den Spannungen für eine Stütze mit linear elastischem, ideal plastischem Materialverhalten illustriert. Bei kleiner Normalkraft N_E verhält sich die Stütze vollkommen elastisch. Die Verformungen können in Funktion der Normalkraft mit der Gleichung 3.2 beschrieben werden, denn die Steifigkeit EI der Stütze bleibt für diese Belastungen unverändert. Bei zunehmender Normalkraft erreichen die Randspannungen σ_x in Stützenmitte die Proportionalitätsgrenze, welche bei linear elastischem, ideal plastischem Materialverhalten der Fließspannung f_y entspricht (Punkt A in Abb. 3-2). Eine weitere Zunahme der Normalkraft führt zur Plastifizierung der Randbereiche des Stützenquerschnittes (Punkt B), was besonders bei linear elastischem, ideal plastischem Materialverhalten eine abrupte Minderung der Stützensteifigkeit EI bedeutet. Dieser Steifigkeitsverlust führt zu grösseren Verformungen und somit zu grösseren Spannungen σ_x im Stützenquerschnitt, was wiederum einen weiteren Steifigkeitsverlust zur Folge hat.

Die exakte Lösung des Stabilitätsproblems gemäss Gleichung 3.2 beschränkt sich auf die Last-Verformungs-Beziehung unterhalb des Punktes A, da bis zu diesem Zeitpunkt die Steifigkeit der Stütze konstant bleibt (Abb. 3-2 rechts). Der Bereich oberhalb dieser Grenze kann mit der Gleichung 3.2 nicht mehr erfasst werden. Berechnungsansätze, welche das Stabilitätsverhalten als ein *Spannungsproblem* auffassen, haben dementsprechend nur unterhalb der Proportionalitätsgrenze (gestrichelte Linie) vollständige Gültigkeit. Wird diese jedoch überschritten, so können diese Berechnungsansätze das Tragverhalten der Stütze nur näherungsweise beschreiben. Berechnungsmodelle, welche das Stabilitätsverhalten der Stütze als *Gleichgewichtsproblem* auffassen, können den gesamten Last-Verformungs-Pfad innerhalb der Modellannahmen exakt beschreiben. Zwei solche Berechnungsmodelle werden in den folgenden Kapiteln vorgestellt. Beide Auffassungen zur Behandlung des Stabilitätsproblems sind im elastischen Bereich der Last-Verformungs-Beziehung deckungsgleich und können auf die elastische Differentialgleichung 3.1 zurückgeführt werden.

Die Normalkraft $N_{E,A}$, welche dazu führt, dass die äusserste Randfaser im Stützenquerschnitt die Proportionalitätsspannung f_p erreicht, kann durch Umformen der Gleichung 3.5 berechnet

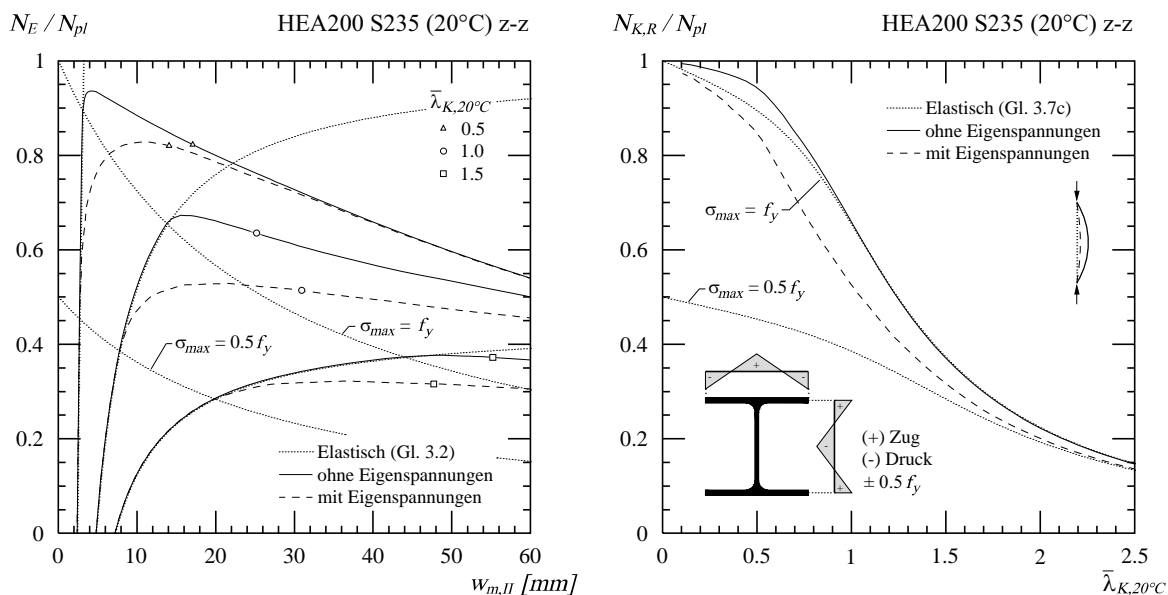


Abb. 3-3: Tragverhalten von zentrisch gedrückten Stützen mit linear elastischem - ideal plastischem Materialverhalten mit und ohne Eigenspannungen.

werden, was für eine zentrisch belastete Stütze zu folgender für $N_{E,A}$ quadratischen Gleichung führt.

$$\frac{N_{E,A}}{Af_p} + \frac{1}{1 - \frac{N_{E,A}}{N_{cr}}} \cdot \frac{e_0 \cdot N_{E,A}}{W_{el} f_p} \leq 1.0 \quad (3.6)$$

Diese lässt sich mit dem von Ayrton und Perry [2] vorgeschlagenen Ansatz wie folgt lösen:

$$\Phi = 0.5 \left[1 + e_0 \cdot \frac{A}{W_{el}} + \bar{\lambda}_K^2 \right] \quad (3.7a)$$

$$\chi_K = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}_K^2}} \quad (3.7b)$$

$$N_{E,A} = \chi_K \cdot Af_p \quad (3.7c)$$

In Abbildung 3-3 links ist das Tragverhalten unterschiedlich schlanker Stahlstützen mit linear elastischem - ideal plastischem Materialverhalten mit dem numerischen Verfahren nach Kapitel 3.3.1 berechnet, wobei geometrische Imperfektion von $e_0 = L/1'000$ angenommen wurden. Es ist ersichtlich, dass sobald die Randspannung in den Stützen die Proportionalitätsgrenze erreicht, das Tragverhalten entscheidend von der elastischen Lösung nach Gleichung 3.2 abweicht. Die besonders hohe Steifigkeit EI im elastischen Bereich und das ideal plastische Verhalten, führen zu einem hohen Steifigkeitsverlust sobald die Normalkraft die Last $N_{E,A}$ überschreitet. Ausser bei sehr gedrunenen Stützen erschwert dieser hohe Steifigkeitsverlust eine zur Last $N_{E,A}$ nennenswerte Lastzunahme, wie dies auch aus der Knickspannungskurven Abbildung 3-3 rechts ersichtlich ist.

Sind im Stützenquerschnitt Eigenspannungen vorhanden, so haben diese einen wesentlichen Einfluss auf das Tragverhalten der Stütze. Die exakte Lösung nach Gleichung 3.2 gilt weiterhin, solange alle Querschnittsfasern der Stütze im elastischen Bereich des Materials bleiben. Die Eigenspannungen führen dazu, dass die Randfasern diesen Bereich viel früher verlassen, was eine Verschiebung der Gültigkeitsgrenze des elastischen Berechnungsmodells zur Folge hat. Werden die Eigenspannungen gemäss Eurocode angenommen (Abb. 3-3 rechts), so verliert die exakte Lösung

ihre Gültigkeit, sobald die Randspannungen nach Gleichung 3.5 den Wert $0.5 f_y$ erreichen. Der Steifigkeitsverlust ist jedoch beim Überschreiten dieser Grenze nicht mehr so gross, da nur diejenigen Querschnittsbereiche betroffen sind, welche Druckeigenstress aufweisen. Die Traglasten werden durch die Eigenstressungen zwar reduziert, liegen jedoch für mittlere und gedrungene Stützen weit oberhalb der Gültigkeitsgrenze nach Gleichung 3.5 mit $f_p = 0.5 f_y$. Aus der Last-Verformungs-Beziehung in Abbildung 3-3 links ist ersichtlich, dass die elastische Lösung nach Gleichung 3.2 für Randspannungen jenseits der Proportionalitätsgrenze nur eine grobe Näherung ist. Um auch diesen Bereich des Last-Verformungs-Pfades zu beschreiben, muss die Differentialgleichung 3.1 für eine in Funktion der Verformung und der Belastung veränderliche Steifigkeit EI gelöst werden. In den folgenden Kapiteln werden numerische Berechnungsmodelle vorgestellt, welche diese Lösung iterativ annähern.

3.3 Nichtlineares Materialverhalten

Bei Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten ist der Steifigkeitsabfall beim Überschreiten der elastischen Grenze in Abbildung 3-2 weniger stark als bei linear elastischem - ideal plastischem Materialverhalten. Dies, weil sich die Steifigkeit in dem sich plastifizierende Querschnittsbereich (schraffierter Bereich in Abbildung 3-2 rechts) zwar abmindert, jedoch grösser als beim ideal plastischen Materialverhalten bleibt. Ist der Steifigkeitsabfall klein, können besonders gedrungene Stützen, bei denen der Zuwachs der Verformungen nach Theorie 2^{ter} Ordnung eine untergeordnete Rolle spielt, weit über die elastische Grenze stabil bleiben. Dementsprechend genügt es bei diesen Stützen nicht, deren Verhalten bis zur elastischen Grenze zu beschreiben.

Wie im Kapitel 3.2 erwähnt, ist die elastische Grenze nicht nur durch das Materialverhalten an sich gegeben, sondern auch durch das Vorhandensein von Eigenstressungen beeinflusst, denn diese führen zu einer verfrühten Teilplastifizierung des Querschnittes. In beiden Fällen gilt für eine zentrisch belastete Stütze die genaue Lösung nach Gleichung 3.2 nur bis zum erstmaligen Überschreiten der Proportionalitätsgrenze der äussersten Querschnittsfasern. Für die Beschreibung der Last-Verformungs-Beziehung bei Belastungen, welche oberhalb der elastischen Grenze liegen, werden in den folgenden Kapiteln zwei numerische Modelle beschrieben. Diese Modelle beruhen auf einer iterativen Lösungssuche, welche sowohl die Stoffgesetze, die Gleichgewichts- wie auch die Verträglichkeitsbedingungen erfüllen. Somit wird bei diesen Berechnungsmodellen das Knicken als *Gleichgewichtsproblem* aufgefasst und ganzheitlich gelöst. Die Modelle werden zuerst in den folgenden Kapiteln erläutert und danach im Kapitel 3.4 besprochen.

3.3.1 Reduziertes Gleichgewichtsmodell

Dieses numerische Berechnungsmodell entspricht der Lösung des Gleichgewichtsproblems, welches schon Kármán im Jahre 1910 formulierte und durch ein graphisches Iterationsverfahren löste [34]. Das Modell basiert auf folgenden drei Bedingungen, welche das Verhalten der Stütze in einem Kontrollpunkt vollständig und innerhalb der Modellannahmen exakt beschreiben:

- Stoffgesetz (Anhang A)
- Gleichgewicht zwischen inneren und äusseren Kräften (Gl. 3.8, Gl. 3.9 und Abb. 3-4)
- Verträglichkeitsbedingung (Gl. 3.11 a bzw. Gl. 3.11 b)

Das Berechnungsmodell berücksichtigt keine lokalen Instabilitäten wie das Ausbeulen des Querschnittes und schliesst das Kippen der Stütze, sowie Einflüsse der Schubverformungen aus. Zudem

gilt die Bernoulli-Navier-Hypothese, dass ein ebener, zur Stabachse normaler Querschnitt in der verformten Lage eben und normal zu verformten Stabachse bleibt.

In diesem reduzierten Gleichgewichtsmodell werden die drei oben genannten Bedingungen nur an einem einzigen Kontrollpunkt in Stützenmitte erfüllt, während diese beim erweiterten Gleichgewichtsmodell des Kapitels 3.3.2 überall entlang der Biegelinie erfüllt werden. Für die Erfüllung des Gleichgewichts werden die von aussen einwirkenden Kräfte 2^{ter} Ordnung (N_E und $M_{E,II}$) mit den inneren Widerstandskräften $N_{R,\theta}$ und $M_{N,R,\theta}$ bei einer gegebenen Stützenverformung und beliebigem Materialverhalten gleichgesetzt. Die Stahltemperatur q darf im Rahmen dieser Arbeit, als Parameter der Nichtlinearität des Materials verstanden werden. Sowohl die von aussen wirkenden Kräfte wie die inneren Widerstandskräfte sind eine Funktion der Stützenverformung, deren Berechnung sowie deren Gegenüberstellung die Hauptbestandteile dieses numerischen Modells bilden. Zur Erläuterung der Berechnungsmethode wird eine beidseitig gelenkig gelagerte Stütze mit einer Anfangsauslenkung $e(x)$, einer planmässigen Exzentrizität e_1 und einer Verformung $w(x)$ gemäss Abbildung 3-4 links betrachtet. Zusätzliche einwirkende Biegemomente aus einer Belastung quer zur Stützenachse, sowie das Biegemoment infolge der Normalkraft und der planmässigen Exzentrizität werden mit dem Biegemoment 1^{ter} Ordnung $M_{E,I}$ zusammengefasst.

Im Rahmen dieser Arbeit werden die geometrische Imperfektion $e(x)$ und die Verformung der Biegelinie $w(x)$ affin zueinander angenommen, wobei für die Verformung der Stützenbiegelinie zwei unterschiedliche Funktionen betrachtet werden. Der erste Ansatz für die Verformungsfigur der Biegelinie entspricht einer Sinusfunktion gemäss Gleichung 3.1 a, welche für zentrisch belastete Stützen mit einem einwirkenden Biegemoment 1^{ter} Ordnung $M_{E,I}$ affin zu einer Sinusfunktion zu einem unteren Grenzwert der Traglast führt. Ist die Stütze exzentrisch oder durch ein konstantes Biegemoment $M_{E,I}$ symmetrisch belastet, so kann der untere Grenzwert der Traglast durch einen zweiten parabolischen Ansatz für die geometrische Form der Biegelinie berechnet werden. Dies lässt sich mit dem erweiterten Gleichgewichtsmodell des Kapitels 3.3.2 begründen.

Berechnung der inneren Widerstandskräfte (Rückhaltende Kräfte)

Für eine gegebene Verformung in Stützenmitte $w_{m,II}$ und einer äusseren Normalkraft N_E , wird das innere Widerstandsmoment $M_{N,R,\theta}$ basierend auf der Hypothese der ebenbleibenden Querschnitte von Bernoulli-Navier iterativ berechnet. Der Berechnungsvorgang ist in Abbildung 3-4 links dargestellt. In einem ersten Schritt wird die gesamte Dehnung ϵ_{tot} (d) über den Stützenquerschnitt als Summe der drei Dehnungsanteile ϵ_N (a), $\epsilon_{\Delta N}$ (b) und ϵ_χ (c) berechnet. Der erste Anteil ist eine gleichmässige Dehnung infolge der einwirkenden Normalkraft N_E ohne Berücksichtigung jeglicher Stützenverformung. Sie kann bei gegebener Normalkraft direkt über die Spannung, die sich mit der Teilung der Normalkraft durch die Querschnittsfläche ergibt und dem Stoffgesetz berechnet werden. Der zweite Anteil (b) ist eine gleichmässig verteilte Dehnung, welche bei nichtlinearem Materialverhalten notwendig ist, um das axiale Gleichgewicht der Normalkräfte an der verformten Stütze zu gewährleisten. Dies, weil durch die Nichtlinearität des Materials der Zuwachs der zunehmenden Spannungen am inneren Rand der Stütze kleiner ist als die Verminderung infolge elastischer Entlastung bei den abnehmenden Spannungen am äusseren Rand der Stütze. Dieser Unterschied wird durch den Dehnungsanteil $\epsilon_{\Delta N}$ kompensiert. Der Anteil (c) entspricht einer linear verteilten Dehnung, verursacht durch die Krümmung χ . Aus der gesamten Dehnung ϵ_{tot} (d) und der Spannungs-Dehnungs-Beziehung bei gegebener Stahltemperatur θ , lassen sich die Spannungen σ_{tot} (e) über den Stützenquerschnitt berechnen. Die Integration der Spannungen σ_{tot} über den Stützenquerschnitt ergibt die innere axiale Widerstandskraft $N_{R,\theta}$, welche mit der von aussen einwirkenden Normalkraft N_E im Gleichgewicht sein muss.

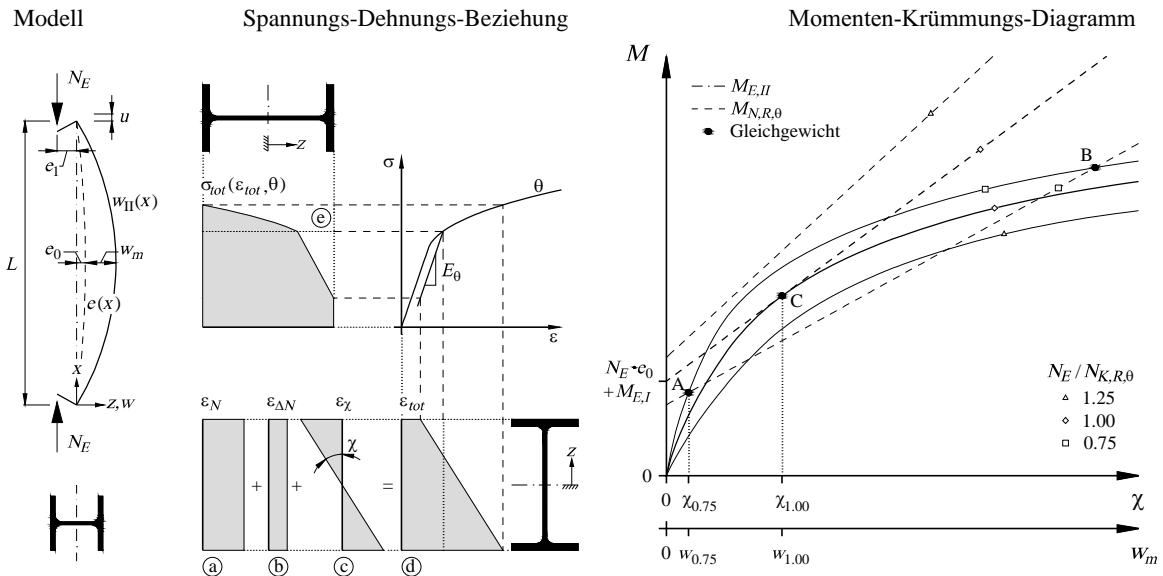


Abb. 3-4: Links: Berechnungsschema der inneren Widerstandskräfte in Funktion der Normalkraft und Krümmung. Rechts: Gleichgewicht im Momenten-Krümmungs-Diagramm

$$N_{R, \theta} = \int_A \sigma_{tot}(\epsilon_{tot}, \theta) \cdot dA = N_E \quad (3.8)$$

Durch eine iterative Lösungssuche wird nun die gleichmässig verteilte Dehnung $\epsilon_{\Delta N}$ (b) so gewählt, dass Gleichung 3.8 erfüllt wird. Ist das Gleichgewicht für die Normalkraft erreicht, lässt sich mit

$$M_{N, R, \theta}(\chi, N_E) = \int_A z \cdot \sigma_{tot}(\epsilon_{tot}, \theta) \cdot dA \quad (3.9)$$

der innere Biegezug in Funktion der Normalkraft und der Krümmung berechnen. Wird dieser Vorgang für mehrere Krümmungen durchgeführt, ergibt dies im Momenten-Krümmungs-Diagramm (Abb. 3-4 rechts) eine konvexe Funktion, welche durch den Koordinatenursprung verläuft.

Eigenspannungen, thermische Dehnungen oder Spannungen sowie Kriecheffekte können bei der Berechnung des Biegezug berücksichtigt werden. Diese können bei der Überlagerung der Dehnungen in den Schritten (a) bis (d) in Abbildung 3-4 links integriert werden. In Abbildung 3-5 links ist der Einfluss der Eigenspannungen (c) sowie des Materialverhaltens infolge Temperatur (d) qualitativ dargestellt.

Berechnung der einwirkenden Kräfte 2^{ter} Ordnung (Treibende Kräfte)

Das einwirkende Biegemoment 2^{ter} Ordnung $M_{E,II}$ in Stützenmitte ergibt sich als Produkt der einwirkenden Normalkraft N_E und der Stützensauslenkung w_{II} , zusammen mit der geometrischen Imperfektion e , sowie dem Biegemoment 1^{ter} Ordnung $M_{E,I}$.

$$M_{E, II} = N_E \cdot w_{m, II} + M_{E, I} \quad \text{wobei } w_{m, II} = w_m + e_0 \quad (3.10)$$

Das Biegemoment 1^{ter} Ordnung $M_{E,I}$ umfasst die planmässige Exzentrizität und die Biegemomente, welche durch Belastungen quer zur Stützenachse verursacht werden. Es besteht eine lineare

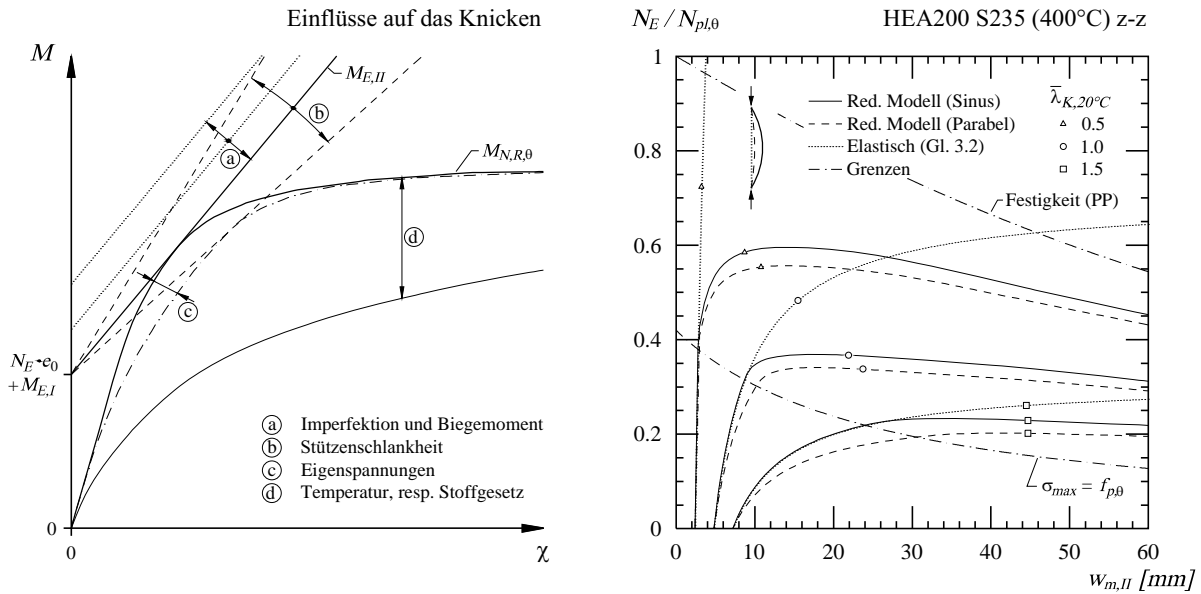


Abb. 3-5: Links: Unterschiedliche Einflüsse im Momenten-Krümmungs-Diagramm dargestellt. Rechts: Last-Verformungs-Pfade für zentrisch gedrückte Stützen mit $e_0 = L / 1'000$.

Beziehung zwischen dem Biegemoment 2^{ter} Ordnung und der Stützenschlankheit, was in einem Momenten-Verformungs-Diagramm einer Gerade entspricht. Wird die Momenten-Verformungs-Beziehung der Einwirkung in eine Momenten-Krümmungs-Beziehung umgeformt, so kann diese der Momenten-Krümmungs-Beziehung des Widerstandes gegenübergestellt werden. Je nach Wahl der geometrischen Form der Biegelinie ergibt sich eine andere Beziehung zwischen der Krümmung χ und Verformung w_m in Stützenmitte.

$$\chi \approx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = w_m \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad \text{falls } w(x) \text{ affin zur Sinusfunktion} \quad (3.11 a)$$

$$\chi \approx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = w_m \frac{8}{L^2} \quad \text{falls } w(x) \text{ affin zur Parabelfunktion} \quad (3.11 b)$$

Da die Beziehung zwischen Stützenschlankheit und Stützenkrümmung bei diesen beiden Ansätzen zur Verformungsfigur linear ist, wird die Funktion des einwirkenden Biegemomentes 2^{ter} Ordnung auch im Momenten-Krümmungs-Diagramm als Gerade erscheinen (Abb. 3-5 links). Der Einfluss der geometrischen Imperfektion, des Biegemomentes 1^{ter} Ordnung (a) sowie der Stützenschlankheit (b) ist in Abbildung 3-5 links im Momenten-Krümmungs-Diagramm schematisch dargestellt.

Gleichgewicht am Kontrollpunkt in Stützenmitte

Analog zur Differentialgleichung 3.1 gilt es, für eine gegebene Normalkraft eine Verformung w der Stütze zu finden, welche das Gleichgewicht zwischen dem inneren Biegezugwiderstand und dem von aussen einwirkenden Biegemoment ermöglicht. In Abbildung 3-4 rechts sind für drei unterschiedliche Normalkräfte der innere Biegezugwiderstand und das einwirkende Biegemoment in Funktion der Stützenkrümmung dargestellt. Ist die Normalkraft N_E kleiner als der Knickwiderstand $N_{K,R,\theta}$, schneiden sich die Funktionen der treibenden und rückhaltenden Kräfte in den zwei Punkten A und B. Beide stellen einen möglichen Gleichgewichtszustand dar, doch im aufsteigenden Last-Verformungs-Pfad ist nur der erste Punkt A von Bedeutung, während der Punkt B dem Gleichgewicht des abfallenden Last-Verformungs-Astes entspricht. Ist die Normalkraft genau gleich dem Knickwiderstand, so gibt es nur einen gemeinsamen Punkt C der sich tangential berührende Funktio-

nen. Ein weiteres Ansteigen der Last würde ein Gleichgewicht der inneren und äusseren Kräfte verunmöglichen, was sich durch den fehlenden Schnittpunkt der zwei Funktionen in Abbildung 3-4 rechts verdeutlicht. Ein mögliches Iterationsschema zur raschen Berechnung der Knicklast einer Stütze ist im Anhang B.1 enthalten.

Im Momenten-Krümmungs-Diagramm kann nicht nur das Gleichgewicht der inneren und äusseren Kräfte überprüft werden, sondern auch die zum Gleichgewichtszustand gehörende Krümmung beziehungsweise Verformung bestimmt werden. Somit kann mit diesem Modell nebst der Knicklast der vollständige Last-Verformungs-Pfad berechnet werden. In Abbildung 3-5 rechts sind für drei unterschiedlich bezogene Knickschlankheiten die Last-Verformungs-Kurven einer zentrisch belasteten Stütze (HEA200 S235, 400°C) dargestellt. Wird die geometrische Form der Biegelinie durch eine Sinusfunktion genähert, so folgt bei niedriger Belastung die Last-Verformungs-Beziehung (durchgezogene Linie) der elastischen Lösung gemäss Gleichung 3.2. Erst beim Überschreiten der Proportionalitätsgrenze $f_{p,0}$ der äusseren Querschnittsfasern mindert sich die Steifigkeit der Stütze und der Last-Verformungs-Pfad verlässt die elastische Lösung.

Die Annahme der geometrischen Form der Stützenbiegelinie hat einen entscheidenden Einfluss auf die gesamte Last-Verformungs-Beziehung. So führt eine parabolische Verformungsfigur stets zu tieferen Lasten im Vergleich zu einer sinusförmigen Biegelinie. Dies, weil gemäss den Gleichungen 3.11 a und 3.11 b die Krümmungen infolge der Auslenkung w_m in Stützenmitte bei einem Sinusansatz stets grösser sind als bei einem parabolischen Ansatz. Insbesondere bei schlanken Stützen zeigt sich durch den grossen Einfluss der Verformungsvergrösserung infolge der Theorie 2^{ter} Ordnung der Unterschied schon bei niedrigen Lasten deutlich (Abb. 3-5 rechts).

In Abbildung 3-5 rechts ist zusätzlich der plastische Grenzwert der Querschnittstragfähigkeit (PP) als strichpunktierte Linie eingezeichnet. Dieses voll plastische Modell besteht aus zwei starren Stäben mit einem ideal plastischen Gelenk in Stützenmitte. Es berücksichtigt eine plastische Interaktion zwischen der Normalkraft und dem Biegemoment, enthält jedoch keinerlei Betrachtungen zur Stabilität und wird somit erst im abfallenden Ast der Last-Verformungs-Beziehung bei sehr grossen Verformungen durch das reduzierte Gleichgewichtsmodell erreicht.

3.3.2 Erweitertes Gleichgewichtsmodell

Im Gegensatz zum reduzierten Gleichgewichtsmodell überprüft das erweiterte Gleichgewichtsmodell die Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen nicht nur im Stützenmittelpunkt sondern in jedem einzelnen Stützenquerschnitt. Durch Erfüllung dieser Bedingungen in jedem Stützenquerschnitt ergibt sich die geometrische Form der Biegelinie, ohne dass diese vorweg angenommen werden muss. Für die Berechnungen ist nur ein Ansatz für die geometrischen Imperfektionen erforderlich. Dieser wird im Rahmen dieser Arbeit mit der Gleichung 3.1 b affin zu einer Sinusfunktion angenommen.

Das erweiterte Gleichgewichtsmodell umfasst die Berechnungsschritte des reduzierten Gleichgewichtsmodells mit Ausnahme der Verknüpfung zwischen der Verformung und der Krümmung nach Gleichung 3.11 a beziehungsweise 3.1 b. Die Beziehung zwischen der Verformung der Stützenbiegelinie und deren Krümmung wird iterativ nach dem in Abbildung 3-6 links dargestellten Berechnungsschema ermittelt. Dabei berechnet das erweiterte Gleichgewichtsmodell für eine gegebene Krümmung χ_m in Stützenmitte mit einem iterativen Prozess die dazugehörige Verformungsfigur sowie die damit verbundenen treibenden Kräfte $M_{E,II}$ entlang der Stützenachse. Das Berechnungsmodell wird an einer beidseitig gelenkig gelagerten Stütze erläutert, welche durch eine Normalkraft N_E sowie einem Biegemoment 1^{ter} Ordnung $M_{E,I}$ belastet wird und eine anfänglich geometrische Imperfektion e aufweist (Abb. 3-6 links).

In einem ersten Schritt wird zu einer gewählten Krümmung χ_m in Stützenmitte die Verteilung der Krümmung $\chi(x)$ entlang der Stützenachse angenommen. Durch zweifache Integration der

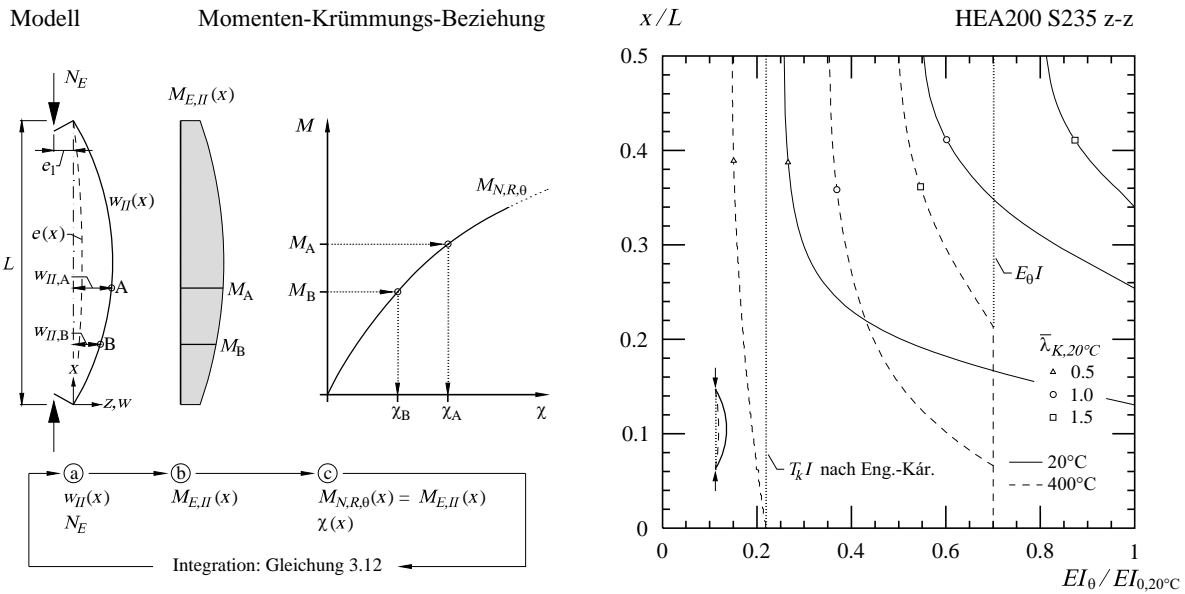


Abb. 3-6: Links: Berechnungsschema des erweiterten Gleichgewichtsmodells. Rechts: Steifigkeit entlang der Biegelinie für eine zentrisch gedrückte Stütze beim Erreichen der Knicklast.

Krümmungen entlang der Stützenachse (Gl. 3.12) lässt sich die Verformungsfigur w_{II} (a) der Stütze berechnen. Die noch unbekannt Normalkraft N_E wird in einem zweiten Schritt für die gewählte Krümmung in Stützenmitte berechnet. Dazu wird das innere Widerstandsmoment sowie das von aussen einwirkende Biegemoment für die gegebene Krümmung respektive die nun bekannte Verformung in Funktion der Normalkraft in Stützenmitte berechnet. Das innere Widerstandsmoment ist dabei mit dem Schema der Abbildung 3-4 links zu berechnen, während das von aussen einwirkende Biegemoment durch die Gleichung 3.10 beschrieben ist. Durch Gleichsetzen der inneren und äusseren Biegemomente in Stützenmitte erfolgt eine erste Schätzung der Normalkraft N_E . Ist die Normalkraft N_E entlang der Stütze konstant, können in einem weiteren Berechnungsschritt die treibenden Biegemomente $M_{E,II}(x)$ infolge der Verformung w_{II} und den geometrischen Imperfektionen e entlang der Stützenachse berechnet werden (b). Gleichzeitig lassen sich die rückhaltenden Biegemomente $M_{N,R,\theta}(x)$ entlang der Stützenachse mit der angenommenen Krümmungsverteilung $\chi(x)$ und der axialen Normalkraft N_E berechnen (c). Stehen die Biegemomente $M_{E,II}(x)$ und $M_{N,R,\theta}(x)$ nicht überall entlang der Stützenachse im Gleichgewicht, muss die Verteilung der Krümmung $\chi(x)$ angepasst werden (c), wobei die Krümmung in Stützenmitte stets der anfänglich gewählten Krümmung χ_m entspricht. Mit der neuen Annahme zur Krümmungsverteilung wird mit Gleichung 3.12 eine neue Verformungsfigur $w(x)$ berechnet (a).

$$w_{II}(x) = e(x) + \iint \chi(x) dx^2 \quad (3.12)$$

Durch mehrmaliges Durchlaufen dieser Iterationsschleife kann für eine gegebene Krümmung χ_m in Stützenmitte sowohl die dazugehörige Normalkraft wie auch die geometrische Form der Biegelinie gefunden werden, damit in jedem Stützenquerschnitt die Gleichgewichtsbedingungen und die Verträglichkeitsbedingung erfüllt sind.

Nebst der Verformungsfigur lässt sich mit dem erweiterten Gleichgewichtsmodell die Verteilung der Biegesteifigkeit EI entlang der Stützenachse berechnen. In Abbildung 3-6 rechts ist die Verteilung der Biegesteifigkeit entlang der Stützenachse beim Erreichen der Knicklast für zentrisch gedrückte Stützen unterschiedlicher Schlankheit bei Raumtemperatur und $400^\circ C$ dargestellt. Die für die Berechnungen angenommenen geometrischen Imperfektionen betragen $e_0 = L/1'000$. Bei linear elastischem - ideal plastischem Materialverhalten ($20^\circ C$) ist beim Erreichen der Knicklast ein grosser Steifigkeitsverlust in Stützenmitte zu beobachten. Bei schlanken Stützen konzentriert

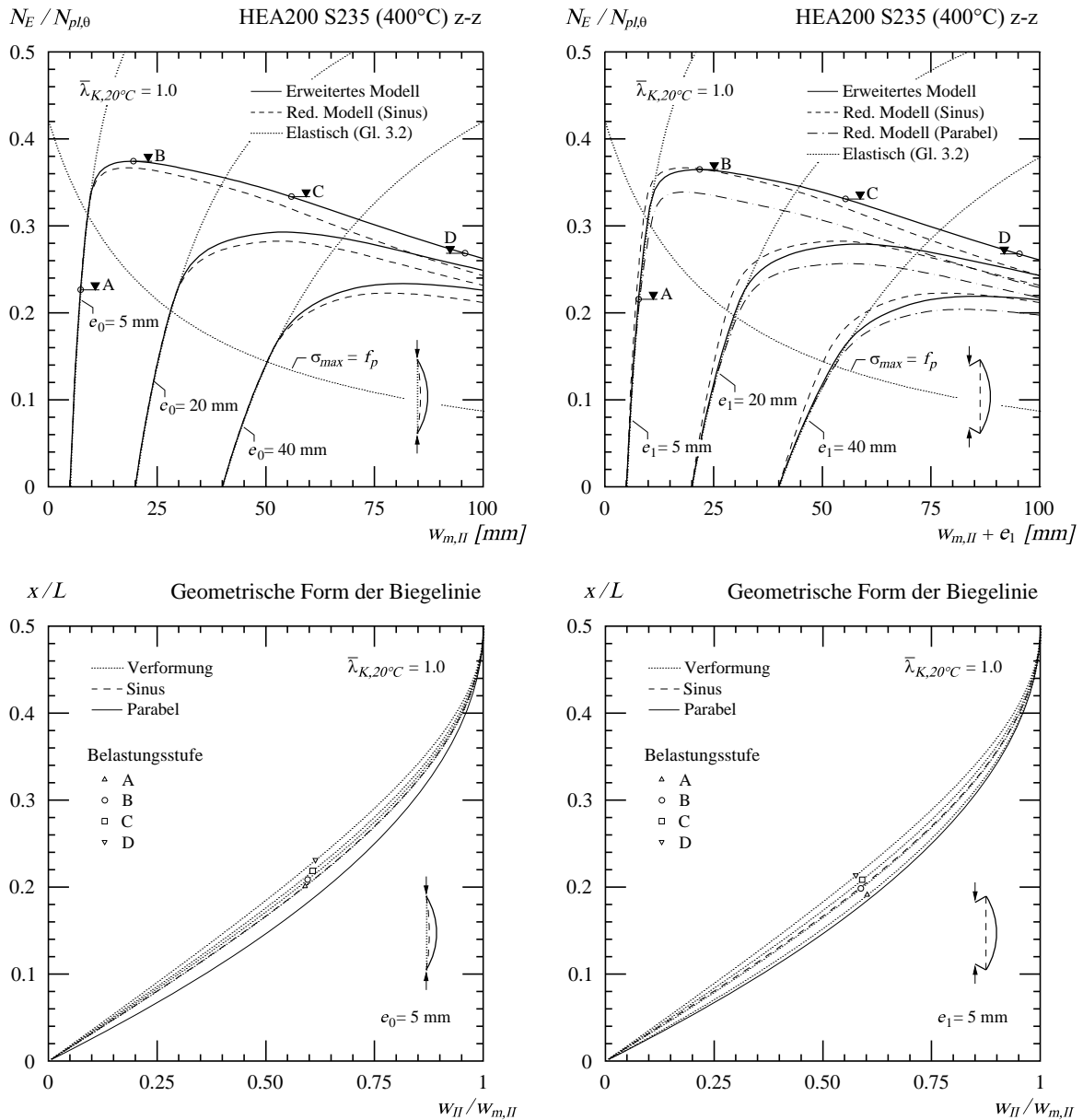


Abb. 3-7: Last-Verformungs-Pfad (oben) und geometrische Form der Biegelinie (unten) für zentrisch (links) und exzentrisch belasteten Stützen (rechts).

sich der Steifigkeitsverlust stark im mittleren Bereich der Stütze, während bei gedrunenen Stützen die Steifigkeitsverluste sich über einen grösseren Bereich erstrecken. Bei nichtlinearem Materialverhalten (400°C) ist der Verlust der Steifigkeit EI im Allgemeinen kleiner, erstreckt sich aber über einen grösseren Stützenbereich. Bei gedrunenen Stützen wird die Biegesteifigkeit EI über die gesamte Stützenlänge reduziert.

Mit dem erweiterten Gleichgewichtsmodell kann durch eine schrittweise Erhöhung der Krümmung in Stützenmitte der vollständige Last-Verformungs-Pfad berechnet werden. In Abbildung 3-7 oben sind die Last-Verformungs-Pfade einer HEA200 Stütze mit bei Raumtemperatur bezogener Schlankheit von 1.0 für unterschiedliche geometrische Imperfektionen (links) und Lastexzentrizitäten (rechts) dargestellt. Die Last-Verformungs-Pfade sind sowohl mit dem erweiterten wie auch mit dem reduzierten Gleichgewichtsmodell berechnet, wobei beim reduzierten Modell sowohl eine Sinus- wie auch eine Parabelfunktion als Ansatz für die geometrische Form der Biegelinie verwendet wird. Für die Stützen mit der jeweils kleinsten Lastexzentrizität ist die geometrische Form der Biegelinie für vier unterschiedliche Belastungszustände entlang des Last-Verformungs-Pfades (A bis D) in Abbildung 3-7 unten dargestellt. Bei der zentrisch gedrückten Stütze (Abb. 3-7 links) folgt die Last-Verformungs-Beziehung für kleine Belastungen N_E der elastischen

Lösung gemäss Gleichung 3.2. Demzufolge wird sich die Stützenverformung beim erweiterten Gleichgewichtsmodell affin zu einer Sinusfunktion einstellen, wie dies auch für den Belastungszustand A ersichtlich ist. Überschreitet die Randspannung im Querschnitt die Proportionalitätsspannung f_p , so verlässt der Last-Verformungs-Pfad die elastische Lösung. Die Verformungen konzentrieren sich in Stützenmitte, wo allmählich ein plastisches Gelenk entsteht. Durch die Konzentration der Verdrehungen im meist beanspruchten Stützenquerschnitt werden grössere Krümmungen erzeugt, die den inneren Biege widerstand in diesem Bereich der Stütze erhöhen. Somit liegt der Tragwiderstand des erweiterten Gleichgewichtsmodells für zentrisch belastete Stützen höher als im reduzierten Gleichgewichtsmodell mit einer Verformungsfigur affin zur Sinusfunktion. Die geometrische Form der Biegelinie des erweiterten Gleichgewichtsmodells liegt beim Erreichen der maximalen Traglast zwar sehr nahe einer Sinusfunktion, geht jedoch ein wenig in eine Dreiecksfigur über (Punkt B). Je weiter man dem Last-Verformungs-Pfad im absteigenden Ast folgt, desto deutlicher weicht die Verformungsfigur von der Sinusfunktion ab (Punkte C und D), wobei sich die Verformungen respektive Krümmungen in Stützenmitte konzentrieren.

Wird die Stütze exzentrisch belastet, ergibt sich ein konstantes Biegemoment 1^{ter} Ordnung $M_{E,I}$, welches das Verhalten der Stütze stark beeinflusst. Weil dies zu grösseren Verformungen führt, wird der Vergrösserungsfaktor 2^{ter} Ordnung für die elastische Lösung mit dem Korrekturbeiwert $\delta = 0.27$ nach Dischinger ergänzt (Tab. 3-2). Für sehr kleine Lasten, bei denen die Effekte 2^{ter} Ordnung eine untergeordnete Rolle spielen, ergibt sich eine zur Parabel affine Verformungsfigur (Punkt A). Durch zunehmende Belastung verformt sich die Stütze, was eine Veränderung in der Verteilung der Biegemomente 2^{ter} Ordnung entlang der Stütze zur Folge hat. Die geometrische Form der Biegelinie weicht von der Parabelfunktion ab, da sich die Krümmungen in den meist beanspruchten Querschnitten konzentrieren. Je mehr sich die Stütze verformt, desto mehr konzentrieren sich die Verformungen im mittleren Bereich der Stütze (Punkte B bis D). Dennoch darf erst bei sehr grossen Verformungen von einem plastischen Gelenk die Rede sein, welches sich sehr spät und weit im absteigenden Ast des Last-Verformungs-Pfades ausbildet. Die Konzentration der Verformung respektive der Krümmungen in Stützenmitte führt zu höheren Traglasten, die mit dem reduzierten Gleichgewichtsmodell mit einer parabolischen Verformungsfigur nicht erreicht werden. Das reduzierte Gleichgewichtsmodell liefert somit stets tiefere Traglasten solange das System symmetrisch belastet ist und die angenommene Verformungsfigur affin zur geometrischen Form der Biegelinie ist, welche sich aus der Belastung 1^{ter} Ordnung ergibt. Dies, weil sich die Verformungen in Stützenmitte konzentrieren, was zu einer Erhöhung des inneren Biege widerstands führt.

Das erweiterte Gleichgewichtsmodell nähert in einem iterativen Verfahren die exakte Lösung der Differentialgleichung 3.1 für Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten an. Da im Gegensatz zum reduzierten Gleichgewichtsmodell diese entlang der gesamten Biegelinie erfüllt wird, können Stützen mit beliebiger Geometrie sowie Belastungszuständen berechnet werden. Stützen mit entlang der Achse variablen Querschnitten, Materialeigenschaften oder Belastung können mit diesem iterativen Verfahren berechnet werden, wobei auch Asymmetrien möglich sind. Zudem können Eigenspannungen, thermische Dehnungen und Spannungen, sowie Kriecheffekte in das Modell integriert werden. Nebst der beidseitig gelenkig gelagerten Stützen können auch statisch unbestimmte Systeme gelöst werden, wobei der Grad der Unbestimmtheit durch eine gleiche Anzahl statischer oder kinematischer Randbedingungen ersetzt wird. Je mehr das Berechnungsmodell abbilden muss, desto komplexer wird das iterative Verfahren, welches jedoch immer auf derselben Differentialgleichung basiert. Diese bildet das Grundgerüst für jegliche Betrachtungen zum Tragverhalten gedrückter Stützen.

3.3.3 Energiemethode für zentrisch gedrückte Stützen

Die Energiemethode beruht nicht wie das Gleichgewichtsmodell auf dem direkten Gleichsetzen der inneren und äusseren Kräfte, sondern auf der am Gesamtsystem geleisteten Arbeit infolge der Belastung und der Stützenverformung. Es liegt in der Natur der statischen Systeme für jeden aufgezwungenen Belastungszustand, durch Verformung die von ihnen geleistete Arbeit und somit ihr Gesamtpotential möglichst zu reduzieren. Da ein Minimum gesucht wird, ist für ein gegebenes Belastungszustand des Systems nicht der Betrag, sondern nur die Veränderung des Gesamtpotentials infolge der Stützenverformung von Interesse. Diese Veränderung setzt sich zusammen aus einer Veränderung der inneren und der äusseren Arbeit, wobei der innere Arbeitsanteil durch die Verformung der Stütze und der äussere Anteil durch die Verschiebung der angreifenden Belastungskräfte geleistet werden.

Im Gegensatz zum erweiterten Gleichgewichtsmodell nach Kapitel 3.3.2, welches die geometrische Form der Biegelinie iterativ berechnet, kann diese bei der Energiemethode durch eine mathematische Funktion vorgegeben werden. Bei der Energiemethode wird ein zulässiges Verschiebungsfeld gewählt, welches stetig ist und sämtliche kinematischen Randbedingungen erfüllt. Zum gewählten Verschiebungsfeld wird mit den kinematischen Relationen und dem Stoffgesetz ein dazu verträgliches Spannungsfeld berechnet. Es gilt nun dasjenige Verschiebungsfeld zu finden, welches mit dem dazu verträglichen Spannungsfeld das Gesamtpotential des Systems minimiert (*Satz des Minimums der potentiellen Energie*). Damit kann für jede Normalkraft N_E , welche kleiner als die Knicklast ist, die optimale geometrische Form der Biegelinie berechnet werden. Ist die Normalkraft N_E grösser als die Knicklast der Stütze, wachsen die Verformungen bei der Suche nach dem minimalen Gesamtpotential ins Unendliche (Abb. 3-9 links). Das System ist instabil.

In der Folge werden zuerst die im Rahmen dieser Arbeit angenommenen Verschiebungsfelder für die beidseitig gelenkig gelagerte Stütze vorgestellt. Es folgen Erläuterungen zur Berechnung der inneren und äusseren Arbeit sowie zur Bestimmung der Knicklast und des Verformungszustandes der Stütze.

Verschiebungsfelder

Für die Erläuterung dieses Berechnungsmodells wird im Rahmen dieser Arbeit eine geometrische Form der Biegelinie als eine Kombination von zwei Geraden und einer Sinusfunktion gewählt, wobei der Übergang zwischen den Funktionen stetig ist. Der Anteil der Geraden an der Verformungsfigur kann beliebig variiert werden und ist mit der Variable η beschrieben. Dieser Ansatz deckt somit Verformungsfiguren zwischen einer reinen Sinusfunktion ($\eta=0.0$) und einem System mit zwei starren Stäben und einem Gelenk in Stützenmitte ($\eta=1.0$) ab. Die mathematische Formulierung der Verformungsfigur ist im Anhang B.2 beschrieben. In Abbildung 3-8 links sind für unterschiedliche η (0.0, 0.4 und 0.8) die dazugehörigen Verformungsfiguren dargestellt. Der gestrichelte Bereich der Verformungsfiguren entspricht dem Anteil der Geraden, während der durchgezogene Bereich dem Anteil der Sinusfunktion entspricht. In der gleichen Abbildung ist zusätzlich die zweite Ableitung der Verformungsfigur dargestellt, welche der linearisierten Krümmungsverteilung entlang der Biegelinie gleichkommt.

Für das Berechnungsmodell ist eine Anfangsverformung $e(x)$ zur Abbildung der geometrischen Imperfektionen notwendig. Diese ist affin zur Verformungsfigur und hat eine Auslenkung e_0 in Stützenmitte.

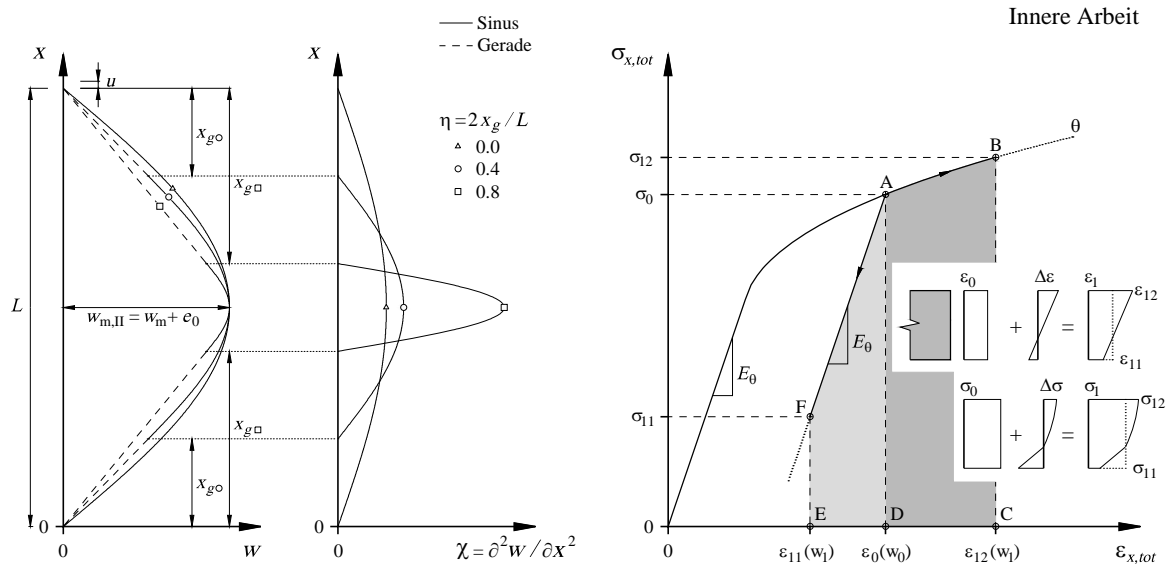


Abb. 3-8: Links: Parametrisierung der Verformungsfigur und der Krümmungen entlang der Stützenachse. Rechts: Berechnung der inneren Arbeit für nichtlineares Material.

Innere Arbeit U_i

Durch die Verformung der Stütze wird eine innere Arbeit U_i geleistet, welche sich durch die Veränderung der am Stützenquerschnitt wirkenden Spannungen und Dehnungen ergibt. Es gilt nun diese in Funktion der Stützensauslenkung für eine gegebene Normalkraft N_E zu berechnen. Analog wie bei der Berechnung der inneren Widerstandskräfte im Kapitel 3.3.1 müssen für jeden Stützenquerschnitt die Dehnungen ϵ_{tot} und Spannungen σ_{tot} für die gegebene Krümmung χ und Normalkraft N_E berechnet werden (Abb. 3-4 links). Insbesondere gilt es Gleichung 3.8 zu erfüllen, damit das Gleichgewicht zwischen der einwirkenden Normalkraft N_E und der sich aus den Spannungen ergebenden Widerstandskraft $N_{R,\theta}$ gewährleistet ist. Die durch die Verformung der Stütze geleistete innere Arbeit ergibt sich aus der Integration der Arbeitsanteile der einzelnen Querschnittsfasern über das gesamte Stützenvolumen.

$$U_i = \iiint_V \sigma_{tot} d\epsilon_{tot} dV \tag{3.13}$$

Für ein gegebenes Verschiebungsfeld ist sowohl die Verformungsfigur w wie auch die Krümmung χ in jedem Stützenquerschnitt bekannt (Abb. 3-8 links). Aus dem bekannten Verschiebungsfeld und der einwirkenden Belastung N_E wird das Spannungsfeld nach dem Berechnungsschema des Kapitels 3.3.1 für jeden Punkt entlang der Biegelinie berechnet. Dabei werden sowohl die Verträglichkeitsbedingungen wie auch die Stoffgesetze und das Gleichgewicht in axialer Richtung erfüllt. Für eine Querschnittsfaser in einem beliebigen Stützenquerschnitt entspricht dies dem Zustand A in dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm in Abbildung 3-8 rechts. Verformt sich die Stütze von w_0 zu w_1 entstehen zusätzliche Dehnungen, welche wiederum zusätzliche Spannungen verursachen. Je nach Lage der betrachteten Faser im Stützenquerschnitt führt die Verformung der Stütze zu einer Zu- oder Abnahme der Spannungen und Dehnungen. Nimmt die Dehnung im betrachteten Querschnittspunkt zu, so folgt die Belastung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung bis zum Belastungszustand B. Die von dem infinitesimalen Volumenelement dabei geleistete innere Arbeit entspricht der Fläche ABCD. Nimmt die Dehnung im betrachteten Querschnittspunkt ab, so kommt es zu einer elastischen Entlastung bis zum Belastungszustand F. Die dabei geleistete Arbeit entspricht der Fläche ADEF, wobei diese ein negatives Vorzeichen besitzt, da diese Arbeit einer

Entlastung beziehungsweise einem Freisetzen von gespeicherter Energie gleichkommt. Durch Summieren aller Anteile der geleisteten Arbeit über das Stützensvolumen erhält man die gesamte Veränderung der inneren Arbeit infolge der zusätzlichen Stützenverformung. Mit diesem Berechnungsverfahren kann die geleistete innere Arbeit U_i in Funktion der Stützenverformung berechnet werden (Abb. 3-9 links). Für linear elastisches Material und dem angenommenen Verschiebungsfeld lässt sich Gleichung 3.13 analytisch lösen, was zu folgendem Ausdruck führt

$$U_i = \frac{\pi^4 w_m^2}{4L^4} \cdot EI \cdot \left[L(1 - \eta) + 2 \sin\left(\frac{\eta\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\eta\pi}{2}\right) \right] \quad (3.14)$$

Bei nichtlinearem Materialverhalten wird die Stütze in kleine Volumeneinheiten zerlegt, deren einzelne Arbeitsanteile summiert werden. Bei genügend feiner Unterteilung des Stützensvolumens sowohl in Längsrichtung wie auch in der Querschnittsebene kann die wirkliche Veränderung der inneren Arbeit näherungsweise berechnet werden.

Äussere Arbeit U_a

Die am Gesamtsystem geleistete äussere Arbeit kann als Verschiebung der von aussen angreifenden Normalkraft N_E oder deren Ablenkkräfte verstanden werden. Diese ist bei einer zentrisch gedrückten Stütze von der gewählten Verformungsfigur, von den geometrischen Imperfektionen, von der Normalkraft sowie von der Stützensauslenkung abhängig. Die äussere Arbeit setzt sich aus einem elastischen und einem inelastischen Anteil wie folgt zusammen.

$$U_a = U_{a,el} + U_{a,\varepsilon} = u \cdot N_E \quad (3.15)$$

Der elastische Anteil $U_{a,el}$ der äusseren Arbeit berücksichtigt nur diejenige Verschiebung der angreifenden Normalkraft, welche sich aus der geometrischen Verformung der Biegelinie ergibt ohne der zusätzlichen Stauchung der Stütze infolge der Stützensauslenkung Rechnung zu tragen. Diese wird im inelastischen Anteil $U_{a,\varepsilon}$ berücksichtigt. Da nur die äussere Arbeit infolge einer Veränderung der Stützenverformung w von Bedeutung ist, entfällt der Anteil, welcher sich aus der Verschiebung der Normalkraft infolge Stauchung an der geraden Stütze ergibt. Aus der Veränderung der Stützensgeometrie infolge der Verformung w , ergibt sich folgende äussere Arbeit:

$$U_{a,el} = -\frac{\pi}{L} \cdot \frac{N_E}{\zeta_1} \cdot (2e_0 w_m + w_m^2) \cdot \left[1 + \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) \right] \quad (3.16)$$

wobei

$$\zeta_1 = \eta \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + 1 \quad \text{und} \quad \zeta_2 = 1 - \eta \quad (3.16a)$$

die Parameter für die Beschreibung der Verformungsfigur darstellen. Im Anhang B.2 ist diese mathematische Beziehung für die Berechnung des elastischen Anteils der äusseren Arbeit $U_{a,el}$ hergeleitet. Diese ist einerseits linear von der angreifenden Normalkraft abhängig, andererseits ist sie eine quadratische Funktion der Auslenkung w_m in Stützenmitte, wobei die geometrischen Imperfektionen auch in die Berechnung einfließen. Da die angreifende Normalkraft für das betrachtete Stabilitätsproblem der gedrückten Stütze treibend wirkt, hat die äussere Arbeit $U_{a,el}$ stets ein negatives Vorzeichen. Solange die Stütze vollständig elastisch bleibt, entspricht die Gleichung 3.16 der gesamten äusseren Arbeit infolge der Stützenverformung. Überschreiten die Spannungen im Stützenquerschnitt die Proportionalitätsgrenze f_p , so ist bei der Herstellung des axialen Gleichgewichtes zwischen den Kräften N_E und $N_{R,\theta}$ eine zusätzliche Stauchung $\varepsilon_{\Delta N}$ notwendig, wie dies im

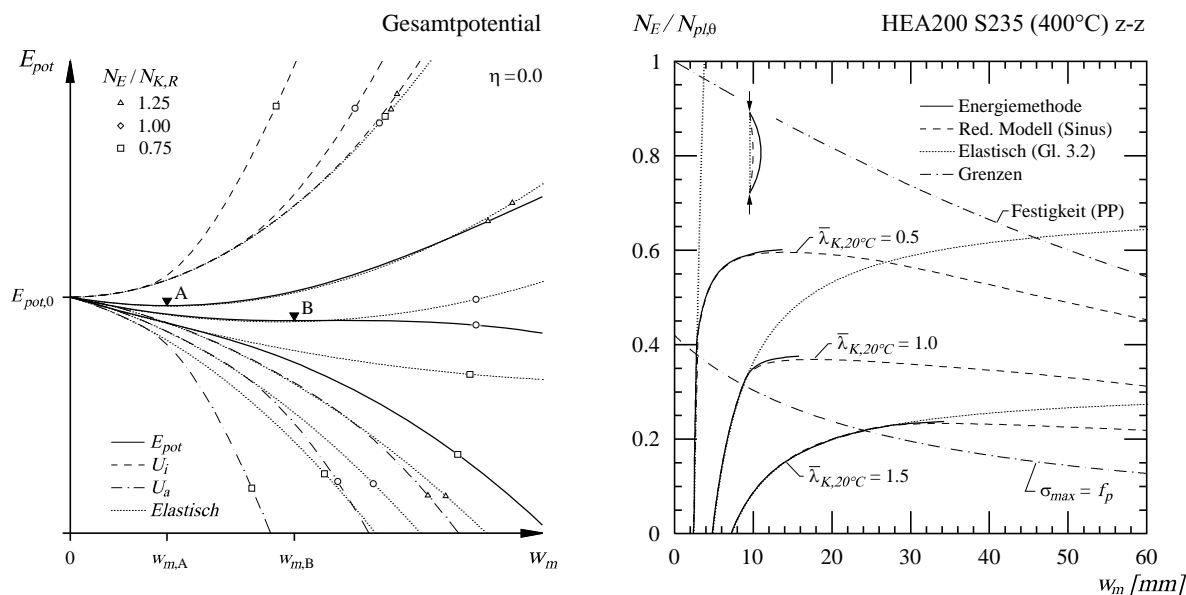


Abb. 3-9: Links: Gesamtpotential in Funktion der Verformung für unterschiedliche Belastungen. Rechts: Last-Verformungs-Pfade, Vergleich zwischen den numerischen Modellen

Kapitel 3.3.1 erläutert wurde (Abb. 3-4 links). Diese Stauchung bewirkt eine zusätzliche Verschiebung der von aussen angreifenden Normalkraft, was wiederum zusätzliche äussere Arbeit bedeutet. Diese zusätzliche äussere Arbeit $U_{a,\epsilon}$ ergibt sich aus der Integration der Stauchungen $\epsilon_{\Delta N}$ entlang der Stützenlänge, welche mit der Normalkraft N_E multipliziert werden.

$$U_{a,\epsilon} = - \int (\epsilon_{\Delta N} \cdot N_E) dx \tag{3.17}$$

Die gesamte äussere Arbeit U_a entspricht der Summe der beiden Beiträge aus Gleichungen 3.16 und 3.17. In Abbildung 3-9 links ist die äussere Arbeit in Funktion der Stützenverformung dargestellt.

Gleichgewichtszustand, Knicklast

Die Veränderung des Gesamtpotentials E_{pot} infolge der Stützenverformung ergibt sich als Summe der Anteile der inneren und der äusseren Arbeit.

$$\Delta E_{pot} = U_i + U_a \tag{3.18}$$

In Abbildung 3-9 links sind die Energieanteile U_i und U_a sowie das Gesamtpotential E_{pot} für drei Laststufen einer Stütze in Funktion deren Verformung dargestellt, wobei die geometrische Form der Biegelinie affin zu einer Sinusfunktion ($\eta = 0.0$) angenommen wurde. Bei einer axialen Belastung N_E der Stütze, die 75% der Knicklast $N_{K,R,\theta}$ entspricht, wird das Gesamtpotential für eine Stützensauslenkung $w_{m,A}$ minimal. Gemäss dem *Satz des Minimums der potentiellen Energie* wird die Stütze für den Zustand A in Abbildung 3-9 links ihr Gleichgewicht finden. Erreicht die axiale Belastung die Knicklast der Stütze, so besitzt das Gesamtpotential E_{pot} kein Minimum mehr, weist jedoch ein ebenes Plateau auf, wo die Stütze einen stabilen Gleichgewichtszustand (B) gerade noch erreichen kann. Die Auslenkung der Stütze beträgt $w_{m,B}$, wobei diese nicht mehr so klar definiert ist, wie beim Gleichgewichtszustand A. Eine weitere Steigerung der axialen Belastung jenseits der Knicklast führt dazu, dass die Stütze beim Verformen ständig an Energie gewinnt, da das Gesamtpotential mit zunehmender Verformung stets abnimmt. Die Verformung der Stütze geht bei der Suche nach ihrem minimalen Gesamtpotential gegen das Unendliche. Die Stütze knickt aus.

Die erläuterte Energiemethode berechnet für ein stabiles System die Auslenkung in Stützenmitte w_m , welche zum minimalen Gesamtpotential für das gewählte Verschiebungsfeld führen. Die Güte der Resultate ist somit abhängig von der Wahl der Verformungsfigur, welche bei diesem Berechnungsverfahren im Voraus definiert werden muss. Wird die Berechnung am gleichen statischen System mit unterschiedlichen Verformungsfiguren durchgeführt, so wird nach dem *Satz des Minimums der potentiellen Energie*, diejenige der wirklichen geometrischen Form der Biegelinie am nächsten kommen, welche das kleinste Minimum der potentiellen Energie aufweist. Somit bildet die Energiemethode stets einen oberen Grenzwert der Stützentragslast.

Die Abbildung 3-9 rechts zeigt die Last-Verformungs-Pfade drei unterschiedlich schlanke Stützen, die mit der Energiemethode berechnet sind und vergleicht diese sowohl mit der elastischen Lösung wie auch mit den Ergebnissen des reduzierten Gleichgewichtsmodells. Die erläuterte Energiemethode ermöglicht nur die Berechnung des aufsteigenden Last-Verformungs-Pfades bis zum Erreichen der maximalen Belastung. In diesem Bereich stimmen die Ergebnisse mit denjenigen des reduzierten Gleichgewichtsmodells gut überein.

Lösung für linear elastisches Materialverhalten

Bei linear elastischem Materialverhalten und der angenommenen Verformungsfigur aus zwei Geraden und einer Sinusfunktion können die Anteile der geleisteten Arbeit U_i und U_a analytisch beschrieben werden (Gl. 3.16 und 3.14). Beide führen zu einer minimalen potentiellen Energie, falls die Verformungsfigur affin zu einer Sinusfunktion ist. Dies nicht nur innerhalb der in dieser Arbeit gewählten Verschiebungsfelder, sondern für alle möglichen Verschiebungsfelder, sobald die geometrischen Imperfektionen auch einer Sinusfunktion folgen. Mit dieser Verformungsfigur ($\eta=0.0$) ergibt sich für die Veränderung des Gesamtpotentials in Funktion der Verformung folgender Ausdruck

$$\Delta E_{pot} = \frac{\pi^2}{4L} \cdot [w_m^2(N_{cr} - N_E) - 2e_0 w_m N_E] \quad (3.19)$$

Dieser Ausdruck wird minimal für folgende Beziehung zwischen der Verformung und der Belastung durch die Normalkraft

$$w_{II} = e_0 + w_m = \frac{e_0}{1 - \frac{N_E}{N_{cr}}} \quad (3.20)$$

Diese Beziehung entspricht genau dem Last-Verformungs-Pfad, welcher sich aus der Lösung der Differentialgleichung 3.1 ergibt.

3.4 Diskussion und Vergleich

In den folgenden Abschnitten werden die Einflüsse verschiedener Parameter auf das Tragverhalten gedrückter Stützen aufgezeigt und quantifiziert. Als Grundlage dienen die numerischen Berechnungsmodelle, insbesondere das reduzierte Gleichgewichtsmodell des Kapitels 3.3.1.

3.4.1 Einfluss von Material und Eigenspannungen

Das Materialverhalten hauptsächlich dessen Nichtlinearität sowie die Eigenspannungen beeinflussen die Beziehung zwischen der vorhandenen Normalkraft, dem Biege­widerstand und der Krümmung. Die Beziehung zwischen diesen drei physikalischen Größen ist bei der Berechnung statischer Systeme, in denen ein Stabilitätsversagen auftreten kann, von zentraler Bedeutung. In Abbildung 3-10 wird der Einfluss von vier unterschiedlichen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen (oben links) sowie der Eigenspannungen auf das Momenten-Krümmungs-Verhalten (oben rechts) und auf die Traglast einer zentrisch gedrückten Stütze veranschaulicht (unten). Das Material (a) entspricht der Stahlsorte S235 bei Raumtemperatur, welche annähernd ein linear elastisches - ideal plastisches Materialverhalten aufweist. Die Materialien (b) bis (d) weisen eine unterschiedlich starke Nichtlinearität auf, wobei die Endfestigkeit f_y , sowie die anfängliche Steifigkeit E bei allen Materialien gleich ist. Im Momenten-Krümmungs-Diagramm ist der Einfluss der unterschiedlichen Stoffgesetze für einen HEA200 Querschnitt (schwache Achse) bei einer Normalkraftbelastung von $N_E = 0.67 N_{pl}$ ersichtlich. Wird die Normalkraft auf die Querschnittsfläche bezogen, so resultiert eine Spannung, die bei den Materialien (a) und (b) unterhalb der Proportionalitätsgrenze liegt. Dementsprechend weisen die Momenten-Krümmungs-Beziehungen dieser beiden Materialien die gleiche anfängliche Biegesteifigkeit EI auf. Dennoch kommt es infolge der Nichtlinearität des Materials (b) bei zunehmender Krümmung zu einer früheren Plastifizierung der äussersten Querschnittsbereiche, was den Biege­widerstand im Vergleich zum Material (a) stark reduziert. Bei den Stoffgesetzen (c) und (d) liegt die Spannung infolge der Normalkraft an der unverformten Stütze im nichtlinearen Bereich der entsprechenden Spannungs-Dehnungs-Beziehungen. Die Biegesteifigkeit der unverformten Stütze wird dadurch reduziert und kann mit dem Knickmodul nach Engesser-Kármán $T_K I$ (Kapitel 2.3.1) beschrieben werden. Der Unterschied in den Momenten-Krümmungs-Beziehungen zwischen dem Material (c) und (d) ist in diesem Fall verschwindend klein.

Wie in Abbildung 3-10 unten erkennbar, führt die nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Materials (b) im Vergleich zu den Knicklasten der Stützen mit Material (a) zu einer starken Reduktion der Traglasten und dies nicht nur bei gedrun­genen, sondern auch für schlanke Stützen. Bezieht man die Knicklasten der schlanken Stützen zu ihrer Querschnittsfläche, so resultieren Spannungen, die weit unterhalb der Proportionalitätsgrenze ($f_p = 0.75 f_y$) des Materials (b) liegen. Dennoch werden auch diese Stützen von der Reduktion der Proportionalitätsgrenze von $f_p = f_y$ auf $f_p = 0.75 f_y$ stark beeinflusst. Dies kommt daher, weil Knicken frühestens dann eintritt, wenn es zu einer Steifigkeitsreduktion infolge Plastifizierung der Randbereiche kommt und somit die Randspannungen beim Knicken die Proportionalitätsgrenze stets überschreiten. Eine Reduktion der Proportionalitätsgrenze (Material (c) und (d)) vermindert die Traglast schlanker Stützen, während die Traglast gedrun­gener Stützen davon wenig beeinflusst wird. Insbesondere Stützen, bei denen die Traglast auf den Stützenquerschnitt bezogen höher als die Proportionalitätsgrenze liegt, werden hauptsächlich von der anfänglichen Biegesteifigkeit $T_K I$ und weniger von einer Reduktion der Proportionalitätsgrenze beeinflusst.

Die Eigenspannungen beeinflussen die Momenten-Krümmungs-Beziehung in einer ähnlicher Weise wie die Nichtlinearität des Materials. Da nicht sehr grosse Dehnungen notwendig sind, um die Eigenspannungen durch das Plastifizieren der äusseren Querschnittsbereiche verschwinden zu

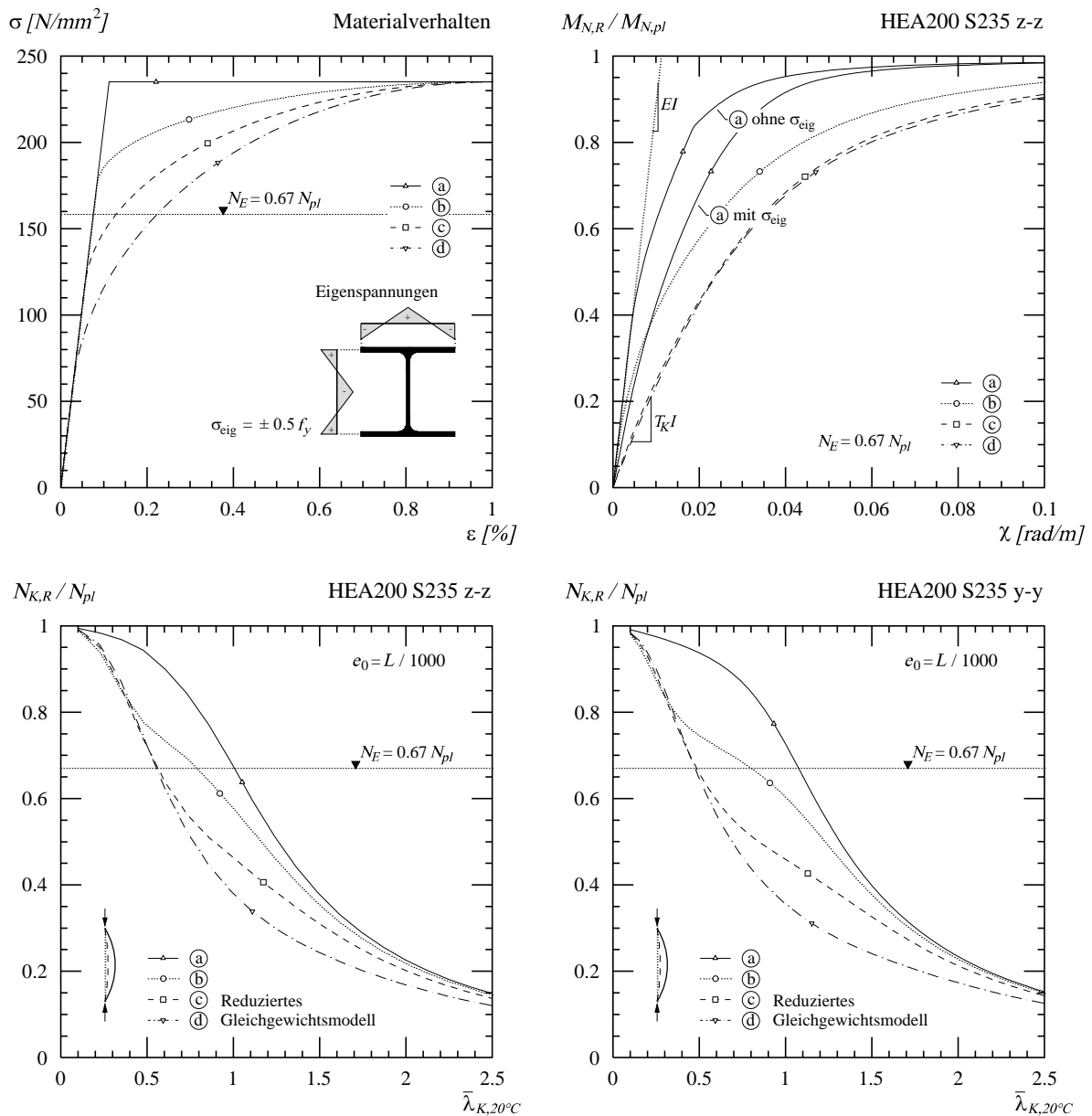


Abb. 3-10: Einfluss der Nichtlinearität des Materialverhaltens auf die Traglasten zentrisch gedrückter Stützen. Einfluss der Eigenspannungen auf die Momenten-Krümmungs-Beziehung.

lassen, beeinflussen sie den Biege­widerstand nur bei kleineren Krümmungen (Abb. 3-10 oben links). Es sind jedoch gerade diese kleinen Krümmungen, die bei zentrisch gedrückten Stützen zur maximalen Traglast führen. Somit haben die Eigenspannungen insbesondere bei Raumtemperatur einen entscheidenden Einfluss auf den Knick­widerstand (Abb. 3-12).

Bei Raumtemperatur werden die Eigenspannungen in der Regel gemäss Abbildung 3-11 links angenommen. Durch das Erwärmen der Stütze verändern sich diese infolge sich wandelnder Materialeigenschaften, thermischen Dehnungen und Kriechen. All diese Veränderungen sind hauptsächlich von der Temperatur und deren Gradienten im Stützenquerschnitt abhängig, die je nach Stützenprofil, Isolation oder Brandereignis sehr unterschiedlich sein können. Die damit verbundenen Unsicherheiten, insbesondere bezüglich der Entwicklung der Stahltemperaturen sowie des Materialverhaltens, führen dazu, dass die bei erhöhten Temperaturen verbleibenden Eigenspannungen sehr ungenau prognostiziert werden können. Zudem sind sie bei Raumtemperatur und besonders im Brandfall sehr schwer zu messen.

Im Allgemeinen werden die Eigenspannungen durch die Veränderungen des Materialverhaltens beim Erwärmen reduziert, während sie durch thermische Spannungen und Dehnungen infolge inhomogener Temperaturverteilung im Querschnitt vergrössert werden. Des Weiteren werden

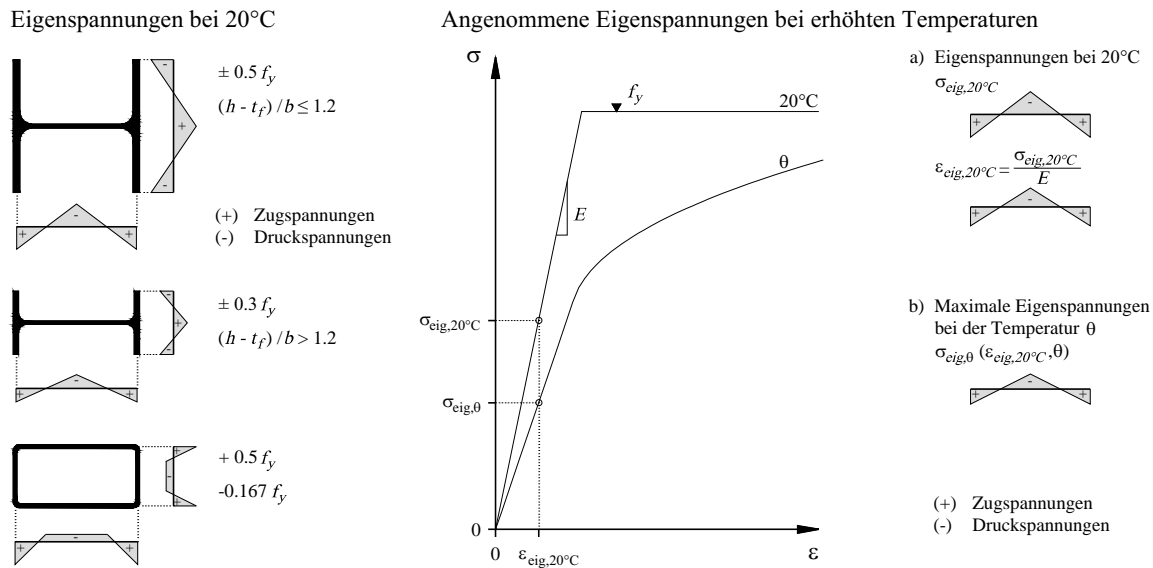


Abb. 3-11: Annahme der Eigenspannungen bei Raumtemperatur [12] sowie Berechnung der maximalen Eigenspannungen bei erhöhten Temperaturen.

sie bei den hohen Temperaturen durch die Relaxation der einzelnen Querschnittsfasern reduziert. Dieses komplexe Zusammenwirken der unterschiedlichen Effekte ist im Anhang C an einem idealisierten Plattenquerschnitt näher erläutert.

Um den Einfluss möglicher Eigenspannungen auf die Traglast gedrückter Stützen bei erhöhten Temperaturen zu quantifizieren, werden diese als linear über den Querschnitt verteilt mit unterschiedlich grossen Spannungsspitzen gewählt. Diese Spannungsspitzen ergeben sich aus der Multiplikation der Eigenspannungen $\sigma_{eig,\theta}$ mit dem Faktor κ . Während der Faktor κ die unterschiedlichen Effekte wie Kriechen und thermische Dehnungen abdecken soll, ergeben sich die Eigenspannungen $\sigma_{eig,\theta}$ nur infolge der Veränderung des Materialverhaltens bei zunehmender Temperatur. Die Berechnung der Eigenspannungen $\sigma_{eig,\theta}$ bei der erhöhten Temperatur folgt dem Schema gemäss Abbildung 3-11 rechts. Dabei werden die bei Raumtemperatur angenommenen Eigenspannungen $\sigma_{eig,20^\circ C}$ in zugehörige Dehnungen $\epsilon_{eig,20^\circ C}$ umgerechnet, um bei der gegebenen Temperatur θ mit dem dazugehörigen Materialverhalten in den Eigenspannungen $\sigma_{eig,\theta}$ umgerechnet zu werden. Da Ebenbleiben ebener Querschnitte vorausgesetzt wird, bleiben die Dehnungen $\epsilon_{eig,20^\circ C}$ und deren Verteilung für alle Temperaturen gleich.

In Abbildung 3-12 ist der Einfluss der Eigenspannungen auf die Traglast zentrisch gedrückter Stützen bei unterschiedlichen Temperaturen dargestellt. Die betrachteten Stützenquerschnitte respektive deren Belastungsachse vertreten jeweils die europäischen Knickspannungskurven (KSK) a bis c. Diese widerspiegeln die Annahmen zu den Eigenspannungen bei Raumtemperatur gemäss Abbildung 3-11 links. So sind die Eigenspannungen bei einem IPE-Querschnitt kleiner als bei einem HEA-Profil, während bei rechteckigen Hohlquerschnitten eine unterschiedliche Verteilung der Eigenspannungen gewählt wird. Diese Unterschiede folgen aus der Massigkeit der Querschnittselemente, die den Abkühlprozess und dementsprechend die Entstehung der Eigenspannungen stark beeinflusst.

Bei einer zentrisch belasteten Stütze mit IPE200 Querschnitt, die um die starke Achse belastet wird, spielen die Eigenspannungen besonders bei den erhöhten Temperaturen eine untergeordnete Rolle. Die Belastung um die starke Achse führt zu einer gleichmässigen Dehnung des gedrückten Flansches. Erreichen die Spannungsspitzen an den äussersten Flanschextremitäten die Proportionalitätsgrenze, kommt es zu einer Teilplastifizierung des Querschnittes. Diese beschränkt sich jedoch auf die äussersten Bereiche des Flansches, während im mittleren Bereich durch die Zugeigenspannungen (Abb. 3-11) die Plastifizierung verzögert wird. Ähnliches gilt auch für den Übergang des Steges zum Flansch. Die Zugeigenspannungen (+) in diesem Bereich wirken günstig auf

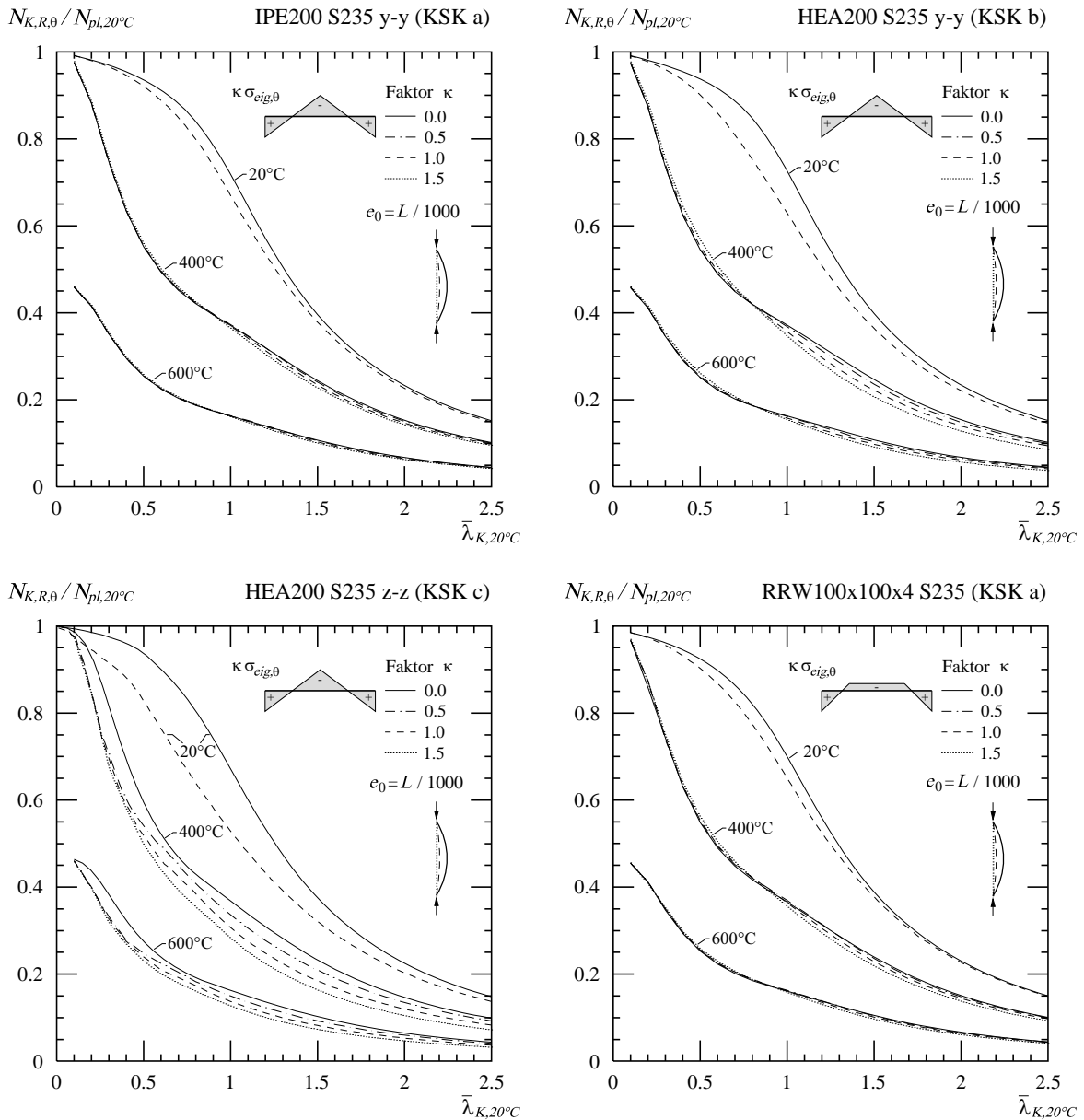


Abb. 3-12: Einfluss der Eigenspannungen auf die Traglast zentrisch gedrückter Stützen bei Raumtemperatur, 400°C und 600°C mit einer geometrischen Imperfektion $e_0 = L / 1'000$.

die Biegesteifigkeit der Stütze und können die Steifigkeitsreduktion infolge der Plastifizierung der äusseren Flanscbereiche teilweise kompensieren. Dies gilt für die I- und H-Querschnitte, welche um ihre starke Achse belastet werden, sowie für Stützen aus rechteckigen Hohlprofilen. Bei all diesen Querschnitten ist der Einfluss der Eigenspannungen bei erhöhten Temperaturen besonders bei bezogenen Schlankheiten kleiner als 1.0 sehr gering (Abb. 3-12). Für grösseren Schlankheiten ist bei dem HEA200 Querschnitt der Einfluss der Eigenspannungen bedeutender, weil durch den breiten Flansch und dem geringen Flanschabstand die versteifende Wirkung der Zugeigenspannungen beim Übergang des Steges zum Flansch an Einfluss verliert. Zudem sind gemäss der Abbildung 3-11 links die Maximalwerte der Eigenspannungen im Vergleich zu den I-Querschnitten grösser zu wählen.

Wird ein I- oder H-Querschnitt um seine schwache Achse belastet, so ist der Einfluss der Eigenspannungen von grösserer Bedeutung. Verantwortlich dafür sind hauptsächlich die Druckeigenspannungen (negatives Vorzeichen) an den äussersten Flanschspitzen (Abb. 3-11 links). Durch die Krümmung um die schwache Achse erfahren gerade diese Querschnittsbereiche die grössten Beanspruchungen. Zudem kann der Steifigkeitsverlust durch die Plastifizierung dieser Bereiche nicht kompensiert werden, weil die Querschnittsbereiche mit Zugeigenspannungen sich allesamt

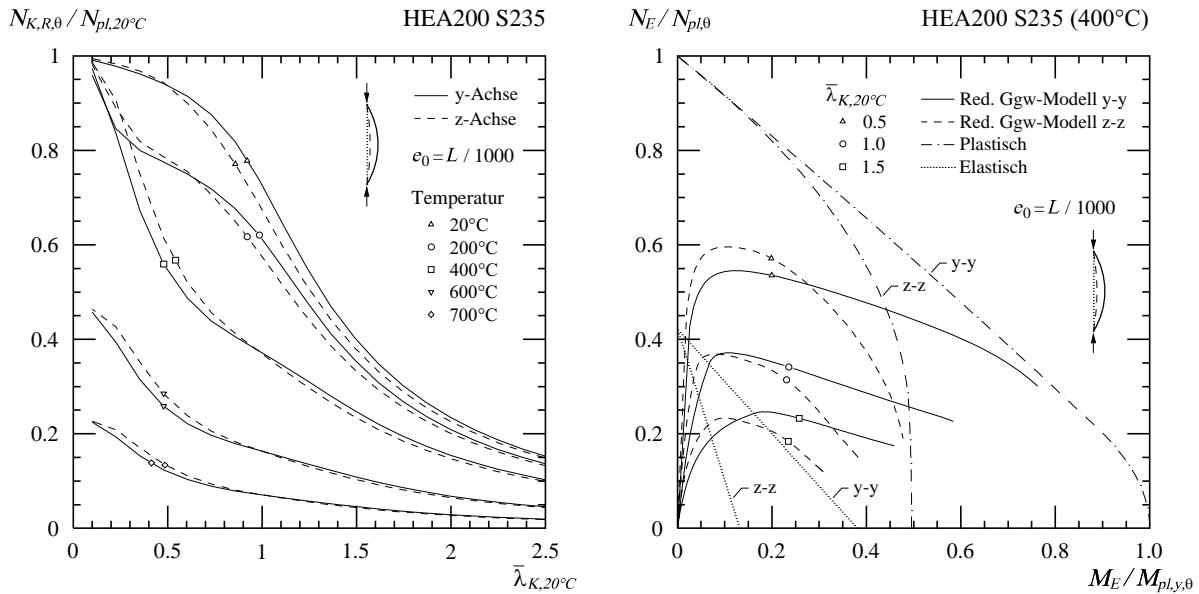


Abb. 3-13: Links: Einfluss des Belastungsrichtung auf die Traglast zentrisch gedrückter Stützen bei unterschiedlichen Temperaturen. Rechts: Last-Verformungs-Pfade bei 400°C im N-M-Diagramm.

in der Nähe der Nulllinie befinden und dementsprechend in geringem Masse Einfluss auf das Tragverhalten haben. Die Verminderung der Traglast infolge Eigenspannungen für eine Belastung um die schwache Achse ist in diesem Fall für alle Stützenschlankheiten auch bei erhöhten Temperaturen bedeutend und kann für eine HEA200 Stütze bis zu 30% der Traglast betragen (Abb. 3-12 unten links).

3.4.2 Einfluss der geometrische Imperfektion

In Abbildung 3-13 links sind die mit dem reduzierten Gleichgewichtsmodell berechneten Knickspannungskurven des HEA200 Stützenquerschnittes für beide Achsen und unterschiedlichen Temperaturen dargestellt. Bei allen Temperaturen liegen die Knicklasten schlanker Stützen, welche um die schwache Achse ausknicken, tiefer als bei jenen, welche um die starke Achse belastet werden. Bei gedrungenen Stützen ist das Gegenteil zu beobachten. Die Ursache dieses Phänomens liegt in der Annahme der geometrischen Imperfektionen, die nicht in Funktion der bezogenen Schlankheit der Stütze, sondern in Funktion derer Länge berechnet werden. So ist die Stütze, welche um die starke Achse belastet wird, für eine bestimmte bezogene Schlankheit länger als diejenige, welche um ihre schwache Achse belastet wird. Dies liegt in den unterschiedlichen Trägheitsmomente der Stütze für die jeweils betrachtete Achse. Dementsprechend wird der längeren Stütze, die um die starke Achse belastet wird, eine grössere geometrische Imperfektion e_0 zugeordnet, da diese einzig in Funktion der Stützenlänge gewählt wird.

In Abbildung 3-13 rechts ist für eine Temperatur von 400°C das Last-Verformungs-Verhalten von drei unterschiedlich langen, zentrisch gedrückten Stützen in einem Normalkraft-Biegemoment-Diagramm dargestellt. Dabei ergibt sich das Biegemoment in Stützenmitte aus dem Produkt der Normalkraft N_E mit der Auslenkung der Stützenmitte $w_{m,II}$. Nebst den numerischen Resultaten des reduzierten Gleichgewichtsmodells ist die plastische und die elastische Normalkraft-Biegemoment-Interaktion des betrachteten Stützenquerschnittes dargestellt.

Wie in Abbildung 3-13 rechts ersichtlich, führen die grösseren geometrischen Imperfektionen der Stützen, die um ihre starke Achse belastet werden, zu einem weicheren Last-Verformungs-Verhalten. Zudem ist bei sehr schlanken Stützen das Last-Verformungs-Verhalten stark von Effekten 2^{ter} Ordnung beeinflusst, wobei kleine Steigerungen der Normalkraft zu einer starken Zunahme der Verformungen führen. Ist mit dieser Steigerung der Normalkraft eine Abnahme der Steifigkeit

infolge einer Plastifizierung der äusseren Querschnittsfasern verbunden, kommt es unmittelbar zum Versagen der Stütze. Dies ist in Abbildung 3-13 rechts für eine Stütze mit einer bei Raumtemperatur bezogenen Schlankheit von 1.5 dargestellt. Mit der elastischen N-M-Interaktion (punktirierte Linie) wird jene Last-Verformungs-Beziehung erfasst, die zum erstmaligen Plastifizieren der Randfasern im Querschnitt führt. Kurz nach dem Überschreiten der elastischen N-M-Interaktion wird bei den schlanken Stützen die maximale Traglast erreicht. Obwohl die Stütze, welche um die starke Achse belastet wird, ein weiches Verhalten aufweist, wird sie bei genügend grosser Schlankheit erst nach der Stütze, welche um die schwache Achse belastet wird, den elastischen Tragwiderstand erschöpfen. Dies ist darauf zurückzuführen, weil der elastische Tragwiderstand für die schwächere Achse deutlich geringer ist. Somit erreichen schlanke Stützen, welche um ihre starke Achse belastet werden, die grösseren Traglasten im Vergleich zu denjenigen, welche um die schwache Achse ausknicken, obwohl bei den ersteren grössere geometrische Imperfektionen angenommen werden (Abb. 3-13 links).

Bei einer gedrunenen Stütze, welche erst bei hoher axialer Belastung ausknickt, überschreiten die maximalen Spannungen im Stützenquerschnitt die Proportionalitätsgrenze deutlich. Je höher die axiale Belastung, desto kleiner wird der Unterschied der plastischen Tragfähigkeit des Querschnittes (strichpunktirierte Linie in Abb. 3-13 rechts). Das weichere Last-Verformungs-Verhalten der Stütze, welche um ihre starke Achse belastet wird, führt somit zu kleineren Traglasten im Vergleich zu derjenigen, welche um die schwache Achse ausknickt. Dies ist auch an den Knickspannungskurven in Abbildung 3-13 links ersichtlich.

Die Unterschiede in der Traglast für Stützen mit gleicher bezogener Schlankheit ist eine Folge der unterschiedlich angenommenen geometrischen Imperfektion. Diese werden in Funktion der Stützenlänge und nicht aufgrund ihrer bezogenen Schlankheit angenommen und beeinflussen somit den Vergleich der Last-Verformungs-Beziehungen von Stützen gleicher bezogener Schlankheit.

3.4.3 Verformungsfigur

Die geometrische Form der Biegelinie wird beim erweiterten Gleichgewichtsmodell direkt berechnet, während sie beim reduzierten Gleichgewichtsmodell und bei der Energiemethode angenommen werden muss. Wie in Abbildung 3-7 dargestellt, verändert sich die Verformungsfigur bei steigender Belastung und hat einen direkten Einfluss auf das Last-Verformungs-Verhalten, da sie die Beziehung zwischen der Stützensauslenkung und der Stützenkrümmung definiert. Insbesondere beim reduzierten Gleichgewichtsmodell, bei dem das Gleichgewicht nur an einem einzigen Kontrollpunkt überprüft wird, ist es wichtig, eine gute Annahme zur geometrischen Form der Biegelinie zu treffen.

Exzentrisch belastete Stützen mit kleiner Normalkraft N_E weisen wegen dem über die Stützenlänge konstanten Biegemoment 1^{ter} Ordnung $M_{E,l}$ eine annähernd parabolische Verformungsfigur auf (Abb. 3-7). Erst durch die Verformungen 2^{ter} Ordnung und insbesondere durch die Plastifizierung in den meist beanspruchten Querschnitten, kommt es zu einer Konzentration der Verformungen in Stützenmitte. Dies verändert die Beziehung zwischen der Auslenkung in Stützenmitte w_m und der Krümmung χ , die wiederum das Tragverhalten der Stütze beeinflusst. Je mehr sich die Verformungen und Krümmungen in Stützenmitte konzentrieren, desto mehr wächst dort der innere Biegegewiderstand $M_{N,R,\theta}$ an, was die Tragfähigkeit der Stütze erhöht. Somit führt die Annahme einer parabolischen Verformungsfigur bei exzentrisch belasteten Stützen stets zu einer kleineren Traglast im Vergleich zu den Ergebnissen des erweiterten Gleichgewichtsmodells solange die Belastung symmetrisch ist.

In Abbildung 3-14 links sind die Traglasten exzentrisch gedrückter Stützen in Funktion von deren Schlankheit dargestellt. Dabei wird die Exzentrizität durch das Exzentrizitätsmass m ausge-

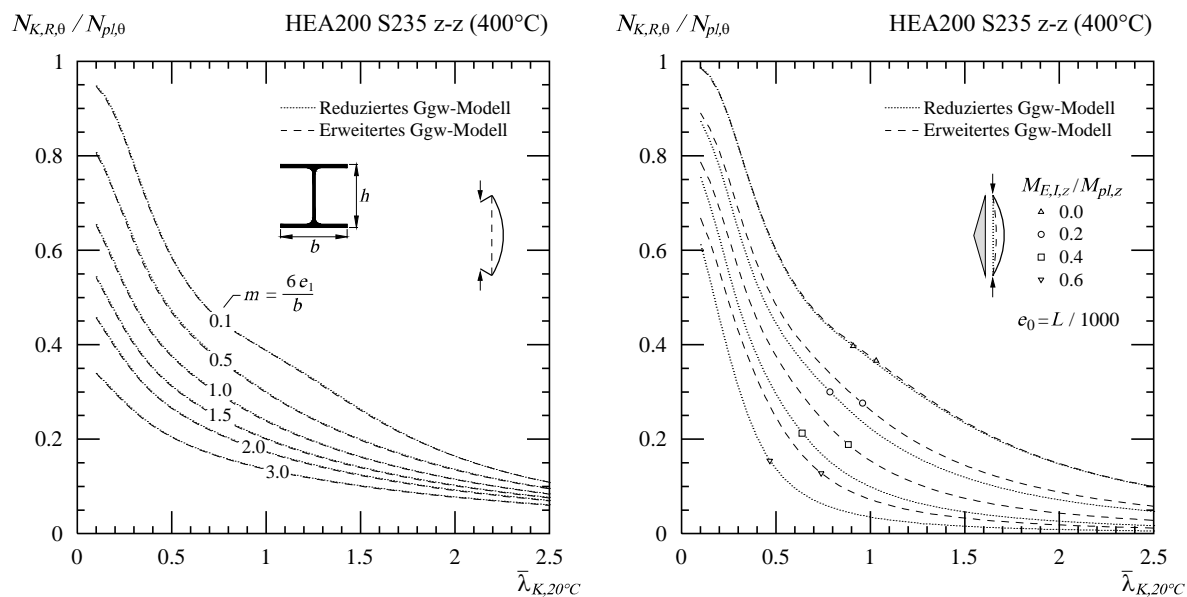


Abb. 3-14: Vergleich der Traglasten symmetrisch belasteter Stützen in Funktion der bezogenen Schlankheit berechnet mit dem reduzierten und dem erweiterten Gleichgewichtsmodell.

drückt, welches die Lastexzentrizität e_1 im Verhältnis zur Kernweite des entsprechenden Rechteckquerschnittes mit Kantenlängen h und b setzt. Die geometrische Form der Biegelinie für das reduzierte Gleichgewichtsmodell wurde trotz vorhandener Lastexzentrizität affin zur Sinusfunktion angenommen. Dies setzt im Vergleich zur parabolischen Funktion eine gewisse Konzentration der Verformungen in Stützenmitte voraus. Aus der Abbildung 3-14 links ist ersichtlich, dass die Traglasten des reduzierten Gleichgewichtsmodells mit dieser Annahme die Ergebnisse des erweiterten Gleichgewichtsmodell sehr genau wiedergeben können. Ähnliches gilt auch für zentrisch belastete Stützen, die zusätzlich durch eine Einzellast in Stützenmitte senkrecht zur Stabachse belastet sind (Abb. 3-14 rechts). Die daraus resultierende Biegebeanspruchung ist dreiecksförmig, wobei für den Vergleich zwischen den Traglasten der numerischen Berechnungsmodellen der Maximalwert der Biegebeanspruchung 1^{ter} Ordnung $M_{E,I,z}$ unterschiedlich gross gewählt ist. Auch bei diesem symmetrischen Belastungsfall ist die geometrische Form der Biegelinie für das reduzierte Gleichgewichtsmodell affin zu einer Sinusfunktion angenommen. Die nun dreiecksförmige Verteilung der Biegemomente 1^{ter} Ordnung verstärkt die Konzentration der Verformungen in Stützenmitte, die nun weit grösser ist, als bei den exzentrisch gedrückten Stützen. Dies führt beim erweiterten Gleichgewichtsmodell zu erhöhten Traglasten, die vom reduzierten Gleichgewichtsmodell nicht abgebildet werden können, da die Beziehung zwischen der Auslenkung und der Krümmung stets durch die angenommene geometrische Form der Biegelinie gegeben ist (Gl. 3.11 a). Je grösser die Querbewehrung durch die Einzelkraft in Stützenmitte wird, desto mehr weicht die Verformungsfigur der belasteten Stütze von der Sinusfunktion ab, was zu einer grösseren Unterschätzung der Traglast durch das reduzierte Gleichgewichtsmodell führt. Dies kann nur durch eine geeignetere Wahl der Verformungsfigur korrigiert werden.

Asymmetrische Belastung der Stütze mit linearem Momentenverlauf

Im folgenden Abschnitt werden Stützen mit asymmetrischer Belastung gemäss Abbildung 3-15 oben links betrachtet. Diese sind zusätzlich zur axialen Beanspruchung durch ein entlang der Stützenachse linear verteiltes Biegemoment erster Ordnung $M_{E,I}$ belastet. Bei diesen Stützen liegt der meistbeanspruchte Querschnitt nicht in Stützenmitte, wie dies bei zentrisch oder exzentrisch gedrückten Stützen der Fall ist. So stellt sich bei der Berechnung asymmetrisch belasteter Stützen mit dem reduzierten Gleichgewichtsmodell nicht nur die Frage nach der korrekten geometrischen

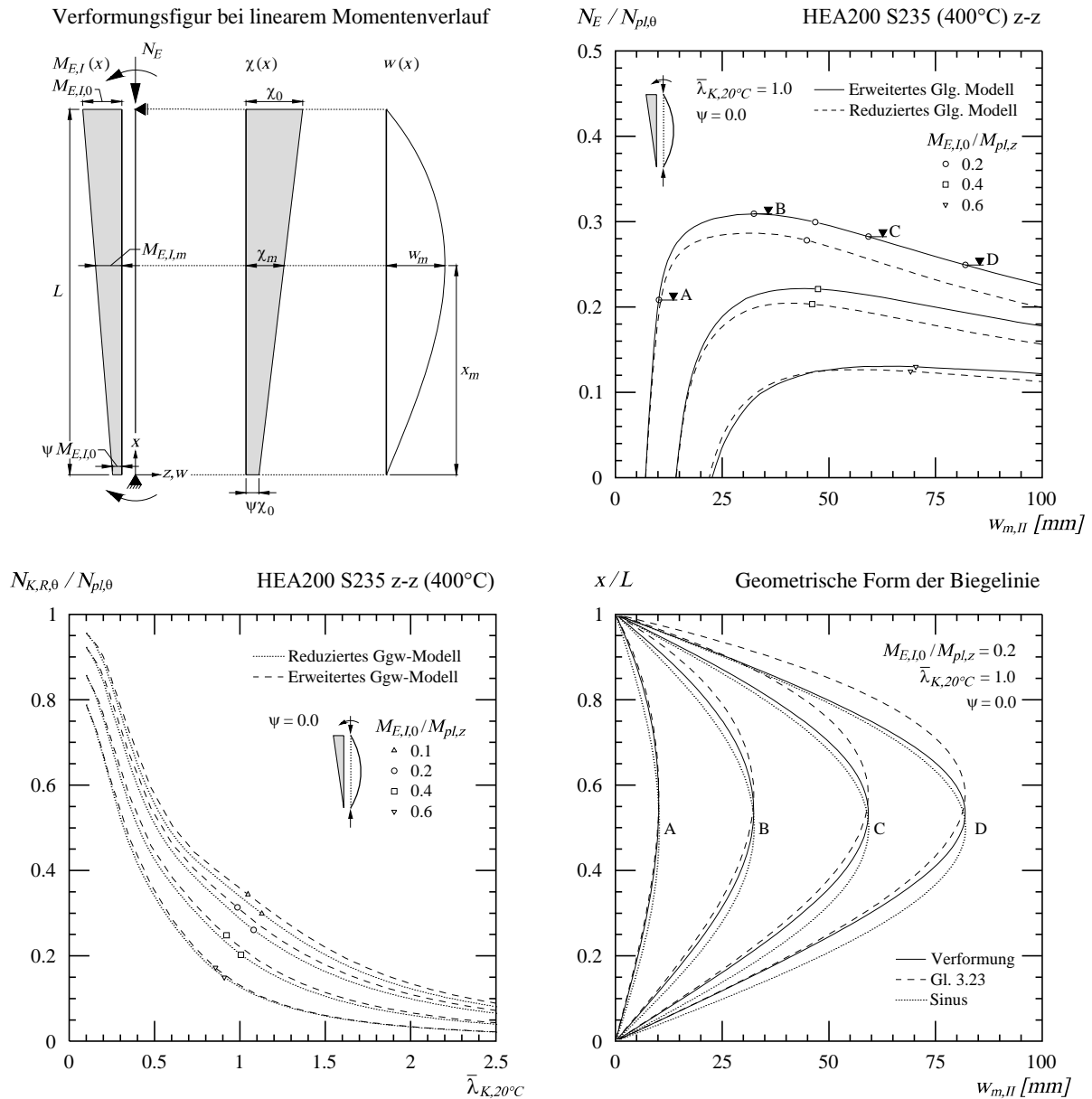


Abb. 3-15: Annahmen zur Verformungsfigur und Kontrollpunkt beim reduzierten Gleichgewichtsmodell, sowie Gegenüberstellung mit den Ergebnissen des erweiterten Gleichgewichtsmodells

Form der Biegelinie, sondern auch die Frage nach der Wahl des Kontrollpunktes, wo das Gleichgewicht zwischen den treibenden und rückhaltenden Biegemomente überprüft werden soll. Sowohl die geometrische Form der Biegelinie wie auch die Lage des Kontrollpunktes sind bei der Berechnung des Last-Verformungs-Verhaltens einer asymmetrisch belasteten Stütze mit der Verwendung des reduzierten Gleichgewichtsmodells von zentraler Bedeutung. Dies im Gegensatz zum erweiterten Gleichgewichtsmodell, das in jedem Stützenquerschnitt das Gleichgewicht zwischen den treibenden und rückhaltenden Kräften überprüft und keine Annahme zur Verformungsfigur der Stütze benötigt.

Beim reduzierten Gleichgewichtsmodell wird der Kontrollpunkt stets beim meist ausgelenkten Stützenquerschnitt infolge Biegung 1^{ter} Ordnung ohne Berücksichtigung der Normalkraft N_E angenommen, wobei der Stütze entlang ihrer Länge eine konstante Biegesteifigkeit zugeordnet wird. Während der Belastung wird sich die Lage des meist ausgelenkten Stützenquerschnittes infolge der Biegebelastung 2^{ter} Ordnung Richtung Stützenmitte verschieben. Wie sich die Lage des Kontrollpunktes in Funktion der Normalkraft während der Belastung verschiebt, kann nur im elastischen Bereich analytisch erfasst werden. Sobald die Randspannungen des meist beanspruchten Querschnittes die Proportionalitätsgrenze überschreiten, ist diese Verschiebung nur sehr

schwer zu erfassen. Da für die Berechnung des Last-Verformungs-Verhaltens mit dem reduzierten Gleichgewichtsmodell einerseits die geometrische Form der Biegelinie und andererseits die Lage des meist ausgelenkten Stützenquerschnitts im Voraus bekannt sein müssen, werden beide im Rahmen dieser Arbeit infolge Biegung 1^{ter} Ordnung ohne Berücksichtigung der Normalkraft N_E angenommen.

Die Beziehung zwischen der Stützensauslenkung w_m und der Stützenkrümmung χ_m am Kontrollpunkt wird in der Folge mit der einheitslosen Variable ω beschrieben.

$$w_m = \omega \cdot \chi_m \cdot L^2 \quad (3.21)$$

Bei zentrisch gedrückten Stützen mit einer geometrischen Form der Biegelinie affin zur Sinusfunktion ist ω gemäss Gleichung 3.11 a gleich $1/\pi^2$, während sie für eine parabolische Verformungsfigur $1/8$ entspricht (Gl. 3.11 b).

Zur Bestimmung der Lage des Kontrollpunktes und der Beziehung zwischen der Verformung und der Krümmung am Kontrollpunkt wird der rein elastische Stab mit alleiniger Biegebeanspruchung 1^{ter} Ordnung betrachtet. Dabei wird die lineare Verteilung der Biegemomente $M_{E,I}$ entlang der Stützenachse gemäss Abbildung 3-17 oben links mit der Variable ψ beschrieben. Bleibt die Stütze elastisch, so entstehen Krümmungen $\chi(x)$ entlang der Stützenachse, die zur Momentenverteilung affin sind. Diese können mit folgendem Ausdruck in Funktion der Koordinate x beschrieben werden, wobei deren Randwert χ_0 für die Berechnung der Knicklast von untergeordneter Bedeutung ist.

$$\chi(x) = \chi_0 \psi + \frac{\chi_0 \cdot (1 - \psi)}{L} \cdot x \quad (3.22)$$

Durch zweifache Integration der linear verteilten Krümmungen $\chi(x)$ und der Einführung der kinematischen Randbedingungen an beiden Stützenenden ergibt sich die mathematische Beziehung der Stützenverformung $w(x)$. Diese folgt einer kubischen Funktion und ist bei beidseitig gelenkig gelagerten Stützen durch folgende Gleichung gegeben.

$$w(x) = \chi_0 \cdot (2\psi + 1) \cdot \frac{Lx}{6} - \chi_0 \psi \cdot \frac{x^2}{2} - \chi_0 \cdot (1 - \psi) \cdot \frac{x^3}{6L} \quad (3.23)$$

Der Kontrollpunkt für die Überprüfung des Gleichgewichtes beim reduzierten Gleichgewichtsmodell wird bei der maximalen Auslenkung w_m der Stütze gewählt. Die zugehörige Koordinate x_m beschreibt die Lage des meist ausgelenkten Stützenquerschnittes.

$$x_m = \frac{\sqrt{\psi^2 + \psi + 1} - \sqrt{3} \cdot \psi}{\sqrt{3} \cdot (1 - \psi)} \cdot L \quad (3.24)$$

Die Beziehung zwischen der Stützensauslenkung w_m und der Krümmung χ_m beim Kontrollpunkt ergibt sich durch die Auswertung der Gleichungen 3.22 und 3.23 bei der Koordinate x_m und deren Gegenüberstellung. Für die Variable ω , welche diese Beziehung gemäss Gleichung 3.21 beschreibt, resultiert folgender Ausdruck

$$\omega = \frac{1}{(1 - \psi)^2} \cdot \left[\frac{1}{9} \cdot (\psi^2 + \psi + 1) - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\psi \cdot (\psi + 1)}{\sqrt{\psi^2 + \psi + 1}} \right] \quad \text{für } \psi < 1.0 \quad (3.25)$$

Die Beziehung 3.21 zwischen der Stützenverformung und der Krümmung ersetzt bei asymmetrisch belasteten Stützen diejenige der Gleichungen 3.11 a oder 3.11 b. Da die Beziehung zwischen der Krümmung und der Verformung am Kontrollpunkt nach wie vor linear ist, kann das einwir-

kende Biegemoment 2^{ter} Ordnung $M_{E,II}$ am Kontrollpunkt in Funktion der Krümmung im Momenten-Krümmungs-Diagramm als eine Gerade dargestellt werden (Abb. 3-5 links). Das dafür notwendige äussere Biegemoment 1^{ter} Ordnung $M_{E,I}$ am Kontrollpunkt ergibt sich durch dessen Lage zu:

$$M_{E,I} = M_{E,I,0} \psi + \frac{M_{E,I,0} \cdot (1 - \psi)}{L} \cdot x_m \quad (3.26)$$

Die Gleichungen 3.21, 3.25 und 3.26 ermöglichen die Berechnung des Last-Verformungs-Pfades mit dem reduzierten Gleichgewichtsmodell, wobei diese Beziehungen unabhängig von der Normalkraft N_E für den gesamten Belastungsverlauf angenommen werden. Abbildung 3-15 rechts unten zeigt für eine beidseitig gelenkig gelagerten Stütze mit einer dreiecksförmigen linear verteilten Biegebeanspruchung 1^{ter} Ordnung ($\psi = 0.0$), wie sich mit zunehmender Normalkraft sowohl die Verformungsfigur wie auch die Lage des meist ausgelenkten Stützenquerschnittes verändert. Obwohl dies beim reduzierten Gleichgewichtsmodell vernachlässigt wird, kann die Last-Verformungs-Beziehung gut angenähert werden, wie ein Vergleich mit den Ergebnisse des erweiterten Gleichgewichtsmodell zeigt (Abb. 3-15). In der Abbildung unten rechts ist zudem die geometrische Form der Biegelinie der beiden Modelle bei vier unterschiedlichen Belastungszuständen (A bis D) dargestellt. Für ein einwirkendes Biegemoment $M_{E,I,0} / M_{pl,z} = 0.2$ und kleiner axialer Belastung können die Ergebnisse des erweiterten Gleichgewichtsmodells durch das reduzierte Gleichgewichtsmodell gut angenähert werden. Dies, weil für kleine Normalkräfte die zusätzliche Biegemomente 2^{ter} Ordnung klein bleiben und somit sowohl die geometrische Form der Biegelinie, wie auch die Lage des meist ausgelenkten Querschnittes des erweiterten Modells gut mit den Annahmen des reduzierten Gleichgewichtsmodells übereinstimmen (A). Bei zunehmender Normalkraft wächst einerseits der Einfluss der Biegemomente 2^{ter} Ordnung auf die Verformungsfigur, andererseits kommt es zu Plastifizierungen der meist belasteten Stützenbereiche. Wie in Abbildung 3-15 unten rechts ersichtlich verändert sich die Verformungsfigur des erweiterten Gleichgewichtsmodells (durchgezogene Linie), wobei der meist ausgelenkte Stützenquerschnitt sich Richtung Stützenmitte verschiebt. Beim reduzierten Gleichgewichtsmodell (gestrichelte Linie) bleibt die geometrische Form der Biegelinie (Gl. 3.23) sowie die Lage des meist ausgelenkten Stützenquerschnitt (Gl. 3.24) unabhängig von der axialen Belastung (B)-(D). Weil das reduzierte Gleichgewichtsmodell die Konzentration der Verformungen in den meist beanspruchten Querschnitten beim reduzierten Gleichgewichtsmodell nicht berücksichtigt, wird dort wegen der kleineren Krümmungen der innere Biege widerstand unterschätzt. Dies führt zu kleineren Traglasten, wie dies im Last-Verformungs-Verhalten der Stütze ersichtlich ist (Abb. 3-15 oben rechts).

Wird die Proportionalitätsgrenze in den meist beanspruchten Stützenbereichen schon durch die Biegebelastung 1^{ter} Ordnung überschritten ($M_{E,I,0} / M_{pl,z} = 0.6$), ohne dass eine zusätzliche Normalkraft N_E einwirkt, unterschätzt die Gleichung 3.23 die anfängliche Stützenverformung. Dies führt zu grösseren Unterschieden zwischen den beiden Gleichgewichtsmodellen, was sich schon bei kleinen Lasten bemerkbar macht. Dementsprechend wird für diese Belastungsfälle das Last-Verformungs-Verhalten durch das reduzierte Gleichgewichtsmodell weniger gut angenähert.

In Abbildung 3-16 wird die Entwicklung der Verformungs-Krümmungs-Beziehung am Kontrollpunkt der Stütze genauer untersucht. Betrachtet werden zwei unterschiedlich lange Stützen, die gelenkig gelagert und durch unterschiedlich linear verteilte Biegemomente 1^{ter} Ordnung belastet sind. In der linken Abbildung sind die Last-Verformungs-Beziehungen der Stützen dargestellt, während in der rechten die Entwicklung der Verformungs-Krümmungs-Beziehung in Funktion der Stützensauslenkung am Kontrollpunkt dargestellt ist. Bei kleiner axialer Belastung respektive bei kleiner Auslenkung entspricht das Verhältnis zwischen der Krümmung χ_m und der Verformung w_m am Kontrollpunkt der Gleichung 3.25. Sobald die Stütze durch die Normalkraft N_E belastet wird, verändert sich dieses Verhältnis, wobei diese Veränderung sich bei kürzeren Stützen stärker bemerkbar macht. Bei den Stützen mit einer Momentenverteilung $\psi = 0.0$ und 0.5 kommt

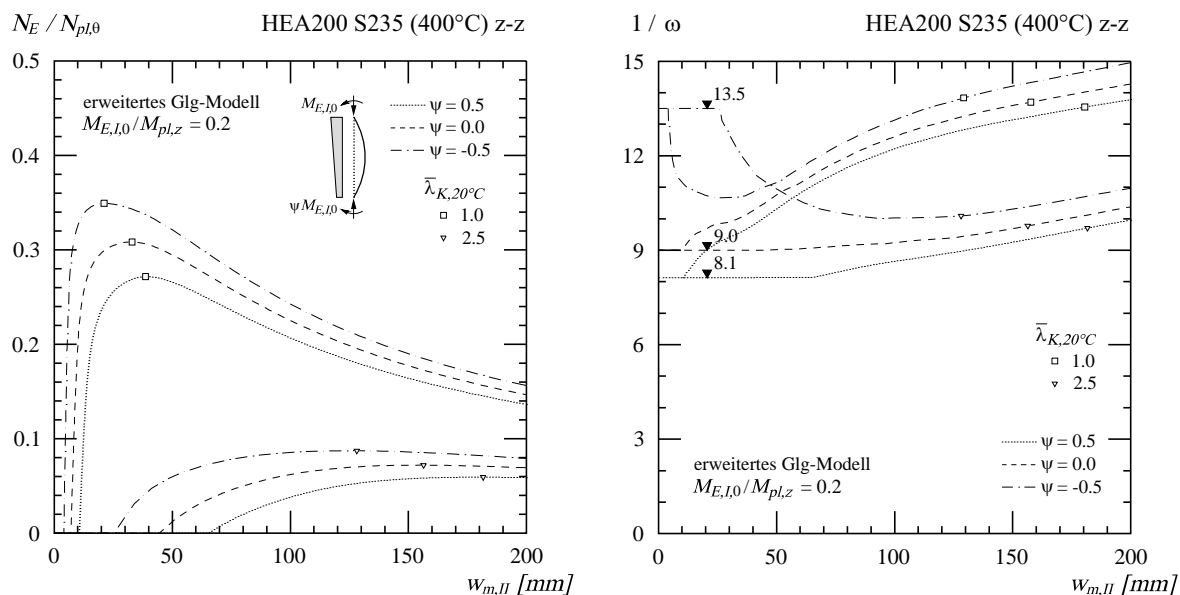


Abb. 3-16: Links: Last-Verformungs-Beziehung von Stützen mit unterschiedlicher Momentenbelastung. Rechts: Entwicklung der Verformungs-Krümmungs-Beziehung am meist ausgelenkten Stützenquerschnitt.

es infolge der axialen Belastung zu einer Konzentration der Krümmungen im Bereich des Kontrollpunktes, welcher sich in der Nähe der Stützenmitte befindet. Dies ist durch den Anstieg des Kehrwertes von ω in Abbildung 3-16 rechts ersichtlich. Die Annahme einer konstanten Beziehung zwischen der Krümmung und der Stützenverformung vernachlässigt diese Konzentration der Krümmungen im mittleren Stützenbereich, was zu einer Unterschätzung der Tragfähigkeit führt, wie dies auch in Abbildung 3-15 oben rechts zu beobachten ist.

Bei den Stützen mit einer Momentenverteilung $\psi = -0.5$ ist die Verformungsfigur infolge reiner Biegebeanspruchung geschwungen und weist einen Wendepunkt im Momentennullpunkt auf. Dies führt zu sehr kleinen Auslenkungen, obwohl beträchtliche Krümmungen in der Stütze vorhanden sind. Durch die axiale Belastung N_E wird die Verformungsfigur infolge der Belastungen 2^{ter} Ordnung und der Plastifizierungen stark verändert. Dies führt zu einem starken Anwachsen der Verformungen, ohne dass dabei die Krümmungen in den meist beanspruchten Querschnitten stark zunehmen, denn diese Verformungen sind hauptsächlich eine Folge der geometrischen Form der Biegelinie, die von einer anfänglich geschwungenen Form zu einer eher sinusförmigen Form übergeht. Wie in Abbildung 3-16 rechts ersichtlich, kommt es dabei zu einer Reduktion der Krümmung am Kontrollpunkt im Vergleich zu dessen Verformung. Dies führt zu einem starken Abfall des Kehrwertes von ω , der erst bei grossen Verformungen wieder ansteigt. Da die Annahme einer konstanten Beziehung zwischen der Krümmung und der Stützenverformung bei der Verwendung des reduzierten Gleichgewichtsmodells die Reduktion der Krümmungen am Kontrollpunkt bei kleinen Verformungen nicht berücksichtigt, wird der innere Biege widerstand überschätzt, was zu einer Überschätzung des Tragvermögens der Stütze führt.

Obwohl die Veränderung der geometrischen Form der Biegelinie bei zunehmender axialer Belastung beim reduzierten Gleichgewichtsmodell nicht berücksichtigt werden, können die Traglasten der Stützen gut angenähert werden. In Abbildung 3-15 unten links und in Abbildung 3-17 sind die Traglasten der Stützen in Funktion der Schlankheit für unterschiedliche Biegebeanspruchungen 1^{ter} Ordnung mit dem reduzierten Gleichgewichtsmodell berechnet und mit den Ergebnissen des erweiterten Gleichgewichtsmodells verglichen. Betrachtet werden sowohl unterschiedliche Temperaturen wie auch Belastungsrichtungen sowie unterschiedliche Verteilungen der Biegemomente 1^{ter} Ordnung. Bei den Stützen mit einer Momentenverteilung $\psi = 0.5$ oder 0.0 liegen die Traglasten des reduzierten Gleichgewichtsmodells tiefer als die Ergebnisse des erweiterten Gleichgewichtsmodells. Dies, weil die Konzentration der Krümmungen im mittleren Bereich der Stütze während der Verformung beim reduzierten Gleichgewichtsmodell nicht berücksichtigt wer-

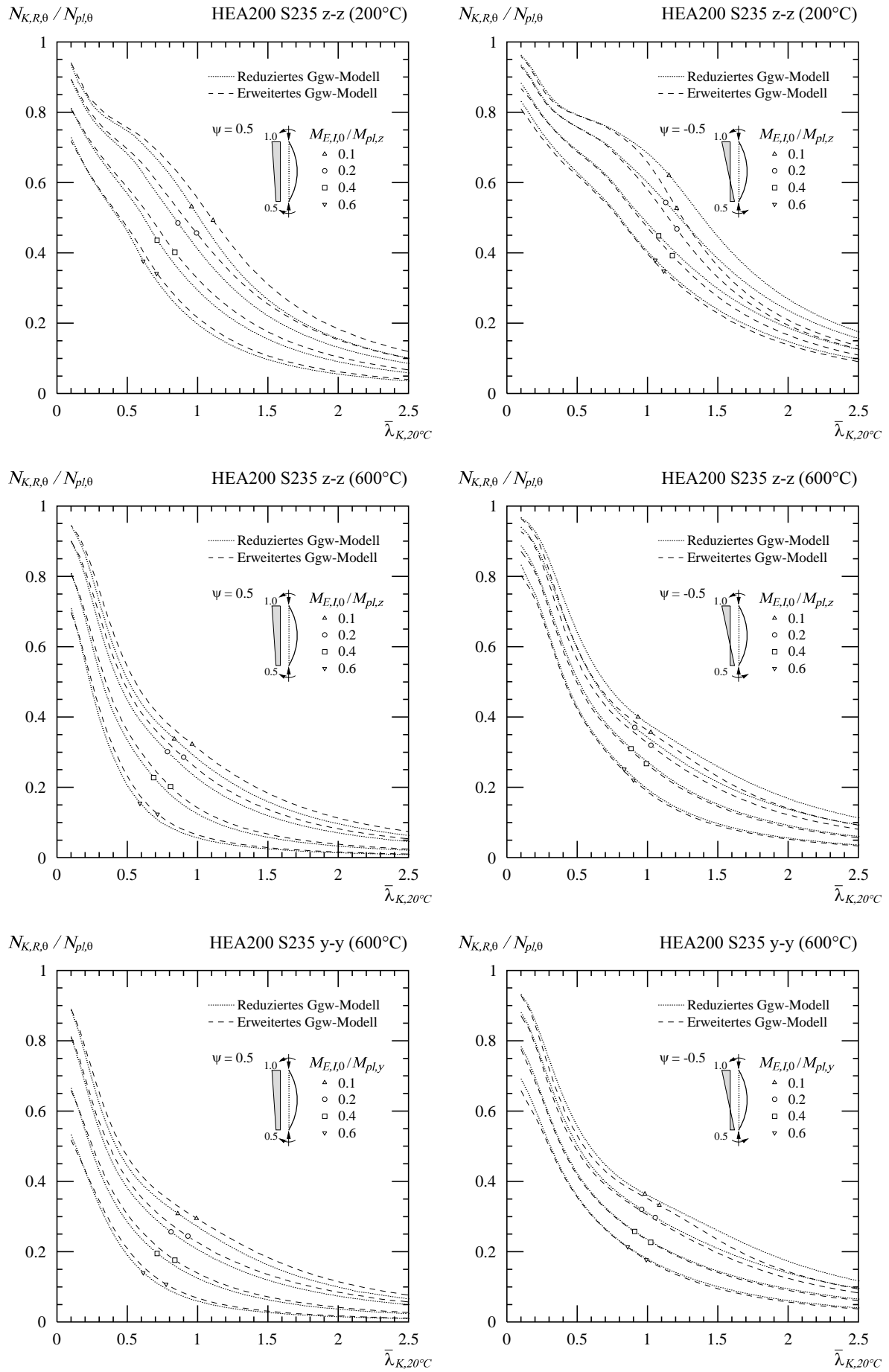


Abb. 3-17: Knickspannungskurven für unterschiedliche Biegebeanspruchung, Belastungsrichtung und Temperatur. Vergleich der Ergebnisse des reduzierten mit dem erweiterten Gleichgewichtsmodell

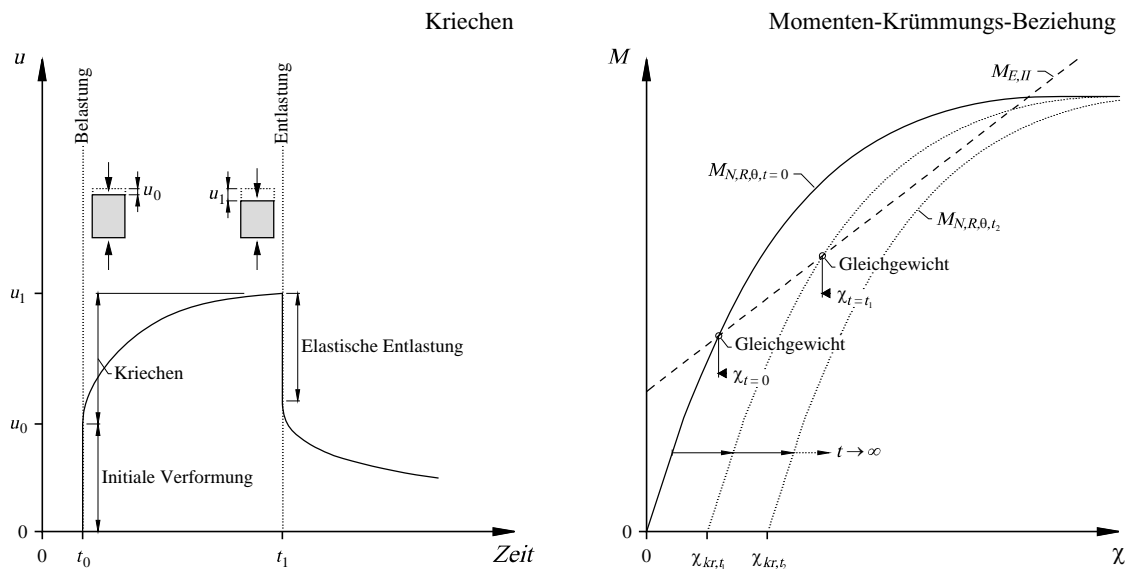


Abb. 3-18: Kriechen eines Elements bei erhöhten Temperaturen unter axialer Belastung (links) und dessen Einfluss auf die Momenten-Krümmungs-Beziehung einer gedrückten Stütze (rechts)

den und dementsprechend der innere Biege­widerstand unterschätzt wird. Die Auswirkung der Vernachlässigung der Veränderung der Verformungsfigur auf die Traglast ist bei diesen Momentenverteilungen jedoch sehr gering. Die Traglasten werden durch das reduzierte Gleichgewichtsmodell stets sehr gut angenähert, obwohl sich die Stützenschlankheit, die Belastungszustände wie auch die Materialeigenschaften stark verändern.

Bei Stützen mit einer Momentenverteilung $\psi = -0.5$ wird die Traglast besonders bei eher schlanken Stützen mit dem reduzierten Gleichgewichtsmodell und der Verformungsfigur gemäss Gleichung 3.23 unterschätzt. Dies, weil sich die geometrische Form der Biegelinie bei der Belastung durch die Normalkraft N_E stark verändert und zu einer Reduktion der Krümmungen am Kontrollpunkt im Vergleich zu den Verformungen führt. Der Überschätzung des inneren Biege­widerstandes folgen im Vergleich mit den Ergebnissen des erweiterten Gleichgewichtsmodells zu hohe Traglasten. Für Stützen mit einer bei Raumtemperatur bezogene Schlankheit kleiner als 1.0 oder bei Stützen mit grosser Biegebeanspruchung 1^{ter} Ordnung ist die Überschätzung der Traglast sehr klein.

3.4.4 Kriechen

Nebst den unmittelbaren Änderungen der mechanischen Materialeigenschaften von Stahl bei erhöhten Temperaturen wie der Verlust an Steifigkeit und Festigkeit sowie das ausgesprochen nichtlineare Materialverhalten verändert sich auch dessen Langzeitverhalten. Während bei Raumtemperaturen das Kriechen des Stahls unter Belastung vernachlässigt werden kann, ist dieses bei erhöhter Temperatur ausgeprägter und hat einen Einfluss auf das Tragverhalten gedrückter Stützen. Mehrere Arbeiten befassten sich mit den Materialeigenschaften von Stahl bei erhöhten Temperaturen und dabei auch mit dem Kriechen. Sowohl Rubert/Schaumann [59] und Kirby/Preston [36] wie auch eigene Materialversuche [52] zeigen, dass bei erhöhten Temperaturen Kriecheffekte auch bei Stahl vorhanden sind.

Abbildung 3-18 links zeigt die Stauchung eines beim Zeitpunkt t_0 belasteten Elements und wie sich diese mit der Zeit unter konstanter Belastung entwickelt, wie auch das Verhalten bei der Entlastung die zum Zeitpunkt t_1 stattfindet. Die Belastung zum Zeitpunkt t_0 erzeugt eine initiale Verformung, die sich infolge Kriechen mit der Zeit vergrössert. Dieses Phänomen führt bei gedrückten Stützen zu einer Zunahme der Verformungen, welche die maximale Traglast der Stüt-

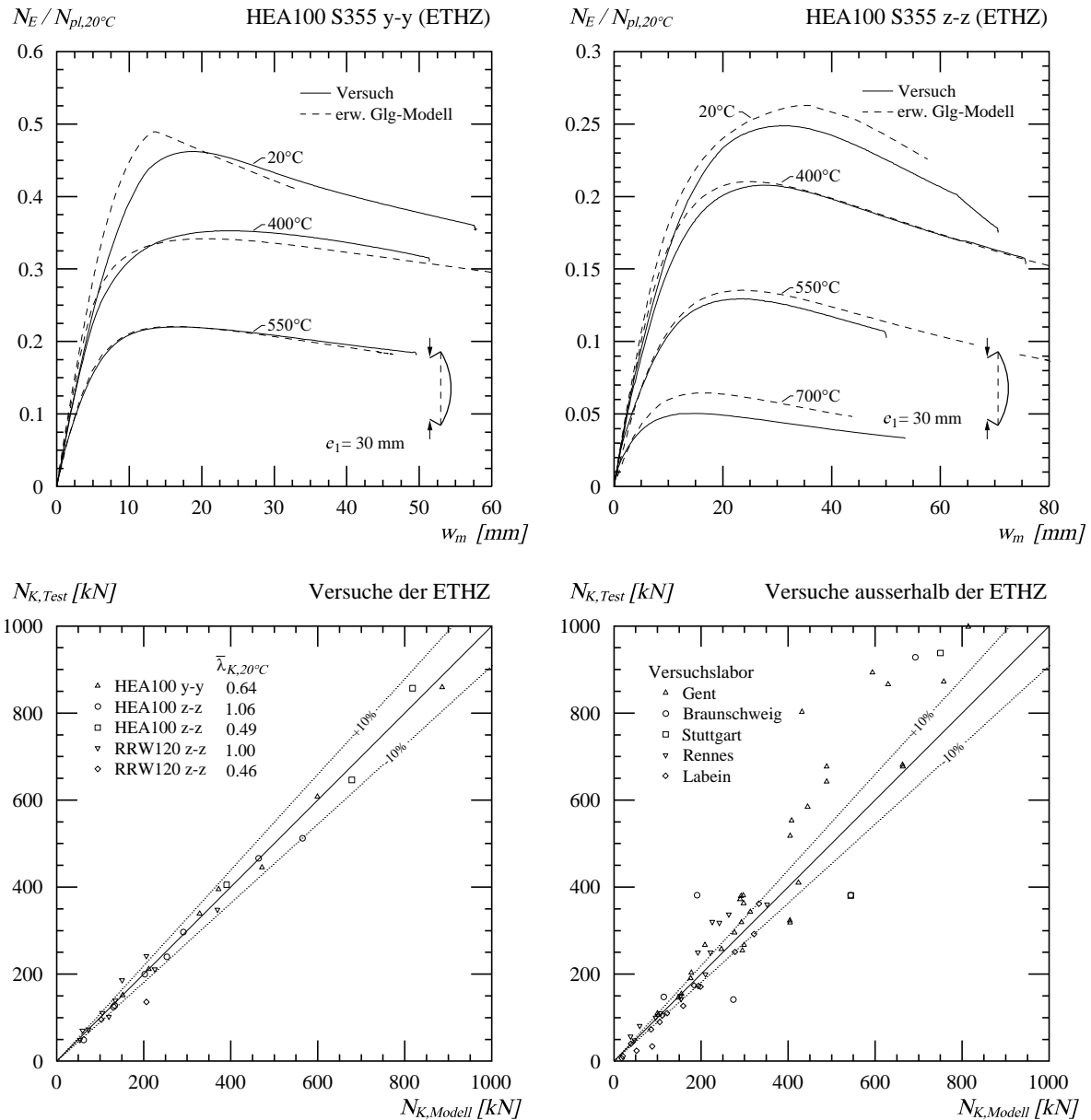


Abb. 3-19: Oben: Vergleich der Last-Verformungs-Pfade exzentrisch gedrückten Stützen. Unten: Vergleich der Traglasten des erweiterten Gleichgewichtsmodells mit eigenen [52] und fremden Versuchen [60].

zen abmindern. Dies kann in einem Momenten-Krümmungs-Diagramm veranschaulicht werden (Abb. 3-18 rechts). Zum Zeitpunkt $t = 0$ seien in der Stütze noch keine Kriecheffekte aufgetreten. Die Beziehung zwischen dem rückhaltenden Biegemoment $M_{N,R,\theta}$ und der Krümmung χ verläuft durch den Koordinatennullpunkt des Momenten-Krümmungs-Diagramms, da jede Krümmung des Querschnitts einen Beitrag zum inneren Biegeverhalten leistet. Die Kriecheffekte, welche im Laufe der Zeit auftreten, verursachen Verformungen beziehungsweise Krümmungen, ohne jedoch das rückhaltende Biegemoment zu vergrößern. In Abbildung 3-18 rechts ist dies durch eine Verschiebung der Momenten-Krümmungs-Beziehung um χ_{kr} dargestellt, während die treibenden Biegemomente 2^{ter} Ordnung $M_{E,II}$ unverändert bleiben. Wie ersichtlich, verschiebt sich dadurch der Schnittpunkt der beiden Funktionen, was bedeutet, dass grössere Stützenverformungen notwendig sind, um das Gleichgewicht zwischen den inneren und äusseren Kräften zu ermöglichen. Sind die Kriecheffekte zu gross, kann dies zum Versagen der Stütze führen, da kein Gleichgewicht mehr gefunden werden kann ($t = t_2$).

3.4.5 Vergleich mit Versuchen

In den Jahren 2007 bis 2011 wurden an der ETH Zürich grossmassstäbliche Knickversuche bei unterschiedlichen Temperaturen durchgeführt [52]. Bei den steady state Versuchen wurden die Stützen mit einem Elektroofen bis auf die gewünschte Temperatur aufgeheizt und anschliessend weggesteuert belastet. Die gemessenen Last-Verformungs-Pfade der exzentrisch gedrückten HEA100 Stützen bei den unterschiedlichen Temperaturen sind in der Abbildung 3-19 oben dargestellt und mit den Ergebnissen des erweiterten Gleichgewichtsmodells verglichen. Bei der analytischen Berechnung wurden die gemessene Stützengeometrie und das in Zugversuchen gemessene Materialverhalten bei erhöhter Temperatur verwendet, während Eigenspannungen sowie Kriecheffekte nicht berücksichtigt wurden. Insbesondere die Kenntnis des Materialverhaltens bei den gegebenen Temperaturen und die entsprechende Dehnrates führt dazu, dass die Last-Verformungs-Beziehungen der exzentrisch gedrückten HEA100 Stützen mit dem erweiterten Gleichgewichtsmodell gut abgebildet werden können. Auch die Verformungen bei grösseren Plastifizierungen im

Tabelle 3-3: Vergleich der Ergebnisse des erweiterten Gleichgewichtsmodells mit Versuchen der ETHZ

HEA100 S355 y-y, $\bar{\lambda}_{K,20^\circ C} = 0.64$				HEA100 S355 z-z, $\bar{\lambda}_{K,20^\circ C} = 1.06$			
θ [°C]	e_1 [mm]	$N_{K,Test}$ [kN]	$N_{K,Modell}$ / $N_{K,Test}$	θ [°C]	e_1 [mm]	$N_{K,Test}$ [kN]	$N_{K,Modell}$ / $N_{K,Test}$
20	0	859.1	1.03	20	0	511.7	1.10
20	30	445.4	1.06	20	30	239.3	1.06
400	0	608.1	0.99	400	0	465.5	1.00
400	30	339.1	0.97	400	30	199.8	1.01
550	0	394.9	0.94	550	0	296.7	0.98
550	30	211.3	1.00	550	30	124.4	1.05
700	0	151.5	1.00	700	0	127.8	1.04
		Mittelwert	1.00	700	30	48.5	1.28
		Standardabweichung	0.04			Mittelwert	1.06
						Standardabweichung	0.09
RRW120x60x4 S355 z-z, $\bar{\lambda}_{K,20^\circ C} = 1.00$				HEA100 S355 z-z, $\bar{\lambda}_{K,20^\circ C} = 0.49$			
θ [°C]	e_1 [mm]	$N_{K,Test}$ [kN]	$N_{K,Modell}$ / $N_{K,Test}$	θ [°C]	e_1 [mm]	$N_{K,Test}$ [kN]	$N_{K,Modell}$ / $N_{K,Test}$
20	0	347.9	1.06	20	0	857.2	0.95
20	10	211.2	1.07	400	0	646.4	1.05
20	50	101.9	1.18	550	0	405.4	0.96
400	0	241.5	0.85				
400	10	139.2	0.97				
400	50	72.9	1.00				
550	0	186.3	0.81				
550	10	110.9	0.95				
550	50	48.6	1.11				
700	0	70.5	0.84				
		Mittelwert	0.98				
		Standardabweichung	0.12				
RRW120x60x4 S355 z-z, $\bar{\lambda}_{K,20^\circ C} = 0.46$							
θ [°C]	e_1 [mm]	$N_{K,Test}$ [kN]	$N_{K,Modell}$ / $N_{K,Test}$				
550	0	136.1	1.52				
550	30	95.5	1.08				

abfallenden Ast der Last-Verformungs-Beziehung zeigen für alle Temperaturen eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen des erweiterten Gleichgewichtsmodells.

In der Abbildung 3-18 unten links sowie in der Tabelle 3-3 sind die Traglasten der Knickversuche, welche an der ETH Zürich durchgeführt wurden, den Ergebnissen des erweiterten Gleichgewichtsmodells gegenübergestellt. Im Allgemeinen ist bei allen Temperaturen und Exzentrizitäten eine sehr gute Übereinstimmung festzustellen, besonders bei den HEA100 Stützen. Bei den RRW120x60x4 Stützen können die Traglasten mit dem erweiterten Gleichgewichtsmodell weniger genau berechnet werden.

Nebst den Versuchen, die an der ETH Zürich durchgeführt wurden, sind die Ergebnisse des erweiterten Gleichgewichtsmodells in Abbildung 3-19 unten rechts mit den Traglasten fremder Versuche [60] verglichen. Dabei ist eine viel grössere Streuung zu beobachten, was hauptsächlich auf fehlende Informationen über Materialverhalten und Stützengeometrie zurückzuführen ist. Zudem wurden diese Versuche nicht als steady state, sondern als transient state Versuche durchgeführt. Dabei wird die Stütze bei Raumtemperatur durch eine gegebene Last belastet und anschliessend bei konstanter Belastung aufgeheizt bis das Stabilitätsversagen eintritt. Diese Versuchsdurchführung bildet die realen Geschehnisse im Brandfall zwar besser ab, ist jedoch für Vergleiche weniger geeignet, da das Materialverhalten von der sich stets ändernden Temperatur und der unbekannteren Dehnrate abhängig ist.

3.5 Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

- Es werden zwei Gleichgewichtsmodelle erarbeitet: Das erweiterte Gleichgewichtsmodell erfüllt sowohl die Gleichgewichts- wie auch die Verträglichkeitsbedingungen in jedem Stützenquerschnitt für ein beliebiges Stoffgesetz. Somit beschreibt das erweiterte Gleichgewichtsmodell die vollständige Lösung innerhalb der Modellannahmen. Diese wird durch ein iteratives Vorgehen angenähert. Das reduzierte Gleichgewichtsmodell überprüft das Gleichgewicht zwischen den rückhaltenden und treibenden Kräften nur an einem Stützenquerschnitt und benötigt demzufolge eine Annahme bezüglich der Verformungsfigur der Stütze. Mit einer guten Wahl der geometrischen Form der Biegelinie sowie der Lage des Kontrollpunktes kann mit dem reduzierten Gleichgewichtsmodell das Tragverhalten von Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten und symmetrischer oder asymmetrischer Belastung gut abgebildet werden.
- Für zentrisch belastete Stützen mit einer sinusförmigen geometrischen Imperfektion führt die Annahme einer sinusförmigen Verformungsfigur der Stütze beim reduzierten Gleichgewichtsmodell zu einem unteren Grenzwert der Traglast. Dies weil durch die Konzentration der Verformungen im meist beanspruchten Stützenquerschnitt grössere Krümmungen erzeugt werden, die den inneren Biege widerstand in diesem Bereich der Stütze erhöhen.
- Für symmetrisch exzentrisch belastete Stützen ergibt sich mit einer parabolischen Verformungsfigur der Stütze ein unterer Grenzwert der Traglast. Bei geringer Lastexzentrizität werden jedoch mit einer geometrischen Form der Biegelinie affin zur Sinusfunktion bessere Ergebnisse erzielt, weil die Verformungsfigur hauptsächlich von den Biegebelastungen 2^{ter} Ordnung beeinflusst wird.
- Beide Gleichgewichtsmodelle erlauben die Berechnung des gesamten Last-Verformungs-Verhaltens. Zusätzlich zum nichtlinearen Materialverhalten können sie Eigenspannungen, thermische Dehnungen und Spannungen sowie Krieeffekte berücksichtigen.
- Mit der Energiemethode wird das Tragverhalten gedrückter Stützen durch die am statischen System geleistete Arbeit beschrieben. Diese wird einerseits durch innere Deformationsarbeit und andererseits durch die Verschiebung der von aussen angreifenden Kräfte geleistet. Unter

der Vielzahl möglicher Verformungsfiguren lässt sich mit dem *Satz des Minimums der potentiellen Energie* diejenige finden, welche das Verhalten der Stütze am besten beschreibt. Dies entspricht einem oberen Grenzwert der Traglast. Ist die Verformungsfigur gefunden, welche die potentielle Energie im statischen System minimiert, entspricht die Lösung derjenigen des erweiterten Gleichgewichtsmodells und somit der exakten Lösung innerhalb der Modellannahmen.

- Das nichtlineare Materialverhalten hat einen erheblichen Einfluss auf die Traglast gedrückten Stützen. Dies gilt auch für sehr schlanke Stützen, bei denen die Traglast Normalspannungen im Stützenquerschnitt weit unterhalb der Proportionalitätsgrenze erzeugt. Dies, weil ein Stabilitätsversagen erst dann eintritt, wenn es zu einer Reduktion der Biegesteifigkeit kommt, was erst der Fall ist, wenn die Randspannungen des meist belasteten Querschnittes der Proportionalitätsgrenze überschreiten.
- Eigenspannungen bei erhöhten Temperaturen sind sehr schwer zu erfassen, beeinflussen jedoch hauptsächlich H-Querschnitte, die um ihre schwache Achse belastet werden.
- Kriechen infolge der hohen Temperaturen führt zu zusätzlichen Verformungen und zu einer Reduktion der Traglast.

4 Vereinfachte Berechnungsmodelle zum Knicken

In der heutigen Normung sind verschiedene Berechnungsmodelle zum Tragverhalten gedrückter Stützen sowohl bei Raumtemperatur wie auch für den Brandfall verankert. Diese werden in den folgenden Abschnitten erläutert, wobei ein besonderes Augenmerk denjenigen Modellen für den Brandfall sowie den Modellen für Stützen aus Aluminium oder hochlegiertem Stahl bei Raumtemperatur gilt, denn diese weisen ein ausgeprägtes nichtlineares Materialverhalten auf.

Danach werden zwei neue vereinfachte Berechnungsmodelle erläutert, die das Tragverhalten von Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten beschreiben können. Das erste neue, vereinfachte Modell beschreibt das Tragverhalten als *Spannungsproblem*, was zu einer sehr einfachen Berechnung der Knicklast führt, jedoch das korrekte physikalische Verhalten nicht ganzheitlich abbildet. Das zweite vereinfachte Modell beschreibt das Tragverhalten gedrückter Stützen als *Gleichgewichtsproblem* und entsteht direkt aus dem im vorherigen Kapitel beschriebenen Gleichgewichtsmodell. Dieses Modell kann, im Gegensatz zum ersten, Belastungskonfigurationen aus Normalkraft und Biegung direkt berücksichtigen, ohne dass dabei eine Interaktionsformel verwendet werden muss. Zudem erfasst dieses Modell die mechanischen Eigenschaften des Stabilitätsproblems ganzheitlich und ermöglicht dem Benutzer einen tieferen Einblick und bessere Kontrolle bei der Berechnung von Traglasten bei Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten.

4.1 Vorhandene Berechnungsmodelle für zentrisches Knicken

Weltweit gibt es mehrere unterschiedliche Berechnungsmodelle zum zentrischen Knicken. Wie im geschichtlichen Rückblick des Kapitels 3.1 erwähnt, beschreiben die meisten von ihnen das Tragverhalten als *Spannungsproblem*, wobei die maximale Kantenpressung im Stützenquerschnitt nach Theorie 2^{ter} Ordnung zu berechnen und durch die Materialfestigkeit zu begrenzen ist. Diese Modelle, welche teilweise auch in der Normung verankert sind, sind oftmals empirischer Natur und entstanden durch die Auswertung vieler Versuche und numerischen Berechnungen. Die umfassendere Beschreibung des Tragverhaltens gedrückter Stützen als *Gleichgewichtsproblem* betrachtet wurde im Stahlbau kaum für Bemessungszwecke verwendet, da diese stets sehr aufwändig in der Berechnung sind. Es folgt eine kleine Auswahl der hauptsächlich in Europa benutzten Berechnungsmodelle zum zentrischen Knicken bei Raumtemperatur und im Brandfall.

4.1.1 Linear elastisches Modell

Wie im Kapitel 3.2 erläutert, kann die Differentialgleichung 3.1 für eine Stütze mit linear elastischem Materialverhalten gelöst werden (Gl. 3.2). Diese Lösung hat vollständige Gültigkeit solange die Spannungen im Querschnitt nirgends die Proportionalitätsgrenze überschreiten. Die Last-Verformungs-Beziehung wird in diesem Bereich durch den Vergrößerungsfaktor 2^{ter} Ordnung

beschrieben, wobei sowohl die Gleichgewichtsbedingungen, die Verträglichkeitsbedingungen und das Stoffgesetz korrekt berücksichtigt werden.

Bleiben die Spannungen unterhalb der Proportionalitätsgrenze, kommt es zu keinem Steifigkeitsverlust, welcher die Stütze zum Versagen führen könnte. Die Begrenzung der maximalen Randspannungen durch die Proportionalitätsgrenze bildet das Versagenskriterium dieses elastischen Modells und führt zu Traglasten, die auf der sicheren Seite liegen. Für eine Stütze frei von Eigenspannungen führt dies zur Gleichung 3.6, wobei die Knicklast $N_{K,R}$ nun der Last $N_{E,A}$ gemäss Abbildung 3-2 entspricht. Diese auf der sicheren Seite liegende Traglast der eigenspannungsfreien Stütze ist somit einzig eine Funktion der Querschnittsfläche A und des elastischen Widerstandsmoments W_{el} sowie der geometrischen Imperfektion e_0 .

Dieses linear elastische Modell bildet das Grundgerüst des von Ayrton und Perry [2] vorgeschlagenen Ansatzes zur Bemessung zentrisch belasteter Stützen. Sämtliche Bemessungsmodelle zum Knicken des Eurocodes basieren auf diesem Ansatz, sei es für Stützen mit annähernd linear elastischem - ideal plastischem Materialverhalten oder Stützen mit ausgeprägtem nichtlinearem Materialverhalten. Zu den letzteren gehören Stützen aus Aluminium und hochlegierte Stähle bei Raumtemperatur oder Stahlstützen im Brandfall. Bei all diesen Bemessungsmodellen wird an Stelle der geometrischen Imperfektion eine Ersatzimperfektion eingeführt, welche die Berücksichtigung von Querschnittsplastifizierungen, Eigenspannungen und Materialverhalten ermöglicht.

4.1.2 Eurocode und SIA 263 bei Raumtemperatur

Das annähernd linear elastische - ideal plastische Materialverhalten von Stahl bei Raumtemperatur führt zu hohen Steifigkeitsverlusten, sobald die Randspannungen des meist beanspruchten Querschnittes die Proportionalitätsgrenze überschreiten (Kapitel 3.2). Dieser hohe Verlust an Biegesteifigkeit beim erstmaligen Plastifizieren der äusseren Querschnittsbereiche führt unmittelbar zum Versagen der Stütze. Dementsprechend führt die elastische Lösung bei Stützen, die frei von Eigenspannungen sind, zu einem unteren Grenzwert der Traglast, der jedoch der wirklichen Traglast sehr nahe kommt. Bei Stützen mit Eigenspannungen wird jedoch die Proportionalitätsgrenze weit vor dem Erreichen der Traglast überschritten (Abb. 3-3). Trotz dieser Tatsache beschränkt das Berechnungsmodell des Eurocodes [13] und der Schweizer Norm [65] die maximalen Randspannungen im Querschnitt auf die Fließgrenze f_y und korrigiert die dabei entstandene Ungenauigkeit durch Einführen einer Ersatzimperfektion $e_{0,d}$. Diese berücksichtigt geometrische Imperfektionen, Eigenspannungen und andere strukturelle Imperfektionen sowie die Plastifizierung der meist beanspruchten Querschnittsbereiche bei sehr gedrungenen Stützen.

$$\frac{N_{K,R}}{A f_y} + \frac{1}{1 - \frac{N_{K,R}}{N_{cr}}} \cdot \frac{e_{0,d} \cdot N_{K,R}}{W_{el} f_y} \leq 1.0 \quad (4.1)$$

$$e_{0,d} = \alpha \cdot (\bar{\lambda}_K - \bar{\lambda}_0) \cdot \frac{W_{el}}{A} \quad \text{mit } \bar{\lambda}_0 = 0.20 \quad (4.2)$$

Die Ersatzimperfektion unterscheidet sich je nach Stützenquerschnitt und Stützenlänge, wobei die Imperfektionsbeiwerte α aus der Tabelle 4-1 zu entnehmen sind. Sowohl die Gleichung 4.2 wie auch deren Parameter sind das Ergebnis eines umfangreichen Forschungsprogramms mit gross-

Tabelle 4-1: Imperfektionsbeiwerte für europäische Knickspannungskurven [13]

Knickspannungskurve	a	b	c	d
Imperfektionsbeiwert α	0.21	0.34	0.49	0.76

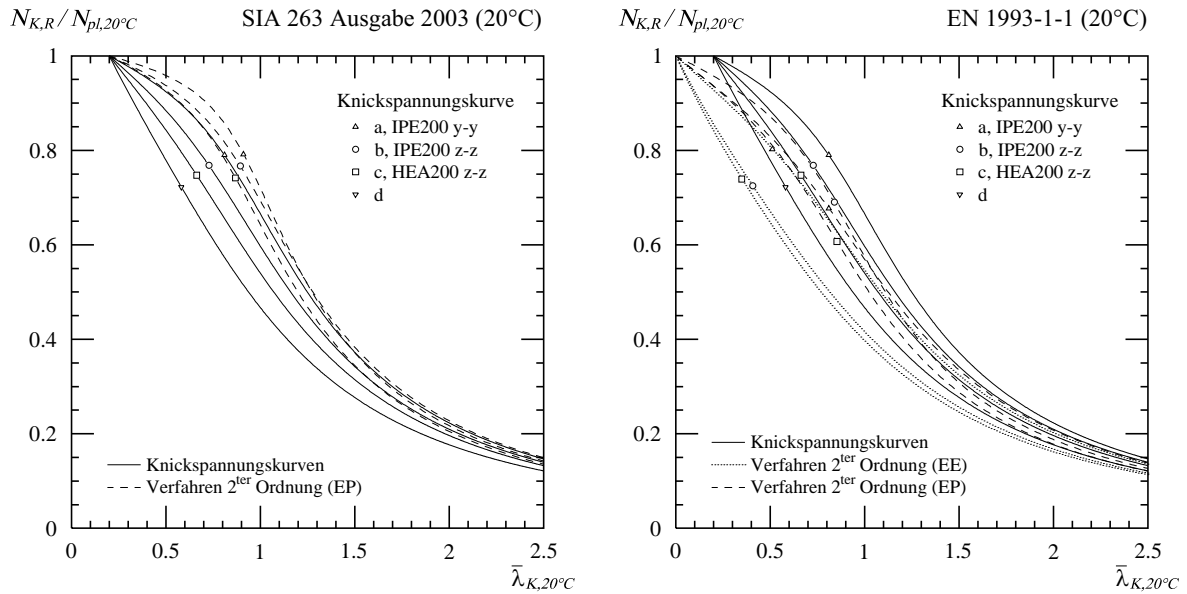


Abb. 4-1: Knickspannungskurven bei Raumtemperatur im Vergleich mit dem Verfahren 2^{ter} Ordnung nach SIA 263 (links) und nach Eurocode (rechts).

masstäblichen Versuchen und numerischen Studien [5][46], die zu den europäischen Knickspannungskurven geführt haben.

Nebst dem Imperfektionsbeiwert α wurde ein Schlankheitsbereich $\bar{\lambda}_0$ festgelegt, bei welchem die Stützen ohne zu Knicken den plastischen Widerstand erreichen. Die Lösung der für $N_{K,R}$ quadratischen Gleichung 4.1 ist in Abbildung 4-1 dargestellt und lässt sich mit folgenden Gleichungen berechnen.

$$\Phi = 0.5[1 + \alpha(\bar{\lambda}_K - \bar{\lambda}_0) + \bar{\lambda}_K^2] \quad (4.2a)$$

$$\chi_K = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}_K^2}} \quad \text{und } N_{K,R} = \chi_K \cdot A f_y \quad (4.2b)$$

Verfahren nach Theorie 2^{ter} Ordnung

Dieses Verfahren entspricht in seiner ursprünglichen Formulierung dem elastischen Modell gemäss der Gleichung 4.1. Dabei werden die Schnittkräfte 2^{ter} Ordnung am verformten System bestimmt und mit dem Tragwiderstand der Stütze verglichen. Gemäss der Normung des Eurocodes wie auch nach der Schweizer Norm darf der Tragwiderstand der Stütze je nach Querschnittsklasse elastisch oder plastisch berechnet werden, wobei sich die anzunehmenden Ersatzimperfektionen je nach Verfahren und je nach Norm unterscheiden.

Für planmässig gerade Druckstäbe in seitlich gehaltenen Rahmen werden die Ersatzimperfektion nach der Norm SIA 263 (Ausgabe 2003) [65] für das elastische Verfahren (EE) gemäss Gleichung 4.2 angenommen, während für ein elasto-plastisches Verfahren (EP) folgende Ersatzimperfektionen anzunehmen sind.

$$e_{0,d} = \alpha \cdot (\bar{\lambda}_K - \bar{\lambda}_0) \cdot \frac{W_{pl}}{A} \quad \text{mit } \bar{\lambda}_0 = 0.20 \quad \text{Verfahren EP} \quad (4.2c)$$

Bei dem Berechnungsmodell (EE) werden sowohl die einwirkenden Schnittkräfte wie auch der Tragwiderstand mit einem elastischen Modell berechnet. Mit den Ersatzimperfektionen gemäss

Gleichung 4.2 führt dies zur Gleichung 4.1 und somit zu den identischen Traglasten wie die europäischen Knickspannungskurven.

Mit dem elasto-plastischen Verfahren (EP) darf der Tragwiderstand der Stütze mit einem plastischen Modell berechnet werden, jedoch mit im Vergleich zum elastischen Verfahren (EE) vergrößerten Ersatzimperfectionen. Wird für die Berechnung des plastischen Tragwiderstands eine lineare N-M-Interaktion der Form

$$\frac{N_E}{N_{pl}} + \frac{M_E}{M_{pl}} < 1.0 \tag{4.3}$$

benutzt, ergeben sich auch für das Verfahren EP zu den europäischen Knickspannungskurven identische Knicklasten. Wird jedoch eine nichtlinear plastische Beziehung für die N-M-Interaktion verwendet (z.B. nach Baptista [3], SIA 263 oder EN 1993-1-1), ergeben sich höhere Knicklasten als beim Verfahren EE. Insbesondere bei Stützen, die um die schwache Achse belastet werden, können mit einer nichtlinearen N-M-Interaktion gegenüber einer linearen Interaktion viel grössere Biegemomente aufgenommen werden, was eine beträchtliche Erhöhung der Traglast ermöglicht. In Abbildung 4-1 links sind die Knicklasten in Funktion der bezogenen Schlankheit für das elasto-plastische Verfahren 2^{ter} Ordnung (EP) nach SIA 263 (Ausgabe 2003) dargestellt und mit den europäischen Knickspannungslinien verglichen. Besonders bei den Knickspannungskurven b und c ist eine starke Erhöhung der Knicklast bemerkbar, da bei der Berechnung dieser Knickspannungskurven das Profil um die schwache Achse belastet wird. Diese Erhöhung kann je nach Profil und Schlankheit bis 20% betragen. Werden die Knicklasten mit einem IPE200 Querschnitt berechnet, der um die starke Achse belastet wird, so unterscheiden sich diese weniger stark von der zugehörigen Knickspannungskurve a. Dies, weil bei einer Belastung um die starke Achse sich die nichtlineare plastische N-M-Interaktion weniger von der linearen Interaktion (Gl. 4.3) unterscheidet.

Im Gegensatz zur SIA 263 (Ausgabe 2003) sind die Bemessungswerte der Ersatzimperfectionen des Eurocodes sowie der SIA 263 (Ausgabe 2013) nicht von der bezogenen Schlankheit der Stütze abhängig (Tab. 4-2). Abbildung 4-1 rechts zeigt, dass die damit berechneten Traglasten teilweise weit unterhalb der Knickspannungskurven liegen, besonders diejenige nach dem elastischen Verfahren EE. Bei den Knicklasten, die nach dem elasto-plastischen Verfahren EP und den entsprechenden grösseren Ersatzimperfectionen berechnet sind, ist der Unterschied zu den Knickspannungskurven kleiner. Dennoch liegen die Traglasten nach dem Verfahren 2^{ter} Ordnung unterhalb der Werte der Knickspannungskurven. Des Weiteren ist ersichtlich, dass im Gegensatz zur SIA 263 (Ausgabe 2003), beim Verfahren 2^{ter} Ordnung nach Eurocode auch Stützen mit Schlankheiten kleiner als $\bar{\lambda}_0$ ausknicken und nicht die volle plastische Tragfähigkeit erreichen.

Bemessungsverfahren, die zur Berechnung der Knicklasten treibende mit rückhaltenden Kräften gegenüberstellen, müssen diese mit dem gleichen Berechnungsmodell erfassen. Werden die einwirkenden Schnittgrössen mit einem elastischen Modell 2^{ter} Ordnung berechnet, so bedeutet eine plastische Berechnung des Tragwiderstandes eine grobe Verletzung der Verträglichkeitsbedingungen. Die grossen Verformungen, welche für die Aktivierung der plastischen Tragwiderstände notwendig sind, werden bei der Berechnung der einwirkenden Schnittkräfte durch das elastische Modell (Gl. 3.2) unterschätzt. Die Missachtung der Verträglichkeitsbedingung, denen bei der Betrachtung von Stabilitätsproblemen eine zentrale Bedeutung zukommt, führt zu einer unrecht-

Tabelle 4-2: Bemessungswert der Ersatzimperfectionen nach Eurocode [13]

Knickspannungskurve		a	b	c	d
Verfahren EE	$e_{0,d} / L$	1/300	1/250	1/200	1/150
Verfahren EP	$e_{0,d} / L$	1/250	1/200	1/150	1/100

mässigen Überschätzung der Knicklasten, wie dies beim Berechnungsverfahren (EP) der SIA 263 (Ausgabe 2003) der Fall ist. In der überarbeiteten Version der SIA 263 (Ausgabe 2013) ist dies mit der Übernahme der Ersatzimperfektionen nach Eurocode gemäss Tabelle 4-2 korrigiert.

4.1.3 Zentrisches Knicken im Brandfall nach Eurocode

Die erhöhten Temperaturen im Stahl führen zu einer Veränderung der Materialeigenschaften (Anhang A). Das bei Raumtemperatur annähernd linear elastische - ideal plastische Stoffgesetz geht in ein ausgeprägtes nichtlineares Verhalten über, was zusammen mit dem Verlust an Steifigkeit und Festigkeit sowohl die Verzweigungslast wie auch den plastischen Tragwiderstand stark beeinflusst. Bei der erhöhten Temperatur θ wird die bezogene Schlankheit der Stütze gemäss EN 1993-1-2 [14] zu:

$$\bar{\lambda}_{K,\theta} = \sqrt{\frac{N_{pl,\theta}}{N_{cr,\theta}}} = \sqrt{\frac{k_y}{k_E}} \cdot \bar{\lambda}_{K,20^\circ C} \quad \text{wobei } N_{cr,\theta} = \frac{\pi^2 E_\theta I}{L^2} \quad (4.4)$$

Das Modell des Eurocodes zur Berechnung der Knicklast bei erhöhten Temperaturen geht auf die Forschungsarbeit von Talamona [67] zurück. Als Grundgerüst dient das elastische Modell der Gleichung 4.1, welches jedoch das nichtlineare Materialverhalten nicht explizit berücksichtigen kann. Der Einfluss des veränderten Materialverhaltens bei erhöhten Temperaturen wird durch folgende Annahme der Ersatzimperfektionen erfasst. Diese ergeben sich aus der Kalibration des Modells an einer Vielzahl von Versuchen und numerischen Studien.

$$e_{0,d} = \alpha \cdot \bar{\lambda}_{K,\theta} \cdot \frac{W_{el}}{A} \quad \text{mit } \alpha = \beta \cdot \sqrt{\frac{235}{f_y}} \text{ und } \beta = 0.65 \quad (4.5)$$

Die Wahl der Ersatzimperfektion unterscheidet sich vom Berechnungsmodell bei Raumtemperatur durch den neuen Imperfektionsbeiwert α und das Fehlen einer zum Knicken minimal erforderlichen bezogenen Schlankheit $\bar{\lambda}_0$. Eingesetzt in Gleichung 4.1 ergeben sich folgende Ausdrücke zur Berechnung der Knicklast $N_{K,R,\theta}$ bei einer Temperatur θ .

$$\Phi_\theta = 0.5[1 + \alpha \bar{\lambda}_{K,\theta} + \bar{\lambda}_{K,\theta}^2] \quad (4.6a)$$

$$\chi_{K,\theta} = \frac{1}{\Phi_\theta + \sqrt{\Phi_\theta^2 - \bar{\lambda}_{K,\theta}^2}} \leq 1.0 \quad (4.6b)$$

$$N_{K,R,\theta} = \chi_{K,\theta} \cdot \frac{N_{pl,\theta}}{\gamma_{M,fi}} \quad (4.6c)$$

In Abbildung 4-2 sind die Knickspannungskurven nach Eurocode mit der Verzweigungsspannung nach Engesser-Kármán (Gl. 2.4b) und der elastischen Lösung (Gl. 3.6) mit einer geometrischen Imperfektion $e_0 = L/1'000$ verglichen. In den beiden oberen Abbildungen sind die Knicklasten in Funktion der bezogenen Schlankheit für die Temperaturen 400°C (links) und 700°C (rechts) dargestellt. In den beiden unteren Abbildungen sind die Knicklasten in Funktion der Temperatur für Stützen mit einer bezogenen Schlankheit von 0.5 (links) und 1.0 (rechts) dargestellt. Der schraffierte Bereich in den Abbildungen ist einerseits durch die Verzweigungslast (oberen Grenzwert) und andererseits durch den für die eigenspannungsfreien Stützen unteren Grenzwert der elastischen Lösung begrenzt. Die Traglasten der eigenspannungsfreien Stützen muss zwischen den Grenzwerten in den schraffierten Bereichen der Abbildung 4-2 liegen. Sind Eigenspannungen im Stützen-

4 Vereinfachte Berechnungsmodelle zum Knicken

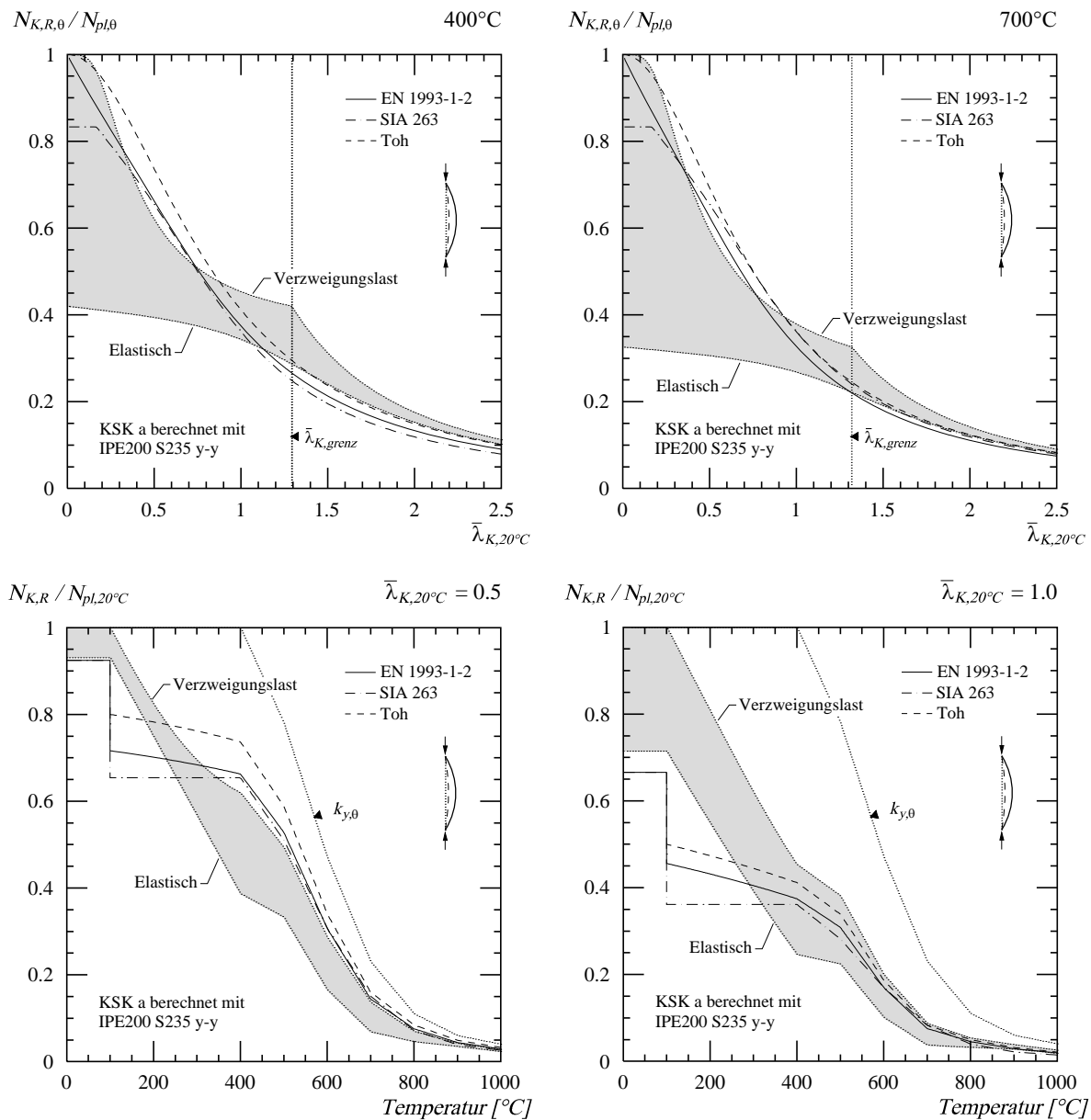


Abb. 4-2: Vergleich der Knickspannungskurven (KSK) nach EN1993-1-2 und SIA263 mit der Verzweigungslast nach Engesser-Kármán und der elastischen Lösung ($e_0 = L/1'000$) bei erhöhten Temperaturen.

querschnitt vorhanden, können sich Traglasten unterhalb der elastischen Lösung ergeben, während diese den oberen Grenzwert nicht überschreiten dürfen.

Sowohl bei einer Temperatur von 400°C wie auch bei 700°C resultieren gemäss den Knickspannungskurven nach Eurocode Traglasten, die für gedrungene Stützen die obere Grenze verletzen. Für Stützen mit einer bezogenen Schlankheit grösser als die Grenzschlankheit (Gl. 2.6) liegen die Knickspannungskurven für beide Temperaturen unterhalb der elastischen Lösung. Dies ist gegenüber der Verletzung der oberen Grenze nicht gross von Bedeutung, da Eigenspannungen oder thermische Dehnungen oder Spannungen die Traglast der Stütze weiter reduzieren können. Traglasten, die entsprechend dem Modell des Eurocodes grösser als die Verzweigungslast werden, sind mechanisch nicht möglich. Aus den beiden unteren Graphiken in Abbildung 4-2 ist ersichtlich, dass bei gedrungenen Stützen ($\bar{\lambda}_{K,20^{\circ}\text{C}} = 0.5$) die obere Grenze der Traglast für alle Temperaturen oberhalb 400°C überschritten wird. Bei Temperaturen unterhalb 300°C werden die Traglasten sämtlicher Schlankheiten unterschätzt.

4.1.4 Zentrisches Knicken im Brandfall nach SIA 263

Wie das Modell des Eurocodes im Brandfall beruht auch die Berechnungsmethode der SIA 263 [65] auf der Gleichung 4.1, wobei gegenüber dem Eurocode in paar Vereinfachungen eingeführt sind. So wird bei der Berechnung der bezogenen Knickschlankheit (Gl. 4.7), die bezogene Schlankheit bei Raumtemperatur mit dem Faktor 1.2 multipliziert. Dieser Wert entspricht vereinfacht dem Maximalwert der Wurzel des Verhältnisses $k_{y,\theta} / k_{E,\theta}$ für Baustahl bei erhöhten Temperaturen.

$$\bar{\lambda}_{K,\theta} = 1.2 \cdot \bar{\lambda}_{K,20^\circ C} \quad (4.7)$$

Die Berechnung der Knicklast erfolgt mit der Knickspannungskurve c ($\alpha = 0.49$) gemäss Kapitel 4.1.2, wobei die Traglast nachträglich mit einem Reduktionsfaktor von 1.2 dividiert wird.

$$\Phi_\theta = 0.5[1 + \alpha(\bar{\lambda}_{K,\theta} - \bar{\lambda}_0) + \bar{\lambda}_{K,\theta}^2] \quad \text{mit } \alpha = 0.49 \text{ und } \bar{\lambda}_0 = 0.20 \quad (4.8)$$

$$\chi_{K,\theta} = \frac{1}{\Phi_\theta + \sqrt{\Phi_\theta^2 - \bar{\lambda}_{K,\theta}^2}} \leq 1.0 \quad (4.9)$$

$$N_{K,R,\theta} = \frac{\chi_{K,\theta}}{1.2} \cdot \frac{N_{pl,\theta}}{\gamma_{M,fi}} \quad (4.10)$$

Die resultierende Knickspannungskurve ist in Abbildung 4-2 dargestellt. Verglichen mit dem Bemessungsmodell nach Eurocode ergeben sich aus dem Modell der SIA 263 ähnliche Traglasten für zentrisch gedrückte Stützen im Brandfall, mit Ausnahme der Stützen mit einer bezogenen Schlankheit $\bar{\lambda}_{K,\theta}$ kleiner als $\bar{\lambda}_0$. Bei diesen ist die maximale Traglast auf $0.83 N_{pl,\theta}$ begrenzt. Wie die Knickspannungskurve nach Eurocode verletzt auch diejenige der SIA 263 den oberen Grenzwert der Traglast bei gedrungeenen Stützen.

4.1.5 Biegeknicken im Brandfall nach Toh (Rankine-Modell)

Im Gegensatz zu den in den vorhergehenden Abschnitten erläuterten Berechnungsmodellen, die stets auf dem elastischen Modell nach Gleichung 4.1 aufbauen, dient das Rankine-Modell [54] als Grundlage für das Modell von Toh [75] zur Berechnung zentrisch und exzentrisch gedrückter Stützen im Brandfall. Das Grundgerüst für dieses Berechnungsverfahren bildet folgende Gleichung.

$$\frac{1}{N_{K,R,\theta}} = \frac{1}{\mu \cdot N_{pl,R,\theta}} + \frac{1}{N_{cr,\theta}} \quad (4.11)$$

wobei

$$N_{pl,R,\theta} = Af_{y,\theta} \quad \text{und} \quad N_{cr,\theta} = \frac{\pi^2 E_\theta I}{L^2} \quad (4.11a)$$

Der Parameter μ beschreibt die planmässige Lastexzentrizität e_1 der gedrückten Stütze. Für zentrisch belastete Stützen ist $\mu = 1.0$, während dieser Wert für eine exzentrische Belastung nach folgenden Gleichungen zu berechnen ist

- Für rechteckige Hohlquerschnitte:

$$\mu = \frac{\sqrt{(e_1\xi)^2 + 4} - e_1\xi}{2} \quad \text{mit } \xi = \frac{A}{W_{pl}} \quad (4.12)$$

- Für I-Querschnitte mit Biegung um die starke Achse

$$\mu = \frac{\sqrt{(e_1\xi)^2 + 10} - e_1\xi}{5} \quad \text{für } e_1\xi \geq 4.5 \quad (4.13a)$$

$$\mu = \left(1 + \frac{e_1\xi}{1.125}\right)^{-1} \quad \text{für } e_1\xi \leq 4.5 \quad (4.13b)$$

- Für I-Querschnitte mit Biegung um die schwache Achse

$$\mu = \sqrt{(e_1\xi)^2 + 2} - e_1\xi \quad \text{für } e_1\xi \geq \sqrt{4.05} \quad (4.13c)$$

$$\mu = \frac{\sqrt{(e_1\xi)^2 + 2.25^2} - e_1\xi}{2.25} \quad \text{für } e_1\xi \leq \sqrt{4.05} \quad (4.13d)$$

Die Gleichung 4.11 lässt sich nach der Traglast $N_{K,R,\theta}$ der Stütze auflösen. Zusammen mit den obigen Ausdrücken zur Berücksichtigung der Lastexzentrizität und der bezogenen Schlankheit bei erhöhten Temperaturen (Gl. 4.4) lässt sich die Traglast durch folgenden Ausdruck angeben.

$$N_{K,R,\theta} = \frac{Af_{y,\theta}}{\mu^{-1} + \bar{\lambda}_{K,\theta}} \quad (4.14)$$

In Abbildung 4-2 sind die Traglasten nach dem Modell von Toh für zentrisch belastete Stützen in Funktion der Temperatur und der bezogenen Schlankheit dargestellt. Diese liegen gegenüber den Knickspannungskurven nach Eurocode und SIA 263 höher und verletzen folglich die obere Grenze der Traglast, gegeben durch die Verzweigungslast nach Engesser-Kármán. Des Weiteren ist zu bemerken, dass diese Berechnungsmethode in keiner Weise anfängliche geometrische oder strukturelle Imperfektionen explizit berücksichtigt.

4.1.6 Weitere Berechnungsmodelle zum zentrischen Knicken

Ähnlich wie für den Brandfall bildet die Gleichung 4.1 das Grundgerüst für den Bemessungsansatz des Eurocodes zentrisch gedrückter Aluminiumstützen. Die Wahl der Ersatzimperfektionen $e_{0,d}$ erfolgt nach Gleichung 4.2, wobei der Imperfektionsbeiwert α sowie die Grenze des Plateaus $\bar{\lambda}_0$ je nach Werkstoffklasse unterschiedlich gewählt werden. Obwohl Aluminium ein stark nichtlineares Materialverhalten aufweist [33], wird dies im Berechnungsmodell nicht explizit berücksichtigt. Das Berechnungsmodell entspricht einem elastischen Verfahren, in dem die maximalen Randspannungen infolge der Belastung nach Theorie 2^{ter} Ordnung durch die Fließgrenze des Materials begrenzt wird.

Das gleiche Modell wird auch für die Berechnung von Knicklasten zentrisch gedrückter Stützen aus hochlegierten Stählen verwendet. Die dabei angenommenen Imperfektionsbeiwert α sowie die Grenze des Plateaus $\bar{\lambda}_0$ werden je nach Bearbeitung der Profile und Querschnittsform bestimmt. Auch bei diesem Modell wird das bei Raumtemperatur nichtlineare Verhalten des Materials nicht explizit berücksichtigt.

4.2 Neue Berechnungsmodelle zum Knicken im Brandfall

Im Kapitel 3 sind die mechanischen Grundlagen zum Biegeknicken erläutert und die unterschiedlichen Einflüsse anhand numerischer Berechnungsmodelle quantifiziert. Aufbauend auf die dabei gewonnenen Erkenntnisse werden zwei vereinfachte Berechnungsmodelle zum Knicken von Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten entwickelt. Das erste vereinfachte Berechnungsmodell (Spannungsmodell), welches im folgenden Abschnitt erläutert wird, fasst den Knickvorgang als *Spannungsproblem* auf. Dabei werden die Verformungen durch ein elastisches Berechnungsmodell abgeschätzt und die dabei entstehenden Randspannungen im meist beanspruchten Querschnitt durch einen Maximalwert beschränkt. Das zweite vereinfachte Berechnungsmodell (Gleichgewichtsmodell) entspricht dem im Kapitel 3.3.1 erläuterten Gleichgewichtsmodell. Dabei wird die iterative Berechnung der Beziehung zwischen der Belastung, der Verformung und des Widerstandes durch vereinfachende Annahmen umgangen. Im Gegensatz zum Spannungsmodell, erfasst das Gleichgewichtsmodell das mechanische Verhalten der gedrückten Stützen besser. Insbesondere berücksichtigt dieses vereinfachte Modell, nebst einem nichtlinearen Stoffgesetz, die Gleichgewichtsbedingungen und die Verträglichkeitsbedingungen. Dies ermöglicht nicht nur die Berechnung der Traglast, sondern auch des Last-Verformungs-Verhaltens der Stütze bei sowohl zentrischer wie auch exzentrischer Belastung.

4.2.1 Vereinfachtes Spannungsmodell

Das vereinfachte Spannungsmodell berechnet die Randspannungen im meist beanspruchten Querschnitt und beschränkt diese durch einen Grenzwert. Dabei werden die Spannungen im Stützenquerschnitt anhand eines elastischen Modells mit Berücksichtigung der Effekte 2^{ter} Ordnung berechnet, während der Grenzwert durch ein vereinfachtes Modell in Funktion der Stützenschlankheit und der Materialeigenschaften bestimmt wird. Bei schlanken Stützen entspricht dieser der Proportionalitätsgrenze, während er für gedrungene Stützen oberhalb der Proportionalitätsgrenze jedoch unterhalb der Fließgrenze liegt.

In Abbildung 4-3 sind die Last-Verformungs-Pfade unterschiedlich langer HEA200 Stützen bei Raumtemperatur und bei 400°C ohne Berücksichtigung von Eigenspannungen in einem N-M-Interaktionsdiagramm dargestellt. Dabei ist die geometrische Imperfektion der zentrisch belasteten Stützen zu $e_0 = L/1'000$ angenommen und das Biegemoment in Stützenmitte ergibt sich aus dem Produkt der Auslenkung $w_{m,II}$ und der einwirkenden Normalkraft N_E . Nebst der Last-Verformungs-Beziehung, wurde der elastische (gestrichelte Linie) und der plastische Tragwiderstand (strichpunktierte Linie) des Stützenquerschnittes ohne Berücksichtigung der Stabilität dargestellt. Bei kleinen Belastungen durch die Normalkraft N_E verhält sich die Stütze vollkommen elastisch und folgt der elastischen Last-Verformungs-Beziehung gemäss Gleichung 3.2 (punktierte Linie). Sobald die maximalen Randspannungen die Proportionalitätsgrenze überschreiten, kommt es zu einem Steifigkeitsverlust, was zu einem gegenüber der elastischen Lösung weichen Verhalten führt. Bei Raumtemperatur ist dies der Fall, sobald die Randspannungen die Fließspannung f_y erreichen. Wird dieser Grenzwert überschritten, kommt es wegen dem annähernd linear elastischen - ideal plastischen Materialverhalten zu grossen Steifigkeitsverlusten, die unmittelbar zum Versagen der Stütze führen. Wird der maximale Tragwiderstand dem Kreuzungspunkt der elastischen Lösung (punktierte Linie) mit dem Grenzwert $\sigma_{max} = f_y$ (gestrichelte Linie) gleichgesetzt, ergibt sich der Bemessungsansatz für zentrisch gedrückte Stützen gemäss Gleichung 4.1. Bei erhöhten Temperaturen würde dies dem Kreuzpunkt der elastischen Lösung (punktierte Linie) mit dem Grenzwert $\sigma_{max} = f_{p,\theta}$ (gestrichelte Linie) entsprechen und somit der elastischen Lösung gemäss Gleichung 3.6. Es ist jedoch ersichtlich, dass bei Raumtemperatur dem Überschreiten der Proportionalitätsgrenze unmittelbar das Stabilitätsversagen der Stütze folgt, dies jedoch bei erhöh-

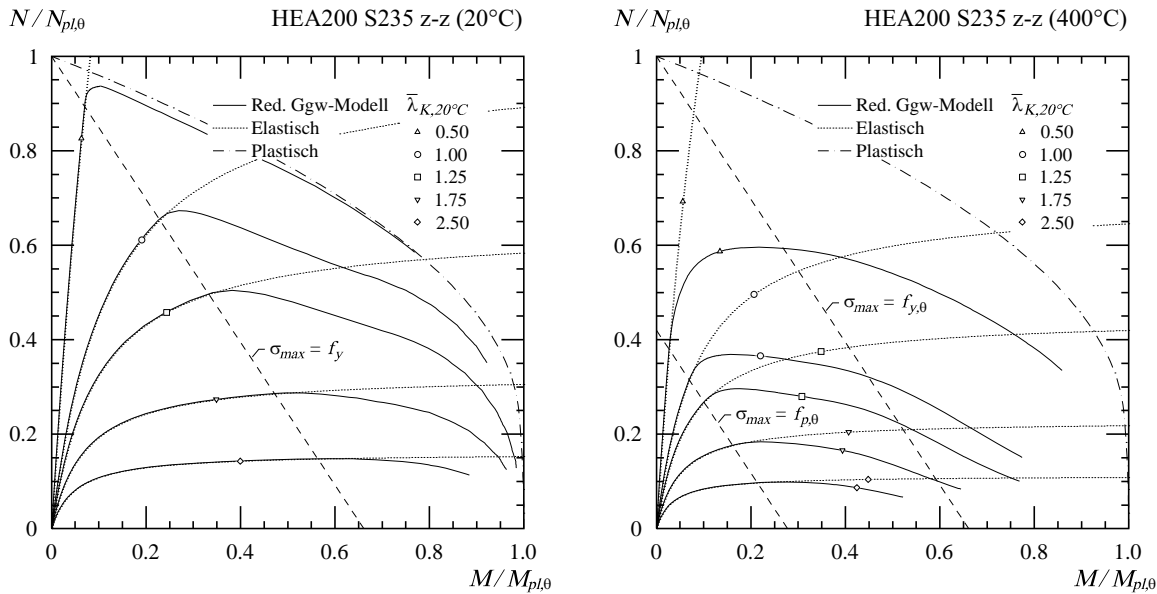


Abb. 4-3: Last-Verformungs-Pfad als Normalkraft-Biegemoment-Beziehung in Stützenmitte dargestellt für zentrisch gedrückten Stützen ($L/e_0 = 1'000$) bei 20°C (links) und bei 400°C (rechts)

ten Temperaturen, besonders bei gedrunenen Stützen, nicht mehr der Fall ist. Im Gegensatz zum linear elastischen - ideal plastischen Materialverhalten, ist der Steifigkeitsverlust beim Überschreiten der Proportionalitätsgrenze nicht derart gross, was hauptsächlich bei gedrunenen Stützen eine Laststeigerung ermöglicht. Diese ist bei sehr kurzen Stützen umso grösser, je kleiner die Zunahme der Verformungen infolge Effekte 2^{ter} Ordnung ist (Abb. 4-3 rechts). Bei sehr schlanken Stützen ist die Zunahme der Verformungen infolge wachsender Belastung viel grösser, so dass schon ein geringer Verlust an Steifigkeit zum Versagen der Stützen führt.

Das vereinfachte Berechnungsverfahren des Spannungsmodells begrenzt die Randspannungen im meist beanspruchten Stützenquerschnitt in Funktion der bezogenen Stützenschlankheit. Während der Grenzwert bei sehr schlanken Stützen der Proportionalitätsspannung $f_{p,0}$ entspricht, so wird dieser mit abnehmender Schlankheit grösser bis zu einer Schlankheit von $\bar{\lambda}_0$, wo die Fließspannung $f_{y,0}$ erreicht wird. Der Grenzwert der maximalen Randspannungen wird in Funktion der bezogenen Stützenschlankheit mit der Variablen α_r beschrieben (Abb. 4-4 rechts). Für Stützenschlankheiten grösser als die Grenzschlankheit $\bar{\lambda}_{K,grenz}$ (Gl. 2.6) ist die Variable α_r konstant und so gewählt, dass der Grenzwert der maximalen Randspannungen der Proportionalitätsgrenze $f_{p,0}$ entspricht. Für Stützenschlankheiten kleiner als die Grenzschlankheit nimmt die Variable α_r mit abnehmender Schlankheit parabolisch zu, bis zu einem Maximalwert von 1.0, der bei der bezogenen Schlankheit $\bar{\lambda}_0$ erreicht wird.

$$\alpha_r = \left(1 - \frac{k_p}{k_y}\right) \cdot \left(\frac{\bar{\lambda}_K - \bar{\lambda}_{K,grenz}}{\bar{\lambda}_0 - \bar{\lambda}_{K,grenz}}\right)^2 + \frac{k_p}{k_y} \quad \text{für } \bar{\lambda}_K < \bar{\lambda}_{K,grenz} \quad (4.15a)$$

$$\alpha_r = \frac{k_p}{k_y} \quad \text{für } \bar{\lambda}_K \geq \bar{\lambda}_{K,grenz} \quad (4.15b)$$

In der Abbildung 4-4 links ist ersichtlich, wie die Zunahme der Variablen α_r einer Drehung der Grenzwertfunktion in einem N-M-Interaktionsdiagramm entspricht. Während der Normalkraftwiderstand der Stütze durch die Erhöhung der Variablen α_r vergrössert wird, verändert sich der Biege- und Torsionswiderstand der Stütze nicht. Dieser entspricht stets dem elastischen Biege- und Torsionswiderstand. Somit wird die Grundgleichung zur Berechnung der Knicklast von Stahlstützen im Brandfall zu:

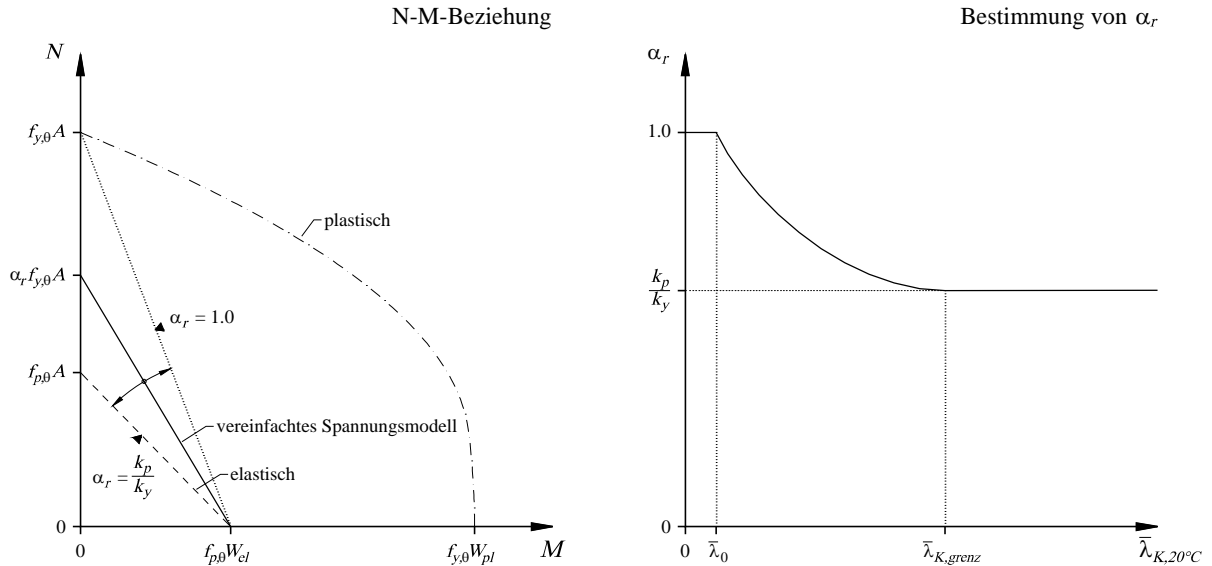


Abb. 4-4: Drehung der Grenzfunktion der maximal erlaubten Randspannungen in Abhängigkeit der bezogenen Stützenschlankheit bei Raumtemperatur.

$$\frac{N_E}{\alpha_r N_R} + \frac{1}{1 - \frac{N_E}{N_{cr}}} \cdot \frac{e_0 N_E}{\frac{k_p}{k_y} \cdot M_{R,el}} \leq 1.0 \quad (4.16)$$

wobei

$$N_R = A \cdot f_{y,\theta} \quad M_R = W_{el} \cdot f_{y,\theta} \quad \text{und} \quad N_{cr} = \frac{\pi^2 E_\theta I}{L^2} \quad (4.16a)$$

Beim Erreichen der Knicklast wird diese Bedingung gerade noch erfüllt. Es entsteht somit eine für N_E quadratische Gleichung, die in Grundform der Gleichung 4.1 entspricht. Wird die einwirkende Belastung N_E der Knicklast $N_{K,R,\theta}$ gleichgesetzt, kann die Gleichung 4.16 wie folgt gelöst werden.

$$\Phi = 0.5 \left(\frac{1}{\alpha_r} + \frac{e_0 A}{W_{el}} \cdot \frac{k_y}{k_p} + \bar{\lambda}_{K,\theta}^2 \right) \quad (4.17a)$$

$$\chi_K = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \frac{1}{\alpha_r} \cdot \bar{\lambda}_{K,\theta}^2}} \leq 1.0 \quad (4.17b)$$

$$N_{K,R,\theta} = \chi_K \cdot A f_{y,\theta} \quad (4.17c)$$

Da die Variable α_r nur von der Stützenschlankheit, nicht aber von der Belastung N_E abhängig ist, lässt sich die Knicklast rasch bestimmen. Die Abbildung 4-5 zeigt die Knickspannungskurven nach obigen Gleichungen für eigenspannungsfreie HEA200 Stützen unterschiedlicher Schlankheiten bei mehreren Temperaturen mit einer geometrischen Imperfektion von $e_0 = L / 1'000$. Bei Stützen mit einer bezogenen Schlankheit kleiner als $\bar{\lambda}_0 = 0.10$ wurde ein Stabilitätsversagen ausgeschlossen. Zusätzlich ist die Verzweigungslast nach Engesser-Kármán (Gl. 2.4b) als oberer Grenzwert und die elastische Lösung (Gl. 3.6) als unterer Grenzwert dargestellt. Verglichen werden die Knickspannungskurven mit Traglasten, die mit dem reduzierten Gleichgewichtsmodell (Red. Ggw-Modell) berechnet werden. Verglichen mit dem reduzierten Gleichgewichtsmodell kann das

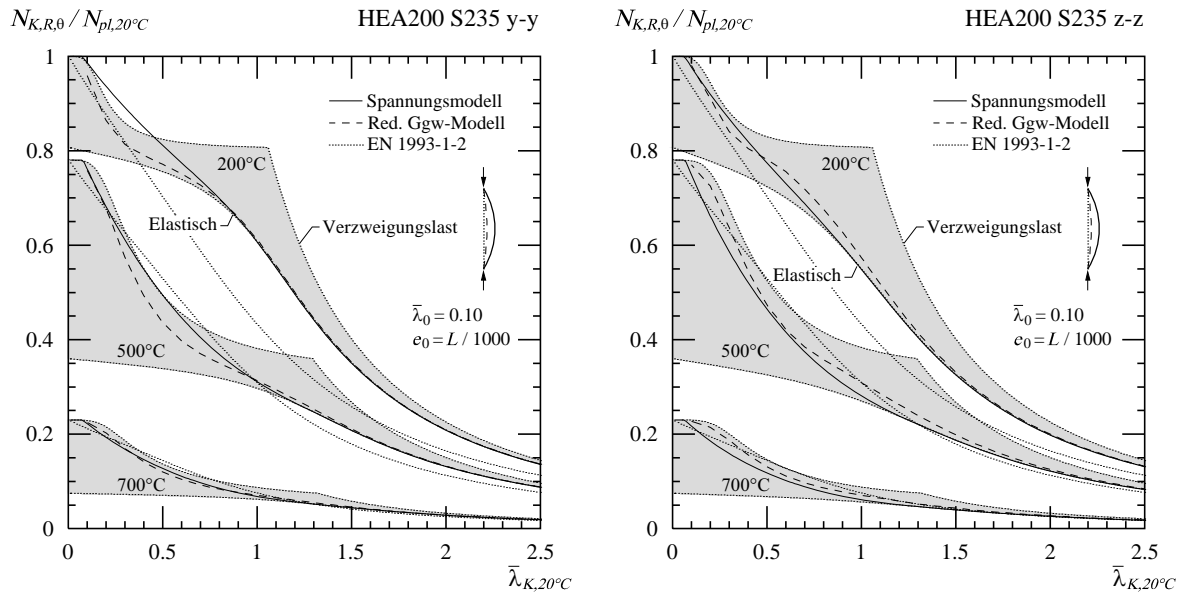


Abb. 4-5: Vergleich der Knickspannungskurve zwischen dem reduzierten Gleichgewichtsmodell, dem Spannungsmodell und Eurocode bei erhöhten Temperaturen für eine zentrisch gedrückte Stützen.

vereinfachte Spannungsmodell die Traglasten von zentrisch gedrückten Stützen bei unterschiedlichen Temperaturen besser wiedergeben als das Modell nach EN 1993-1-2. Insbesondere bei niedrigen Temperaturen kann das vereinfachte Spannungsmodell die Ergebnisse des reduzierten Gleichgewichtsmodells besser abbilden. Wie in Abbildung 4-5 ersichtlich, folgen die Knickspannungskurven des Spannungsmodells für schlanke Stützen der elastischen Lösung gemäss Gleichung 3.6 und können das Tragverhalten eigenspannungsfreier Stützen in diesem Bereich sehr genau beschreiben. Bei gedrunenen Stützen überschreiten die Randspannungen die Proportionalitätsgrenze. Obwohl das elastische Modell zur Berechnung der Randspannungen an Gültigkeit verliert, wird dieses beim vereinfachten Spannungsmodell auch für gedrunene Stützen verwendet. Das Modell überschätzt somit die Biegesteifigkeit dieser Stützen, sobald die Randspannungen die Proportionalitätsgrenze überschreiten. Dementsprechend werden die Stützenverformungen wie auch die einwirkenden Biegemomente nach Theorie 2^{ter} Ordnung unterschätzt (Abb. 4-3 rechts). Dieser Fehler wird durch die Wahl der Variablen α_r teilweise korrigiert. Dennoch resultieren für gedrunene HEA200 Stützen, die um die starke Achse belastet werden, zu hohe Traglasten, besonders bei einer Temperatur von 200°C. Dabei überschreiten die berechneten Traglasten teilweise den oberen Grenzwert, welcher durch die Verzweigungslast nach Engesser-Kármán gegeben ist (Abb. 4-5 links). Dies ist auf die Vereinfachungen des erläuterten Spannungsmodells zurückzuführen, bei dem im inelastischen Bereich der Knickspannungskurve die Verträglichkeitsbedingung nicht erfüllt wird.

Die Resultate des vereinfachten Spannungsmodells und insbesondere deren Übereinstimmung mit den Traglasten des reduzierten Gleichgewichtsmodells sind hauptsächlich von der Wahl der Variablen α_r abhängig. Auf diese kann durch die Verschiebung der Plateaugrenze $\bar{\lambda}_0$ und der Grenzschlankheit $\bar{\lambda}_{K, grenz}$ Einfluss genommen werden. Die Plateaugrenze wird bei einer bezogenen Schlankheit $\bar{\lambda}_0 = 0.1$ festgelegt, während die Grenzschlankheit mit dem Term $\bar{\lambda}_{sp}$ erweitert wird.

$$\bar{\lambda}_{K, grenz} = \sqrt{\frac{k_E}{k_p}} - \bar{\lambda}_{sp} \tag{4.18}$$

Der Einfluss der Verschiebung $\bar{\lambda}_{sp}$ auf die Knickspannungskurve ist in Abbildung 4-6 oben für zentrisch belastete Stützen bei zwei unterschiedlichen Temperaturen dargestellt. Dieser ist bei den tieferen Temperaturen eher klein und auf einen kleinen Schlankheitsbereich beschränkt. Bei den

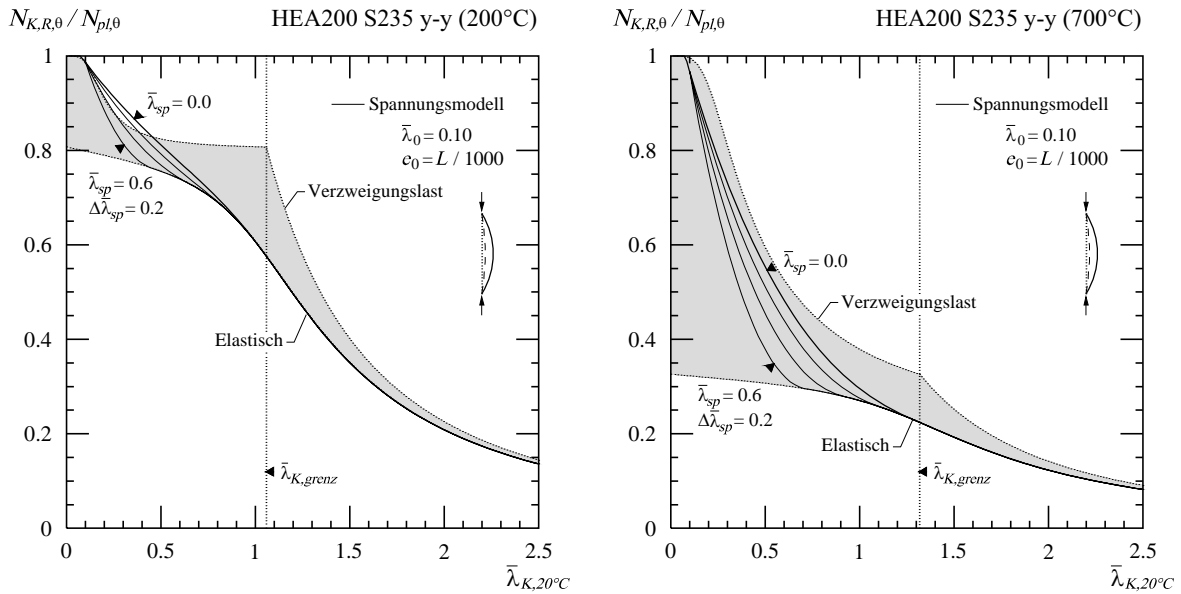


Abb. 4-6: Einfluss der Verschiebung der Grenزشlankheit um $\bar{\lambda}_{sp}$ auf die Knickkurven bei 200°C (links) und bei 700°C (rechts) für eine zentrisch belastete Stütze, die um ihre starke Achse knickt.

höheren Temperaturen wird der durch die Wahl von $\bar{\lambda}_{sp}$ beeinflusste Schlankheitsbereich grösser und erstreckt sich auf alle Stützen mit einer bezogenen Schlankheit kleiner als die Grenزشlankheit. Durch die Verschiebung der Grenزشlankheit um $\bar{\lambda}_{sp}$ können insbesondere bei Stützen, welche um die starke Achse knicken, die Traglasten des Spannungsmodells besser an die numerisch berechneten Werten angepasst werden. Zudem kann vermieden werden, dass bei niedrigen Temperaturen der obere Grenzwert der Traglast, gegeben durch die Verzweigungslast nach Engesser-Kármán, überschritten wird (Abb. 4-6 oben links).

In Abbildung 4-7 sind die mit dem vereinfachten Spannungsmodell berechneten Traglasten $N_{K,SP}$ mit denjenigen des reduzierten Gleichgewichtsmodells $N_{K,num}$ für unterschiedliche Stützenquerschnitte und Temperaturen verglichen. Die Differenz der Traglasten ist relativ zu den Ergebnissen des reduzierten Gleichgewichtsmodells angegeben, wobei eine positive Differenz bedeutet, dass gegenüber dem iterativen Berechnungsmodell, das vereinfachte Spannungsmodell höhere Traglasten der Stütze ergibt und somit auf der unsicheren Seite liegt.

$$\frac{\Delta N_K}{N_{K,num}} = \frac{N_{K,SP} - N_{K,num}}{N_{K,num}} \quad (4.19)$$

Die betrachteten Stützen sind zentrisch belastet, frei von Eigenspannungen und haben eine geometrischen Imperfektion $e_0 = L/1'000$. Die Knickspannungskurven des vereinfachten Spannungsmodells sind für jeden Stützenquerschnitt bei unterschiedlichen Stahltemperaturen mit den Resultaten des reduzierten Gleichgewichtsmodells verglichen. Für jede Temperatur ist die minimale und die maximale Differenz sowie die mittlere Abweichung gemäss Gleichung 4.19 bestimmt (Abb. 4-7 oben links). Die Extremalwerte der Differenzen pro Temperatur und Stützenquerschnitt ergeben ein Mass der Übereinstimmung des vereinfachten Spannungsmodells mit dem reduzierten Gleichgewichtsmodell. In Abbildung 4-7 ist dieses Mass der Übereinstimmung in Funktion der Temperatur angegeben. Bei Stützen, die um ihre schwache Achse belastet werden, liegen die Traglasten des vereinfachten Spannungsmodells gegenüber denjenigen des reduzierten Gleichgewichtsmodells auch ohne Verschiebung der Grenزشlankheit in der Regel tiefer (oben rechts). Bei Stützen, die um ihre starke Achse belastet werden, ist dies hingegen nicht der Fall, wobei die Überschätzung der Traglast mit dem vereinfachten Spannungsmodell bei HEA-Profilen mit 14% am grössten ist (Abb. 4-7 unten links). Eine Verschiebung der Grenزشlankheit um $\bar{\lambda}_{sp} = 0.2$ verringert diese auf etwa 8%, während für Temperaturen von 700°C die maximale Unterschätzung der Traglast durch das vereinfachte Spannungsmodell im Vergleich zum reduzierten Gleichge-

4 Vereinfachte Berechnungsmodelle zum Knicken

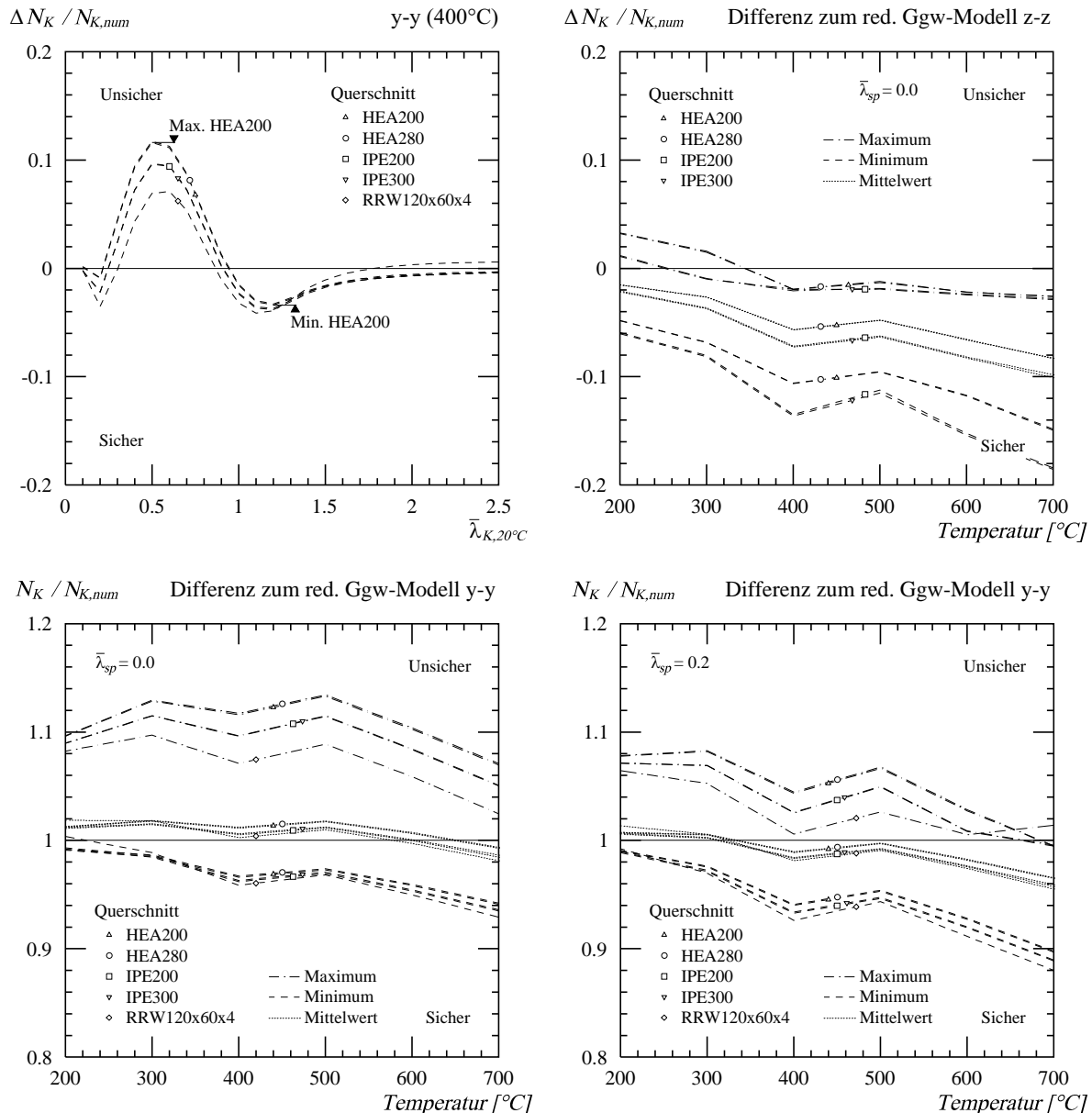


Abb. 4-7: Maximaler und minimaler Unterschied der Traglasten berechnet mit dem Spannungsmodell und dem numerischen reduzierten Gleichgewichtsmodell für zentrisch belastete Stützen.

wichtsmodell etwa 12% beträgt (Abb. 4-7 unten rechts). Der Mittelwert aller Differenzen der Traglasten nach Gleichung 4.19 nimmt mit zunehmender Temperatur ab und liegt zwischen +2% und -4%. Des Weiteren ist zu beobachten, dass die Differenzen der Traglasten zwischen den beiden Berechnungsmodellen für ähnliche Querschnittstypen gleich ist. Dabei liegen die Resultate des Spannungsmodells für IPE-Querschnitte sowohl für den Maximalwert wie auch für den Minimalwert tiefer als bei HEA-Querschnitten. Die tiefsten Traglasten werden mit geschlossenen Hohlquerschnitten erreicht.

Obwohl beim vereinfachten Spannungsmodell insbesondere bei den gedrunenen Stützen die Verträglichkeitsbedingung nicht erfüllt wird und die Nichtlinearität des Materialverhaltens nicht explizit berücksichtigt wird, können die Traglasten von zentrisch gedrückten Stahlstützen mit einer Genauigkeit von etwa $\pm 10\%$ für alle Temperaturen und Schlankheiten berechnet werden. Dies hauptsächlich, weil der Querschnittswiderstand der Stütze durch die Variable α_r in Funktion der Stützenschlankheit berechnet wird, was eine bessere Anpassung der Knickkurve an das Tragverhalten von Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten erleichtert. Obwohl das Spannungsmodell für eigenspannungsfreie Stützen mit einer unendlich grossen bezogenen Schlankheit der genauen Lösung sehr nahe kommt, bleibt der empirische Charakter bei mittleren und gedrunge-

nen Stützen erhalten. Im Anhang E.1 findet sich ein Berechnungsbeispiel, welches die Knicklast einer zentrisch belasteten Stütze bei erhöhter Temperatur mit dem vereinfachten Spannungsmodell berechnet.

4.2.2 Vereinfachtes Gleichgewichtsmodell

Die Grundlage für dieses vereinfachte Berechnungsmodell liefert das reduzierte Gleichgewichtsmodell aus Kapitel 3.3.1. Dabei werden für den Kontrollpunkt in Stützenmitte sowohl die Gleichgewichtsbedingungen wie auch die Verträglichkeitsbedingung bei einem beliebigen Stoffgesetz erfüllt. Das Momenten-Krümmungs-Diagramm bildet dabei den Schlüssel zur Beschreibung des Zusammenspiels zwischen den von aussen einwirkenden Kräften und den inneren durch die Verformung hervorgerufenen Widerständen. In dieser Darstellung können sämtliche Effekte wie Imperfektionen, Exzentrizitäten, Eigenspannungen, Stützenschlankheiten und andere abgebildet werden (Abb. 3-5 links). Die Hauptschwierigkeit des reduzierten Gleichgewichtsmodells liegt in der iterativen Berechnung der Momenten-Krümmungs-Beziehung für eine gegebene axiale Belastung N_E bei nichtlinearem Materialverhalten (Abb. 3-4). Das vereinfachte Gleichgewichtsmodell, welches in der Folge erläutert wird, umgeht diesen Schritt, indem die Momenten-Krümmungs-Beziehung direkt durch ein vereinfachtes, analytisches Modell beschrieben wird.

Das Modell approximiert die Momenten-Krümmungs-Beziehung hauptsächlich durch zwei Fixpunkte, welche sich als Funktion der angreifenden Normalkraft und der nichtlinearen Materialeigenschaften berechnen lassen. Der erste dieser beiden Fixpunkte entspricht dem elastischen Widerstandsmoment $M_{N,el}$ sowie der dazugehörigen Krümmung χ_p (Punkt A' in Abb. 4-8 rechts), welche sich mit der anfänglichen Biegesteifigkeit $T_K I$ nach Engesser-Kármán (Gl. 2.5a und Gl. 2.5b) folgendermassen berechnen lässt.

$$M_{N,el} = W_{el} \cdot f_{p,\theta} \cdot \left(1 - \frac{N_E}{A \cdot f_{p,\theta}}\right) \geq 0 \quad (4.20)$$

$$\chi_p = \frac{M_{N,el}}{T_K I} \quad (4.21)$$

Der zweite Fixpunkt der Momenten-Krümmungs-Beziehung ist durch das infolge der einwirkenden Normalkraft verkleinerte plastische Widerstandsmoment $M_{N,pl}$ und der dazugehörigen Krümmung χ_y gegeben (Punkt B' in Abb. 4-8 rechts). Für die Bestimmung des Widerstandsmoments $M_{N,pl}$ bei doppelsymmetrischen I-Querschnitten oder rechteckigen Hohlquerschnitten liefert Baptista [3] die genaue analytische Lösung. Vereinfachte Interaktionsformeln des Eurocodes stimmen mit den Ergebnissen nach Baptista sehr gut überein und werden in der Folge für dieses vereinfachte Gleichgewichtsmodell verwendet.

Für doppelsymmetrische I-Querschnitte mit Normalkraft und Biegung um die starke Achse gilt

$$M_{N,pl} = W_{pl} \cdot f_{y,\theta} \cdot \xi \cdot \left(1 - \frac{N_E}{A \cdot f_{y,\theta}}\right) \leq W_{pl} \cdot f_{y,\theta} \quad (4.22)$$

wobei

$$a = \frac{A - 2bt_f}{A} \leq 0.5 \quad \text{und} \quad \xi = \frac{1}{1 - 0.5a} \quad (4.22a)$$

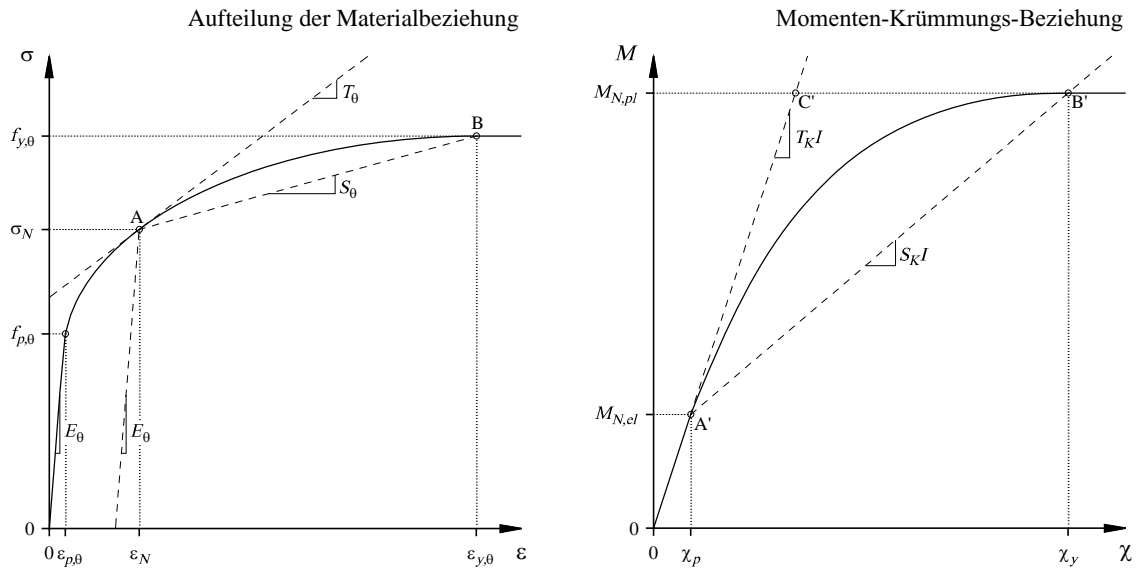


Abb. 4-8: Erstellung der Momenten-Krümmungs-Beziehung bei nichtlinearem Materialverhalten durch Aufteilung der Materialbeziehung.

während für doppelsymmetrische I-Querschnitte mit Normalkraft und Biegung um die schwache Achse folgende Gleichung gilt

$$M_{N,pl} = W_{pl} \cdot f_{y,\theta} \left[1 - \left(\frac{n-a}{1-a} \right)^2 \right] \quad \text{für } n > a \quad \text{mit } n = \frac{N_E}{A \cdot f_{y,\theta}} \quad (4.23a)$$

$$M_{N,pl} = W_{pl} \cdot f_{y,\theta} \quad \text{für } n \leq a \quad (4.23b)$$

Bei rechteckigen Hohlquerschnitten kommt für beide Belastungsachsen Gleichung 4.22 zur Anwendung, wobei bei der Bestimmung von a die Flanschdicke t_f durch die Profildicke t ersetzt wird. Zur Bestimmung der Krümmung χ_y wird die Spannungs-Dehnungs-Beziehung in eine bilineare und eine nichtlineare Beziehung aufgeteilt. Als Ausgangspunkt für die Aufteilung dient die Spannung σ_N , welche sich aus der Normalkraft N_E geteilt durch die Querschnittsfläche ergibt (Punkt A in Abb. 4-8 links). Das bilineare Materialverhalten hat einen E-Modul E_θ im linear elastischen Bereich der Entlastung und einen Verfestigungsmodul S_θ im linearen plastischen Bereich der Belastung. Dieser entspricht der Steigung zwischen den Punkten A und B, wobei der Punkt A bei sehr kleinen Lasten der Proportionalitätsgrenze entspricht, während der Punkt B stets durch die Fließdehnung $\epsilon_{y,\theta}$ beschrieben wird.

$$S_\theta = \frac{f_{y,\theta} - \sigma_N}{\epsilon_{y,\theta} - \epsilon_N} \leq \frac{f_{y,\theta} - f_{p,\theta}}{\epsilon_{y,\theta} - \epsilon_{p,\theta}} \quad (4.24)$$

Die Biegesteifigkeit S_{KI} der Stütze im plastischen Bereich, bei einer Momentenbelastung grösser als $M_{N,el}$, wird mit dem Knickmodul nach Engesser-Kármán und dem Verfestigungsmodul S_θ berechnet (Gl. 2.5 a und Gl. 2.5 b). Die Krümmung χ_y lässt sich mit folgender Gleichung abschätzen.

$$\chi_y = \frac{M_{N,pl} - M_{N,el}}{S_{KI}} \cdot \frac{W_{pl}}{W_{el}} \geq \frac{3M_{N,pl} - M_{N,el}}{T_{KI}} \quad (4.25)$$

Der nichtlineare Bereich der Momenten-Krümmungs-Beziehung zwischen den Fixpunkten A' und B' wird durch eine elliptische Funktion angenähert. Diese beginnt mit der Steigung T_{KI} beim Fixpunkt A' und endet beim Fixpunkt B' mit einer horizontalen Tangente. Anstelle der ellipti-

schen Funktion, wäre auch eine mathematisch einfachere, exponentielle Funktion denkbar. Diese ist zwar einfacher zu formulieren, erfüllt jedoch die Randbedingung des horizontalen Plateaus beim Fixpunkt B' nicht und hat deshalb Schwierigkeiten die Momenten-Krümmungs-Beziehung gut anzunähern. Dies gilt auch für Stützen aus Aluminium oder hochlegierten Stahl, obwohl bei diesen, im Gegensatz zu den Stahlstützen bei erhöhten Temperaturen, das Materialverhalten durch den Exponentialansatz von Ramberg und Osgood [53] beschrieben wird (Anhang F). Das Materialverhalten beeinflusst hauptsächlich die beiden Fixpunkte A' und B' sowie die Steifigkeit $T_K I$ in der Momenten-Krümmungs-Beziehung, während der nichtlineare Bereich zwischen den beiden Fixpunkten hauptsächlich durch die Querschnittsgeometrie beeinflusst wird. Insbesondere die Bestimmung der Krümmung χ_y ist stark vom Stützenquerschnitt abhängig, da bei I-Profilen, welche um ihre schwache Achse belastet werden, viel grössere Rotationen erforderlich sind, um den plastischen Biege widerstand zu erreichen. Bei der Betrachtung von Stabilitätsproblemen ist jedoch eine gute Übereinstimmung besonders bei kleinen Krümmungen respektive Verformungen entscheidend, während die grösseren Krümmungen erst nach dem Erreichen der maximalen Traglast im abfallenden Ast der Last-Verformungs-Beziehung hervortreten. Die elliptische Funktion zur Beschreibung des nichtlinearen Bereichs der Momenten-Krümmungs-Beziehung kann mit folgenden Gleichungen angenähert werden.

$$M_{N,R} = M_{M,el} - a + \frac{b}{c} \cdot \sqrt{c^2 - (\chi_y - \chi)^2} \quad (4.26)$$

mit

$$a = \frac{(M_{N,pl} - M_{N,el})^2}{(\chi_y - \chi_p) \cdot T_K I - 2 \cdot (M_{N,pl} - M_{N,el})} \quad (4.26a)$$

$$b = \sqrt{a \cdot (\chi_y - \chi_p) \cdot T_K I + a^2} \quad (4.26b)$$

$$c = \sqrt{(\chi_y - \chi_p) \cdot \left(\chi_y - \chi_p + \frac{a}{T_K I} \right)} \quad (4.26c)$$

Die Annäherung der Momenten-Krümmungs-Beziehung durch Gleichung 4.26 berücksichtigt die Querschnittsgeometrie einerseits durch die Biegesteifigkeiten $T_K I$ und $S_K I$, andererseits durch die infolge der Normalkraft reduzierten Biege widerstände $M_{N,el}$ und $M_{N,pl}$. Zudem berücksichtigt sie die Materialeigenschaften des Stahls bei den erhöhten Temperaturen und durch die Verwendung des Tangentenmoduls T_θ auch deren Nichtlinearität. Dies ermöglicht eine gute und zuverlässige Näherung der Momenten-Krümmungs-Beziehung für sämtliche Temperaturen und Querschnittsgeometrien.

In Abbildung 4-9 sind die Momenten-Krümmungs-Beziehungen bei unterschiedlicher Beanspruchung durch die Normalkraft N_E für ein Stützenprofil HEA200 bei den Temperaturen 200°C, 400°C und 700°C dargestellt. Die durchgezogenen Linien ergeben sich aus den iterativen Berechnungen des reduzierten Gleichgewichtsmodells gemäss Kapitel 3.3.1, während die gestrichelten Linien die Ergebnisse der Gleichung 4.26 darstellen. Wird die Stütze um ihre starke Achse belastet (links), so kann die Momenten-Krümmungs-Beziehung insbesondere bei den höheren Temperaturen für alle Beanspruchungen infolge Normalkraft sehr gut angenähert werden. Die grösseren Abweichungen, welche bei 200°C vorhanden sind, können primär auf das Materialverhalten des Stahls zurückgeführt werden. Dieses weist bei den niedrigen Temperaturen einen grossen elastischen Bereich auf, gefolgt von einer starken Krümmung in der Spannungs-Dehnungs-Beziehung, welches einem plastischen Fliessplateau sehr nahe kommt. Der Verfestigungsmodul S_θ , der sich bei kleiner axialer Belastung durch den unteren Grenzwert der Gleichung 4.24 ergibt, ist durch den

4 Vereinfachte Berechnungsmodelle zum Knicken

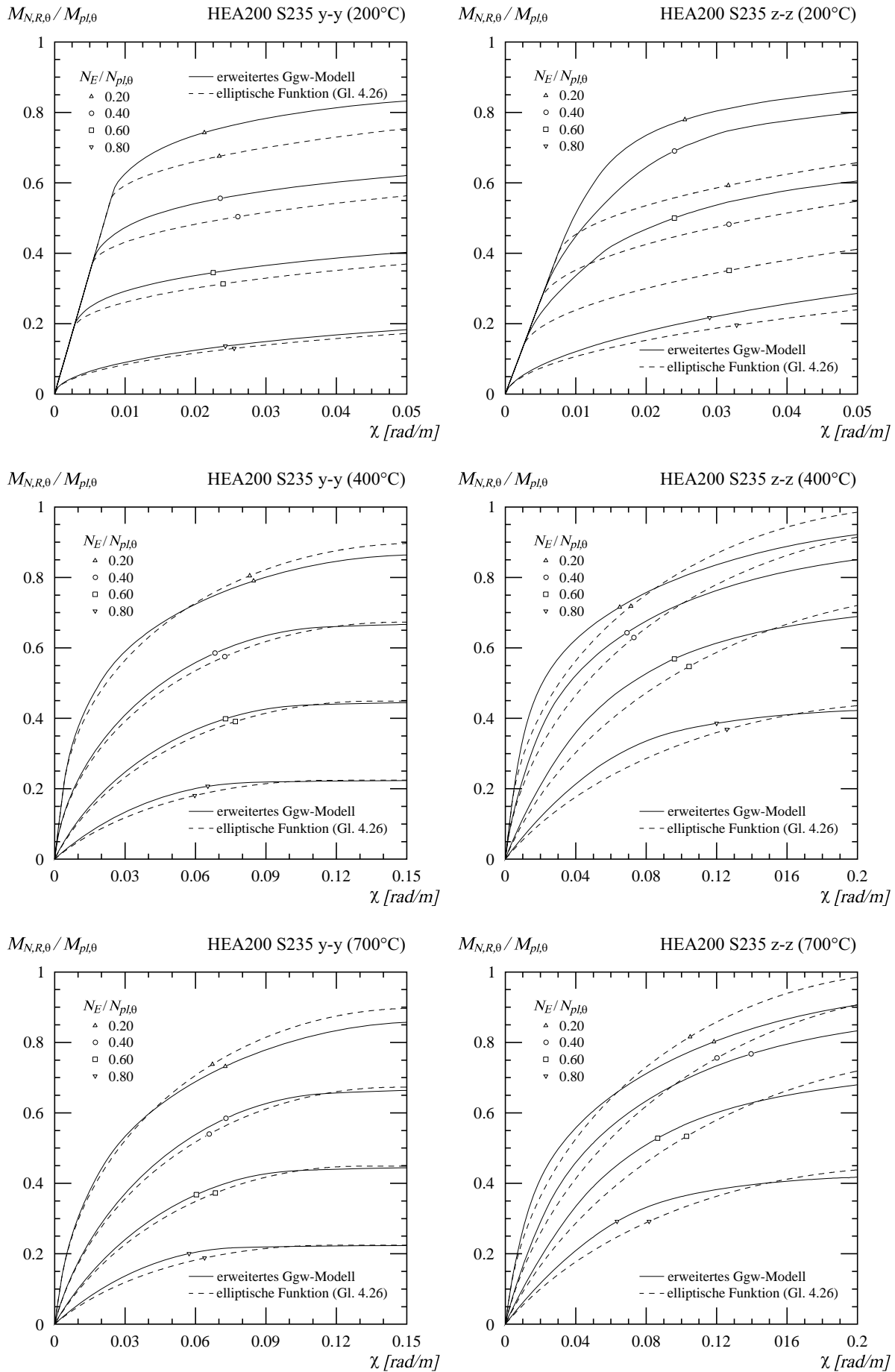


Abb. 4-9: Vergleich der mit der elliptischen Funktion berechneten Momenten-Krümmungs-Beziehungen mit den Resultaten der numerischen Modelle aus Kapitel 3.3.1.

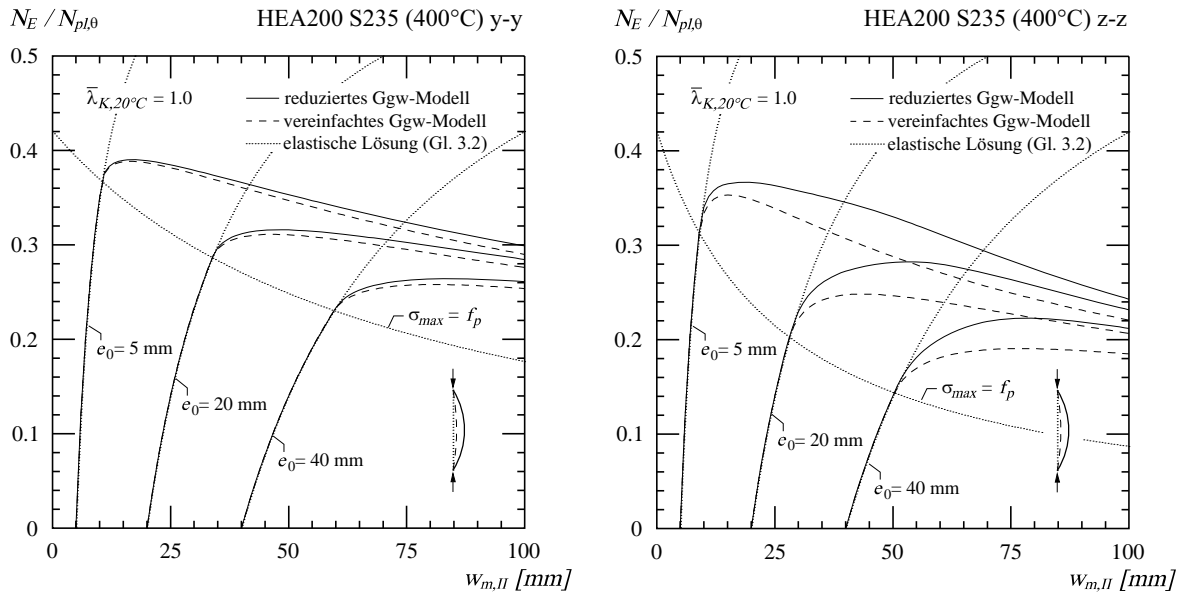


Abb. 4-10: Last-Verformungs-Beziehung zentrisch gedrückter Stützen mit unterschiedlichen geometrischen Imperfektionen. Vergleich des numerischen mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell

hohen Wert der Proportionalitätsgrenze $f_{p,\theta}$ sehr klein, was zu einer zu grossen Krümmung χ_y nach Gleichung 4.25 führt. Folglich wird der zweite Fixpunkt B' der Momenten-Krümmungs-Beziehung in Abbildung 4-9 zu weit rechts geschätzt, was für Krümmungen grösser als χ_p zu niedrigeren Biege widerständen führt.

Ähnliches gilt für Stützenquerschnitte, die um ihre schwache Achse belastet werden (Abb. 4-9 rechts). Bei der Temperatur von 200°C wird die Tragfähigkeit des Querschnittes in Funktion der Krümmung mit der Gleichung 4.26 stark unterschätzt. Dies ist einerseits wiederum auf das Materialverhalten zurückzuführen, andererseits werden sehr grosse Dehnungen benötigt, um bei einer Belastung des H-Profiles um die schwache Achse die voll plastische Tragfähigkeit $M_{N,pl}$ zu aktivieren. Auch in diesem Fall liegt die Schwierigkeit in der Bestimmung des zweiten Fixpunktes B', wobei die Unsicherheit hauptsächlich durch die Berechnung der Krümmung χ_y gegeben ist. Bei den höheren Temperaturen von 400°C und 700°C kann die Momenten-Krümmungs-Beziehung besser angenähert werden, weil die sanftere Krümmung im Spannungs-Dehnungs-Diagramm eine bessere Abschätzung des zweiten Fixpunktes B' erlaubt.

Entscheidend für eine gute Beschreibung des Tragverhaltens der Stütze ist jedoch nicht eine gute Übereinstimmung im nichtlinearen Bereich der Momenten-Krümmungs-Beziehung, sondern hauptsächlich die Übereinstimmung der beiden Fixpunkte A' und B'. Insbesondere der erste Fixpunkt A' (Gl. 4.20 und 4.21) ist zusammen mit der Steifigkeit $T_K I$ von zentraler Bedeutung für die Betrachtung von Stabilitätsproblemen, denn bei zentrisch belasteten Stützen oder Stützen mit geringer planmässiger Lastexzentrizität wird die maximale Traglast bei sehr kleinen Krümmungen erreicht. Diese sind üblicherweise nur geringfügig grösser als die Krümmung χ_p des Fixpunktes A', was der genauen Berechnung dieses Fixpunktes eine grosse Bedeutung zukommen lässt.

Wie schon im Kapitel 3.3.1 bei der Beschreibung des reduzierten Gleichgewichtsmodells erläutert, wird bei der Betrachtung von Stabilitätsproblemen das Gleichgewicht zwischen dem rückhaltenden Biege widerstand $M_{N,R,\theta}$ und dem von aussen einwirkenden Biegemoment $M_{E,II}$ (Gl. 3.10) überprüft. Dabei werden Informationen über die Verformungsfigur der Stütze benötigt, um die Beziehung zwischen der Krümmung χ und der Auslenkung w_m in Stützenmitte zu beschreiben. Wird das Gleichgewicht zwischen den treibenden und rückhaltenden Kräften nur an einem einzigen Kontrollpunkt in Stützenmitte überprüft, muss die geometrische Form der Verformungsfigur vorweg angenommen werden. Dabei ist es sinnvoll, bei zentrisch belasteten Stützen eine Verformung affin zu einer Sinusfunktion und bei einer exzentrisch belasteten Stütze eine parabolische Verformung anzunehmen (Kapitel 3.3.2). Die Beziehung zwischen der Stützenverfor-

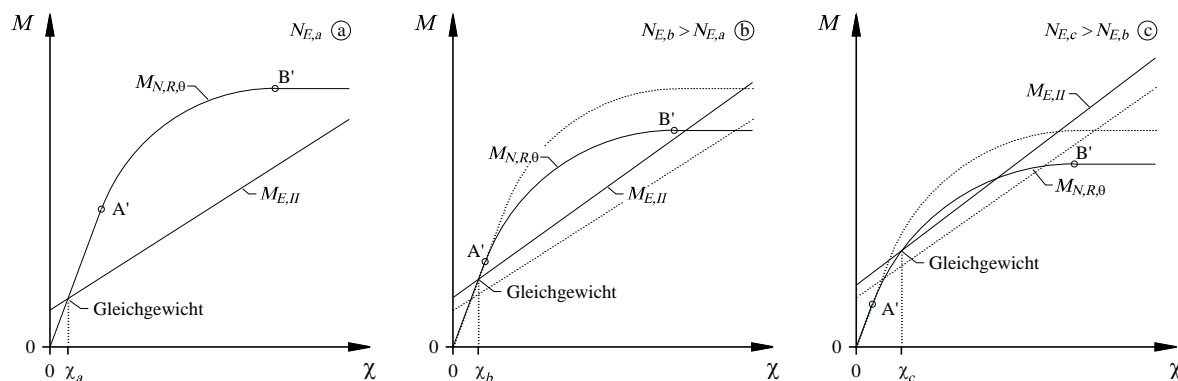


Abb. 4-11: Gleichgewicht der inneren Widerstandsmomente mit den von aussen einwirkenden Biegemomenten für unterschiedlich grosse Belastung infolge der Normalkraft N_E .

mung und deren Krümmung in Stützenmitte wird somit mit den Gleichungen 3.11 a und 3.11 b beschrieben. Die Gegenüberstellung der einwirkenden Kräfte 2^{ter} Ordnung (Gl. 3.10) mit den inneren Widerstandskräften (Gl. 4.26) erfolgt in Funktion der Stützenverformung gemäss Abbildung 3-4. Die Stabilität ist gesichert, wenn ein Verformungszustand gefunden werden kann, der die treibenden mit den rückhaltenden Kräften ins Gleichgewicht bringt. Würde demzufolge die Momenten-Krümmungs-Beziehung nur bis zum Fixpunkt A' berücksichtigt, wäre ein Überschreiten der Proportionalitätsgrenze in der Stütze nicht möglich, was zur elastischen Lösung gemäss Gleichung 3.6 führen würde.

Für eine gegebene Belastung N_E der Stütze kann mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell die Stabilität ohne einen iterativen Berechnungsvorgang überprüft werden. Zudem erlaubt es, den Verformungszustand der Stütze für jeden Belastungszustand, der nicht zu einem Versagen führt, abzuschätzen. Zwei ausgearbeitete Beispiele zur Berechnung der Traglast und der Verformung zentrisch und exzentrisch belasteter Stützen mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell sind im Anhang E enthalten. Eine schrittweise Steigerung der axialen Belastung N_E ermöglicht, den gesamten Last-Verformungs-Pfad, sowie die maximale Traglast zu berechnen. Solche Last-Verformungs-Beziehungen für zentrisch gedrückte Stützen mit unterschiedlichen geometrischen Imperfektionen sind in Abbildung 4-10 dargestellt (gestrichelte Linie). Diesen gegenübergestellt sind die Ergebnisse der iterativen Berechnungen des reduzierten Gleichgewichtsmodells. Insbesondere bei einer Belastung um die starke Achse der Stütze liegen die Ergebnisse des reduzierten denjenigen des vereinfachten Gleichgewichtsmodells sehr nahe, was auf die gute Abbildung des Momenten-Krümmungs-Verhaltens (Abb. 4-9 links) durch den elliptischen Ansatz (Gl. 4.26) zurückzuführen ist. Bei der Belastung um die schwache Achse der Stütze ist besonders bei grösseren geometrischen Imperfektionen eine deutliche Abweichung in der Beschreibung der Last-Verformungs-Beziehung durch das reduzierte und das vereinfachte Gleichgewichtsmodell zu erkennen (Abb. 4-10 rechts). Dies widerspiegelt die ungenauere Annäherung der Momenten-Krümmungs-Beziehung in Funktion der Normalkraft N_E (Abb. 4-9 rechts). Solange die einwirkende Normalkraft klein bleibt und die Randspannungen im Stützenquerschnitt die Proportionalitätsgrenze nicht überschreiten, wird sich der Gleichgewichtszustand im Momenten-Krümmungs-Diagramm unterhalb des ersten Fixpunktes A' befinden. Dies ist in Abbildung 4-11 (a) und (b) der Fall. Da der Fixpunkt A' innerhalb der Modellannahmen der genauen Lösung entspricht, wird auch die Last-Verformungs-Beziehung der genauen Lösung folgen. Aus Abbildung 4-10 ist ersichtlich, dass diese der elastischen Lösung (Gl. 3.2) folgt, solange sämtliche Spannungen im Querschnitt im elastischen Bereich bleiben. Wird die Normalkraft N_E grösser, so wird sich das Gleichgewicht bei einer grösseren Stützenverformung einstellen. Kommt es zu einer Teilplastifizierung des Querschnittes, wird sich das Gleichgewicht zwischen den Fixpunkten A' und B' einstellen. Nun ist die Annahme der Momenten-Krümmungs-Funktion entscheidend für die Berechnung der Last-Verformungs-Beziehung. Da der vorgeschlagene elliptische Ansatz zur Annäherung der Momenten-Krümmungs-Beziehung die Ergebnisse des reduzierten Gleichgewichtsmodells nicht genau abbilden kann (Abb. 4-9

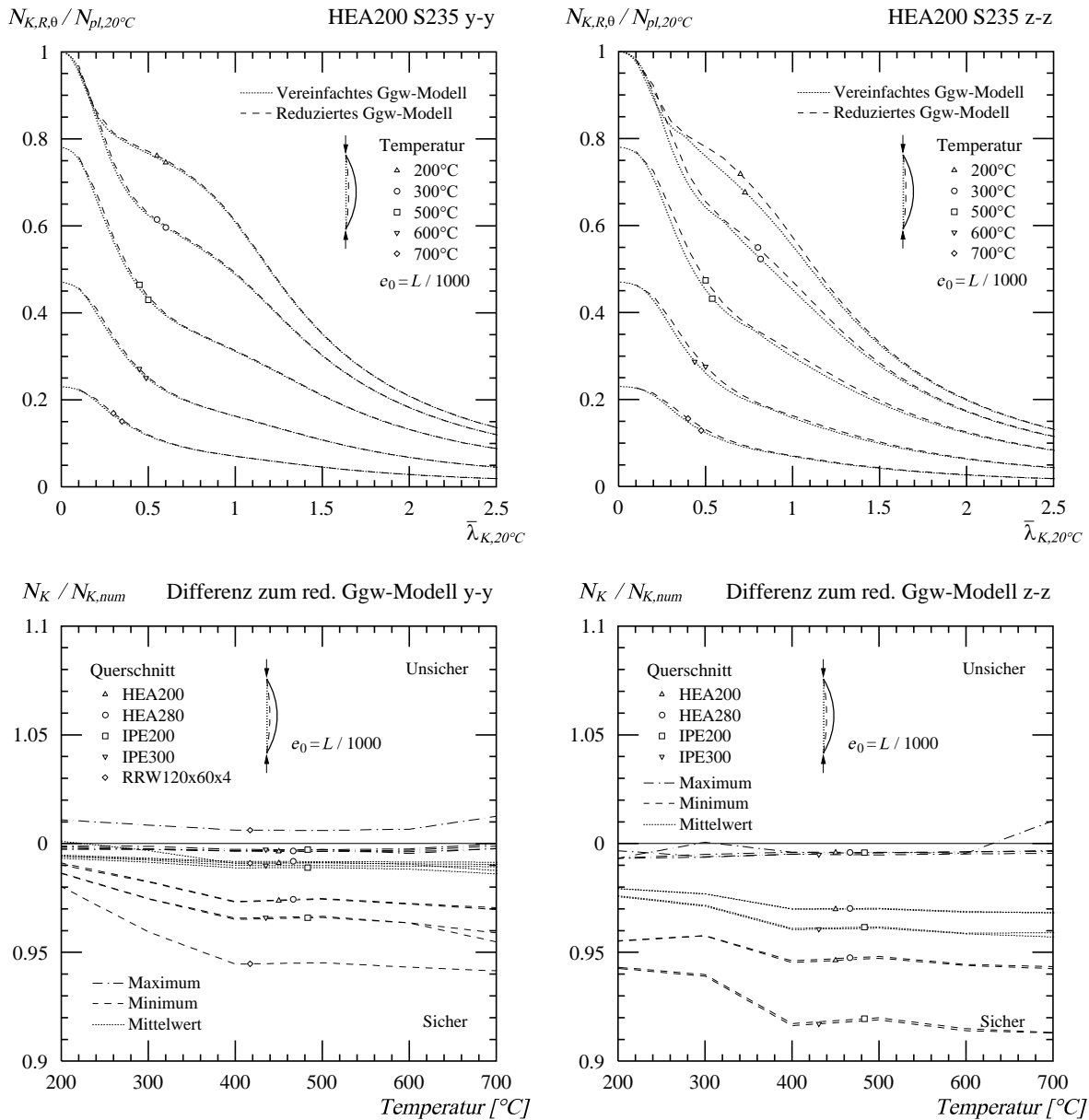


Abb. 4-12: Vergleich der Traglasten des reduzierten mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell. Oben: Knickspannungskurven. Unten: Maximale und minimale Differenz in Funktion der Temperatur.

rechts), kommt es zu Unterschieden bei der Beschreibung des Last-Verformungs-Pfades (Abb. 4-10 rechts). Insbesondere bei grösseren geometrischen Imperfektionen entstehen grössere Biegemomente, welche dazu führen, dass sich das Gleichgewicht bei grösseren Krümmungen und dementsprechend eher im nichtlinearen Bereich der Momenten-Krümmungs-Beziehung einstellen wird.

Für zentrisch belastete Stützen mit kleinen Imperfektionen ist eine präzise Abbildung des nichtlinearen Bereichs der Momenten-Krümmungs-Beziehung nicht von zentraler Bedeutung, da die maximalen Traglasten bei kleinen Verformungen erreicht werden. In Abbildung 4-12 oben sind die Traglasten einer zentrisch belasteten HEA200 Stütze für unterschiedliche Temperaturen und Schlankheiten mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell berechnet und mit den Ergebnissen des reduzierten Gleichgewichtsmodells (Kapitel 3.3.1) verglichen. Bei der Berechnung der Traglasten ist bei Stützen, die um die starke Achse belastet werden, eine bessere Übereinstimmung vorhanden als bei Stützen, die um die schwache Achse belastet sind. Dies widerspiegelt wiederum die Güte der Annäherung der Momenten-Krümmungs-Beziehung in Abbildung 4-9. Die Unterschiede in den Ergebnissen des vereinfachten und jenen des reduzierten Gleichgewichtsmodells bleiben jedoch für sämtliche Temperaturen sehr klein. In Abbildung 4-12 unten ist für unter-

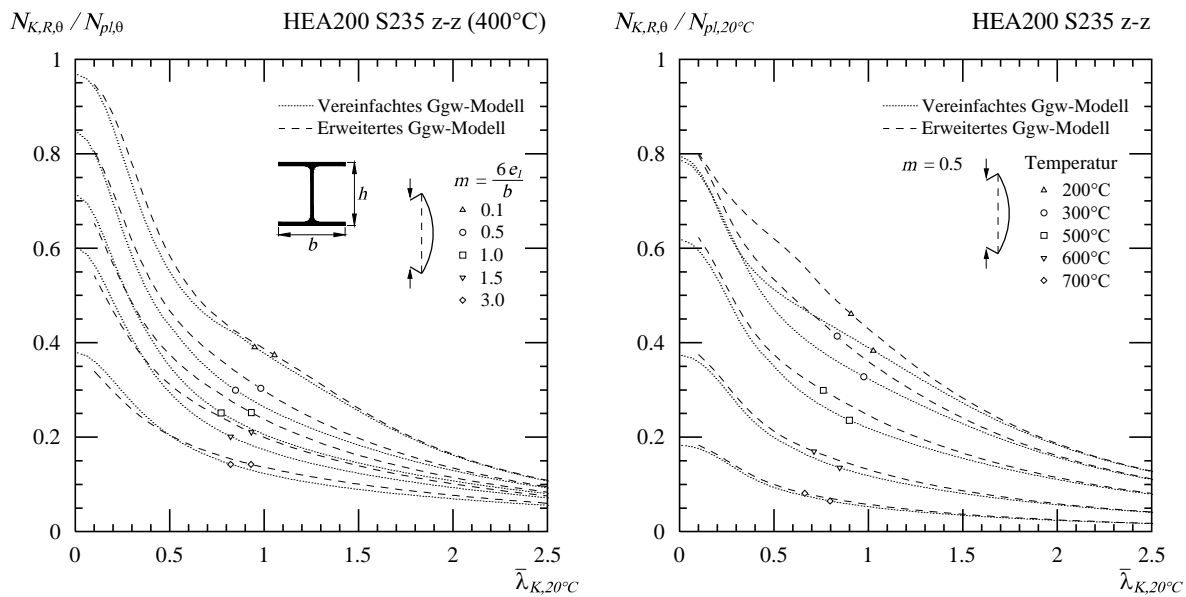


Abb. 4-13: Knickkurven der exzentrisch belasteten Stützen für unterschiedliche Exzentrizitäten und Temperaturen. Vergleich zwischen dem vereinfachten mit dem erweiterten Gleichgewichtsmodell.

schiedliche Stützenprofile die Bandbreite der Abweichungen der Traglasten in Funktion der Temperatur dargestellt. Für jede Temperatur ist die maximale und minimale Abweichung der Ergebnisse der beiden Modelle für Stützen mit einer bei Raumtemperatur bezogenen Schlankheit kleiner als 2.5 berechnet worden. Das Verhältnis zwischen den Traglasten $N_K/N_{K,num}$ ist analog zu Gleichung 4.19 berechnet. Die Differenzen der Ergebnisse können nun in Funktion der Temperatur durch eine Bandbreite, die durch die maximale und minimale Abweichung gegeben ist, dargestellt werden (Abb. 4-12 unten). Zudem ist eine mittlere Abweichung über alle Schlankheiten für jede einzelne Temperatur berechnet. Für die ausgewählten Stützenquerschnitte, welche um die starke Achse knicken (links), liegen die mittleren Traglasten des vereinfachten Gleichgewichtsmodells etwa 1% tiefer als die Ergebnisse des reduzierten Gleichgewichtsmodells. Ausser beim rechteckigen Hohlquerschnitt RRW120x60x4 liegen alle Traglasten des vereinfachten Gleichgewichtsmodells auf der sicheren Seite, wobei die Abweichung maximal 5% beträgt. Beim rechteckigen Hohlquerschnitt kommt es zu einer grösseren Bandbreite, wobei die Traglasten mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell diejenigen des reduzierten Modells maximal 1% übertreffen und maximal 6% unterschreiten. Bei Stützen, die um die schwache Achse belastet werden, ist die Streuung grösser, wobei mit einer Ausnahme alle Traglasten tiefer als die Ergebnisse des reduzierten Gleichgewichtsmodells liegen. Bei den IPE-Profilen werden diese bei sehr hohen Temperaturen bis zu 8% unterschätzt. Durchschnittlich liegen die Traglasten des vereinfachten Gleichgewichtsmodells 3 bis 4% tiefer als jene des reduzierten Gleichgewichtsmodells.

Wie aus der Abbildung 4-12 unten erkennbar, sind die Abweichungen systematisch und für ähnliche Querschnittstypen gleich. Dies ist auf den mechanischen Hintergrund des vereinfachten Berechnungsmodells zurückzuführen und auf die Tatsache, dass das nichtlineare Materialverhalten durch die Bestimmung der Fixpunkte A' und B' bei der Momenten-Krümmungs-Beziehung explizit berücksichtigt wird. Da das vereinfachte Gleichgewichtsmodell stets die Verträglichkeits- und die Gleichgewichtsbedingungen für das gegebene Stoffgesetz erfüllt, wird die obere Grenze der Traglast, welche durch die Verzweigungslast nach Engesser-Kármán gegeben ist, nie überschritten. Dies wird durch die Bestimmung der Steifigkeit $T_K I$ in der Momenten-Krümmungs-Beziehung sichergestellt.

In Abbildung 4-13 sind die Knickkurven von exzentrisch belasteten Stützen für unterschiedlichen Temperaturen (rechts) und Exzentrizitäten (links) dargestellt. Im Allgemeinen werden die Traglasten der exzentrisch gedrückten Stützen mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell gut angenähert. Die Unterschiede zwischen dem vereinfachten und dem erweiterten Modell sind

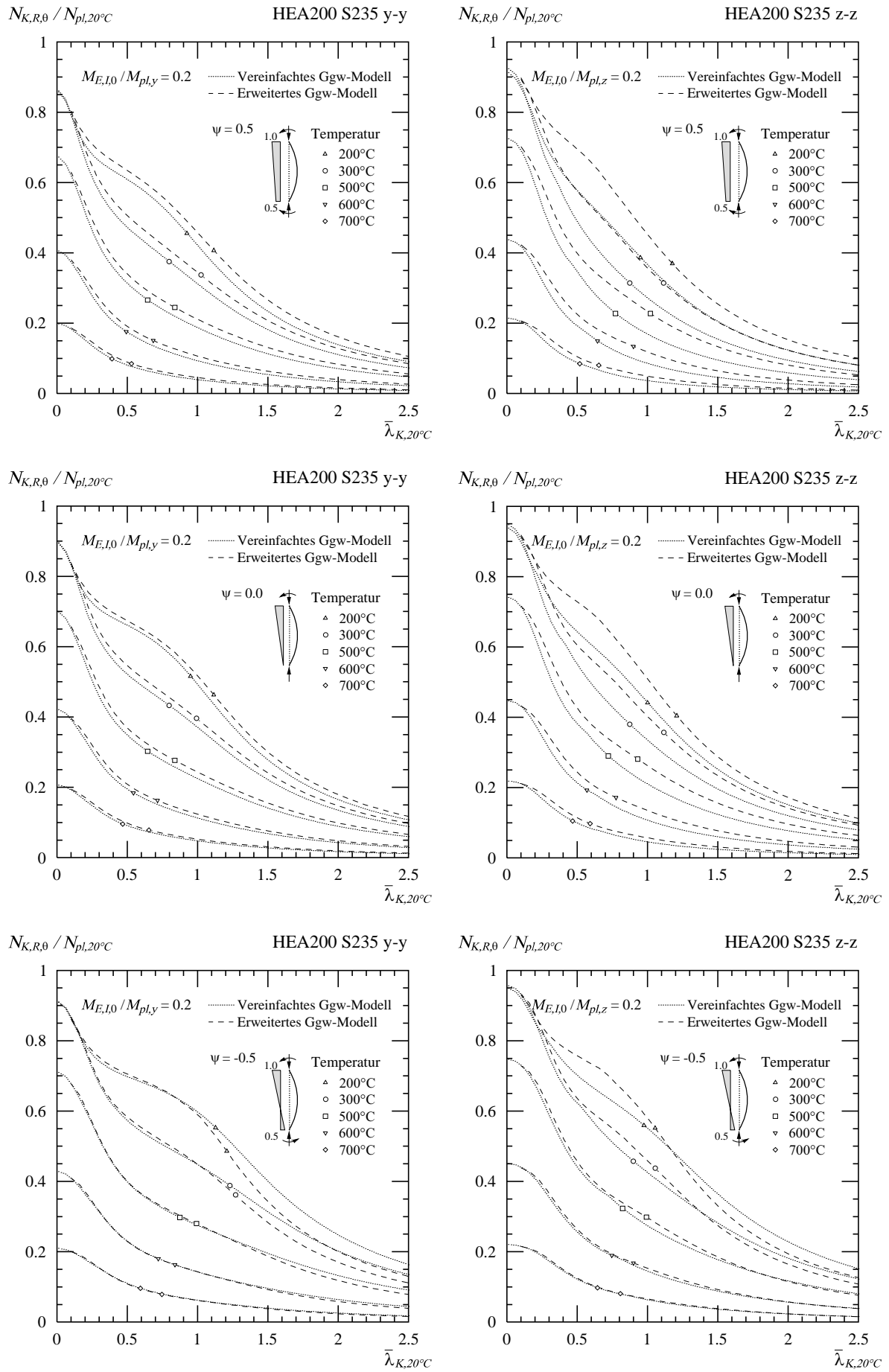


Abb. 4-14: Knickkurven asymmetrisch belasteter Stützen bei unterschiedlichen Temperaturen und unterschiedlich linear verteilten Biegemomenten. Vergleich der Traglasten des vereinfachten Gleichgewichtsmodells mit den Ergebnissen des erweiterten Gleichgewichtsmodells.

jedoch grösser als bei zentrisch gedrückten Stützen, da durch die zusätzliche Biegebelastung infolge der Lastexzentrizität, grössere Krümmungen im Stützenquerschnitt erzwungen werden. Dadurch wird sich das Gleichgewicht zwischen den von aussen einwirkenden Biegemomenten und den inneren Widerstandsmomenten mehr vom Fixpunkt A' entfernen, als dies bei den zentrisch gedrückten Stützen der Fall ist. Dieser nichtlineare Bereich in der Momenten-Krümmungs-Beziehung ist mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell schwieriger abzubilden (Abb. 4-9). Abweichungen haben einen direkten Einfluss auf die Traglasten gedrückter Stützen, was im Gegensatz zu den zentrisch gedrückten Stützen zu grösseren Unterschieden in den Knickkurven führt (Abb. 4-13). Insbesondere bei den niedrigen Temperaturen wird der Biege widerstand des Querschnittes in Funktion der Krümmung durch das vereinfachte Gleichgewichtsmodell stark unterschätzt (Abb. 4-9 oben), was sich in einer Unterschätzung der Traglast der gedrückten Stützen zeigt (Abb. 4-13).

Asymmetrische Belastung, linearer Momentenverlauf

Mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell können auch Stützen betrachtet werden, die durch eine Normalkraft und ein asymmetrisch linear verteiltes Biegemoment 1^{ter} Ordnung belastet sind. Wie schon beim reduzierten Gleichgewichtsmodell erläutert (Kapitel 3.4.3), muss bei diesen Stützen eine Annahme zur Verformungsfigur und zur Lage des meist ausgelenkten Stützenquerschnitts getroffen werden. Da sich das vereinfachte Gleichgewichtsmodell lediglich durch die Berechnung der Momenten-Krümmungs-Beziehung vom reduzierten Gleichgewichtsmodell unterscheidet, können die gleichen Annahmen zur geometrischen Form der Stützenbiegeline getroffen werden. Die Verformungsfigur wird somit nach Gleichung 3.23 bestimmt, während die Lage des meist ausgelenkten Stützenquerschnittes mit Gleichung 3.24 zu berechnen ist. Die Beziehung zwischen der Verformung w und der Krümmung χ beim meist ausgelenkten Stützenquerschnitt wird mit der Variablen ω gemäss Gleichung 3.25 beschrieben.

Die Traglasten asymmetrisch belasteter Stützen sind mit dem vereinfachten und dem erweiterten Gleichgewichtsmodell für unterschiedliche Temperaturen und Schlankheiten berechnet und in Abbildung 4-14 gegenübergestellt. Bei Stützen, die um die starke Achse belastet werden (links), ist eine sehr gute Übereinstimmung der Resultate der beiden Modelle ersichtlich, mit Ausnahme der Stützen, welche bei tiefen Temperaturen durch eine Momentenverteilung $\psi = -0.5$ belastet sind. Für positive Werte des Parameters ψ , welcher die Verteilung der Biegemomente beschreibt (Abb. 3-15), ergeben sich aus dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell Traglasten, die etwas tiefer liegen als diejenigen des erweiterten Gleichgewichtsmodells. Dies liegt einerseits in der Wahl der Verformungsfigur, die keine Konzentration der Krümmungen in den meist beanspruchten Stützenquerschnitten erlaubt, und andererseits in der teilweise ungenauen Abbildung der Momenten-Krümmungs-Beziehung durch das vereinfachte Gleichgewichtsmodell. Dennoch können die Traglasten mit dem vereinfachten Modell sehr gut angenähert werden. Bei Stützen, die um ihre schwache Achse belastet werden (Abb. 4-14 rechts), ist die Ungenauigkeit in der Berechnung der Traglasten grösser. Die Ursache liegt hauptsächlich in der grösseren Schwierigkeit die Momenten-Krümmungs-Beziehung durch das vereinfachte analytische Modell abzubilden, besonders bei tiefen Temperaturen und grossen Krümmungen. So kommt es zu einer starken Unterschätzung der Traglasten bei den Stützen, die zusätzlich zur Normalkraft durch einen hohen Anteil an Biegung belastet werden. Bei kleineren Werten des Parameters ψ verbessert sich die Übereinstimmung der Ergebnisse der beiden Modelle. Stützen, die sowohl durch positive wie auch negative Biegemomente 1^{ter} Ordnung belastet werden (Abb. 4-14 unten), weisen bei kleiner Normalkraftbelastung eine geschwungene Verformungsfigur auf. Diese erzeugt grosse Krümmungen entlang der Stützenachse, ohne dass diese grosse Verformungen aufweist. Steigt die Belastung durch die Normalkraft, kommt es infolge der Effekte 2^{ter} Ordnung zu einer Verschiebung des Wendepunktes der Verfor-

mungsfigur in Richtung Auflager. Dies verursacht ein starkes Anwachsen der Stützensauslenkung, ohne dass sich die Krümmung im meist beanspruchten Querschnitt stark verändert. Somit verändert sich die Beziehung zwischen der Stützensauslenkung und der Stützenverformung, wie dies beim reduzierten Gleichgewichtsmodell zu beobachten ist (Abb. 3-16 rechts). Die Verwendung des vereinfachten Gleichgewichtsmodells ist deswegen nur für positive Werte ψ zu empfehlen, obwohl die Übereinstimmung der Traglasten in Abbildung 4-14 unten gut ist.

4.3 Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

- Die Bemessungsverfahren des Eurocodes zur Berechnung der Knicklast von Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten, sei es für Stahlstützen im Brandfall oder Stützen aus Aluminium oder hochlegiertem Stahl bei Raumtemperatur, basieren auf Berechnungsmodellen für linear elastisches Materialverhalten. Die Nichtlinearität des Materialverhaltens ist in diesen Modellen durch die Wahl von Ersatzimperfektionen implizit berücksichtigt.
- Die Bemessungsmodelle des Eurocodes und der SIA Normen für die Berechnung der Traglast zentrisch gedrückter Stützen im Brandfall sind sehr einfach in ihrer Anwendung, bekunden jedoch Mühe, die Traglasten bei unterschiedlichen Temperaturen korrekt zu erfassen. Für Stützen mittlerer Schlankheit wird durch die Bemessungsmodelle beider Normen der obere Grenzwert der Traglast, gegeben durch die Verzweigungslast nach Engesser-Kármán, teilweise überschritten.
- Das Modell nach Toh erlaubt die Berechnung der Traglast von zentrisch und exzentrisch gedrückten Stahlstützen im Brandfall. Das Modell berücksichtigt jedoch das nichtlineare Materialverhalten nicht explizit und berechnet Traglasten, die bei gedrungenen Stützen den oberen Grenzwert (Verzweigungslast) überschreiten.
- Das vereinfachte Spannungsmodell zur Berechnung zentrisch gedrückter Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten ist in seiner Anwendung sehr einfach, verletzt jedoch die Verträglichkeitsbedingungen bei Stützen mit einer bezogenen Schlankheit kleiner als die Grenzschlankheit. Dieses Modell berechnet die Randspannungen im meist beanspruchten Querschnitt nach der elastischen Theorie 2^{ter} Ordnung und begrenzt diese mit einem variablen Grenzwert in Funktion der Stützenschlankheit. Das vereinfachte Spannungsmodell erlaubt die Abschätzung der Traglast zentrisch gedrückter Stahlstützen im Brandfall mit einer Abweichung zur genauen Lösung bei gedrungenen Stützen von etwa 10%.
- Das vereinfachte Gleichgewichtsmodell entspricht dem reduzierten Gleichgewichtsmodell, wobei die Momenten-Krümmungs-Beziehung durch ein einfaches Modell angenähert wird. Dieses beschreibt die Momenten-Krümmungs-Beziehung mit einer initialen Biegesteifigkeit für nichtlineares Materialverhalten nach Engesser-Kármán und einer elliptischen Funktion bis zum Erreichen des voll plastischen Tragwiderstandes. Die iterative Berechnung wird somit vermieden.
- Das vereinfachte Gleichgewichtsmodell erlaubt die Überprüfung der Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten. Zudem erlaubt es eine Abschätzung der Stützenverformung für eine gegebene Belastung und somit die Berechnung des gesamten Last-Verformungs-Pfades der Stütze. Mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell kann die Stabilität von Stützen sehr gut beurteilt werden.
- Das vereinfachte Gleichgewichtsmodell ist zwar in der Berechnung aufwändiger als das vereinfachte Spannungsmodell, ermöglicht jedoch eine bessere Beurteilung der auf die Stütze einwirkenden und rückhaltenden Kräfte, sowie eine Abschätzung der Schnittkräfte und Verformungen 2^{ter} Ordnung mit Berücksichtigung des nichtlinearen Materialverhaltens.

5 Verzweigungslast der Platte

Das Tragverhalten von Stützen oder Trägern wird unter anderem stark durch die Querschnittsstabilität beeinflusst. Beult der Querschnitt aus, reduziert sich die Steifigkeit des Tragelementes, welche bei der Betrachtung von globalen Stabilitätsproblemen wie Knicken oder Kippen eine entscheidende Rolle spielt. Im Kapitel 3 zum Tragverhalten von gedrückten Stützen wird aufgezeigt, wie es durch die Effekte 2^{ter} Ordnung zu einer Mehrbelastung der äusseren Querschnittsbereiche der Stütze kommt. Tritt nun ein lokales Stabilitätsproblem bei den meist beanspruchten Querschnittselementen auf, so führt dies neben der Reduktion des Querschnittswiderstandes zu einer starken Reduktion der Steifigkeit und dementsprechend zu grösseren Verformungen, die je nach Schlankheit der Stütze zum Versagen führen können. Bei der Betrachtung globaler Stabilitätsprobleme ist somit die Steifigkeitsänderung der einzelnen Querschnittselemente infolge der Belastung von grossem Interesse. Einerseits verändert sich die Steifigkeit dieser Elemente infolge der nichtlinearen Materialbeziehung, wie dies bei den Berechnungsmethoden zum Knicken in den Kapiteln 3 und 4 schon berücksichtigt wird, andererseits wird die Steifigkeit durch die geometrische Stabilität der Querschnittselemente selber beeinflusst.

In diesem Kapitel gilt die Aufmerksamkeit derjenigen Belastung, die zum Ausbeulen der Querschnittselemente und somit zu einem zusätzlichen Steifigkeitsverlust des gesamten Systems führt. Das Augenmerk gilt dem Tragverhalten von dreiseitig und vierseitig gelenkig gelagerten Platten, welche in ihrer Ebene durch eine linear verteilte Belastung beansprucht werden. Nach einem geschichtlichen Rückblick auf schon vorhandene Berechnungsmodelle zur Verzweigungslast von Platten werden zwei numerische Berechnungsmodelle erläutert, welche die Grundlage bilden zur Entwicklung neuer analytischer Modelle zur Berechnung der Verzweigungslast von Platten mit nichtlinearem Materialverhalten. Zum Schluss wird ein vereinfachtes analytisches Berechnungsmodell vorgestellt, das eine unkomplizierte Näherungslösung des Verzweigungsproblems von dreiseitig und vierseitig gelenkig gelagerten Platten mit linear verteilter Belastung ermöglicht.

5.1 Geschichtlicher Rückblick

Zu den ersten, welche sich mit der Plattentheorien beschäftigten, gehören Leonhard Euler und Jakob Bernoulli. Leonhard Euler untersuchte die Durchbiegung und die Schwingung biegeweicher Membranen und Jakob Bernoulli suchte eine Erklärung zu den Schwingungsversuchen von Chladni an biegesteifen Platten [44]. Diese Versuche stammen aus dem Jahre 1787 und sind die ersten, welche die Beulfiguren von Platten bei unterschiedlichen Lagerungsbedingungen sichtbar machten. In den folgenden Jahren wurde insbesondere in Frankreich eine mathematische Lösung für das Beulproblem gesucht. Es dauerte jedoch bis zum Jahr 1820, als Navier für allseitig gelenkig gelagerte Rechteckplatten mit gleichmässig verteilter Belastung eine zufriedenstellende Lösung fand. Zudem stellte er für eine an den Rändern gedrückte Platte die Differentialgleichung auf und lieferte somit einen wesentlichen Beitrag für folgende Forschungsarbeiten. Weitere 30 Jahre später unterstrich Kirchhoff die Richtigkeit der Plattendifferentialgleichung von Navier, wobei er diese auch für Platten mit grossen Durchbiegungen erweiterte. In den folgenden Jahren befassten sich

weitere Forscher mit der Plattentheorie, unter anderem Airy, Bryan und Timoshenko. Insbesondere der letztgenannte befasste sich mit der Verzweigungslast von Platten und gab diese in einem umfassenden Werk [73] für Rechteckplatten mit unterschiedlichen kinematischen und statischen Randbedingungen an. Weil die strenge Lösung der Plattendifferentialgleichung schwierig zu finden ist, entwickelte Timoshenko eine Näherungsmethode, welche auf der Energiebetrachtung des Systems basiert. Dabei wird zur Bestimmung der Verzweigungslast der Platte die Zunahme der Formänderungsarbeit beim Ausbeulen, der freigesetzten Arbeit durch die Verschiebung der von aussen an das System angreifenden Druckkraft gleichgesetzt. Durch eine Variation der Verformungsfiguren konnte Timoshenko für die unterschiedlichen kinematischen und statischen Randbedingungen der Platten deren Verzweigungslast berechnen.

Die Lösungen des Verzweigungsproblems von Timoshenko basieren auf linear elastischem Materialverhalten und haben nur solange Gültigkeit, bis die Vergleichsspannung im Plattenquerschnitt nirgends die Proportionalitätsgrenze überschreitet. Dies ist bei Platten mit einer grösseren bezogenen Schlankheit als die Grenzschlankheit $\bar{\lambda}_{P,grenz}$ der Fall. Bei der Betrachtung von Platten mit nichtlinearem Materialverhalten, wie zum Beispiel Stahl bei erhöhter Temperatur, kann die Grenzschlankheit mit folgender Gleichung angegeben werden.

$$\bar{\lambda}_{P,grenz} = \sqrt{\frac{k_E}{k_P}} \quad (5.1)$$

Obwohl es sich bei Platten, im Gegensatz zum Knickstab, um ein zweidimensionales Stabilitätsproblem handelt, entspricht die Grenzschlankheit für Platten $\bar{\lambda}_{P,grenz}$ genau derjenigen für Knickstäbe $\bar{\lambda}_{K,grenz}$ (Gl. 2.6 und Tab. 2-1). Beide sind einzig eine Funktion des Verhältnisses der Reduktionsfaktoren des E-Moduls und der Proportionalitätsgrenze. Ist die Platte genügend gedrunen, kommt es vor dem Erreichen der Verzweigungslast zu Plastifizierungen, die bei den Berechnungen berücksichtigt werden müssen. Dies erkannte auch Bleich, der im Jahre 1924 seine Theorien zur Verzweigungslast von Platten mit nichtlinearem Materialverhalten veröffentlichte [6]. Während Forscher wie Bijlaard und Stowell eine eher rationale Lösung des Problems suchten, versuchte Bleich eine einfach anwendbare Näherungslösung zu finden. In seinen Untersuchungen, befasste er sich hauptsächlich mit der durch gleichmässige Linienlast beanspruchten orthotropen Platte, mit welcher er das zweidimensionale plastische Verhalten abzubilden versuchte. Die von ihm vorgeschlagene Näherungslösung entspricht der Lösung der isotrop elastischen Platte, ergänzt durch den Beiwert $\sqrt{\tau_E}$ (Gl. 5.2). Dieser Beiwert entspricht in seinen ersten Publikationen dem Verhältnis des Knickmoduls T_K nach Engesser-Kármán (Kapitel 2.3.1) zum E-Modul E , während er in den späteren Publikationen den Knickmodul durch den Tangentenmodul T ersetzte.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E \sqrt{\tau_E}}{12(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^2 \cdot k \quad \text{mit } \tau_E = \frac{T}{E} \quad (5.2)$$

Dabei bezeichnet b die Plattenbreite, t die Plattendicke (Abb. 5-1) und k der Beulfaktor, welcher die Lagerungs- und Belastungsbedingung der Platte beschreibt. Da der Tangentenmodul T von der Belastung σ_{cr} abhängig ist, muss für eine gegebene Plattenschlankheit die Verzweigungslast iterativ gesucht werden, während für eine gegebene Belastung die zugehörige kritische Plattenschlankheit analytisch ohne Iteration berechnet werden kann. Die Unsicherheiten der vereinfachten Lösung von Bleich betreffen einerseits den eher willkürlich gewählten Beiwert $\sqrt{\tau_E}$, sowie andererseits die Annahme der von der Verzweigungsspannung unabhängigen Querdehnzahl ν im plastischen Bereich. Zudem wird der Beulfaktor k in Gleichung 5.2 mit der Lösung der isotrop linear elastischen Platte berechnet. Dies vereinfacht zwar die Berechnungen, verunmöglicht jedoch die Berücksichtigung von variablen Belastungen, die nur in den meist beanspruchten Plattenbereichen

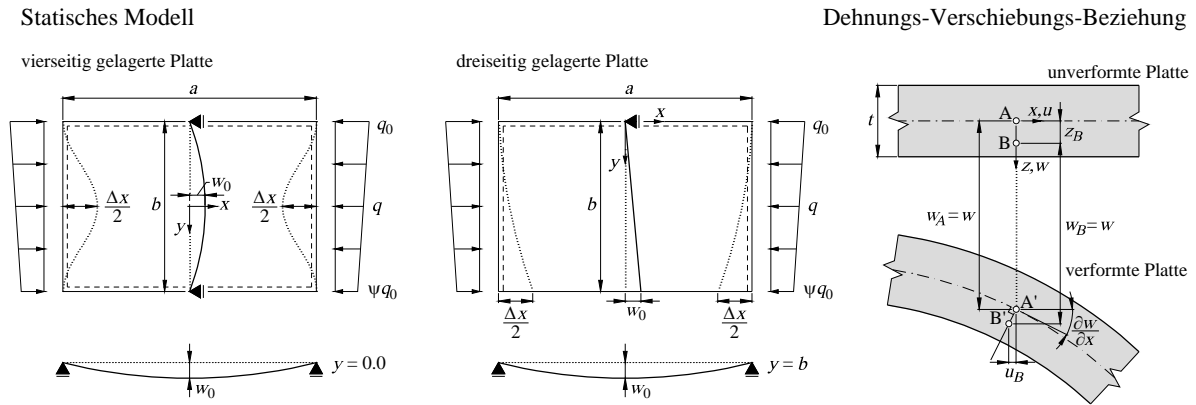


Abb. 5-1: Statisches Modell der Platte mit linear verteilter Belastung, Definition der Koordinaten sowie Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung der verformten Platte.

plastische Dehnungen verursachen, während die weniger beanspruchten Plattenbereiche elastisch bleiben.

Im Gegensatz zu Bleich betrachtet Chwalla das Verhalten der im nichtlinearen Materialbereich belasteten Platte stets als isotrop, wobei der E-Modul in Funktion der Belastung in allen Richtungen durch den Tangentenmodul T ersetzt wird. Auch bei diesem Ansatz treten die gleichen Unsicherheiten wie bei der Lösung nach Bleich auf. Die Lösung nach Chwalla ergibt im Vergleich zur Lösung nach Bleich im nichtlinearen Bereich tiefere Verzweigungslasten (Abb. 5-2 links), da die versteifende Wirkung quer zur Belastungsrichtung mit einer kleineren Steifigkeit angenommen wird.

Die Grundlage zur Bestätigung dieser Berechnungsmodelle bildete eine Serie von 359 Versuchen an Aluminiumplatten, die an der ETH Zürich durch Kollbrunner durchgeführt und im Jahre 1946 veröffentlicht wurde [42]. Nebst verschiedener Schlankheiten und Breite-zu-Länge-Verhältnissen wurden unterschiedliche Lagerungsbedingungen untersucht. Durch seine Beobachtungen, insbesondere der sich verändernden Anzahl von sich ausbildenden Halbwellen beim Ausbeulen von Platten im nichtlinearen Bereich des Materialverhaltens, konnte er das anisotrope Verhalten solcher Platten bestätigen. Sowohl die Anzahl Halbwellen wie auch die Verzweigungslasten, welche in den Versuchen gemessen wurden, liegen zwischen den Werten der theoretischen Modelle von Chwalla und Bleich. Zudem beobachtete Kollbrunner bei seinen Versuchen, dass bei Platten, die im elastischen Bereich ausbeulen, eine starke Steigerung der Belastung im überkritischen Bereich möglich ist, während Platten, die im nichtlinearen Bereich ausbeulen, nur eine geringe Mehrbelastung tragen können.

Zeitgleich entwickelten mehrere Forscher weitere theoretische Modelle zur Berechnung der Verzweigungslast von Platten im nichtlinearen Bereich des Materials. An dieser Stelle sei insbesondere Iljuschin [25] erwähnt, der eine streng analytische Lösung für das Stabilitätsproblem im plastischen Bereich des Materialverhaltens erarbeitete. Diese wertvolle Arbeit wurde von Kollbrunner im zweiten Bericht der „Technische Kommission des Verbandes Schweizerischer Brückenbau- und Stahlhochbau-Unternehmungen“ erläutert und mit seinen eigenen Versuchen verglichen [43]. In den folgenden Jahren galt das Interesse der Forschung hauptsächlich der Berechnung des Tragwiderstandes von geometrisch imperfekten Platten, während das Verzweigungsproblem von ebenen Platten mit nichtlinearem Materialverhalten weniger Beachtung fand.

5.2 Numerische Berechnungsmodelle

Die numerischen Modelle beruhen auf der von Timoshenko [74] vorgeschlagenen Betrachtung der im System gespeicherten Energie. Durch Gleichsetzen der infolge kleiner Verformung an der Platte geleisteten inneren und äusseren Arbeit, kann das Verzweigungsproblem von Platten mit beliebigen kinematischen und statischen Randbedingungen gelöst werden. Die Modelle berücksichtigen den mehrdimensionalen Spannungszustand, wobei das nichtlineare Materialverhalten durch eine isotrope Verfestigung und dem Fliessgesetz nach von Mises angenähert wird.

Die zwei in der Folge erläuterten numerischen Berechnungsmodelle unterscheiden sich in der Berücksichtigung der elastischen Entlastung. Analog zu den Betrachtungen beim Knickstab, entspricht die Lösung des Verzweigungsproblems ohne Berücksichtigung der elastischen Entlastung der maximalen Belastung, für welche eine perfekt ebene Platte nicht ausbeult. Erst durch eine finite Verformung der Platte kommt es zu einer elastischen Entlastung, die einen Beitrag zur Plattensteifigkeit leistet und somit eine höhere Belastung ermöglicht. Obwohl, wie von Shanley gezeigt [64], dies nicht der theoretischen Lösung des Verzweigungsproblems entspricht, kommt dieser Lösung eine wichtige Bedeutung zu, denn sie beschreibt die maximale Last, die von der Platte aufgenommen werden kann, ohne dass Umlagerungen der inneren Kräfte benötigt werden, wie dies im überkritischen Bereich der Fall ist.

5.2.1 Modell mit Berücksichtigung der elastischen Entlastung

Das numerische Berechnungsmodell besteht hauptsächlich aus zwei Schritten. Im ersten wird der Spannungs- und Verzerrungszustand der unverformten Platte infolge der in der Plattenebene wirkenden Linienlast q berechnet. Da die Platte nur in x -Richtung belastet wird und sich entlang ihres gesamten Umfangs in y -Richtung frei verschieben kann, entsteht ein einachsiger Spannungszustand. Dieser wird durch die Spannung $\sigma_{x,0}$ beschrieben, während der dazugehörige räumliche Verzerrungszustand durch den Tensor $\epsilon_{ij,0}$ gegeben ist.

In einem zweiten Schritt wird die Platte durch eine infinitesimal kleine Verformung w und einer angenommenen Verformungsfigur von ihrer ebenen Lage ausgelenkt. Bei dieser Verformung entstehen zusätzliche Verzerrungen $\Delta\epsilon_{ij}$, die zusätzliche Spannungen $\Delta\sigma_{ij}$ verursachen. Genauere Angaben zu den verwendeten Materialmodellen sind im Anhang A enthalten. Aus den zusätzlichen Spannungen und Dehnungen lässt sich die Deformationsenergie respektive die infolge der Verformung geleistete innere Arbeit berechnen und der durch die Verschiebung der Angriffspunkte der Linienlast q geleisteten äusseren Arbeit gegenüberstellen. Heben sich diese gerade auf, so ist die gespeicherte Energie in der Platte gegenüber der Plattenverformung indifferent, was dem kritischen Zustand des Verzweigungsproblems entspricht. Die Belastung q stimmt dann mit der Verzweigungslast der Platte für die gegebenen statischen und kinematischen Randbedingungen überein. Bei dieser Berechnung hat die Annahme bezüglich der geometrischen Form der Mittelfläche der ausgebeulten Platte einen entscheidenden Einfluss auf die Verzweigungslast.

Die Berechnung der inneren Arbeit U_i infolge der infinitesimal kleinen Verformung w ergibt sich als Summe der am Volumenelement dV geleisteten Verformungsarbeit. Dafür wird das Plattenvolumen in allen drei Dimensionen in finite kleine Volumenelemente aufgeteilt. Für jedes dieser Elemente werden die zusätzlichen kleinen Verzerrungen $\Delta\epsilon_{ij}$ infolge der Plattenverformung w berechnet und dem ursprünglichen Verzerrungszustand $\epsilon_{ij,0}$ aus dem ersten Schritt überlagert.

$$\Delta\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{mit } u = -\frac{\partial w}{\partial x} z \quad (5.3a)$$

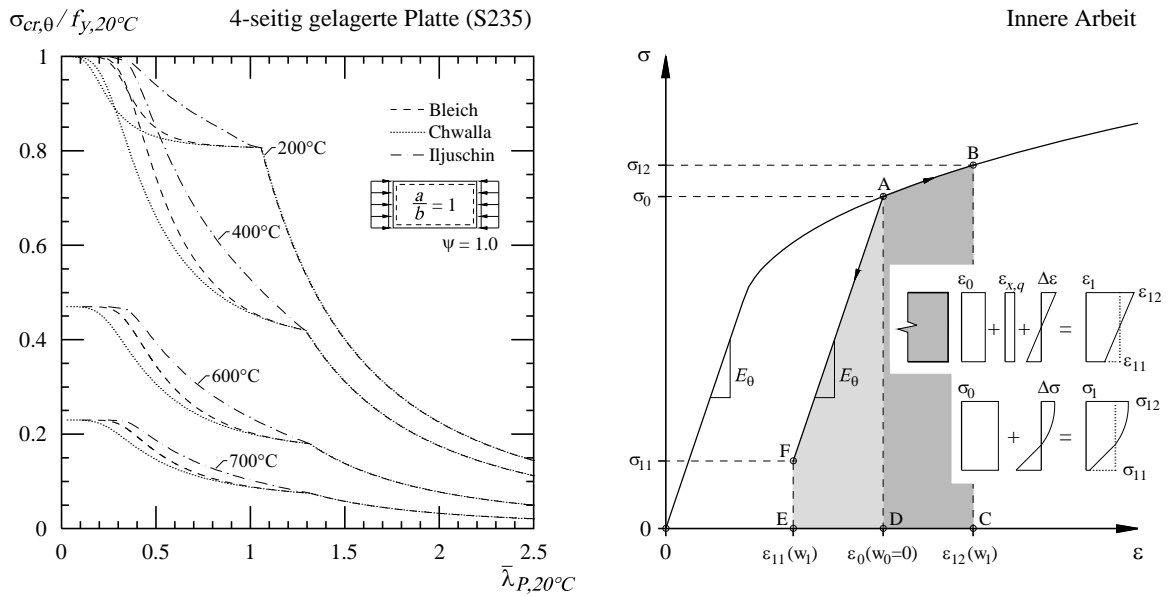


Abb. 5-2: Links: Vergleich der Berechnungsmodelle bei einer vierseitig gelenkig gelagerten Platte. Rechts: Berechnung der inneren Arbeit, welche am Volumenelement geleistet wird.

$$\Delta\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \text{mit } v = -\frac{\partial w}{\partial y} z \quad (5.3b)$$

$$\Delta\gamma_{xy} = \Delta\gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{und } \Delta\epsilon_{xy} = \frac{\Delta\gamma_{xy}}{2} \quad (5.3c)$$

Die kinematischen Beziehungen 5.3a bis 5.3c beruhen auf der Annahme, dass die Querschnitte eben bleiben (Navier-Bernoulli-Hypothese), sowie auf der Vereinfachung, dass alle Punkte einer zur Mittelfläche normalen Achse (Punkte A und B in Abb. 5-1 rechts), die gleiche vertikale Verschiebung w erfahren. Aus dem nun bekannten Verzerrungszustand wird mit den Materialmodellen des Anhangs A der zugehörige ebene Spannungszustand berechnet. Kommt es zu Plastifizierungen entstehen Spannungen σ_x , die integriert über die Plattendicke mit der Belastung q nicht im Gleichgewicht sind. Dies ist so, weil bei der elastischen Entlastung eine grössere Steifigkeit vorhanden ist und es somit für die gleichen Verzerrungen zu einer grösseren Reduktion der Spannungen kommt als in den Plattenbereichen, die eine Zunahme der Belastung erfahren (Abb. 5-2 rechts). Um dies zu korrigieren wird einzig in x-Richtung eine zusätzliche über die Plattendicke konstante Dehnung $\epsilon_{x,q}$ eingeführt. Diese wird iterativ so gesucht, bis das Gleichgewicht zwischen der äusseren Belastung q und den inneren Spannungen σ_x in jedem Punkt der Platte erfüllt ist.

Für die Berechnung der inneren Arbeit wird nun die an jedem Volumenelement geleistete Deformationsarbeit berechnet und summiert. Dabei werden alle drei Spannungs- und Dehnungskomponenten betrachtet, die den ebenen Spannungszustand beschreiben. In Abbildung 5-2 rechts ist die Berechnung der inneren Arbeit durch die schraffierte Flächen gekennzeichnet. Dabei wird unterschieden, ob ein Punkt in der Platte durch die Verformung zusätzlich belastet oder entlastet wird. Bei einer zusätzlichen Belastung entspricht die innere Arbeit der schraffierten Fläche ABCD, während bei einer Entlastung die innere Arbeit der Fläche ADEF entspricht. Durch Integration der Spannungen und Dehnungen über das Plattenvolumen kann die geleistete innere Arbeit U_i für jede gegebene Verformung berechnet werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die vierseitig und die dreiseitig gelenkig gelagerte Platte (Abb. 5-1) mit folgenden Verformungsfiguren betrachtet, wobei die Variablen m und n die Anzahl Halbwellen in x- beziehungsweise y-Richtung bezeichnen, während a und b den Kantenlängen der rechteckigen Platte entsprechen.

$$w(x, y) = w_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad \text{vierseitig gelenkig gelagert} \quad (5.4a)$$

$$w(x, y) = w_0 \cdot \frac{y}{b} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad \text{dreiseitig gelenkig gelagert} \quad (5.4b)$$

Durch die Verformung der Platte verschieben sich die Lastangriffspunkte der linear verteilten Linielast, wobei eine äussere Arbeit U_a geleistet wird. Die Verschiebung Δx (Abb. 5-1) ist einerseits von der Plattengeometrie und von der Verformungsfigur abhängig, andererseits aber auch von den zusätzlichen Stauchungen $\varepsilon_{x,q}$, die benötigt werden um in x-Richtung das Gleichgewicht zwischen den inneren Spannungen und der äusseren Belastung q herzustellen. Die Verschiebungen Δx können somit in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufgeteilt werden, wobei der letztere nur infolge der zusätzlichen Stauchungen $\varepsilon_{x,q}$ entsteht. Werden die Terme höherer Ordnung vernachlässigt, kann die folgende quadratische Beziehung der elastischen Verschiebung zur Plattenverformung erstellt werden.

$$\Delta x_{el} = a - \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} dx \approx \frac{1}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \quad (5.5)$$

$$\Delta x_{el} \approx w_0^2 \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{a}{4} \cdot \left(\cos \frac{n\pi y}{b}\right)^2 \quad \text{vierseitig gelenkig gelagert} \quad (5.5a)$$

$$\Delta x_{el} \approx w_0^2 \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{a}{4} \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^2 \quad \text{dreiseitig gelenkig gelagert} \quad (5.5b)$$

Durch Multiplikation der elastischen Verschiebung mit der linear verteilten Belastung q und Integration über die Plattenbreite ergeben sich folgende Ausdrücke für den elastischen Anteil der äusseren Arbeit. Dabei ist bei der dreiseitig gelenkig gelagerten Platte zu unterscheiden, ob sich bei der linear verteilten Belastung der kleinere Randwert ψq_0 beim freien Rand (Fall 1) oder beim gelenkig gelagerten Rand (Fall 2) befindet (Abb. 5-1 und Abb. 5-4 links).

$$U_{a,el} = -w_0^2 \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{ab}{16} \cdot q_0(1 + \psi) \quad \text{vierseitig gelenkig gelagert} \quad (5.6a)$$

$$U_{a,el} = -w_0^2 \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{ab}{48} \cdot q_0(\psi + 3) \quad \text{dreiseitig gelenkig gelagert (Fall 1)} \quad (5.6b)$$

$$U_{a,el} = -w_0^2 \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{ab}{48} \cdot q_0(3\psi + 1) \quad \text{dreiseitig gelenkig gelagert (Fall 2)} \quad (5.6c)$$

Wie oben ersichtlich, ist der elastische Anteil der äusseren Arbeit eine quadratische Funktion der Plattenverformung w_0 und hat stets ein negatives Vorzeichen, weil die äussere potentielle Energie der angreifenden Belastung durch die Verschiebung in x-Richtung abnimmt. Der inelastische Anteil der äusseren Arbeit ergibt sich aus der Integration der Stauchungen $\varepsilon_{x,q}$ und der Belastung q über das gesamte Plattenvolumen.

$$U_{a,\varepsilon} = - \int \left(\varepsilon_{x,q} \cdot \frac{q}{t} \right) dV \quad (5.7)$$

Die Verzweigungslast q_{cr} respektive die Verzweigungsspannung σ_{cr} entspricht derjenigen Belastung, bei welcher die Summe der inneren und äusseren Arbeit infolge der Plattenverformung verschwindet. Dies entspricht einem für die potentielle Energie der Platte gegenüber der Verformung gleichgültigen Zustand und somit der Definition des Verzweigungsproblems. Die Suche nach der Verzweigungslast erfordert jedoch bei nichtlinearem Materialverhalten einen iterativen Berechnungsprozess.

Mit der beschriebenen Berechnungsmethode wird der gesamte Spannungs- und Verzerrungszustand in der Platte erfasst. Dementsprechend ist die gegenseitige Beeinflussung zwischen den Spannungen in Längsrichtung, denjenigen in Querrichtung und den Schubspannungen berücksichtigt. Nebst dem mathematischen Modell zur Beschreibung des Materialverhaltens, muss eine Verformungsfigur der ausgebeulten Plattenmittelebene angenommen werden, wobei aus den möglichen Verformungsfiguren diejenige zu wählen ist, welche zur kleinsten Verzweigungslast führt. Da es sich um infinitesimal kleine Verformungen handelt und die ebene Platte einen homogenen Spannungs- und Verzerrungszustand erfährt, scheint bei der vierseitig gelenkig gelagerten Platte eine sinusförmige Verformung in beiden Richtungen respektive eine sinusförmige Verformung in x - und eine lineare Verformung in y -Richtung für die dreiseitig gelenkig gelagerte Platte sinnvoll zu sein.

Die Verzweigungslasten, welche sich durch dieses numerische Berechnungsverfahren ergeben, sind in Abbildung 5-3 für vierseitig und dreiseitig gelenkig gelagerte Platten in Funktion der Plattenschlankheit und der Belastung dargestellt. Es ist ersichtlich, dass bei schlanken Platten ($\bar{\lambda}_p > \bar{\lambda}_{p,grenz}$) das numerische Berechnungsmodell genau der elastischen Lösung entspricht, während bei gedrunghenen Platten die Verzweigungslasten infolge des nichtlinearen Materialverhaltens deutlich unterhalb der elastischen Lösung liegen. Dieser Unterschied wird kleiner bei Platten, die durch Druck und Biegung ($\psi < 1.0$) belastet werden. Dies, weil sich durch die ungleichförmige Belastung sich der plastische Bereich insbesondere in den stärker beanspruchten Bereichen der Platten ausbildet, während diejenigen Bereiche mit niedrigerer Belastung elastisch bleiben. Des Weiteren sind die Ergebnisse des numerischen Modells ohne Berücksichtigung der elastischen Entlastung dargestellt, sowie die Ergebnisse des analytischen Modells nach Iljuschin. Diese beiden Modelle werden im Kapitel 5.2.2 respektive im Kapitel 5.3.1 beschrieben.

5.2.2 Modell ohne Berücksichtigung der elastischen Entlastung

Wird die elastische Entlastung beim numerischen Berechnungsmodell nicht berücksichtigt, so ergibt sich in allen Richtungen eine über die Plattendicke konstante Steifigkeit. Dies erlaubt eine vereinfachte Berechnung, wobei das Berechnungsmodell wiederum aus den zwei Hauptschritten besteht, die im Kapitel 5.2.1 beschrieben sind. Während der erste Schritt zur Berechnung des eindimensionalen Spannungszustands an der ebene Platte unverändert bleibt, wird beim zweiten Schritt zur Berechnung des zweidimensionalen Spannungszustands der ausgebeulte Platte das Berechnungsverfahren geändert. In diesem Berechnungsschritt werden die Biegesteifigkeiten der Platte in Funktion der Initialspannung $\sigma_{x,0}$ mit Berücksichtigung des nichtlinearen Materialverhaltens berechnet. Nach wie vor wird das Materialverhalten durch eine isotrope Verfestigung und dem Fliessgesetz nach von Mises angenähert, wobei es sich bei dieser Problemstellung um einen zweidimensionalen Spannungszustand handelt (Anhang A). Zur Berechnung der Steifigkeiten in jedem Plattenpunkt infolge der Initialspannung $\sigma_{x,0}$, wird die Platte in ihrer Ebene in kleine Elemente mit der Dicke t und Fläche dA aufgeteilt. Für jedes dieser Elemente werden die insgesamt neun Steifigkeitskomponenten $\partial\sigma_i/\partial\varepsilon_j$ berechnet, wobei die Indizes i und j die drei Belastungsrichtungen x , y , und xy beschreiben. Bei dieser Berechnung werden die Elemente kleinen Dehnungen $\delta\varepsilon_x$, $\delta\varepsilon_y$ und $\delta\varepsilon_{xy}$ unterworfen, um die daraus resultierenden Spannungen $\delta\sigma_x$, $\delta\sigma_y$ und $\delta\sigma_{xy}$

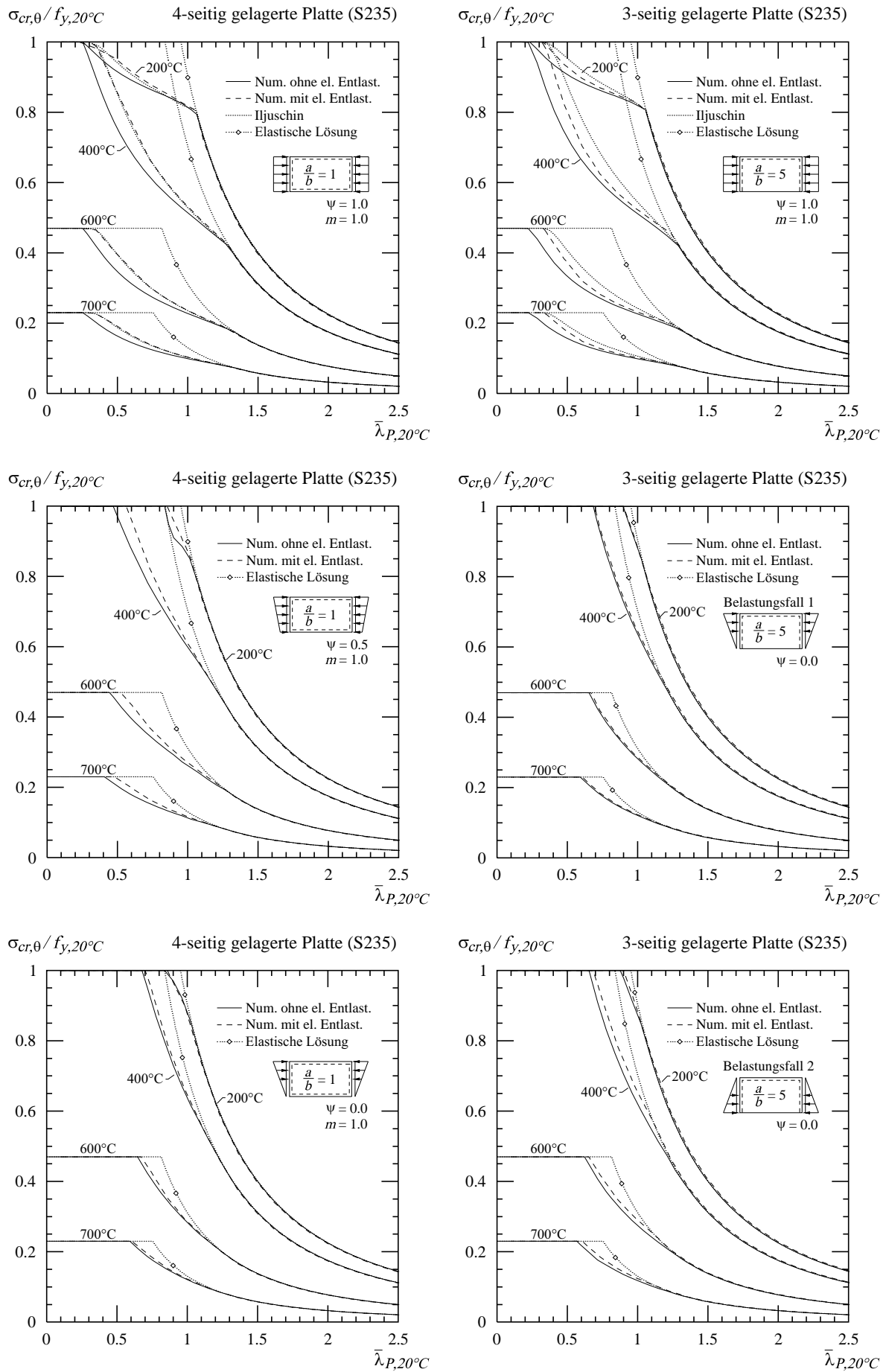


Abb. 5-3: Ergebnisse der numerischen Berechnungsmodelle. Verzweigungslasten von vierseitig (links) und dreiseitig (rechts) gelenkig gelagerten Platten in Funktion der Plattenschlankheit bei unterschiedlichem Materialverhalten und bei unterschiedlicher Belastung.

zu berechnen. Mit folgender Gleichung lassen sich anschliessend die neun Steifigkeitskomponenten berechnen.

$$\delta\sigma_i = \frac{\partial\sigma_i}{\partial\varepsilon_x} \cdot \delta\varepsilon_x + \frac{\partial\sigma_i}{\partial\varepsilon_y} \cdot \delta\varepsilon_y + \frac{\partial\sigma_i}{\partial\varepsilon_{xy}} \cdot \delta\varepsilon_{xy} \quad \text{mit } i = x, y, xy \quad (5.8)$$

Sind alle Steifigkeitskomponenten im Plattenelement bekannt, kann die Deformationsarbeit infolge der Plattenverformung berechnet werden. Dazu werden die Biegemomente δm_i infolge des Ausbeulens der Platte in Funktion der Plattenverformung w beschrieben. Da es sich um infinitesimal kleine Auslenkungen handelt, kann die dabei geleistete Deformationsarbeit wie Folgt berechnet werden.

$$\delta U_{i,j} = \frac{1}{2} \left(\delta m_j \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial j^2} \right) dA \quad \text{mit } j = x, y, xy \quad (5.9)$$

$$\delta m_j = \frac{t^3}{12} \cdot \left[\frac{\partial\sigma_j}{\partial\varepsilon_x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial\sigma_j}{\partial\varepsilon_y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial\sigma_j}{\partial\varepsilon_{xy}} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (5.9a)$$

Die gesamte innere Arbeit U_i , welche von der Platte geleistet wird, ergibt sich als Summe aller Anteile der einzelnen Volumenelemente. Der inneren Deformationsarbeit wird die äussere Arbeit U_a gegenübergestellt, welche durch die Verschiebung der Angriffspunkte der äusseren Belastung q geleistet wird. Diese lässt sich mit den Gleichungen 5.6a bis 5.6c berechnen, wobei der inelastische Anteil $U_{a,\varepsilon}$ nach Gleichung 5.7 nicht berücksichtigt werden muss, da die Mittelebene der Platte keine Dehnung in x-Richtung erfährt. Wiederum erfolgt eine iterative Suche nach derjenigen Belastung q , die zum Verschwinden der Summe der inneren und äusseren geleisteten Arbeiten führt.

In Abbildung 5-3 ist die Verzweigungslast für vierseitig und dreiseitig gelenkig gelagerte Platten mit unterschiedlicher Belastung in Funktion der Schlankheit bei unterschiedlichen Temperaturen dargestellt. Weil die elastische Entlastung nicht berücksichtigt wurde, liegen die Verzweigungslasten dieses Berechnungsmodells im plastischen Bereich tiefer als diejenige des numerischen Modells mit Berücksichtigung der elastischen Entlastung. Des Weiteren ist ersichtlich, dass eine kombinierte Belastung aus Druck mit Biegung ($\psi < 1.0$) dazu führt, dass die Ergebnisse der numerischen Berechnungsmodelle sich der elastischen Lösung annähern. Dies ist hauptsächlich auf die Tatsache zurückzuführen, dass Bereiche der Platte elastisch bleiben oder zumindest geringere Plastifizierungen als die stark beanspruchten Bereiche erfahren. Da in diesen Plattenbereichen die Berücksichtigung der elastischen Entlastung von untergeordneter Bedeutung ist, verkleinert sich die Differenz in den Ergebnissen der beiden numerischen Berechnungsmodelle. Dies ist auch bei den Verzweigungslasten der dreiseitig gelenkig gelagerten Platte der Fall. Liegt der meistbeanspruchte Bereich beim freien Plattenrand, so hat dies einen grösseren Einfluss auf die von der Platte geleistete Verformungsarbeit, als wenn der meistbeanspruchte Bereich am gelenkig gelagerten Plattenrand liegen würde. Dies zeigt sich in einer grösseren Differenz der Ergebnisse der numerischen Berechnungsmodelle beim Belastungsfall 2 gegenüber dem Belastungsfall 1.

5.3 Vereinfachte analytische Berechnungsverfahren

Wird das nichtlineare Materialverhalten mit einer isotropen Verfestigung und dem Fließgesetz nach von Mises angenähert, so bedarf es eines iterativen Vorganges, um einen ebenen Spannungszustand infolge einer gegebenen Verzerrung zu berechnen (Anhang A). Dies erschwert eine geschlossene analytische Lösung des Verzweigungsproblems von Platten mit nichtlinearem Materialverhalten. Mit gewissen Vereinfachungen lassen sich jedoch analytische Näherungslösungen angeben. Einige davon werden in den folgenden Abschnitten erläutert.

Bevor eigene neue Ansätze zur Berechnung der Verzweigungslast von Platten mit nichtlinearem Materialverhalten vorgestellt werden, wird das Berechnungsverfahren nach Iljuschin näher erläutert. Dieses ist für das Verständnis der Tragwirkung von Platten mit nichtlinearem Materialverhalten sehr hilfreich, obwohl sein Modell die Verzweigungslast von Platten mit Berücksichtigung der elastischen Entlastung auf der Zugseite der Platte berechnet. Dies erschwert einerseits die Berechnung und führt zu komplizierteren mathematischen Ausdrücken und liefert andererseits zu hohen Verzweigungslasten. Dies ist der Fall weil, wie in der Einführung des Kapitels 5.2 erläutert, das Verzweigungsproblem für die ebene Platte ohne Berücksichtigung der elastischen Entlastung zu lösen ist.

Nach den Erläuterungen zum Modell von Iljuschin wird das Verzweigungsproblem der elastisch orthotropen Platte gelöst (Kapitel 5.3.2). In einem ersten Schritt wird eine allgemeine Lösung gesucht, die in Belastungsrichtung und quer dazu die Zuordnung unterschiedlichen elastischen Materialverhaltens ermöglicht. In einem zweiten Schritt wird diese allgemeine Lösung für die dreiseitig und vierseitig gelenkig gelagerte Platte für den Spezialfall elastischen isotropen Materialverhaltens mit den bekannten Lösungen überprüft, wobei ein besonderes Augenmerk der Annahmen der Verformungsfiguren gilt. In einem weiteren Schritt wird in Belastungsrichtung die Steifigkeit in Funktion der Belastung und des nichtlinearen Materialverhaltens vermindert, während quer dazu stets elastisches Materialverhalten angenommen wird. Die damit berechneten Verzweigungslasten werden für unterschiedliche Plattenschlankheiten und Temperaturen mit den Ergebnissen der numerischen Modelle sowie der analytischen Modelle von Bleich und Iljuschin verglichen (Abb. 5-5). Basierend auf dieser Modellvorstellung wird im Kapitel 5.3.3 ein neues analytisches Modell erläutert, welches das Verzweigungsproblem der Platte löst, wobei auch die Beeinflussung der Belastung auf die Plattensteifigkeiten in Belastungsrichtung und quer dazu sowie der Drillsteifigkeit erfasst wird. Dieses neue analytische Modell ermöglicht es, die spezielle lastabhängige Anisotropie der Platte zu beschreiben und das Verzweigungsproblem für reinen Druck aber auch für Druck mit Biegung zu lösen. Ein Vergleich mit den Ergebnissen der numerischen Modelle zeigt eine gute Übereinstimmung (Abb. 5-7 und Abb. 5-8).

5.3.1 Lösung von Iljuschin

Das Berechnungsverfahren von Iljuschin ist in [43] von Kollbrunner beschrieben und beruht auf den Annahmen von Ebenbleiben ebener Querschnitte sowie inkompressiblem Materialverhalten ($\nu = 0.5$) sowohl im elastischen wie auch im plastischen Bereich. Mit dieser Vereinfachung gelang es ihm, im Jahre 1944 die Beziehungen zwischen den Biegesteifigkeiten sowie Schubsteifigkeiten mit den Verzerrungskomponenten der Platte mittels Variationsrechnung herzuleiten und eine analytische Lösung des Verzweigungsproblems jenseits der Proportionalitätsgrenze herbeizuführen.

Iljuschin betrachtet eine ebene Platte, die durch eine Linienlast q in x -Richtung belastet wird. Der in der Platte verursachte eindimensionale Spannungszustand wird durch die Plastizitätsfunktion ω beschrieben, welche dem Verhältnis der plastischen Dehnungen ϵ_{pl} zu den Vergleichsdehnungen nach von Mises ϵ_v entspricht. Im Rahmen einer Variationsberechnung wird eine fiktive infinitesimal kleine Ausbeulung der Platte betrachtet, wobei die geometrische Form der Platten-

mittelfläche angenommen werden muss. Bei der Verformung entstehen unendlich kleine Inkremente der Dehnungen und der Spannungen, aus denen die Biegesteifigkeiten in der Platte berechnet werden können. Mit diesen und der Differentialgleichung der Platte (Gl. 5.12) lässt sich für die angenommene Belastung q eine Plattenschlankheit berechnen, die dem kritischen Zustand des Verzweigungsproblems entspricht. Um diese sehr wichtige Arbeit für das Verständnis des Tragverhaltens von Platten mit nichtlinearem Material besser zu verstehen, werden in der Folge die wichtigsten Berechnungsschritte erläutert. Eine ausführliche Beschreibung der Berechnungen hat Kollbrunner in [43] zusammengestellt.

Um die Biegesteifigkeiten respektive Schubsteifigkeit in Funktion des Verzerrungszustandes der Platte beschreiben zu können, müssen die Beziehungen zwischen den Dehnungen und den Spannungen im inelastischen Bereich des Materials bekannt sein. Mit dem zweidimensionalen Spannungszustand gemäss Anhang A und der Annahme eines inkompressiblen Materialverhaltens ($\nu = 0.5$) ergeben sich folgende Beziehungen zwischen den Dehnungen und den Spannungen.

$$\sigma_x = 4G \left(\varepsilon_x + \frac{1}{2} \varepsilon_y \right) (1 - \omega) \quad \text{mit } \omega = \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_v} \text{ Plastizitätsfunktion} \quad (5.10a)$$

$$\sigma_y = 4G \left(\varepsilon_y + \frac{1}{2} \varepsilon_x \right) (1 - \omega) \quad \text{und } G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{E}{3} \quad (5.10b)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G\gamma_{xy}(1 - \omega) \quad (5.10c)$$

Dank diesen Beziehungen können nun alle neun Steifigkeitskomponenten $\partial\sigma_i/\partial\varepsilon_j$ der Gleichung 5.8 analytisch berechnet werden. Diese beschreiben die Reaktion der Spannungen in einer beliebigen Richtung der Platte in Folge einer kleinen Veränderung der Dehnung in einer weiteren beliebigen Richtung. Für eine Platte, die nur in x-Richtung durch die Spannung $\sigma_{x,0}$ belastet wird, ergibt sich folgende Steifigkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} \delta\sigma_x \\ \delta\sigma_y \\ \delta\tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\mu - \xi & 2\mu & 0 \\ 2\mu & 4\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\varepsilon_x \\ \delta\varepsilon_y \\ \delta\gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

$$\text{wobei } \mu = G(1 - \omega) \quad \text{und } \xi = \sigma_{x,0} \cdot \frac{1 - \tau_E}{1 - \omega} \quad \text{mit } \tau_E = \frac{T}{E} \quad (5.11a)$$

Da auch die Plastizitätsfunktion ω von der Initialspannung $\sigma_{x,0}$ abhängig ist, hat diese auf alle 5 Steifigkeitskomponenten, die nicht Null sind, einen Einfluss. Wegen der Variablen ξ verändert sich mit zunehmender Belastung auch das Verhältnis der Steifigkeitskomponente in x-Richtung zu derjenigen in y-Richtung. Diese spezielle Art der Anisotropie beeinflusst die Anzahl Halbwellen in Belastungsrichtung beim Erreichen der minimalen Verzweigungslast einer vierseitig gelenkig gelagerten Platte. Die minimale Verzweigungslast ist, wie später für die orthotrope Platte erläutert, einerseits von den Kantenlängen der Platte, andererseits vom Verhältnis der Steifigkeiten in x- und in y-Richtung abhängig (Gl. 5.20a).

Zur Berücksichtigung der elastischen Entlastung unterteilt Iljuschin die Platte in eine obere und eine untere Platte. Die obere erfährt durch das Ausbeulen der Platte zusätzliche plastische Verformungen, während die untere eine elastische Entlastung erfährt. Da die Zunahme der Spannungen infolge der Verformungen im plastischen Bereich nicht der Abnahme der Spannungen durch die elastische Entlastung entspricht, resultieren kleine Inkremente der Normalkraft δN_x , δN_y und der Schubkraft δN_{xy} . Um einen Widerspruch mit den statischen Randbedingungen zu vermeiden, muss analog zu den Berechnungen des Momenten-Krümmungs-Diagramms der Stütze (Abb. 3-4

links), eine zusätzliche über die Plattendicke konstante Dehnung eingeführt werden. Diese stellt das Gleichgewicht der Spannungen in den jeweiligen Richtungen wieder her und lässt die Inkremente der Normalkräfte δN_x , δN_y sowie der Schubkraft δN_{xy} verschwinden. Dies führt zu einem – im Vergleich zum elastischen – vergrößerten plastischen Bereich in der Platte. Ist das Gleichgewicht der Normal- und Schubkräfte erfüllt, können die Biegesteifigkeiten δM_x , δM_y und δM_{xy} der Platte berechnet werden, die zusammen mit folgender Differentialgleichung der Platte zur Lösung des Verzweigungsproblems von beliebig gelagerten, rechteckigen Platten mit gleichmässig verteilter Belastung q ($\psi = 1.0$) führen.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \delta M_x + 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \cdot \delta M_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdot \delta M_y = t \sigma_{x,0} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (5.12)$$

$$\delta M_i = \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_i z) dz \quad (5.12a)$$

Analog zum Verzweigungsproblem des Knickstabes wird bei der Berechnung der Verzweigungslast der Platte für eine gegebene Belastung die zugehörige Plattenschlankheit bestimmt. Dies, weil alle Steifigkeitskomponenten der Platte von der initialen Belastung abhängig sind und sich die Berechnung wegen des nichtlinearen Materialverhaltens nicht für die Verzweigungsspannung analytisch lösen lässt. Für eine vierseitig gelenkig gelagerte Platte mit gegebener Belastung in x-Richtung, ergibt sich die minimale Verzweigungslast für eine einzige Halbwelle in Querrichtung ($n = 1.0$) und m Halbwellen in Längsrichtung.

$$m = \frac{b}{a} \cdot \sqrt[4]{\frac{1 - \phi + 3\tau_E}{4(1 - \phi)}} \quad \text{mit } \phi = \omega \left(1 - \frac{\sqrt{\tau_E}}{2} \right) \left[\left(1 - \frac{\sqrt{\tau_E}}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \cdot \frac{\tau_E}{1 - \left(1 - \frac{\sqrt{\tau_E}}{2} \right) \omega} \right] \quad (5.13)$$

Mit der Annahme einer geometrischen Form der Mittelfläche der verformten Platte sowohl in x- wie in y-Richtung affin zu einer Sinusfunktion lässt sich die Differentialgleichung der Platte lösen. Für die geometrische Plattenschlankheit λ_P , welche der Lösung des Verzweigungsproblem für die angesetzte Initialspannung $\sigma_{x,0}$ entspricht, ergibt sich

$$\lambda_P = \pi \sqrt{\frac{2E(1 - \phi)}{\sigma_{x,0}}} \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{1 - \phi + 3\tau_E}{4(1 - \phi)}} \right) \quad (5.14)$$

Die zugehörige bezogene Plattenschlankheit $\bar{\lambda}_P$ entspricht dem Verhältnis der geometrischen Schlankheit λ_P zur Materialschlankheit λ_E .

$$\bar{\lambda}_P = \frac{\lambda_P}{\lambda_E} \quad \text{mit } \lambda_E = \pi \sqrt{\frac{kE}{f_y}} \quad (5.15)$$

Bleibt die Initialspannung unterhalb der Proportionalitätsgrenze, geht dieser Ausdruck in die bekannte Form der Verzweigungslast für elastisches Materialverhalten über.

Bei der dreiseitig gelenkig gelagerten Platte wird die Verformungsfigur in Längsrichtung affin zu einer Sinusfunktion und in Querrichtung linear angenommen. Die minimale Verzweigungslast wird für eine Halbwelle in Längsrichtung ($m = 1$) erreicht, wobei die entsprechende geometrische Schlankheit, die der Lösung des Verzweigungsproblem entspricht, folgendermassen zu bestimmen ist

$$\lambda_P = \sqrt{\frac{E(1-\phi)}{\sigma_{x,0}} \cdot \left[\frac{1-\phi+3\tau_E}{4(1-\phi)} \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 6(1-\nu) \right]} \quad (5.16)$$

Dabei wurde der letzte Term unter der Wurzel gegenüber der Lösung von Iljuschin modifiziert, damit für Spannungen $\sigma_{x,0}$ unterhalb der Proportionalitätsgrenze die Gleichung 5.16 der elastischen Lösung entspricht. In Abbildung 5-3 ist die Lösung des Verzweigungsproblems nach Iljuschin mit den Ergebnissen der numerischen Berechnungsmodellen für vierseitig und dreiseitig gelenkig gelagerten Platten verglichen. Der Vergleich ist nur für die Platten mit einer über ihre Breiten konstanten Belastung q ($\psi = 1.0$) möglich, da die Lösung nach Iljuschin keine linear verteilte Belastungen zulässt. Die gute Übereinstimmung mit dem numerischen Berechnungsmodell, welches die elastische Entlastung berücksichtigt, ist besonders für die vierseitig gelenkig gelagerte Platte bemerkenswert.

5.3.2 Elastisch orthotrope Platte

Die Formel von Bleich (Gl. 5.2) zur Bestimmung der Verzweigungslast bei nichtlinearem Materialverhalten beruht auf analytischen Untersuchungen der orthotropen Platte. Mit dieser kann die wegen der Plastifizierungen vorhandene Anisotropie der Platte welche bei den numerischen Modellen durch Gleichung 5.8 beschrieben wird, annähernd erfasst werden. In den folgenden Abschnitten werden die Grundlagen des Verzweigungsproblems bei der orthotropen Platte in einem ersten Schritt für linear elastisches Materialverhalten erarbeitet, um diese in der Folge für nichtlineares Materialverhalten zu erweitern.

Für linear elastisches Materialverhalten gelten folgenden Beziehungen zwischen den räumlichen Verzerrungen und dem zweidimensionalen Spannungszustand.

$$\sigma_x = \frac{E_x}{1-\nu_x\nu_y}(\epsilon_x + \nu_y\epsilon_y) = -\frac{z \cdot E_x}{1-\nu_x\nu_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (5.17a)$$

$$\sigma_y = \frac{E_y}{1-\nu_x\nu_y}(\epsilon_y + \nu_x\epsilon_x) = -\frac{z \cdot E_y}{1-\nu_x\nu_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (5.17b)$$

$$\tau_{xy} = G_{xy} \cdot \gamma_{xy} = -2zG_{xy} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{und} \quad \tau_{yx} = \tau_{xy}, \quad \gamma_{yx} = \gamma_{xy} \quad (5.17c)$$

Aus diesen und dem schon bekannten Verzerrungszustand kann die geleistete Verformungsarbeit der gesamten Platte durch folgendes Integral berechnet werden.

$$U_i = \int \frac{1}{2} \left(\epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y + \frac{\gamma_{xy}}{2} \tau_{xy} + \frac{\gamma_{yx}}{2} \tau_{yx} \right) dV \quad (5.18)$$

Dieses Integral lässt sich analytisch lösen und ergibt für die vierseitig gelenkig gelagerte Platte mit einer Verformungsfigur gemäss Gleichung 5.4a folgenden Ausdruck, bei dem die unterschiedlichen Beiträge infolge Biegung um die x- und y-Achse sowie der Schubanteil der Verdrillung klar ersichtlich sind.

$$\begin{aligned}
 U_i &= \frac{E_x \cdot t^3}{24(1 - \nu_x \nu_y)} \cdot w_0^2 \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{ab}{4} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \nu_y \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right] + \dots \\
 &\quad \frac{E_y \cdot t^3}{24(1 - \nu_x \nu_y)} \cdot w_0^2 \cdot \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \frac{ab}{4} \left[\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \nu_x \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \right] + \dots \\
 &\quad \frac{(G_{xy} + G_{yx}) \cdot t^3}{12} \cdot w_0^2 \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \frac{ab}{4}
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Da die äussere Arbeit bei der linear elastischen Platte nur aus dem elastischen Anteil gemäss Gleichung 5.6a respektive 5.6b oder 5.6c besteht, kann die Verzweigungslast durch Gleichsetzen der inneren und äusseren Arbeit analytisch bestimmt werden. Zudem kann die Anzahl der Halbwellen m und n bestimmt werden, was zur folgenden minimalen Verzweigungslast führt.

$$\sigma_{cr} = \frac{q_{cr}}{t} = \frac{\pi^2 E_{mod}}{12(1 - \nu_x \nu_y)} \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^2 \tag{5.20}$$

wobei

$$m = \frac{a}{b} \sqrt[4]{\frac{E_y}{E_x}} \quad \text{und } n = 1 \quad \text{Anzahl Halbwellen in x- und y-Richtung} \tag{5.20a}$$

$$E_{mod} = [\nu_y E_x + 2\sqrt{E_x E_y} + \nu_x E_y + 2(1 - \nu_x \nu_y)(G_{xy} + G_{yx})] \cdot \frac{2}{1 + \psi} \tag{5.20b}$$

Für isotrop elastisches Materialverhalten vereinfacht sich der Ausdruck des modifizierten E-Moduls zu folgendem Ausdruck

$$E_{mod} = k \cdot E \quad \text{mit dem Beulfaktor } k = \frac{8}{1 + \psi} \tag{5.20c}$$

In Abbildung 5-4 links ist der Beulfaktor k in Funktion der Verteilung der Linienlast q für eine isotrop elastische Platte dargestellt und wird mit den Angaben des Eurocodes (EN 1993-1-5) und den Berechnungen von Timoshenko [74] verglichen. Bei diesen wird anstelle der Gleichung 5.4a ein grösseres Spektrum an möglichen Verformungsfiguren durch folgenden Ansatz angenommen

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{5.21}$$

Je mehr Summanden in der Gleichung 5.21 berücksichtigt werden, desto genauer kann die Lösung des Verzweigungsproblems angenähert werden. Wird nur ein Summand betrachtet, so entsprechen die Beulfaktoren von Timoshenko der Gleichung 5.20c, während sie bei Berücksichtigung sehr vieler Summanden gegen die Werte der Abbildung 5-4 links streben (strichpunktierte Linie). Die genaue Lösung des Verzweigungsproblems wird dabei durch einen oberen Grenzwert angenähert. Je besser die Beulfigur erfasst werden kann, desto geringer werden die Beulfaktoren k . Für positive Werte ψ , kann die Beulfigur schon mit einem einzigen Summanden der Gleichung 5.21 sehr gut beschrieben werden, was sich in der guten Übereinstimmung der unterschiedlichen Ansätze zeigt. Bei negativen Werten ψ und insbesondere bei reiner Biegung ($\psi = -1.0$) genügt eine Beschreibung der Beulfigur mit Gleichung 5.4a nicht mehr, da der Beulfaktor k nach Gleichung 5.20c berechnet bei reiner Biegung unendlich gross wird. Die Beulfakto-

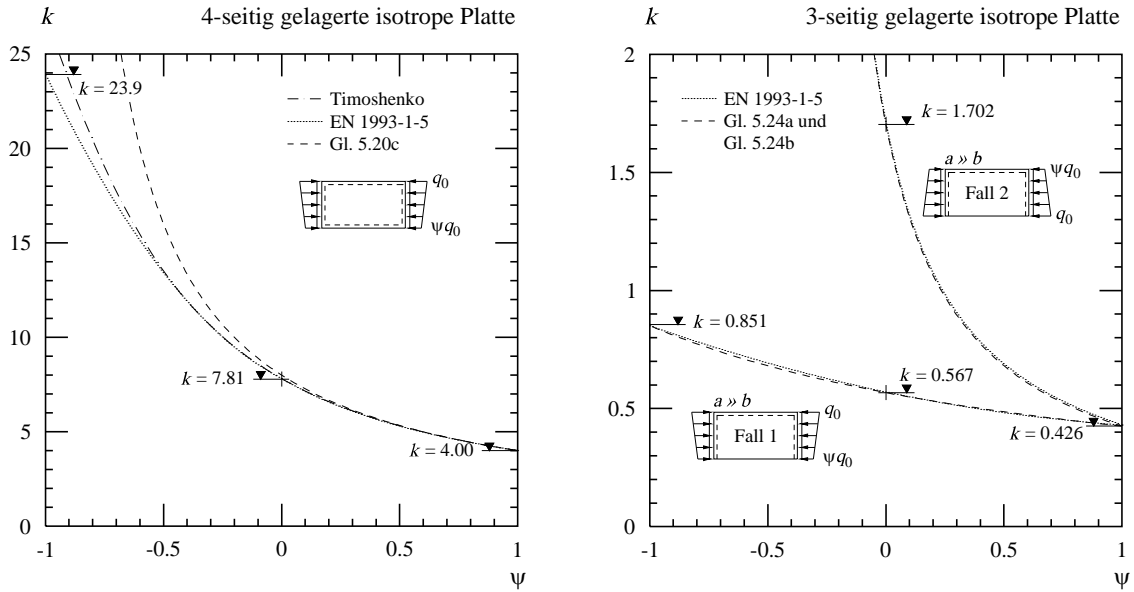


Abb. 5-4: Beulfaktor in Funktion der Lastverteilung für eine isotrop elastische Platte, die vierseitig (links) oder dreiseitig (rechts) gelenkig gelagert ist.

ren des Eurocodes liegen insbesondere bei negativen Werten ψ unterhalb der Näherungswerte von Timoshenko.

Für die dreiseitig gelenkig gelagerte Platte mit einer geometrischen Form der ausgebeulten Plattenmittelebene gemäss Gleichung 5.4b verschwindet bei der inneren Arbeit der Anteil infolge Plattenbiegung in y -Richtung.

$$U_i = \frac{E_x t^3}{144(1 - \nu_x \nu_y)} \cdot w_0^2 \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \cdot ab + \frac{(G_{xy} + G_{yx}) t^3}{24} \cdot w_0^2 \cdot \left(\frac{m\pi}{ab}\right)^2 \cdot ab \quad (5.22)$$

Zudem weist die Beulfigur, welche der minimalen Verzweigungslast entspricht, stets nur eine Halbwelle ($m = 1$) in Längsrichtung auf. Da es sich nun um ein asymmetrisches Problem handelt, müssen die beiden Belastungsfälle 1 und 2 (Abb. 5-4 rechts) unterschieden werden, wie dies schon im Kapitel 5.2.1 notwendig war. Die Verzweigungslast ist durch die Gleichung 5.20 gegeben, wobei der modifizierte E-Modul folgendermassen zu bestimmen ist.

$$E_{mod} = \left[E_x \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{6(1 - \nu_x \nu_y)}{\pi^2} (G_{xy} + G_{yx}) \right] \cdot \frac{4}{3 + \psi} \quad \text{Belastungsfall 1} \quad (5.23a)$$

$$E_{mod} = \left[E_x \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{6(1 - \nu_x \nu_y)}{\pi^2} (G_{xy} + G_{yx}) \right] \cdot \frac{4}{3\psi + 1} \quad \text{Belastungsfall 2} \quad (5.23b)$$

Für eine isotrop elastische Platte vereinfacht sich der Ausdruck des modifizierten E-Moduls, wobei wiederum Gleichung 5.20c verwendet wird. Es ergeben sich folgende Beulfaktoren für unendlich lange Platten ($a \gg b$).

$$k = \left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{6}{\pi^2} (1 - \nu) \right] \cdot \frac{4}{(\psi + 3)} \rightarrow \frac{24(1 - \nu)}{\pi^2 (\psi + 3)} \quad \text{Belastungsfall 1} \quad (5.24a)$$

$$k = \left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{6}{\pi^2} (1 - \nu) \right] \cdot \frac{4}{(3\psi + 1)} \rightarrow \frac{24(1 - \nu)}{\pi^2 (3\psi + 1)} \quad \text{Belastungsfall 2} \quad (5.24b)$$

In Abbildung 5-4 rechts ist der Beulfaktor in Funktion der Lastverteilung für beide Belastungsfälle dargestellt und mit den Angaben des Eurocodes verglichen. Die bemerkenswert gute Übereinstimmung ist eine Folge der passenden Beschreibung der Verformungsfigur durch Gleichung 5.4b. Diese wird durch die unterschiedlich verteilte Belastung q nur sehr geringfügig beeinflusst, so dass der Einfluss auf die Verzweigungslast vernachlässigbar wird.

Nichtlineares Materialverhalten

Bleich [6] postuliert in seiner Arbeit, dass die Steifigkeit der Platte in Belastungsrichtung dem Tangentenmodul T in Funktion der vorhandenen Spannung entsprechen muss, während quer dazu die Platte elastisch bleibt. Mit der analytischen Lösung des Verzweigungsproblems gemäss Gleichung 5.20 und dem modifizierten E-Modul gemäss Gleichung 5.20b für die vierseitig gelagerte Platte respektive der Gleichungen 5.23a oder 5.23b für die dreiseitig gelagerte Platte lässt sich die Verzweigungslast berechnen. Dabei wird für die Steifigkeit in Belastungsrichtung E_x der Tangentenmodul T des Materials für die gegebene Belastung und quer dazu für E_y der elastische E-Modul eingesetzt. Vorausgesetzt, das Material folgt dem elastischen Gesetz, ergibt sich der Schubmodul aus den Querdehnzahlen und E-Moduli in x- respektive in y-Richtung wie folgt.

$$G = G_{xy} = G_{yx} = \frac{E_x E_y}{E_x(1 + \nu_y) + E_y(1 + \nu_x)} \quad (5.25)$$

$$\text{mit } E_x = T(\sigma_x) \text{ und } E_y = E \quad (5.25a)$$

In Abbildung 5-5 sind die Ergebnisse des Verzweigungsproblems der orthotropen Platte mit nichtlinearem Materialverhalten mit der Gleichung von Bleich für vierseitig und dreiseitig gelenkig gelagerte Platten verglichen. Für die vierseitig gelenkig gelagerte Platte sind die beiden Lösungen deckungsgleich, während für die dreiseitig gelagerte Platte die Gleichung von Bleich höhere Lasten als die Lösung des Verzweigungsproblems der orthotropen Platte liefert. Die Ursache dafür liegt in der nicht korrekten Abbildung der Biegesteifigkeiten der Platte bei nichtlinearem Materialverhalten. Beim Betrachten der Steifigkeitsmatrix D_{ij} , welche das Verhalten der Platte beschreibt, erkennt man eine starke Asymmetrie im plastischen Bereich des Materialverhaltens, gegeben durch den Unterschied der Biegesteifigkeiten D_{xy} und D_{yx} .

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & 0 \\ D_{yx} & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{\tau\gamma} \end{bmatrix} = \frac{t^3}{12(1 - \nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} T & \nu T & 0 \\ \nu E & E & 0 \\ 0 & 0 & 2G(1 - \nu^2) \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Diese Asymmetrie in der Steifigkeitsmatrix ist für ein Materialverhalten, welches durch eine isotrope Verfestigung und der Vergleichsspannung nach von Mises beschrieben wird (Anhang A), nicht zulässig. Mit einem solchen Materialverhalten muss sich eine symmetrische Matrix der Biegesteifigkeiten ergeben, solange die Platte durch eine gleichmässig verteilte Linienlast q belastet wird. In Abbildung 5-6 sind die Komponenten der Biegesteifigkeit mit dem numerischen Modell des Kapitels 5.2.2 in Funktion der Belastung $\sigma_{x,0}$ berechnet und dargestellt. Es ist ersichtlich, dass alle Komponenten im nichtlinearen Bereich an Steifigkeit verlieren, was jedoch in der Steifigkeitsmatrix gemäss Gleichung 5.26 nicht der Fall ist. Dies führt dazu, dass während bei der vierseitig gelenkig gelagerten Platte die Lösung von Bleich mit derjenigen der orthotropen Platte gut übereinstimmt, dies für die dreiseitig gelagerte Platte nicht mehr zutrifft. In Abbildung 5-5 ist des Weiteren ersichtlich, dass die Lösung der orthotropen Platte für die vierseitig gelagerte Platte mit den Ergebnissen des numerischen Berechnungsmodells des Kapitels 5.2.2 ohne Berücksichtigung

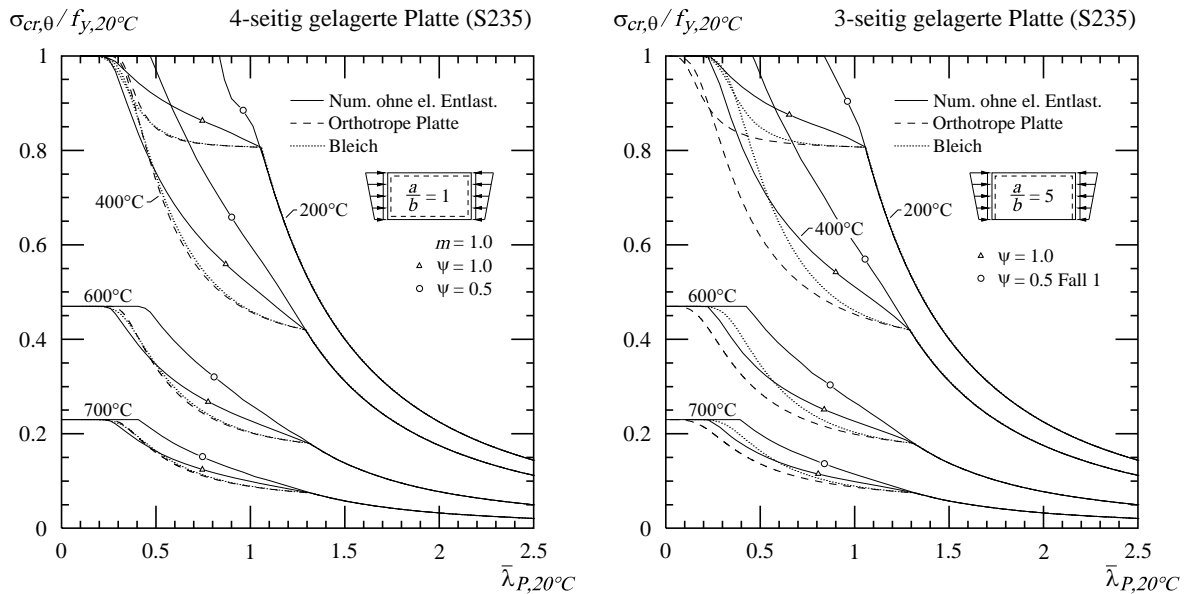


Abb. 5-5: Vergleich zwischen der Lösung von Bleich und dem Verzweigungsproblem der orthotropen Platte bei einer vierseitig und einer dreiseitig gelenkig gelagerten Platte.

der elastischen Entlastung in etwa übereinstimmt, während sie für die dreiseitig gelagerte Platte deutlich tiefer liegt.

Da sowohl die Gleichung nach Bleich wie auch die Lösung des Verzweigungsproblems der orthotropen Platte die Biegesteifigkeit für die gesamte Platte einheitlich berechnen, können sie das Verhalten von Platten mit linear verteilter Belastung ($\psi < 1.0$) im nichtlinearen Bereich des Materialverhaltens nicht korrekt beschreiben. Dafür muss das Berechnungsmodell erweitert werden, da sich die Steifigkeiten über der Plattenbreite in Funktion der Belastung q verändern. So weisen die Plattenbereiche mit grösserer Belastung kleinere Steifigkeiten auf im Vergleich zu den weniger stark belasteten Bereichen.

5.3.3 Modell mit belastungsabhängiger Plattensteifigkeit

Wie in der Einführung zum Kapitel 5.3 erwähnt, wird das nichtlineare Materialverhalten durch eine isotrope Verfestigung und die Fließgrenze nach von Mises angenähert, was für die Berechnung des zweidimensionalen Spannungszustands ein iteratives Vorgehen erfordert. Dies erschwert die mathematisch korrekte Erfassung des Verzweigungsproblems von Platten im nichtlinearen Bereich des Materialverhaltens. Mit folgender Näherung für die Abhängigkeit der nun symmetrischen Steifigkeitsmatrix D_{ij} von der Initialbelastung $\sigma_{x,0}$ kann diese Schwierigkeit umgangen werden.

$$D_{ij} = \frac{t^3}{12(1-\nu^2)} \cdot \begin{bmatrix} T & \nu E(1-\omega) & 0 \\ \nu E(1-\omega) & E(1-\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 2G(1-\omega)(1-\nu^2) \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

In Abbildung 5-6 sind die einzelnen Steifigkeitskomponenten in Funktion der Belastung und für unterschiedliche Temperaturen dargestellt. Es ist ersichtlich, dass zwar die Komponenten D_{yy} und $D_{\tau\gamma}$ durch die Näherung sehr gut zu den numerischen Ergebnisse passen, die Näherung der Komponenten D_{xx} und D_{xy} respektive D_{yx} die numerische Lösung jedoch leicht unterschätzen. Die Beziehung zwischen den Biegemomenten und den Krümmungen in der Platte kann mit der Steifigkeitsmatrix folgendermassen beschrieben werden.

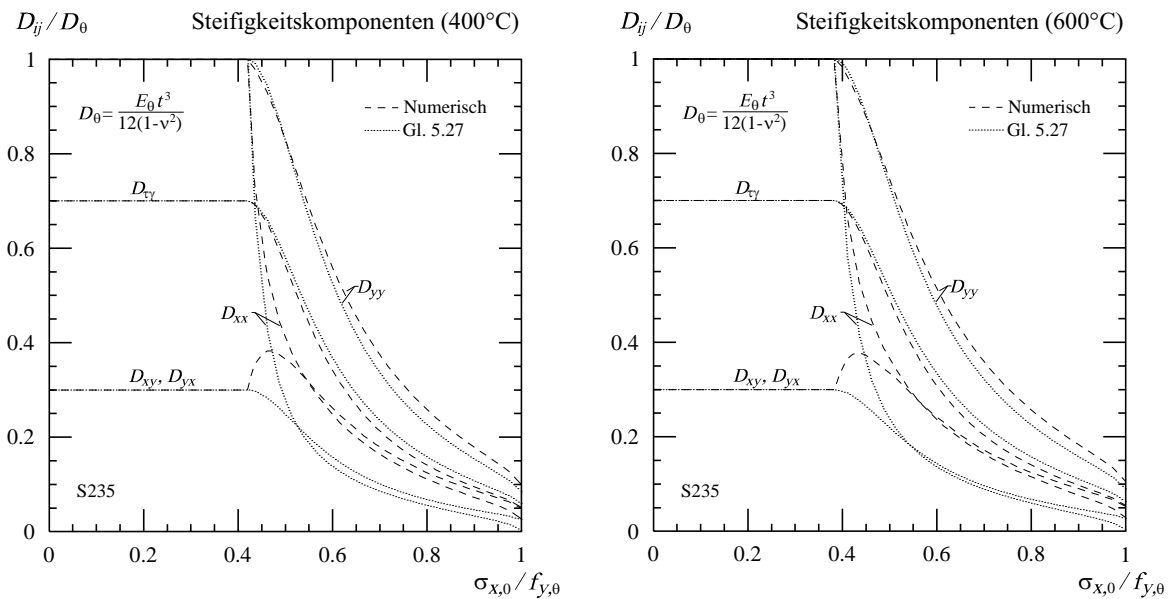


Abb. 5-6: Abnahme der Steifigkeitskomponenten in Funktion der Belastung für nichtlineares Materialverhalten. Vergleich des Modells nach Kapitel 5.2.2 mit dem Näherungsverfahren gemäss Gleichung 5.27.

$$\begin{bmatrix} \delta M_x \\ \delta M_y \\ \delta M_{xy} \end{bmatrix} = D_{ij} \cdot \begin{bmatrix} \delta \chi_x \\ \delta \chi_y \\ \delta \vartheta_{xy} \end{bmatrix} = D_{ij} \cdot \begin{bmatrix} \partial^2 w / \partial x^2 \\ \partial^2 w / \partial y^2 \\ \partial^2 w / \partial x \partial y \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Zusammen mit der Differentialgleichung 5.12 der Platte lässt sich das Verzweigungsproblem für nichtlineares Materialverhalten lösen.

Vierseitig gelenkig gelagerte Platte

Bei der Lösung des Verzweigungsproblems von vierseitig gelenkig gelagerten Platten mit einer linear verteilten Linienlast q , müssen zwei Belastungszustände betrachtet werden (Abb. 5-7 links). Beim ersten Belastungszustand sind die Initialspannungen $\sigma_{x,0}$ in der gesamten Platte entweder unterhalb oder oberhalb der Proportionalitätsgrenze (a). Beim zweiten Belastungszustand bleiben die Initialspannungen in einem Plattenbereich unterhalb der Proportionalitätsgrenze, während in der restlichen Platte diese überschritten wird (b). Bei diesem Belastungszustand müssen die elastischen und plastischen Bereiche getrennt betrachtet werden. Für beide Belastungszustände wird bei der Berechnung der Verzweigungslast eine Verformungsfigur angenommen, die in beiden Richtungen affin zur Sinusfunktion ist (Gl. 5.4a)

Ist die gesamte Platte vollständig elastisch, entspricht die Lösung der Differentialgleichung für die Verzweigungslast folgendem Ausdruck, wobei der Beulfaktor k nach Gleichung 5.20c zu berechnen ist.

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E k}{12(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (5.29)$$

Überschreiten die Initialspannungen die Proportionalitätsgrenze in der gesamten Platte, so müssen die Plastifizierungen in der Steifigkeitsmatrix D_{ij} berücksichtigt werden. Die Anzahl Halbwellen m in Längsrichtung wird sich nach dem Verhältnis der Steifigkeitskomponenten D_{yy} zu D_{xx} einstellen, während in Querrichtung stets nur eine Halbwelle ($n = 1$) vorkommt. Wird die Anzahl Halb-

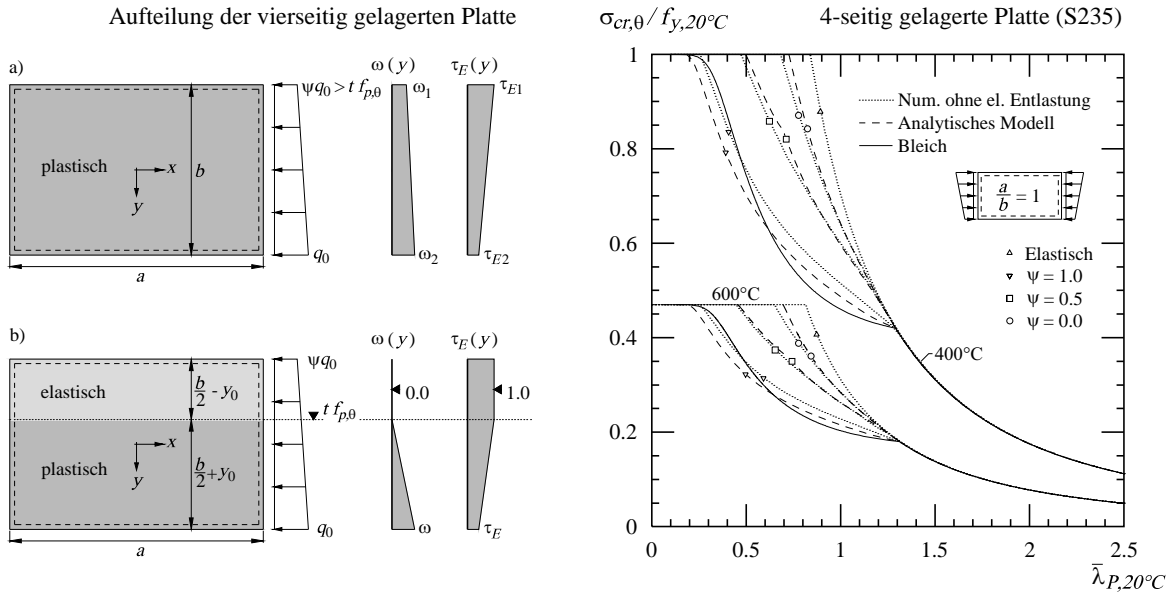


Abb. 5-7: Links: Aufteilung der Platte in einen elastischen und plastischen Bereich. Rechts: Verzweigungslasten für unterschiedliche Belastungen q und Temperaturen θ .

wellen m in Längsrichtung in der Berechnung berücksichtigt, so ergibt sich aus der Differentialgleichung 5.12 folgender Beulfaktor für die minimale Verzweigungslast nach Gleichung 5.29

$$k = [\sqrt{\tau_E(1-\omega)} + (1-\omega)] \cdot \frac{4}{1+\psi} \quad (5.30)$$

$$\text{wobei } m = \frac{a}{b} \cdot \sqrt[4]{\frac{D_{yy}}{D_{xx}}} = \frac{a}{b} \cdot \sqrt[4]{\frac{1-\omega}{\tau_E}} \quad (5.30a)$$

Während für eine gleichmässig belastete Platte ($\psi = 1.0$) die Materialkennwerte ω und τ eindeutig bestimmt werden können, verändern sich diese bei einer Belastung durch Druck mit Biegung ($\psi < 1.0$) entlang der Plattenbreite (Abb. 5-7 links). Vereinfachend wird angenommen, dass diese zwischen den Eckwerten ω_1 und ω_2 respektive τ_{E1} und τ_{E2} linear verlaufen. Für die Berechnung der Beulfaktoren nach Gleichung 5.30 sind die jeweiligen Mittelwerte einzusetzen.

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{und} \quad \tau_E = \frac{\tau_{E1} + \tau_{E2}}{2} \quad (5.31)$$

Bleiben die Spannungen unterhalb der Proportionalitätsgrenze geht die Gleichung 5.30 für die Berechnung des Beulfaktors in diejenige der elastischen Platte über (Gl. 5.20c). Überschreitet jedoch die grössere Eckspannung die Proportionalitätsgrenze, während die kleinere darunter bleibt, so muss die Platte in einen elastischen und einen plastischen Bereich unterteilt werden, wobei die Trennung der beiden Bereiche mit der Koordinate y_0 beschrieben wird (Abb. 5-7 links). Der Beulfaktor k setzt sich nun aus einem elastischen und einem plastischen Beulfaktor zusammen.

$$k = k_{el} + k_{pl} \quad (5.32)$$

Die Anzahl der Halbwellen in Längsrichtung kann bei dieser Belastung nicht direkt mit der Gleichung 5.30a bestimmt werden, da die Steifigkeiten im elastischen und plastischen Bereich unterschiedlich sind. Diese werden vereinfacht so bestimmt, dass die Übergänge zwischen der vollständigen elastischen, der elasto-plastischen und der vollständig plastischen Lösung stetig sind. Die Anzahl Halbwellen m für den elastisch bleibenden Bereich der Platte wird somit mit den elastischen Steifigkeiten berechnet, während jene für den plastischen Bereich der Platten mit den plasti-

schen Steifigkeiten berechnet wird. Dadurch ergibt sich folgender Beulfaktor für den elastischen Bereich

$$k_{el} = [\mu(1 + \nu) + \eta(1 - \nu)] \cdot \frac{8}{1 + \psi} \quad (5.33)$$

$$\text{mit } \mu = \frac{1}{4} + \frac{y_0}{2b} + \frac{1}{4\pi} \sin\left(\frac{2\pi y_0}{b}\right) \quad \text{und} \quad \eta = \frac{1}{4} + \frac{y_0}{2b} - \frac{1}{4\pi} \sin\left(\frac{2\pi y_0}{b}\right) \quad (5.34)$$

und folgender für den plastischen Bereich der Platte

$$k_{pl} = \left[\sqrt{\frac{2 - \omega}{1 + \tau_E}} \cdot K_1 + \left(2\nu + \sqrt{\frac{1 + \tau_E}{2 - \omega}}\right) \cdot K_2 + 2(1 - \nu) \cdot K_3 \right] \cdot \frac{4}{1 + \psi} \quad (5.35)$$

wobei

$$K_1 = \frac{1}{2} - \mu + \frac{2(1 - \tau_E)b}{b - 2y_0} \cdot \bar{\mu} \quad \text{mit } \bar{\mu} = \frac{y_0}{4b} \left(1 - \frac{y_0}{b}\right) + \frac{1}{8\pi^2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi y_0}{b}\right)\right] - \frac{1}{16} \quad (5.35a)$$

$$K_2 = \frac{1}{2} - \mu + \frac{2\omega b}{b - 2y_0} \cdot \bar{\mu} \quad (5.35b)$$

$$K_3 = \frac{1}{2} - \eta + \frac{2\omega b}{b - 2y_0} \cdot \bar{\eta} \quad \text{mit } \bar{\eta} = \frac{y_0}{4b} \left(1 - \frac{y_0}{b}\right) - \frac{1}{8\pi^2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi y_0}{b}\right)\right] - \frac{1}{16} \quad (5.35c)$$

In Abbildung 5-7 rechts sind die Verzweigungslasten für 400°C und 600°C bei unterschiedlich verteilter Belastung dargestellt und werden mit den Ergebnissen des numerischen Berechnungsmodells verglichen. Trotz den vereinfachenden Annahmen bei der Bestimmung der Steifigkeiten sowie bei deren Verteilung in der Platte ist eine sehr gute Übereinstimmung des analytischen und numerischen Berechnungsmodells für sämtliche Belastungen zu beobachten.

Dreieitig gelenkig gelagerte Platte

Überschreiten die Spannungen $\sigma_{x,0}$ im gesamten Querschnitt die Proportionalitätsgrenze, kann die Platte ohne Trennung in elastische und plastische Bereiche betrachtet werden. Bei der Berechnung der Verzweigungslasten wird eine Verformungsfigur wie schon für die elastisch orthotrope Platte gemäss Gleichung 5.4b angenommen. Zusammen mit der Steifigkeitsmatrix D_{ij} gemäss Gleichung 5.27 kann der Beulfaktor, welcher zusammen mit Gleichung 5.29 zur minimalen Verzweigungslast führt, berechnet werden.

$$k = \left[\tau_E \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{6}{\pi^2} (1 - \nu)(1 - \omega) \right] \cdot \frac{4}{3 + \psi} \quad \text{Belastungsfall 1} \quad (5.36a)$$

$$k = \left[\tau_E \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{6}{\pi^2} (1 - \nu)(1 - \omega) \right] \cdot \frac{4}{3\psi + 1} \quad \text{Belastungsfall 2} \quad (5.36b)$$

Mit der Annahme einer linearen Verteilung der Materialkennwerte ω und τ_E ergibt sich aus der analytischen Berechnungen, dass analog zur vierseitig gelenkig gelagerten Platte, die Variable ω als Mittelwert der Eckwerte zu bestimmen, während τ_E folgendermassen zu berechnen ist.

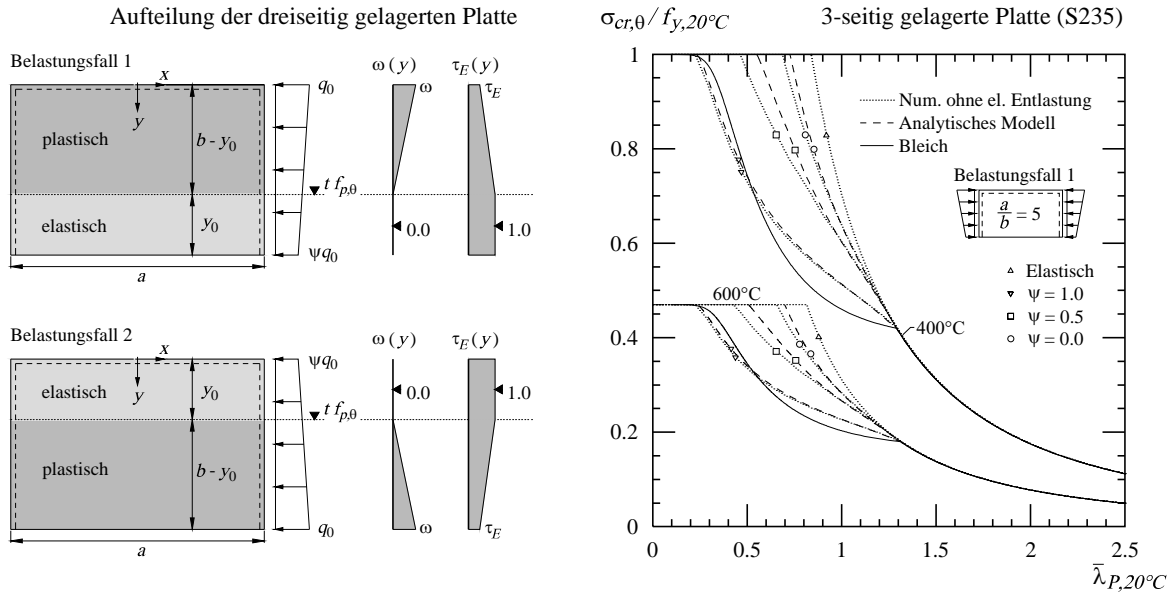


Abb. 5-8: Links: Aufteilung der Platte je nach Belastungsfall in einen elastischen und plastischen Bereiche. Rechts: Verzweigungslasten für unterschiedliche Belastungen q und Temperaturen θ .

$$\tau_E = \frac{\tau_{E1} + 3\tau_{E2}}{4} \quad (5.37)$$

Dabei entspricht τ_{E1} dem Eckwert des aufgelagerten Plattenrandes und τ_{E2} dem Eckwert des freien Plattenrandes. Liegen die Spannungen des Initialzustandes sowohl im elastischen wie auch im plastischen Bereich des Materialverhaltens, werden die elastischen und plastischen Bereiche der Platte getrennt betrachtet. Wiederum setzt sich der Beulfaktor k aus einem elastischen und einem plastischen Beulfaktor zusammen (Gl. 5.32). Für den elastisch bleibenden Bereich ergibt sich

$$k_{el} = \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 \left(1 - \left(1 - \frac{y_0}{b} \right)^3 \right) + \frac{6}{\pi^2} (1 - \nu) \frac{y_0}{b} \right] \cdot \frac{4}{3 + \psi} \quad \text{Belastungsfall 1} \quad (5.38a)$$

$$k_{el} = \left[\frac{y_0^3}{a^2 b} + \frac{6}{\pi^2} (1 - \nu) \frac{y_0}{b} \right] \cdot \frac{4}{3\psi + 1} \quad \text{Belastungsfall 2} \quad (5.38b)$$

während sich für den plastischen Bereich der Platte folgender Beulfaktor ergibt

$$k_{pl} = \left[\frac{(b - y_0)^3}{a^2 b} \cdot \frac{3 - \tau_E}{4} + \frac{6}{\pi^2} (1 - \nu) \left(1 - \frac{y_0}{b} \right) \left(1 - \frac{\omega}{2} \right) \right] \cdot \frac{4}{3 + \psi} \quad \text{Belastungsfall 1} \quad (5.39a)$$

$$k_{pl} = \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{y_0}{b} \right)^3 + \frac{1 - \tau_E}{b - y_0} \left(y_0 - \frac{3}{4}b - \frac{y_0^4}{4b^3} \right) \right] \cdot \frac{4}{3\psi + 1} + \dots \quad \text{Belastungsfall 2} \quad (5.39b)$$

$$\frac{6}{\pi^2} (1 - \nu) \left[1 - \frac{y_0}{b} + \frac{\omega}{b - y_0} \left(y_0 - \frac{y_0^2}{2b} - \frac{b}{2} \right) \right] \cdot \frac{4}{3\psi + 1}$$

In Abbildung 5-8 rechts sind die Verzweigungslasten für den Belastungsfall 1 dreiseitig gelenkig gelagerter Platten in Funktion der bezogenen Schlankheit angegeben. Die Ergebnisse des analytischen Berechnungsmodells stimmen mit denjenigen des numerischen Berechnungsmodells für sämtliche Belastungen gut überein.

5.3.4 Vereinfachtes Modell

Aus dem beschriebenen analytischen Modell zur Berechnung der Verzweigungslasten bei Platten mit nichtlinearem Materialverhalten lässt sich ein vereinfachtes Modell ableiten, welches in der Anwendung einfacher ist. Wie in den Abbildungen 5-7 und 5-8 ersichtlich, besteht besonders bei kleinen Werten ψ eine näherungsweise lineare Beziehung zwischen der bezogenen Schlankheit und der Verzweigungslast im plastischen Bereich. Diese lineare Beziehung kann durch zwei Fixpunkte beschrieben werden, welche in Funktion der Variablen ψ zu bestimmen sind. Der erste Fixpunkt beim Übergang des elastischen in den plastischen Bereich kann durch die Spannung $f_{p,\theta}$ und die Grenzschlankheit $\bar{\lambda}_{p,grenz}$ nach Gleichung 5.1 beschrieben werden. Der zweite Fixpunkt ist hingegen durch die Spannung $f_{y,\theta}$ und die Schlankheit $\bar{\lambda}_{p,pl}$ gegeben, welche mit dem Beulfaktor \bar{k}_{pl} berechnet werden kann. Dieser lässt sich für die vierseitig gelenkig gelagerte Platte näherungsweise wie folgt angeben

$$\bar{k}_{pl} = 8(1 - \psi) \cdot \frac{k_p}{k_y} \quad (5.40)$$

während für die dreiseitig gelenkig gelagerte Platte, je nach Belastungsfall, folgende Ausdrücke verwendet werden können.

$$\bar{k}_{pl} = \frac{8(1 - \nu)(1 - \psi)}{\pi^2} \cdot \frac{k_p}{k_y} \quad \text{Belastungsfall 1} \quad (5.41 a)$$

$$\bar{k}_{pl} = \frac{24(1 - \nu)(1 - \psi)}{\pi^2} \cdot \frac{k_p}{k_y} \quad \text{Belastungsfall 2} \quad (5.41 b)$$

Mit dem Beulfaktor \bar{k}_{pl} kann nun die bezogene Schlankheit $\bar{\lambda}_{p,pl}$ bei Raumtemperatur berechnet werden. Dabei entspricht der Beulfaktor k der linear elastischen Lösung gemäss Gleichung 5.20c respektive Gleichung 5.24a oder Gleichung 5.24b.

$$\bar{\lambda}_{p,pl} = \sqrt{\frac{\bar{k}_{pl}}{k} \cdot \frac{k_E}{k_y}} \quad (5.42)$$

Im Gegensatz zu den vorherigen Lösungen, kann mit dieser Vereinfachung die Verzweigungslast für eine gegebene Plattenschlankheit ohne Iteration berechnet werden. Dies war in den vorherigen Lösungen nur möglich bei einer gegebenen Belastung, zu welcher diejenige Plattenschlankheit berechnet wurde, die der Lösung des Verzweigungsproblems entsprach. Mit dieser vereinfachten Berechnungsmethode ergibt sich die Verzweigungslast als

$$\sigma_{cr} = \frac{f_{y,\theta}}{\bar{\lambda}_p^2} \cdot \sqrt{\frac{k_E}{k_y}} \quad \text{für } \bar{\lambda}_p \geq \bar{\lambda}_{p,grenz} \quad (5.43 a)$$

$$\sigma_{cr} = f_{y,\theta} - \frac{f_{y,\theta} - f_{p,\theta}}{\bar{\lambda}_{p,grenz} - \bar{\lambda}_{p,pl}} \cdot (\bar{\lambda}_p - \bar{\lambda}_{p,pl}) \leq f_{y,\theta} \quad \text{für } \bar{\lambda}_p < \bar{\lambda}_{p,grenz} \quad (5.43 b)$$

In Abbildung 5-9 wird diese Näherungslösung des Verzweigungsproblems mit den Ergebnissen des numerischen Berechnungsmodells für unterschiedliche Temperaturen verglichen. Die Näherung kann sowohl für die vierseitig wie auch für die dreiseitig gelenkig gelagerte Platte die numerischen Ergebnisse grob wiedergeben.

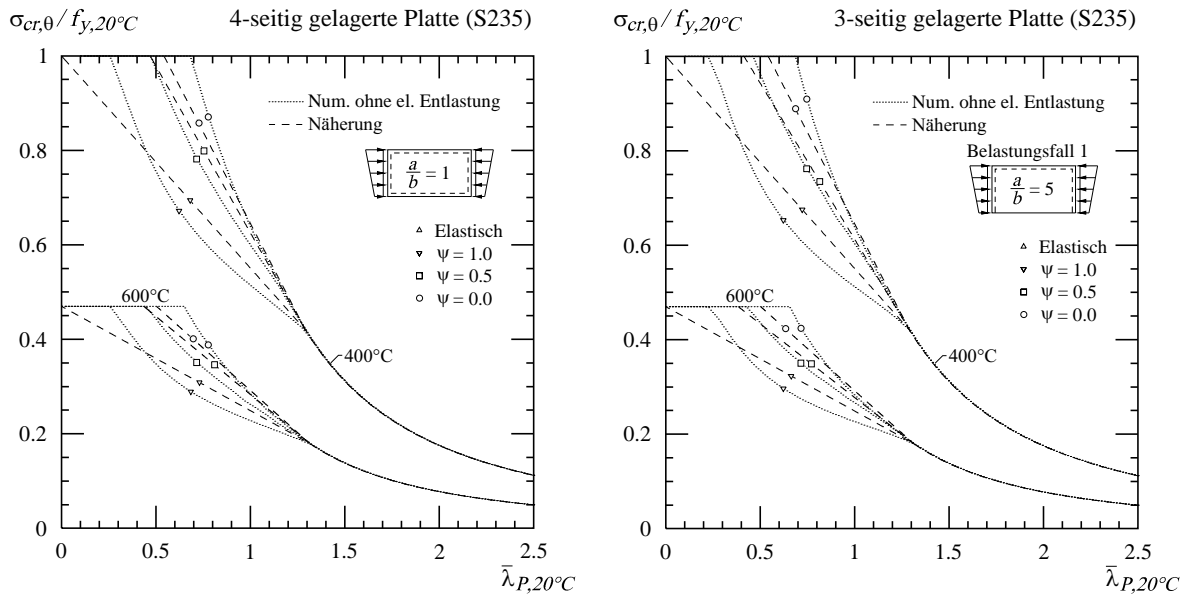


Abb. 5-9: Vereinfachte Berechnung der Verzweigungslasten von Platten mit nichtlinearem Materialverhalten verglichen mit den Ergebnissen des numerischen Berechnungsmodells.

5.4 Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

- Die Verzweigungslast der Platten mit einer bezogenen Schlankheit kleiner als die Grenzschlankheit wird stark von der Nichtlinearität der Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Materials beeinflusst.
- Es bestehen analytische Berechnungsmodelle zur Bestimmung der Verzweigungslast für Platten mit nichtlinearem Materialverhalten und reiner Druckbelastung. Besonders das Modell von Iljuschin liefert gute Ergebnisse sowohl für dreiseitig wie auch für vierseitig gelenkig gelagerte Platten. Die vorhandenen analytischen Modelle können jedoch die Verzweigungslast von Platten mit gemischter Belastung aus Druck und Biegung nicht korrekt erfassen.
- Die Lösung des Verzweigungsproblems nach Bleich folgt aus der Lösung der elastisch orthotropen Platte, wobei einzig für die Belastungsrichtung die Steifigkeit mit dem für die gegebene Belastung vorhandenen Tangentenmodul ersetzt wird. Dieses Berechnungsmodell ist in der Anwendung sehr einfach, liefert jedoch bei gedrungenen Platten zu tiefe Verzweigungslasten. Das Modell nach Bleich löst das Verzweigungsproblem nur bei Platten mit reiner Druckbeanspruchung.
- Zwei numerische Modelle berechnen die Verzweigungslast von Platten mit nichtlinearem Materialverhalten und beliebiger Belastung mit respektive ohne Berücksichtigung der elastischen Entlastung. Diese Berechnungsmodelle lösen das Verzweigungsproblem durch Gleichsetzen der infolge der Plattenverformung geleisteten Deformationsenergie mit der äusseren durch die Verschiebung der Belastung gewonnenen potentiellen Energie. Die Ergebnisse der numerische Modelle dienen als Ausgangslage für die Entwicklung neuer analytischer Modelle zur Bestimmung der Verzweigungslast von Platten mit nichtlinearem Materialverhalten mit gemischter Belastung aus Druck und Biegung.
- Der Einfluss der Belastungskonfiguration durch Druck und Biegung kann für gedrunzene Platten, die im nichtlinearen Bereich der Spannungs-Dehnungs-Beziehung ausbeulen, nicht mit dem elastisch berechneten Beulfaktor erfasst werden.
- Das Berechnungsmodell mit belastungsabhängiger Plattensteifigkeit beschreibt die Plattensteifigkeit in den unterschiedlichen Tragrichtungen in Funktion der äusseren Belastung durch vereinfachende Annahmen. Zusammen mit der Plattendifferentialgleichung kann die Verzweigungslast von vierseitig und dreiseitig gelenkig gelagerten Platten berechnet werden.

- Das Berechnungsmodell mit belastungsabhängiger Plattensteifigkeit erlaubt eine einfache und zuverlässige Berechnung der zum Verzweigungsproblem gehörenden Schlankheit einer Platten bei gegebener Belastung durch Druck und Biegung. Wird diese Schlankheit überschritten, beult die idealisierte, perfekt gerade Platte aus.
- Das vereinfachte Modell erlaubt eine schnelle, aber grobe Berechnung der Verzweigungslasten von Platten besonders bei kombinierter Beanspruchung durch Druck und Biegung.

6 Querschnittstragfähigkeit

Die Tragfähigkeit von Querschnitten, die sich durch Plattenelemente zusammensetzen, wird hauptsächlich durch das Tragverhalten der einzelnen Platten und deren Zusammenwirkung bestimmt. In den folgenden Abschnitten wird in einem ersten Schritt das Berechnungsmodell nach Kármán zur Beschreibung des Tragverhaltens von Platten erläutert, welche in ihrer Ebene durch Druck und Biegung belastet werden. Dieses Modell wird in der Folge für zentrisch gedrückte Platten mit nichtlinearem Materialverhalten erweitert. In einem zweiten Schritt wird das Tragverhalten des gesamten Querschnittes anhand der Momenten-Krümmungs-Beziehung beschrieben, wobei neu das Verhalten des einzelnen Querschnittselements berücksichtigt wird. Insbesondere wird die maximale Traglast der Platten, die zusammen den Querschnitt bilden, bei der Berechnung des auf Biegung und Normalkraft beanspruchten Stützenquerschnittes berücksichtigt. Zudem wird nebst der Berechnung der Traglast des Stützenquerschnittes für eine gegebene Lastkombination stets auch dessen Verformung respektive Krümmung beim Erreichen der Traglast abgeschätzt. Dies erlaubt schlussendlich die Berechnung von gedrückten Stützen, bei denen je nach Belastung lokales oder globales Stabilitätsversagen auftreten kann.

6.1 Geschichtlicher Rückblick

Schon früh wurde bemerkt, dass bei schlanken Platten nach dem Erreichen der Verzweigungslast eine Laststeigerung infolge einer Umlagerung der Spannungen innerhalb der Platte möglich ist (Abb. 6-1). Zu den ersten analytischen Modellen, die zur Berechnung der Traglast von Platten im überkritischen Bereich entwickelt wurden, gehört die Methode der wirksamen Breiten nach Kármán, welche im Jahre 1932 veröffentlicht wurde [35]. Diese Methode bildet noch heute die Grundlage der meisten Bemessungsmethoden, die zur Berechnung der Plattentraglast in den Normen verankert sind. Besonders zu erwähnen ist in diesem Zusammenhang das Berechnungsmodell nach Winter [79], welches heutzutage wohl das meist benutzte Modell zur Berechnung der Traglast von Platten ist. Dass die Methode der wirksamen Breite so verbreitet ist, beruht hauptsächlich auf der Einfachheit in der Anwendung sowie auf der Zuverlässigkeit der Ergebnisse. Dies, obwohl die Spannungsverteilung beim Erreichen der Traglast durch Spannungsblöcke angenähert wird und die Annahme einer wirksamen Breite zur Beschreibung des gesamten Beulfelds die Realität nur vereinfachend beschreibt.

Seit der Mitte des 20^{ten} Jahrhunderts befassten sich viele Forscher mit dem Tragverhalten der Platte im überkritischen Bereich. Die Schwierigkeit, die Spannungsumlagerungen in der Platte sowie das Beulverhalten richtig zu erfassen, machte eine korrekte analytische Beschreibung des Problems unmöglich. Dafür wurden mehrere Näherungslösungen entwickelt, wobei diejenige von den Autoren Klöppel, Bilstein und Unger [40] besonders erwähnt sei. Diese Näherungsmethode beruht, ähnlich wie der Ansatz von Timoshenko [74] zur Berechnung der Verzweigungslasten von Platten, auf einem Energieansatz und erlaubt das Beschreiben des Tragverhaltens einer dreiseitig gelenkig gelagerten Platte mit Berücksichtigung einer Vorverformung. Eine Zusammenstellung

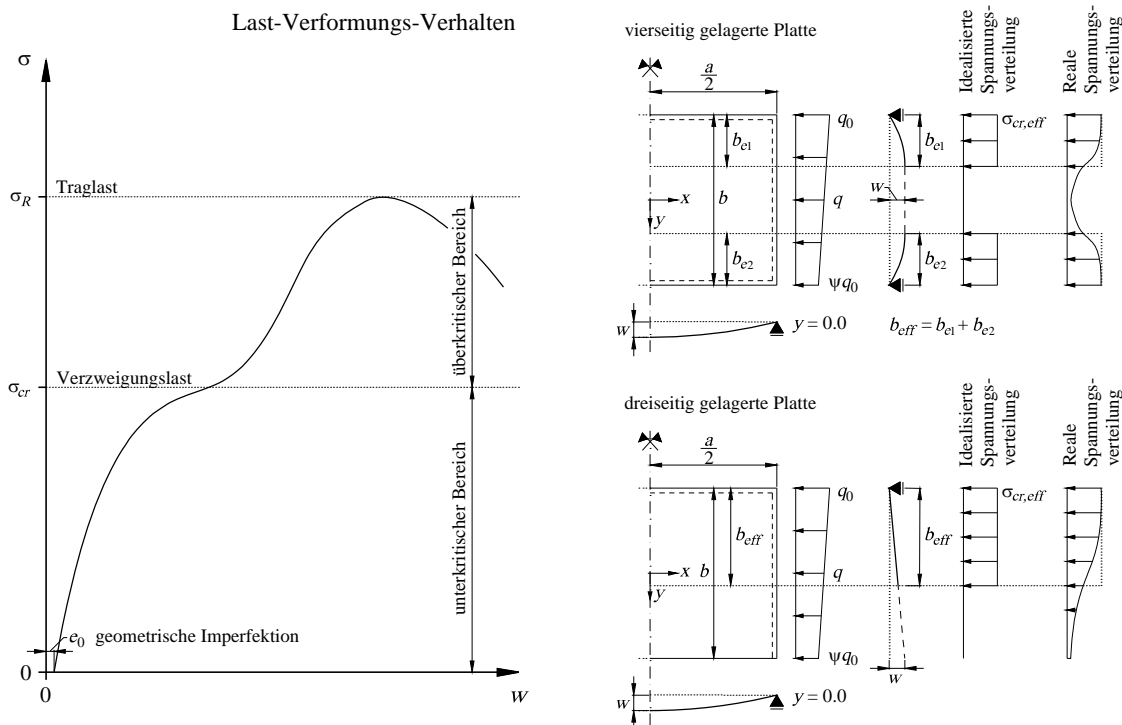


Abb. 6-1: Links: Tragverhalten der Platte. Rechts: Statisches Modell zur Berechnung der wirksamen Breiten bei der vierseitig und dreiseitig gelenkig gelagerten Platte.

der jüngsten Entwicklungen bezüglich der Berechnung der Traglast von Platten mit nichtlinearem Materialverhalten ist in der Dissertationsarbeit von Niederegger [49] enthalten.

6.2 Traglast von Platten

Beult die auf Druck belastete Platte aus, kommt es zu einer Spannungsumlagerung innerhalb der Platte. Dabei entziehen sich die Plattenbereiche, welche die grössten Verformungen erfahren der von aussen einwirkenden Belastung, während die lagerungsnahen Bereiche, welche nur kleine Verformungen erfahren, dies ausgleichen müssen. Solange die gesamte Platte elastisch bleibt, zeigt Timoshenko in seiner Veröffentlichung [74], wie die Spannungsverteilung in der Platte und an deren Rändern in Funktion der Verformungsfigur berechnet werden kann. Kommt es zu Plastifizierungen ist die Spannungsverteilung in der verformten Platte sehr schwer zu erfassen.

6.2.1 Methode der wirksamen Breiten

Die Methode der wirksamen Breiten ist eine vereinfachte Betrachtung der plastischen Spannungsverteilung in der verformten Platte, die auf die Arbeit von Kármán [35] zurückgeht. Bei dieser wird die nichtlineare Spannungsverteilung am belasteten Plattenrand durch Spannungsblöcke konstanter Spannung ersetzt (Abb. 6-1 rechts). Die Spannungsblöcke der idealisierten Spannungsverteilung wirken auf der reduzierten, wirksamen Breite b_{eff} und besitzen eine Spannung, die der Verzweigungsspannung $\sigma_{cr,eff}$ der auf die wirksame Breite reduzierten Platte entspricht. Gleichzeitig ist die wirksame Breite so zu wählen, dass die resultierende Druckkraft in der Platte erhalten bleibt. Folgende Gleichung beschreibt die idealisierte Spannungsverteilung an der verformten Platte, indem sie die Beziehung zwischen der Amplitude der Spannungen $\sigma_{cr,eff}$ in den Spannungsblöcken und deren wirksamen Breite b_{eff} beschreibt.

$$\sigma_{cr, eff} = \frac{\pi^2 k_{\theta, eff} E_{\theta}}{12(1 - \nu^2)} \cdot \left(\frac{t}{b_{eff}}\right)^2 \quad (6.1)$$

Dabei ist der Beulfaktor $k_{\theta, eff}$ der auf die wirksame Breite reduzierten Platte von der Temperatur θ abhängig und gemäss der nichtlinearen Theorie zur Verzweigungslast des Kapitels 5 zu berechnen. Durch Umformen dieser Beziehung lässt sich die wirksame Breite in Funktion der Belastung, welche den Spannungsblöcken zugeordnet ist, folgendermassen beschreiben.

$$b_{eff} = \beta t \cdot \sqrt{\frac{k_{\theta, eff} E_{\theta}}{\sigma_{cr, eff}}} \quad \text{mit } \beta = \frac{\pi \alpha}{\sqrt{12(1 - \nu^2)}} \quad (6.2)$$

Diese Gleichung dient als die Grundlage für die Modelle zur Berechnung der Traglast von Platten, welche die Methode der wirksamen Breiten benutzen, wie unter anderen auch diejenige von Winter [79]. Zur Berücksichtigung geometrischer und struktureller Imperfektionen der Platte wird bei den Bemessungsansätzen nach Kármán oder Winter die Konstante β in Gleichung 6.2 mit der Variable α multipliziert. Diese kann analog zum Knicknachweis des Kapitels 4.1.2 als Imperfektionsbeiwert verstanden werden. Während der vereinfachte Bemessungsansatz nach Kármán die Imperfektionen der Platte mit einem Beiwert $\alpha = 0.9$ berücksichtigt, ist dieser Beiwert beim Bemessungsmodell nach Winter von der Plattenschlankheit abhängig. Somit unterscheiden sich die zwei erwähnten Bemessungsansätze nur in der Wahl der geometrischen und strukturellen Imperfektionen der Platte, die nun in den Modellen implizit durch den Beiwert α abgebildet werden.

Der Abminderungsfaktor ρ setzt die wirksame Breite b_{eff} ins Verhältnis zur realen Plattenbreite b . Wird zusätzlich die Verzweigungslast bei Raumtemperatur gemäss Gleichung 6.3a eingeführt, ergibt sich der Abminderungsfaktor ρ durch folgende Gleichung.

$$\rho = \frac{b_{eff}}{b} = \sqrt{\frac{k_E \cdot f_y}{\sigma_{cr, eff}} \cdot \frac{k_{\theta, eff}}{k}} \cdot \frac{1}{\bar{\lambda}_{P, 20^\circ C}} \quad (6.3)$$

$$\text{mit } \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 k E}{12(1 - \nu^2)} \cdot \left(\frac{t}{b}\right)^2 = \frac{f_y}{\bar{\lambda}_{P, 20^\circ C}^2} \quad \text{bei Raumtemperatur} \quad (6.3a)$$

Die resultierende Normalkraft in der Platte ergibt sich aus den Spannungsblöcken mit der Spannung $\sigma_{cr, eff}$ und der wirksamen Breite b_{eff}

$$N_{R, \theta} = \rho t b \cdot \sigma_{cr, eff} = b t \cdot \sqrt{k_E \cdot f_y \cdot \frac{k_{\theta, eff}}{k}} \cdot \sigma_{cr, eff} \cdot \frac{1}{\bar{\lambda}_{P, 20^\circ C}} \quad (6.4)$$

Bleiben die Spannungen der gesamten Platte unterhalb der Proportionalitätsgrenze, entspricht der Beulfaktor $k_{\theta, eff}$ dem Beulfaktor k der gesamten Platte bei Raumtemperatur. Dies bedeutet, dass die Traglast $N_{R, \theta}$ der Platte, nebst den Konstanten der Geometrie und des Materials einzig von der noch unbekanntem Verzweigungslast $\sigma_{cr, eff}$ abhängt. Je grösser diese gewählt wird, desto kleiner wird die wirksame Breite der Platte (Gl. 6.2). Dennoch vergrössert sich die Traglast, je grösser die Spannung der Spannungsblöcke gewählt wird, wie dies aus der Gleichung 6.4 hervorgeht. Die maximal zulässige Spannung entspricht der Proportionalitätsgrenze $f_{p, \theta}$, da eine höhere Belastung zu Plastifizierungen und dementsprechend zu unterschiedlichen Beulfaktoren $k_{\theta, eff}$ und k führen würde. Für die elastisch bleibende Platte entspricht somit die maximale Traglast ohne Berücksichtigung geometrischer oder struktureller Imperfektionen folgendem Ausdruck

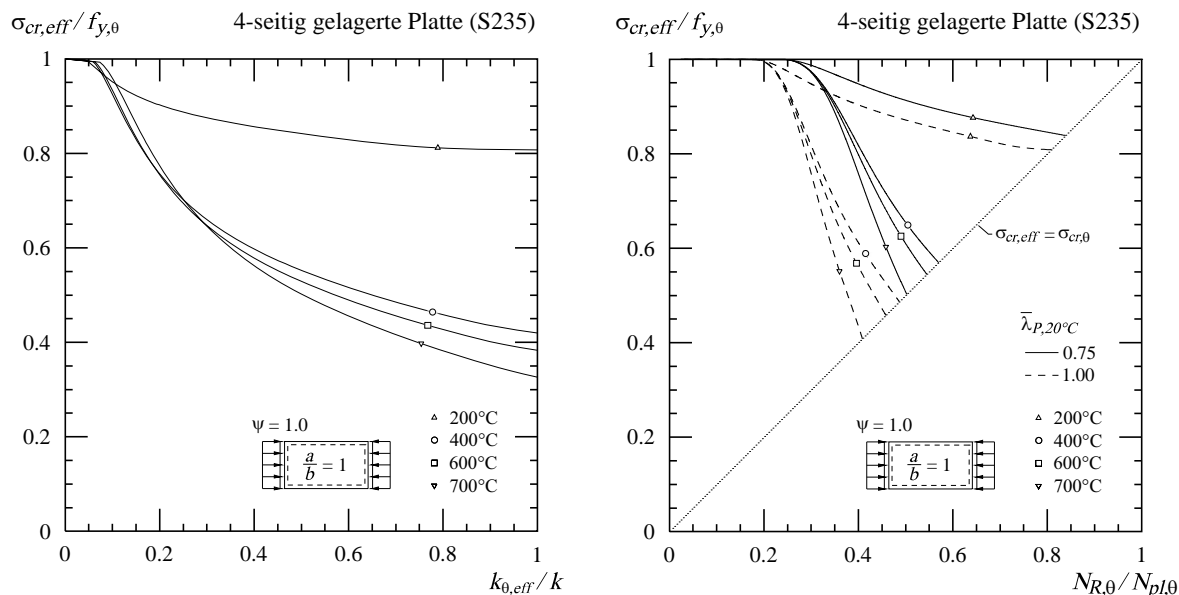


Abb. 6-2: Links: Verminderung des Beulfaktors der auf die wirksame Breite reduzierten Platte in Funktion der Belastung. Rechts: Traglast der Platte in Funktion der Spannung in den Spannungsböcken.

$$N_{R,\theta} = \rho t b \cdot f_{p,\theta} \quad \text{mit } \rho = \frac{\bar{\lambda}_{P,grenz}}{\bar{\lambda}_{P,20^\circ C}} \quad \text{für } \bar{\lambda}_{P,20^\circ C} \geq \bar{\lambda}_{P,grenz} \quad (6.5)$$

Diese elastische Lösung gilt für alle Platten, welche eine bezogene Schlankheit bei Raumtemperatur grösser gleich der Grenzschlankheit gemäss Gleichung 5.1 aufweisen. Bei Platten mit kleineren Schlankheiten kommt es zu Plastifizierungen, die bei der Berechnung des Beulfaktors $k_{\theta,eff}$ berücksichtigt werden müssen. Je grösser die Beanspruchung der Platte, desto mehr wird der Beulfaktor infolge der zunehmenden Plastifizierung in der Platte reduziert. Dementsprechend sind in Gleichung 6.4 zwei Variablen von der Spannung in den Spannungsböcken abhängig, was eine genauere Untersuchung zur Bestimmung der maximalen Traglast der Platte erfordert. In Abbildung 6-2 links ist die Verminderung des Beulfaktors der auf die wirksame Breite reduzierten Platte bei erhöhten Temperaturen in Funktion der Spannung der Spannungsböcke dargestellt. Es ist ersichtlich, dass der Beulfaktor beim Überschreiten der Proportionalitätsgrenze, besonders bei niedrigeren Temperaturen, stark vermindert wird. Dies führt dazu, dass die maximale Traglast der Platte für eine möglichst kleine Spannung in den Spannungsböcken erreicht wird, wie in Abbildung 6-2 rechts auch dargestellt. Aus derselben Abbildung geht hervor, dass die maximale Traglast der Platte stets für eine Belastung erreicht wird, die der Verzweigungslast der Platte entspricht.

$$N_{R,\theta} = b t \cdot \sigma_{cr,\theta} \quad \text{für } \bar{\lambda}_{P,20^\circ C} < \bar{\lambda}_{P,grenz} \quad (6.6)$$

Es ist zu beachten, dass bis anhin noch keine geometrischen oder strukturellen Imperfektionen der Platte berücksichtigt wurden. Diese werden durch den Beiwert α in Gleichung 6.2 implizit im Modell berücksichtigt. Bei Raumtemperatur wurde diese Konstante anhand einer Vielzahl von Versuchen und numerischen Simulationen kalibriert. Aus den unterschiedlichen Vorschlägen, die in der heutigen Normung zu finden sind, berücksichtigt der einfachste Ansatz die strukturellen und geometrischen Imperfektionen durch einen für alle Plattenschlankheiten konstanten Imperfektionsbeiwert $\alpha = 0.9$. Für die Berechnung der Traglasten bei erhöhten Temperaturen wird dieser Ansatz übernommen, wobei die Reduktion des Faktors β durch den Beiwert α im plastischen Bereich angepasst wird, um bei sehr gedungenen Platten die maximale plastische Tragfähigkeit zu erreichen.

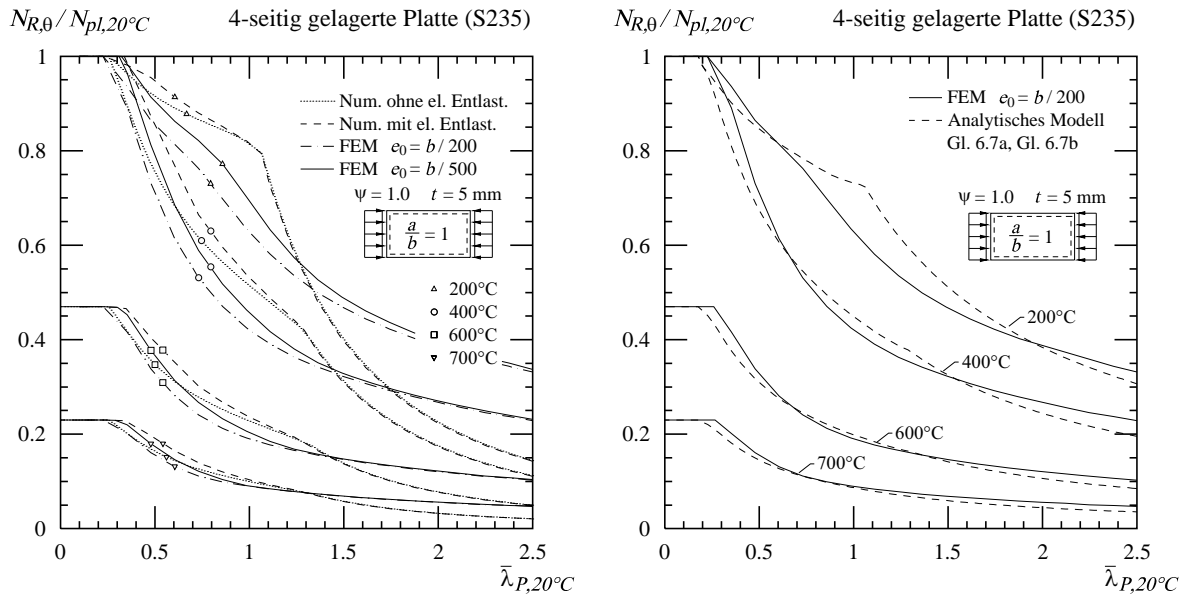


Abb. 6-3: Links: Traglast der Platten mit unterschiedlichen Imperfektionen im Vergleich. Rechts: Vergleich des Berechnungsmodells mit den Ergebnissen der FE-Berechnungen.

$$N_{R,\theta} = \rho t b \cdot f_{p,\theta} \quad \text{mit } \rho = 0.9 \cdot \frac{\bar{\lambda}_{P,\text{grenz}}}{\bar{\lambda}_{P,20^\circ\text{C}}} \quad \text{für } \bar{\lambda}_{P,20^\circ\text{C}} \geq \bar{\lambda}_{P,\text{grenz}} \quad (6.7a)$$

$$N_{R,\theta} = \left(1 - 0.1 \cdot \frac{\bar{\lambda}_{P,20^\circ\text{C}}}{\bar{\lambda}_{P,\text{grenz}}} \right) \cdot b t \cdot \sigma_{cr,\theta} \quad \text{für } \bar{\lambda}_{P,20^\circ\text{C}} < \bar{\lambda}_{P,\text{grenz}} \quad (6.7b)$$

Dieses vereinfachte Berechnungsmodell, das auf der Modellvorstellung der Platte im überkritischen Bereich nach Kármán basiert, wurde anhand von numerischen Simulationen verifiziert. Bei diesen Berechnungen, die den Ansatz der finiten Elemente [1] benutzen, wird eine quadratische Platte konstanter Dicke ($t = 5 \text{ mm}$) und einer in Funktion der bezogenen Schlankheit variablen Breite respektive Länge betrachtet. Die Platte ist allseitig gelenkig gelagert, wobei entlang der Kanten sämtliche Verschiebungen in der Plattenebene zugelassen werden, mit Ausnahme der Längsverschiebungen der durch die Linienlast belasteten Kanten. Die Belastung der Platte erfolgt durch eine Stauchung der Platte in x-Richtung, bei der die belastete Kante stets gerade bleibt. Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Materials wird mit dem Materialmodell des Eurocodes EN 1993-1-2 beschrieben, wobei eine isotrope Verfestigung und ein Fließkriterium nach von Mises angewendet wird. Die Platten sind eigenspannungsfrei und die geometrischen Imperfektionen werden mit einer Plattenverformung affin zur ersten elastischen Eigenform bei Raumtemperatur angenommen. In Abbildung 6-3 links werden die Traglasten der numerischen Berechnung mit der Methode der finite Elemente für unterschiedliche Temperaturen in Funktion der bei Raumtemperatur bezogenen Plattenschlankheit mit den Verzweigungslasten verglichen. Die Verzweigungslasten werden mit den numerischen Modellen aus Kapitel 5.2.1 und 5.2.2 berechnet. Aus der Abbildung geht hervor, dass im elastischen Bereich Traglasten weit über der Verzweigungslast erreicht werden können, während die Traglasten bei sehr gedrungenen Platten infolge der Plastifizierungen und der geometrischen Imperfektionen in etwa der Verzweigungslast entsprechen.

In Abbildung 6-3 rechts sind die Traglasten des finiten Elementen Modells mit einer Ersatzimperfektion $e_0 = b/200$ [16] dem analytischen Modell gemäss Gleichungen 6.7a und 6.7b gegenübergestellt. Dabei wird die Verzweigungslast $\sigma_{cr,\text{eff}}$ wie auch der Beulfaktor $k_{\theta,\text{eff}}$ mit den Gleichungen 5.29 und 5.30 berechnet. Besonders bei den höheren Temperaturen kann die Traglast mit dem analytischen Modell gut abgebildet werden, während bei tieferen Temperaturen und grossen Plattenschlankheiten die Traglasten des analytischen Modells tiefer liegen im Vergleich zu

den numerischen Ergebnissen. Für Platten mit einer bei Raumtemperatur bezogenen Schlankheit in der Grössenordnung der Grenzschlankheit liegen die Traglasten des analytischen Modells teilweise höher als die numerischen Ergebnisse.

6.3 Querschnittstragfähigkeit

Die Querschnittstragfähigkeit eines Stahlprofils, welches durch Normalkraft und Biegung beansprucht wird, ergibt sich aus dem Tragverhalten der einzelnen Querschnittselemente. Nebst der geometrischen Anordnung und Abmessungen beeinflusst insbesondere das Stabilitätsverhalten der einzelnen Querschnittselemente die Tragfähigkeit des gesamten Querschnittes. Um das komplexe Zusammenwirken der unterschiedlichen Einflüsse zu erfassen, wird die Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnittes betrachtet. Diese ermöglicht die Verformungen in Folge der Belastung in den meist beanspruchten Querschnittselementen zu quantifizieren und somit den Einfluss des lokalen Last-Verformungs-Verhaltens dieser Elemente auf das Tragverhalten des gesamten Querschnittes zu beschreiben.

6.3.1 Rechteckige Hohlquerschnitte

Das Tragverhalten rechteckiger Hohlquerschnitten ergibt sich durch die Last-Verformungs-Beziehung der vierseitig gelagerten Platten, aus denen sich der Querschnitt zusammensetzt. In Abbildung 6-4 sind die Last-Stauchungs-Beziehungen von allseitig gelenkig gelagerten Platten mit gleichmässiger Belastung für unterschiedliche Temperaturen und Schlankheiten dargestellt. Die Last-Stauchungs-Beziehungen werden mit einem finiten Elemente Modell berechnet, wobei eine geometrische Imperfektion von $e_0 = b/200$ angenommen ist. Es ist ersichtlich, dass zwar sehr gedrungene Platten in etwa das Materialverhalten wiedergeben, bei den schlankeren Platten aber der Einfluss der Stabilität auf das Last-Stauchungs-Verhalten bedeutend ist. Je schlanker die Platte, desto weicher ist das Verhalten und desto kleiner ihr maximaler Tragwiderstand. Um den Einfluss der Last-Stauchungs-Beziehung auf das Last-Verformungs-Verhalten des gesamten Querschnittes zu beschreiben, sind besonders die Dehnungen beim Erreichen der Verzweigungslast ε_{cr} und diejenige beim Erreichen der maximalen Belastung ε_r von Interesse. Mit der Methode der wirksamen Breiten für nichtlineares Materialverhalten des Kapitels 6.2.1 lassen sich diese abschätzen. Die Dehnung ε_{cr} ergibt sich aus der Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Materials bei gegebener Temperatur und der Verzweigungsspannung $\sigma_{cr,\theta}$ des betrachteten Querschnittselements. Gleichermassen ergibt sich die Dehnung ε_r aus der maximalen Spannung, die an der auf die wirksame Breite reduzierten Platte angreift. Diese entspricht bei sehr schlanken Platten der Proportionalitätsspannung, während sie für Platten mit einer bezogenen Schlankheit kleiner als die Grenzschlankheit (Gl. 5.1) der Verzweigungslast $\sigma_{cr,\theta}$ entspricht.

$$\varepsilon_r = f(f_p, \theta) \quad \text{für } \bar{\lambda}_P, 20^\circ C \geq \bar{\lambda}_{P, \text{grenz}} \quad (6.8a)$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{cr} = f(\sigma_{cr, \theta}) \quad \text{für } \bar{\lambda}_P, 20^\circ C < \bar{\lambda}_{P, \text{grenz}} \quad (6.8b)$$

In Abbildung 6-4 ist für die Last-Stauchungs-Beziehung der unterschiedlichen Platten die Dehnung ε_r mit einem gefüllten Kreis und die Dehnung ε_{cr} mit einem leeren Kreis gekennzeichnet. Für Platten mit einer bei Raumtemperatur bezogenen Schlankheit kleiner als die Grenzschlankheit sind die beiden Dehnungen gleich gross. Im Allgemeinen ist eine Unterschätzung der Dehnung beim Erreichen der Maximallast ersichtlich, die für gedrungene Platten eher klein ausfällt und für schlankere Platten zunimmt. Dieser Unterschied ist hauptsächlich durch die vereinfachende Abbil-

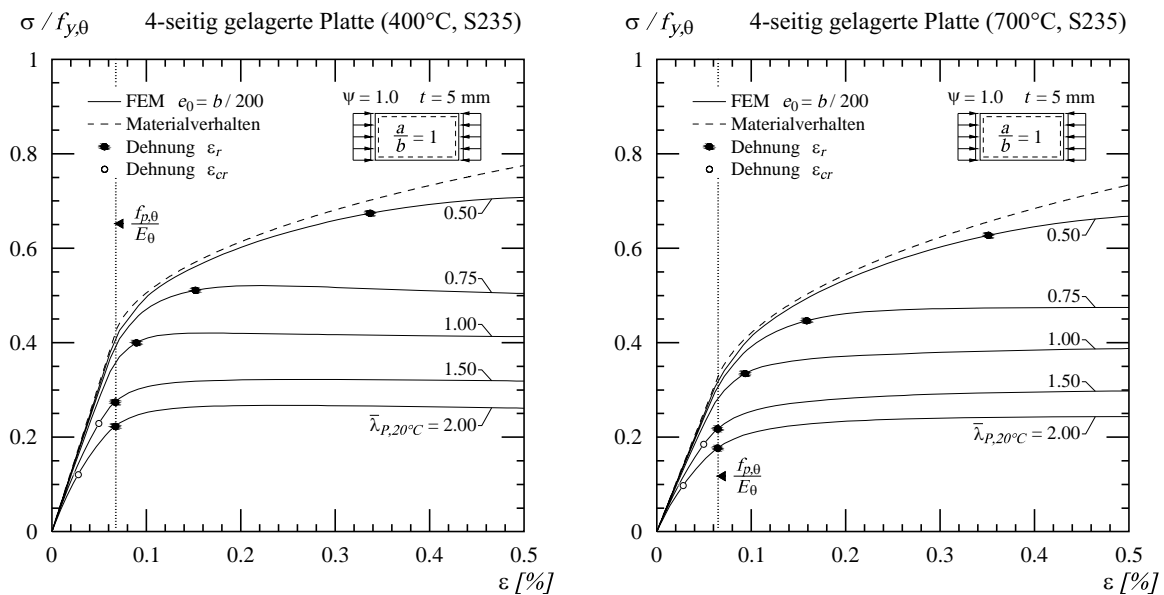


Abb. 6-4: Last-Stauchungs-Beziehung für allseitig gelenkig gelagerte Platten unterschiedlicher Schlankheit mit gleichmässiger Belastung bei 400°C und 700°C.

dung der wahren Spannungsverteilung der ausgebeulten Platte durch die Spannungsblöcke zu erklären. Rückhaltende Spannungen quer zur Platte, die dem Ausbeulen entgegenwirken, sowie geometrische Imperfektionen sind im analytischen Berechnungsmodell nur indirekt berücksichtigt. Dennoch kann mit der Dehnung ε_r in etwa abgeschätzt werden, ab welcher Stauchung die grössten Steifigkeitsverluste des Plattenelements zu erwarten sind. Bei schlanken Platten mit einer bei Raumtemperatur bezogenen Schlankheit grösser als die Grenzschlankheit ist ein etwas geringerer Steifigkeitsverlust schon beim Überschreiten der Dehnung ε_{cr} zu beobachten.

In Abbildung 6-5 ist die Beziehung zwischen der Belastung und der Verformung des Querschnittes in zwei Momenten-Krümmungs-Diagrammen für unterschiedliche quadratische Hohlprofile und axiale Belastung dargestellt. Diese Beziehung wird an einer sehr gedungenen Stütze, die dreimal so hoch ist wie breit, mit einem finiten Elemente Modell [1] berechnet. Nebst den Eigenspannungen, welche gemäss Abbildung 3-11 angenommen werden, sind geometrische Imperfektionen berücksichtigt, die affin zur ersten Eigenform des Querschnittes mit reiner Druckbelastung verteilt sind und einen Maximalwert $e_0 = b/200$ haben. Die kurze Stütze, die an beiden Enden zwangsfrei gelagert ist, wird zuerst durch die Normalkraft N und dann durch das Biegemoment M belastet. Mehr Informationen zur Modellbildung der Stütze mit der finiten Elemente Methode sind in [41] enthalten. Zusätzlich zu den Ergebnissen des finiten Elemente Modells, ist die Momenten-Krümmungs-Beziehung mit dem in Kapitel 3.3.1 erläuterten Gleichgewichtsmodell dargestellt. Dieses berücksichtigt das Materialverhalten, Eigenspannungen gemäss Abbildung 3-11 und die geometrische Anordnung der Querschnittselemente, nicht aber die geometrischen Imperfektionen der Querschnittselemente sowie deren Stabilitätsverhalten. Wie in Abbildung 6-5 ersichtlich, führen diese geometrischen Imperfektionen der Plattenelemente besonders bei hoher axialer Belastung zu einem weicherem Verhalten der kurzen Stütze. Der Unterschied in der Momenten-Krümmungs-Beziehung der beiden Berechnungsmodelle vergrössert sich mit zunehmender Beanspruchung des Querschnittes. Dies ist eine Folge des Last-Stauchungs-Verhaltens des meist beanspruchten Querschnittselements (Abb. 6-4), welches infolge der Ausbeulung, mit zunehmender Belastung weicher wird. Um das lokale Stabilitätsversagen des meist beanspruchten Querschnittselements bei der Momenten-Krümmungs-Beziehung gemäss dem Gleichgewichtsmodell zu berücksichtigen, wird die maximale Stauchung dieses Plattenelements auf die Dehnung ε_r beschränkt. Dabei wird das Plattenelement als allseitig gelenkig gelagert und seine Breite auf die freie Breite des Flansches ($b - 3t$) angenommen, wobei die Ausrundungen beidseitig $1.5t$ betragen. Dieser Belastungszustand, der in Abbildung 6-5 durch die gefüllten Kreise darge-

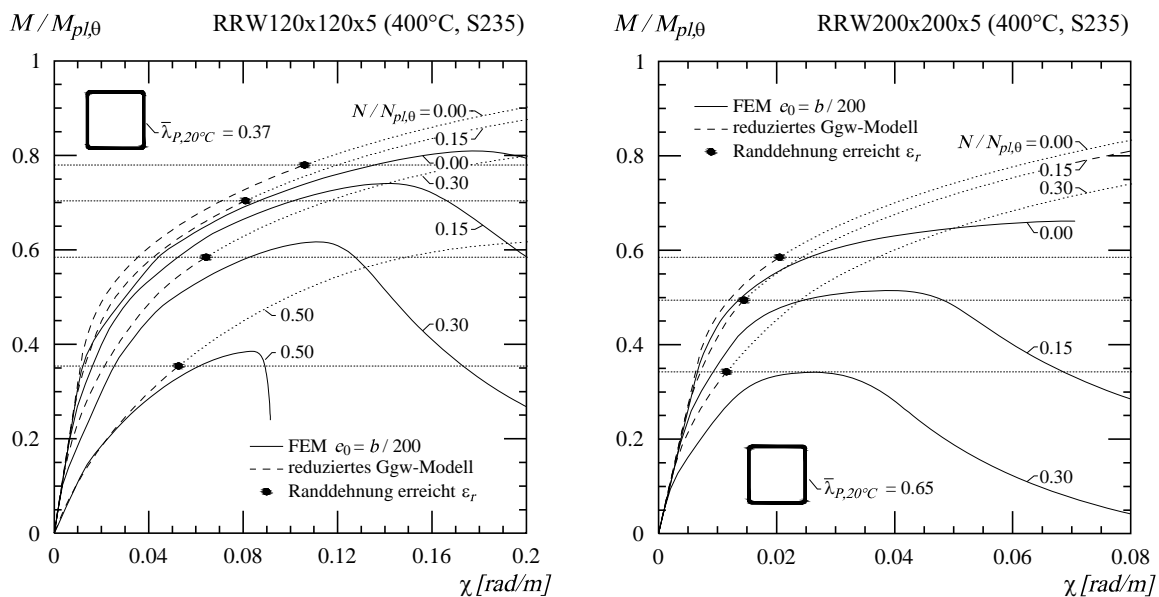


Abb. 6-5: Einfluss des Last-Stauchungs-Verhaltens der einzelnen Querschnittselemente auf die Momenten-Krümmungs-Beziehung. Vergleich der FE-Ergebnisse mit dem reduzierten Gleichgewichtsmodell

stellt ist, entspricht somit der maximal möglichen Biegebelastung des Querschnittes für die gegebene Normalkraft. Verglichen mit den Ergebnissen des finiten Elemente Modells führt dies bei rechteckigen Hohlquerschnitten zu einer guten Näherung der maximalen Traglast.

Um die iterative Berechnung des Gleichgewichtsmodells zu umgehen, ist im Kapitel 4.2.2 ein vereinfachtes Modell erläutert, welches die Momenten-Krümmungs-Beziehung durch eine elliptische Funktion annähert. Bei diesem vereinfachten Gleichgewichtsmodell können die Stauchungen in den meist beanspruchten Querschnittselementen nicht direkt berechnet werden, da besonders die Dehnungen $\epsilon_{\Delta N}$ (Abb. 3-4 links) unbekannt sind. Diese sind jedoch notwendig, um das axiale Gleichgewicht auch bei einer Querschnittsverdrehung zu sichern. Durch eine vereinfachte Betrachtung der Spannungsverteilung im Querschnitt gemäss Abbildung 2-2 können diese zusätzlich notwendigen Dehnungen abgeschätzt werden. Dabei wird die Randdehnung ϵ_1 des Querschnittes in Funktion der Krümmung χ und der gegebenen axialen Belastung mit folgendem Ausdruck berechnet.

$$\epsilon_1 = \chi \cdot h_1 \quad \text{mit} \quad h_1 = \frac{E_\theta}{T_\theta + E_\theta} \cdot h \quad (6.9)$$

Wird der Querschnitt um seine schwache Achse belastet, so ist die Höhe h in der obigen Gleichung mit der Breite b des Querschnittes zu ersetzen. Der für die Berechnung des Hebelarms h_1 benötigte Tangentenmodul ist eine Funktion des Materials, der Temperatur und der Belastung des Querschnittes durch die Normalkraft. Mit der Verdrehung des Querschnittes wachsen die Spannungen am äusseren Rand an und führen dort zu einer weiteren Abnahme des Tangentenmoduls. Um diese zusätzliche Plastifizierung zu berücksichtigen, wird der Tangentenmodul mit einer um β_N vergrösserten Normalspannung berechnet. Berechnungen zeigen, dass eine Vergrösserung dieser Normalspannungen um 20% zu einer guten Übereinstimmung mit den numerischen Ergebnissen des finiten Elemente Modells führt. Diese Vergrösserung ist besonders bei den Querschnitten spürbar, die durch eine Normalkraft wenig unterhalb der Proportionalitätsgrenze beansprucht werden. Mit $\beta_N = 1.0$ würde bei diesen Querschnitten der innere Hebelarm der halben Höhe h entsprechen, da der Tangentenmodul in diesem Fall dem E-Modul entspricht. Die Plastifizierungen, welche infolge der zusätzlich zur Normalkraft einwirkenden Biegebelastung verursacht werden, würden in diesem Falle nicht berücksichtigt. Um dies zu korrigieren, wird der Beiwert $\beta_N = 1.20$ gewählt.

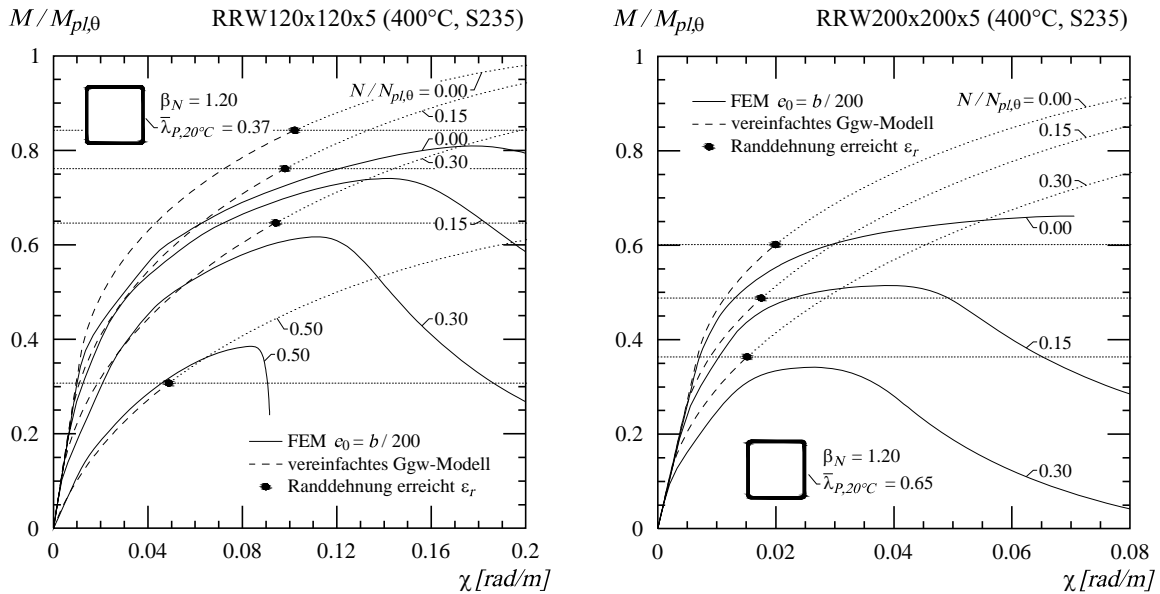


Abb. 6-6: Einfluss des Last-Stauchungs-Verhaltens der einzelnen Querschnittselemente auf die Momenten-Krümmungs-Beziehung.

In Abbildung 6-6 sind die Momenten-Krümmungs-Beziehungen des vereinfachten Gleichgewichtsmodells des Kapitels 4.2.2 den Ergebnissen der finiten Elemente Berechnungen gegenübergestellt. Zusätzlich ist mit den gefüllten Kreisen diejenige Krümmung in der Momenten-Krümmungs-Beziehung des vereinfachten Gleichgewichtsmodells gekennzeichnet, bei der das meist beanspruchte Querschnittselement eine Dehnung ϵ_r erfährt. Diese ergibt sich einerseits durch die Schlankheit des meist beanspruchten Querschnittselements, andererseits durch das Materialverhalten und die Temperatur. Die maximale Krümmung, welche zur Randdehnung ϵ_r gemäss den Gleichungen 6.8a und 6.8b führt, wird mit der Gleichung 6.9 berechnet. Diese Begrenzung der Momenten-Krümmungs-Beziehung führt zu einem maximalen Biege widerstand des durch Normalkraft belasteten Querschnittes mit nichtlinearem Materialverhalten. Wie in Abbildung 6-6 ersichtlich, können die Traglasten des finiten Elemente Modells mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell und der Begrenzung der maximal zulässigen Randdehnungen in etwa abgeschätzt werden.

Mehraxiale Belastung

Bis anhin wurde der Stützenquerschnitt durch eine Normalkraft und ein Biegemoment entweder um die starke oder die schwache Achse betrachtet. Ist eine Stütze durch eine Normalkraft und zweiachsiger Biegung belastet, muss nebst der Normalkraft-Biegung Interaktion auch eine Beziehung zwischen den Biegemomenten um beide Achsen gefunden werden. Erst diese zusätzliche Beziehung ermöglicht es, jede Belastungskombination abzudecken. Ohne genauere Untersuchungen wird auf die Interaktionsformel des Eurocodes zurückgegriffen, welche die Tragwirkung der schiefen Biegung bei Raumtemperatur gut beschreibt. Für rechteckige Hohlquerschnitte ist die Interaktion der Biegemomente $M_{N,y,R}$ und $M_{N,z,R}$ durch folgende zwei Ausdrücke gegeben.

$$\left(\frac{M_{y,E}}{M_{N,y,R}}\right)^\alpha + \left(\frac{M_{z,E}}{M_{N,z,R}}\right)^\beta \leq 1.0 \tag{6.10}$$

$$\alpha = \beta = \frac{1.66}{1 - 1.13n^2} \leq 6.0 \quad \text{mit } n = \frac{N_E}{N_{pl}} \tag{6.11}$$

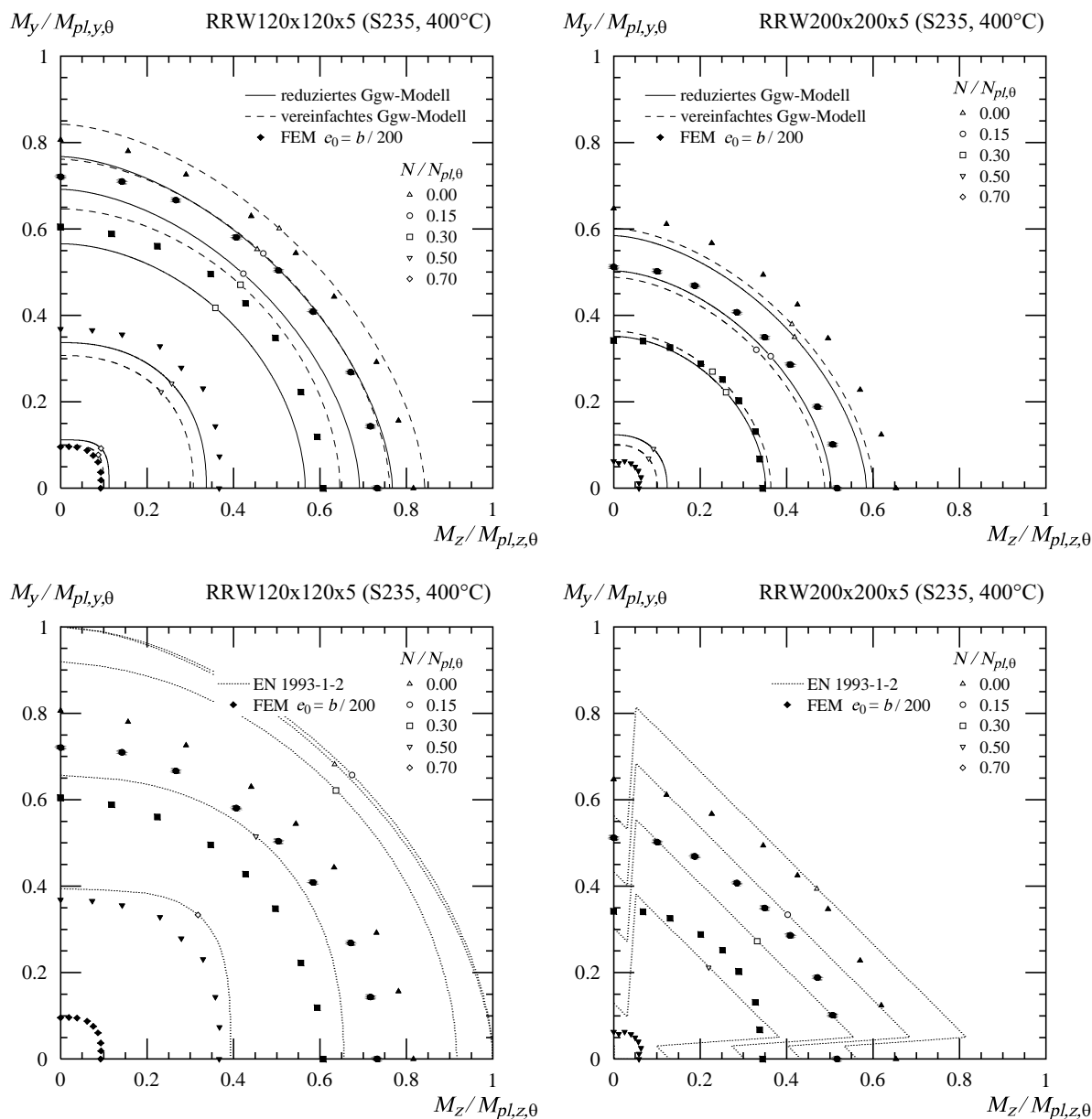


Abb. 6-7: Traglasten mehraxial beanspruchter Querschnitte bei 400°C. Vergleich zwischen den Ergebnissen des finiten Elementen Modells, des analytischen Berechnungsmodells sowie des Eurocodes.

Dabei entsprechen $M_{N,y,R}$ und $M_{N,z,R}$ den für die gegebene Normalkraft maximalen Biegegewiderständen, welche mit der Momenten-Krümmungs-Beziehung und der Begrenzung der Randdehnung ϵ_r gemäß Abbildung 6-5 oder 6-6 berechnet werden. In Abbildung 6-7 oben werden die Traglasten von unterschiedlich belasteten Stützen mit einem finiten Elemente Modell berechnet und mit den Ergebnissen der Gleichung 6.10 verglichen. Bei diesen sind die maximalen Biegegewiderstände $M_{N,R}$ einerseits mit dem numerischen Gleichgewichtsmodell und andererseits mit dem vereinfachten Modell des Kapitels 4.2.2 berechnet. Für die Berechnung der Dehnung ϵ_r , bei welcher die maximale Traglast des meist beanspruchten Querschnittselements erreicht wird, wird der Beulfaktor k_θ stets mit Gleichung 5.30 bestimmt. Wie in Abbildung 6-7 oben ersichtlich, können die Traglasten sowohl für den eher kompakten Querschnitt RRW120x120x5 wie auch für den schlankeren Querschnitt RRW200x200x5 gut abgeschätzt werden. Zusätzlich sind die Traglasten des finite Elemente Modells in Abbildung 6-7 unten mit den Traglasten des Eurocodes verglichen. Obwohl der RRW120x120x5 Querschnitt bei erhöhter Temperatur zur Querschnittsklasse 1 (QSK) gehört, können die Traglasten bei erhöhten Temperaturen mit dem Berechnungsmodell des Eurocodes nur schlecht abgebildet werden. Beim RRW200x200x5 Querschnitt, welcher bei Raumtemperatur zur Querschnittsklasse 2 gehört, jedoch bei den erhöhten Temperaturen in die

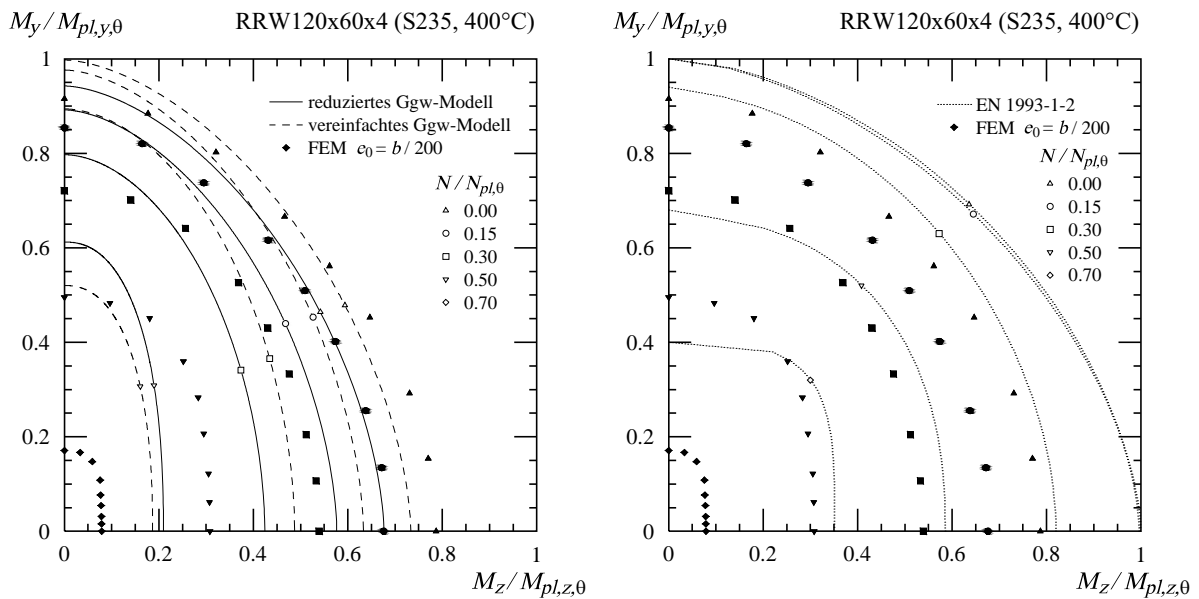


Abb. 6-8: Traglasten eines mehraxial beanspruchten rechteckigen Hohlquerschnitts bei 400°C. Vergleich zwischen den Ergebnissen der Gleichgewichtsmodelle und der EN 1993-1-2

Querschnittsklasse 3 respektive 4 übergeht, ist eine vernünftige Abschätzung der Traglast mit dem Berechnungsmodell des Eurocodes kaum möglich. Wegen der Abhängigkeit der Klassifizierung des Querschnittes von der Belastung, kommt es je nach äusserer Einwirkung zu einem Klassenwechsel. So gehört der Stützenquerschnitt bei schiefer Biegung der QSK 3 an, während er bei Normalkraft und Biegung nur um eine Achse in die QSK 4 rutscht. Dies führt zu einer Unstetigkeit in der Berechnung der Traglast und somit auch zu gewissen physikalischen Paradoxen. So ist ein Querschnitt mit Normalkraft und Biegung um eine Achse weniger belastbar, als wenn zusätzlich eine Biegebeanspruchung um die zweite Achse auftritt.

In Abbildung 6-8 sind die Traglasten eines rechteckigen Hohlquerschnitts dargestellt, der mehraxial beansprucht wird. In der linken Abbildung sind die Ergebnisse des finite Elemente Modells mit den Ergebnissen des reduzierten und des vereinfachten Gleichgewichtsmodells verglichen, während in der rechten Abbildung diese den Traglasten nach Eurocode gegenübergestellt sind. Obwohl die Ergebnisse der Gleichgewichtsmodelle diejenigen der numerischen Simulation besser wiedergeben als das Modell des Eurocodes, sind doch grössere Abweichungen zu beobachten als bei der Berechnung der Traglasten von quadratischen Hohlquerschnitten (Abb. 6-7). Besonders bei grösserer Normalkraft wird der Biege widerstand um die starke Achse überschätzt, während der Biege widerstand um die schwache Achse unterschätzt wird. Dies ist eine Folge unterschiedlicher Schlankheit der Querschnittselemente, die beim RRW120x60x4 Profil sehr deutlich ist. Bei reiner Druckbelastung beulen die schlankeren Plattenelemente der Stege vor den gedrungeneren Plattenelementen der Flansche aus. Dabei entsteht eine gegenseitige Beeinflussung zwischen den Platten, da die ausbeulenden Stege durch die gedrungeneren Flansche zurückgehalten werden. Dies führt zu einer höheren Traglast der Stege, was eine höhere Biegebelastung um die z-Achse ermöglicht. Gleichzeitig werden die Flansche zusätzlich beansprucht, was deren Traglast vermindert und deshalb die maximal mögliche Biegebelastung um die y-Achse reduziert, die vom Querschnitt aufgenommen werden kann. Diese Interaktion ist in den Ergebnissen des finite Elemente Modells berücksichtigt, nicht aber im reduzierten oder vereinfachten Gleichgewichtsmodell. Für zentrisch gedrückte Querschnitte mit linear elastischem Material wurde diese Interaktion durch Bleich analytisch beschrieben [6]. Eine Umsetzung dieses analytischen Modells von Bleich ist jedoch für mehraxial beanspruchte Querschnitte sehr schwierig und wird auch bei Raumtemperaturen hauptsächlich durch die Berechnung mit der finite Elemente Methode erfasst.

6.3.2 Offene I- oder H-Querschnitte

Das Tragverhalten offener I- oder H-Querschnitte ist hauptsächlich durch die Tragwirkung der dreiseitig gelagerten Platten bestimmt, die den Flansch bilden. Das Verhalten dieser Querschnittselemente wird analog zu den vierseitig gelagerten Platten durch die Gleichungen 6.7a und 6.7b beschrieben, wobei zur Bestimmung der Verzweigungslast das analytische Modell des Kapitels 5.3.3 benutzt wird. Gleich wie bei der vierseitig gelagerten Platte kann eine der Traglast zugehörige Dehnung ε_r respektive ε_{cr} mit den Gleichungen 6.8a und 6.8b berechnet werden. Diese Dehnungen sind in den Last-Stauchungs-Diagrammen unterschiedlich schlanker Platten in der Abbildung 6-9 mit gefüllten respektive leeren Kreisen dargestellt. Das Last-Stauchungs-Verhalten der dreiseitig gelenkig gelagerten Platten ist mit einem finite Elemente Modell berechnet, wobei geometrische Imperfektionen $e_0 = b/200$ berücksichtigt sind. Wie aus der Abbildung ersichtlich, weisen die Platten ein stark nichtlineares Last-Stauchungs-Verhalten auf, das bis zum Erreichen der Verzweigungslast dem Materialverhalten folgt. Erst beim Ausbeulen kommt es zu einem starken Steifigkeitsverlust, besonders bei Platten mit einer bei Raumtemperatur bezogenen Schlankheit kleiner als 1.50. Die Dehnung, bei der dieser Steifigkeitsverlust eintritt, kann mit der Dehnung ε_r gemäss den Gleichungen 6.8a und 6.8b auch für die dreiseitig gelenkig gelagerte Platte abgeschätzt werden, wobei diese bei sehr gedrungenen Platten eher unterschätzt wird.

Die Berechnung der Traglast von mehraxial beanspruchten Stützenquerschnitten verlangt einerseits eine Beziehung zwischen der Stauchung in der meist beanspruchten Platte und der Krümmung des Querschnittes, andererseits eine Interaktionsformel zur Berücksichtigung schiefer Biegung bei einwirkender Normalkraft. Die Beziehung zwischen der Stauchung des meist beanspruchten Querschnittselements und der Krümmung des Querschnittes erfolgt wie bei den rechteckigen Hohlquerschnitten durch die Betrachtung der vereinfachten Spannungsverteilung im Querschnitt gemäss Abbildung 2-2. Aus dieser ergeben sich folgende Beziehungen zwischen der Krümmung χ in der Stütze und der Plattenstauchung ε_1 des äussersten Querschnittselements.

$$\varepsilon_1 = \chi \cdot h_1 \quad \text{mit} \quad h_1 = \frac{E_\theta}{T_\theta + E_\theta} \cdot h \quad \text{für y-Achse} \quad (6.12a)$$

$$\varepsilon_1 = \chi \cdot b_1 \quad \text{mit} \quad b_1 = \frac{\sqrt{E_\theta}}{\sqrt{T_\theta} + \sqrt{E_\theta}} \cdot b \quad \text{für z-Achse} \quad (6.12b)$$

Dabei entspricht die Beziehung für eine Belastung um die starke Achse der Gleichung 6.9, die bei den Stützen mit rechteckigen Hohlquerschnitten zur Anwendung kommt. Wie schon bei den geschlossenen Hohlquerschnitten wird der Tangentenmodul T_θ in Funktion der im Querschnitt vorhandenen Normalkraft, die durch den Faktor $\beta_N = 1.20$ vergrössert wurde, berechnet. Mit der Vergrösserung der Normalspannungen um 20% bei der Berechnung des Tangentenmoduls werden zusätzliche Plastifizierungen, die am Rande des Querschnittes geschehen, implizit berücksichtigt. Dies ist besonders bei Stützen von Bedeutung, die durch eine Normalkraft knapp unterhalb der Proportionalitätsgrenze beansprucht werden. Ohne Vergrösserung der Normalspannung würde bei diesen der innere Hebelarm an der elastisch bleibenden Stütze berechnet ohne Berücksichtigung der infolge der Verdrehung hervorgerufenen Plastifizierungen am Stützenrand. Eine Vergrösserung der Normalspannung mit $\beta_N = 1.20$ führt zu einer guten Übereinstimmung mit den numerischen Ergebnissen des finite Elemente Modells, wobei hauptsächlich diejenigen Stütze betroffen sind, welche durch eine Normalkraft in der Grössenordnung der Proportionalitätsgrenze belastet sind.

Die Beschreibung der schiefer Biegung bei einem durch Normalkraft belasteten Stützenquerschnitt erfolgt mit der Interaktionsformel des Eurocodes (Gl. 6.10), jedoch mit unterschiedlichen Exponenten α und β . Diese werden wie folgt bestimmt

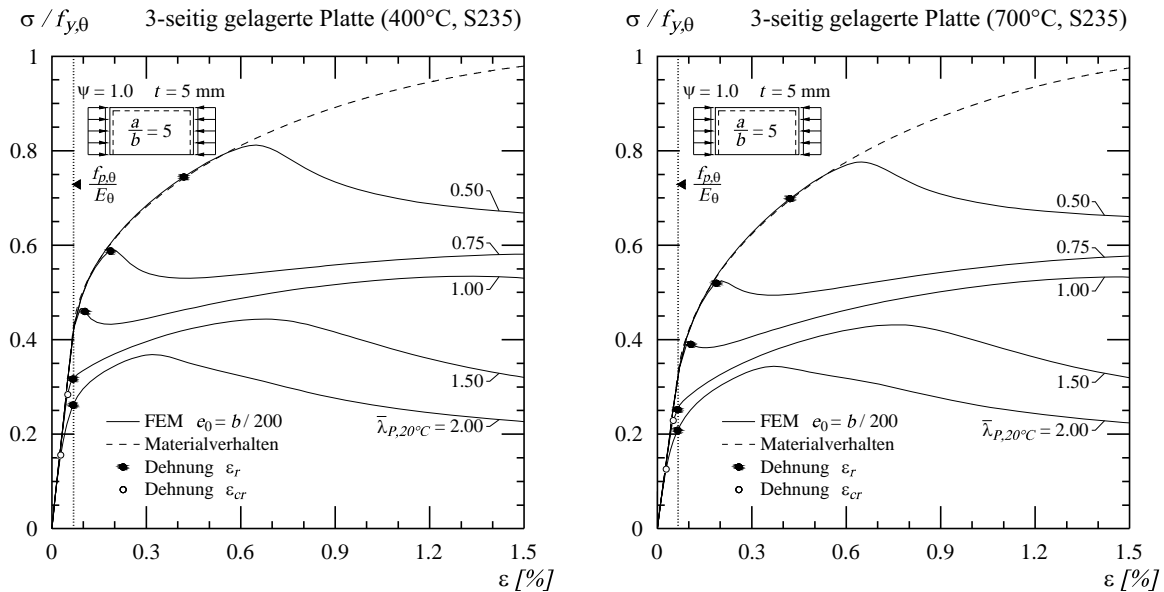


Abb. 6-9: Last-Stauchungs-Beziehung für dreiseitig gelenkig gelagerte Platten unterschiedlicher Schlankheit mit gleichmässiger Belastung bei 400°C und 700°C

$$\alpha = 2 \quad \text{und} \quad \beta = 5n \geq 1.0 \quad \text{mit} \quad n = \frac{N_E}{N_{pl}} \quad (6.13)$$

In Abbildung 6-10 sind die Traglasten des vereinfachten Gleichgewichtsmodells mit den Ergebnissen der finite Elementen Berechnungen für unterschiedliche Stützenquerschnitte und Stahlsorten verglichen. Werden die Querschnitte unter reiner Druckbelastung in die Querschnittsklassen (QSK) des Eurocodes eingeteilt, so gehört der HEB300 Querschnitt bei 400°C mit der Stahlsorte S235 zur Querschnittsklasse 1, während derselbe Querschnitt mit einer Stahlsorte S460 der QSK 3 angehört. Der wenig schlankere Stützenquerschnitt HEA200 (Abb. 6-10 Mitte) entspricht bei der erhöhten Temperatur der QSK 2, falls er aus einer Stahlsorte S235 besteht, oder der QSK 3, falls aus S460. Der noch schlankere Stützenquerschnitt HEA280 (Abb. 6-10 unten) entspricht bei erhöhter Temperatur mit Stahlsorte S235 der QSK 3, während derselbe Querschnitt mit S460 bei reinem Druck der QSK 4 entspricht.

Bei einem sehr gedungenen Querschnitt der QSK 1, wie zum Beispiel ein HEB300 Querschnitt aus S235 (Abb. 6-10 oben links), ermöglicht das Berechnungsmodell des Eurocodes eine gute Schätzung der Traglasten von mehraxial beanspruchten Stützenquerschnitten. Mit dem auf die maximale Krümmung begrenzten vereinfachten Gleichgewichtsmodell ergeben sich zum Eurocodemodell ähnliche Traglasten, wobei diese bei hoher Normalkraft die Ergebnisse der numerischen Berechnungen unterschätzen. Der gleiche Stützenquerschnitt, jedoch aus der Stahlsorte S460, wird nach Eurocode in die QSK 3 eingeteilt. Dies führt zu einer starken Unterschätzung der Traglasten, da der Nachweis des mehraxial belasteten Stützenquerschnittes elastisch erfolgt. Im Gegensatz dazu vermeidet das vereinfachte Gleichgewichtsmodell eine Einteilung der Querschnitte in Klassen und benutzt stets Gleichung 6.10 zur Beschreibung der Interaktion zwischen der schiefen Biegung und der Normalkraft. Dies führt zu einer sehr guten Übereinstimmung mit den Ergebnissen der numerischen Berechnungen bei kleinen Normalkräften, während bei höherer axialer Belastung die Traglasten mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell unterschätzt werden. Dennoch erlaubt in diesem Fall das vereinfachte Gleichgewichtsmodell eine bessere Abschätzung der Traglasten im Vergleich zum Modell des Eurocodes.

Ähnlich wie beim HEB300 Stützenquerschnitt können die Traglasten des HEA200 Querschnittes (Abb. 6-10 Mitte links) mit dem Eurocodemodell gut abgeschätzt werden, solange der Querschnitt nicht zur QSK 3 gehört. Entspricht die Stahlsorte des HEA200 Querschnittes dem Stahl S235, so fällt der Querschnitt in die QSK 2 des Eurocodes. Die Traglasten, berechnet nach

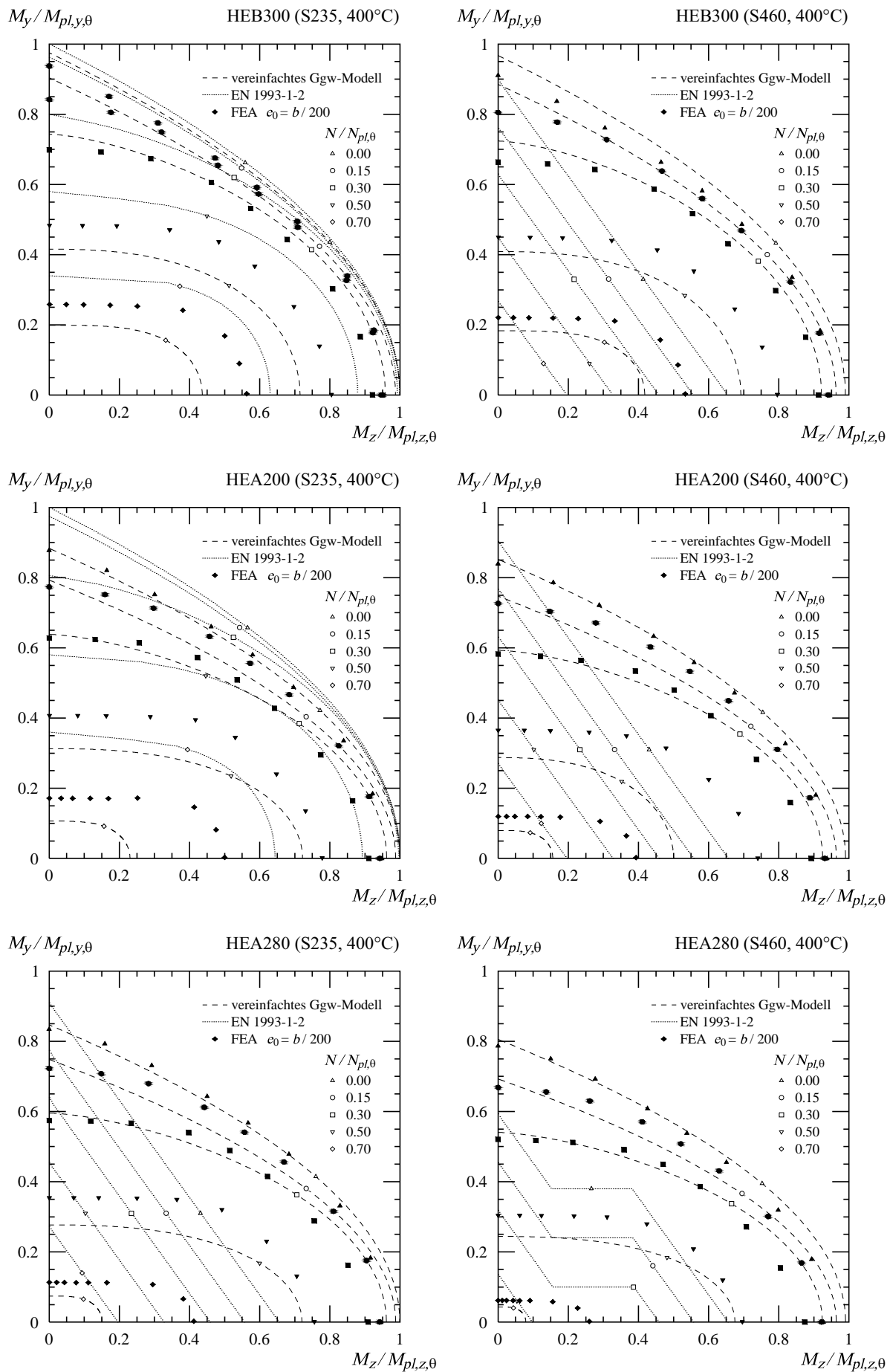


Abb. 6-10: Traglasten mehraxial beanspruchter Querschnitte mit offenen H-Profilen der Stahlsorte S235 und S460 bei 400°C. Vergleich zwischen den Ergebnissen des finite Elemente Modells mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell sowie dem Eurocode.

Eurocode, stimmen gut mit den Ergebnissen der numerischen Berechnungen überein, besonders bei kleiner Normalkraft. Bei einer grösseren Beanspruchung durch die Normalkraft werden die Traglasten des Querschnittes mit dem Modell des Eurocodes überschätzt. Mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell resultieren im Vergleich zum Eurocode kleinere Traglasten, die jedoch besonders bei einer hohen Beanspruchung durch die Normalkraft zu einer starken Unterschätzung der Traglast führen.

Beide Modelle können das Tragverhalten des mehraxial beanspruchten HEA200 Querschnittes mit der Stahlsorte S235 in etwa abbilden. Wird der gleiche Querschnitt mit der Stahlsorte S460 betrachtet, so entspricht dieser bei zentrischem Druck der Querschnittsklasse 3 des Eurocodes. Dies führt wiederum zu einer durch die Klassierung verfälschten Abschätzung der Traglasten, wobei diese als Folge der linearen Interaktionsformel besonders bei schiefer Biegung stark unterschätzt werden. Im Gegensatz dazu ermöglicht das vereinfachte Gleichgewichtsmodell eine gute Abschätzung der Traglasten besonders bei kleiner Beanspruchung des Querschnittes durch die Normalkraft. Bei grossen Normalkräften wird das Tragvermögen des Querschnittes mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell stark unterschätzt.

In Abbildung 6-10 unten sind die Traglasten des mehraxial beanspruchten HEA280 Querschnittes dargestellt, welcher schon mit einer Stahlsorte S235 nach Eurocode der QSK 3 angehört. Ähnlich wie beim HEA200 S460 Querschnitt werden die Traglasten des HEA280 S235 Querschnittes durch die elastische Interaktionsbeziehung des Eurocodes besonders bei schiefer Biegung stark unterschätzt. Im Gegensatz dazu werden die Traglasten mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell besonders bei kleiner Normalkraft sehr gut abgeschätzt, während diese bei höherer axialer Belastung unterschätzt werden. Gegenüber dem Modell des Eurocodes erlaubt das vereinfachte Gleichgewichtsmodell eine deutlich bessere Abschätzung der Traglasten bei mehraxialer Belastung.

Besteht der HEA280 Querschnitt aus Stahl S460, so fällt er bei reiner Druckbelastung gemäss Eurocode in die QSK 4. Massgebend für diese Klassierung ist der sehr schlanken Flansch, der bei reiner Druckbelastung ausbeult und somit gemäss dem Modell des Eurocodes mit einem reduzierten, wirksamen Querschnitt berechnet werden muss. Wird der Querschnitt zusätzlich mit einem Biegemoment um die schwache Achse belastet, so verändert sich die Spannungsverteilung im Flansch, was bei genügend grossem Biegemoment M_z zu einem Klassenwechsel führt. Dies ist in der Abbildung 6-10 unten rechts durch die Unstetigkeit der Ergebnisse des Modells nach Eurocode (punktierte Linie) ersichtlich. Da mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell die Klassierung der Querschnitte umgangen wird, können die Traglasten des Querschnittes besser abgeschätzt werden. Wiederum stimmen die Traglasten des vereinfachten Gleichgewichtsmodells bei kleiner axialer Belastung sehr gut mit den Ergebnissen der numerischen Berechnungen überein, während diese bei hoher axialer Belastung unterschätzt werden.

In Abbildung 6-11 rechts sind die Traglasten eines IPE300 Querschnittes der Stahlsorte S460 dargestellt. Bei diesem Querschnitt ist es nicht der Flansch, sondern der Steg, der gemäss Eurocode bei reiner Druckbeanspruchung zu einer Klassierung in die QSK 4 führt. Bei genügend grosser Beanspruchung des Querschnittes durch ein Biegemoment M_y kommt es zu einem Klassenwechsel des nun durch Druck und Biegung beanspruchten Steges. In der Abbildung entspricht dieser Klassenwechsel der Unstetigkeit, die beim Modell des Eurocodes ersichtlich ist. Ähnlich wie beim HEA280 S460 Querschnitt werden die Traglasten des IPE300 S460 Querschnittes durch das Modell des Eurocodes stark unterschätzt, mit Ausnahme bei fehlender Normalkraft. Fehlt die Belastung durch die Normalkraft, ist der Steg durch reine Biegung belastet, was zu einer höheren Klassierung in die QSK 1 führt. Dementsprechend darf in diesem Belastungsfall gemäss dem Modell des Eurocodes eine plastische Interaktionsformel benutzt werden. Sobald eine Belastung des Querschnittes durch Normalkraft vorhanden ist, muss gemäss Eurocode eine elastische Interaktionsformel verwendet werden, die wiederum zu einer starken Unterschätzung der Traglasten im

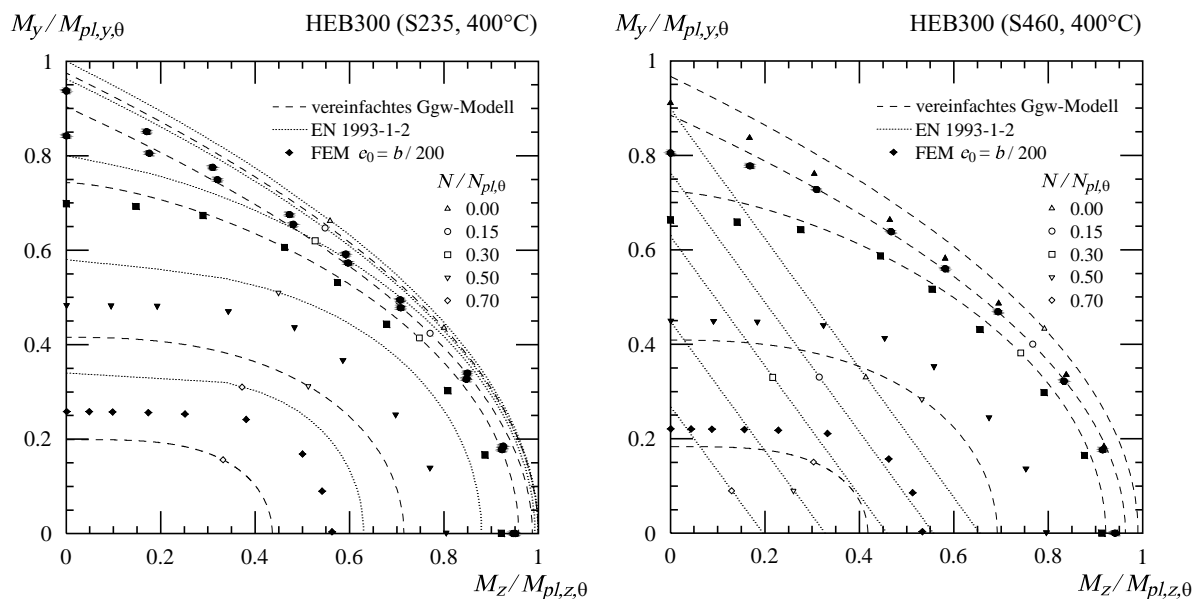


Abb. 6-11: Traglasten eines mehraxial belasteten IPE300 Querschnittes. Vergleich zwischen den Ergebnissen des finite Elemente Modells mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell und Eurocode.

Vergleich zu den Ergebnissen der numerischen Berechnungen führt. Mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell können die Traglasten besser abgeschätzt werden.

6.4 Interaktion Knicken und Beulen

Sowohl beim vereinfachten wie auch beim reduzierten oder erweiterten Gleichgewichtsmodell wird das lokale Tragverhalten des Stützenquerschnittes in der Form einer Momenten-Krümmungs-Beziehung berechnet. Diese Beziehung beschreibt den inneren Widerstand $M_{N,R,\theta}$ der Stütze in Funktion der Stützenverformung, der Querschnittsgeometrie, der einwirkenden Normalkraft und des Materialverhaltens. Wie im Kapitel 6.3 erläutert, ist diese Beziehung durch eine maximale Krümmung χ_b begrenzt, die im meist beanspruchten Querschnittselement eine Stauchung ε_r verursacht, welche zum lokalen Ausbeulen dieses Querschnittselements führt (Abb. 6-12 links). Dem inneren Biege­widerstand $M_{N,R,\theta}$ setzt das Gleichgewichtsmodell eine äussere Einwirkung $M_{E,II}$ gegenüber, die Effekte 2^{ter} Ordnung an der gesamten Stütze berücksichtigt. Diese Gegenüberstellung der äusseren und inneren Biegemomente erlaubt die Beurteilung der globalen Stabilität der Stütze und die Berechnung ihrer Verformung. Die globale Stabilität ist gesichert, solange ein Gleichgewichtszustand zwischen den inneren und äusseren Biegemomenten möglich ist. Daraus lässt sich die Krümmung χ_{ggw} bestimmen, womit die Verformung der Stütze berechnet werden kann. Zudem kann überprüft werden, ob die Verformungen 2^{ter} Ordnung der Stütze nicht zu einem Ausbeulen des meist beanspruchten Querschnittselements führen. Ein solches lokales Versagen kann ausgeschlossen werden, falls die Krümmung χ_{ggw} , welche zum Gleichgewichtszustand gehört, kleiner als die Krümmung χ_b ist, die in dem meist beanspruchten Querschnittselement zum Stabilitätsversagen führt (Abb. 6-12 links). Sind die Querschnittselemente derart schlank, dass die Krümmung χ_b kleiner als die Krümmung χ_{ggw} wird, kommt es zum lokalen Beulversagen, bevor die Knicklast der Stütze erreicht wird. Beim Ausbeulen des meist beanspruchten Querschnittselements kommt es zu einem beträchtlichen Steifigkeitsverlust des gesamten Stützenquerschnittes, der zu einem Versagen der gesamten Stütze führt, da dieser Steifigkeitsverlust in der Regel ein mögliches Gleichgewicht zwischen den inneren und äusseren Biegemomente verhindert.

Nur bei Stützen aus sehr dünnen Profilblechen können die Flansche ausbeulen, ohne dass es dabei zu einem Versagen der gesamten Stütze kommt. Dies, weil nach dem Erreichen der Verzwei-

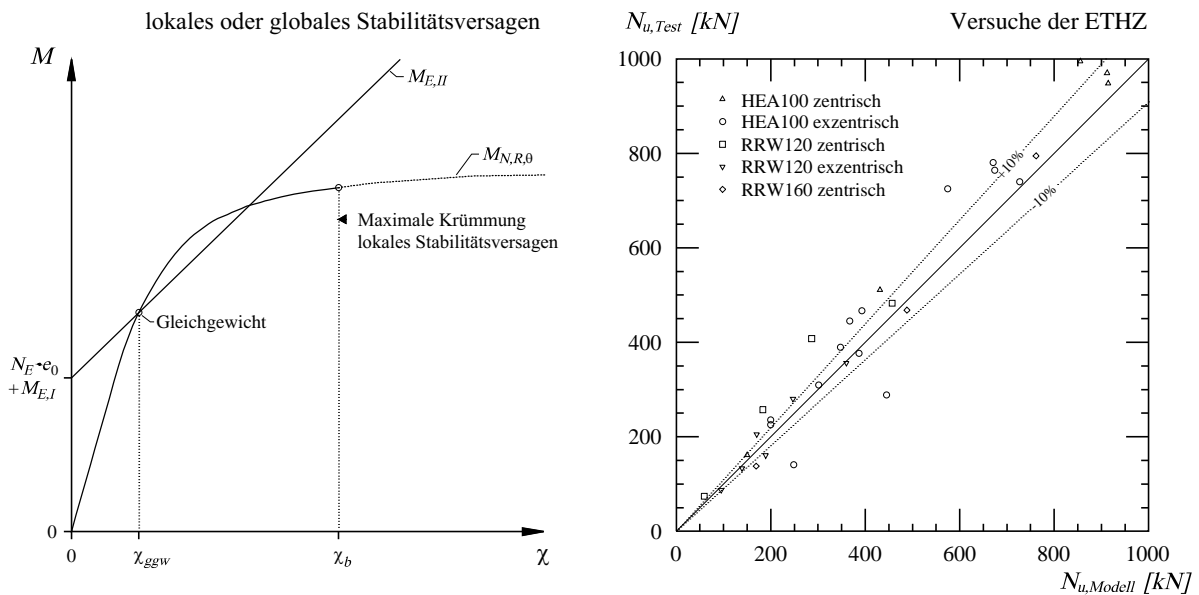


Abb. 6-12: Links: Begrenzung der Tragfähigkeit der Stütze durch lokales oder globales Stabilitätsversagen. Rechts: Vergleich der Traglasten des analytischen Modells mit eigenen Versuchen

gungslast des Querschnittselements eine Laststeigerung bis zur Traglast möglich ist. Bei nichtlinearem Materialverhalten ist dies jedoch nur bei Flanschen mit einer auf Raumtemperatur bezogenen Schlankheit grösser als die Grenzschlankheit denkbar, da nur bei diesen Platten die Verzweigungslast nicht direkt der Traglast der Platte entspricht (Gl. 6.8a und 6.8b). Wie in Abbildung 6-4 oder 6-9 ersichtlich, kommt es bei diesen sehr schlanken Platten beim Überschreiten der Verzweigungslast infolge des Ausbeulens zwar zu einem Steifigkeitsverlust, der jedoch im Vergleich zu demjenigen beim Erreichen der Traglast viel kleiner ist. Der Einfluss des lokalen Steifigkeitsverlustes auf die Biegesteifigkeit des gesamten Querschnittes ist kleiner, was ein Gleichgewicht zwischen den inneren und äusseren Biegemomenten zwar erschwert, jedoch nicht unmöglich macht. Solche sehr schlanken Flanschen kommen bei baupraktischen Anwendungen in der Regel sehr selten vor, so dass für die gängigen gewalzten Stahlprofile bei erhöhter Temperatur das lokale Ausbeulen stets zum Versagen der gesamten Stütze führt.

Zwei Berechnungsbeispiele im Anhang E zeigen, wie die globale und die lokale Stabilität einer zentrisch oder exzentrisch gedrückten Stütze mit nichtlinearem Materialverhalten beurteilt werden kann.

6.5 Vergleich mit Versuchen

Am Institut für Baustatik und Konstruktion der ETH Zürich wurden in den letzten Jahren mehrere Versuche mit kurzen Stützen bei unterschiedlichen Temperaturen durchgeführt. Die getesteten Stützen waren dreimal so lang wie breit und wurden bei konstanter Temperatur zentrisch und exzentrisch belastet. Zudem wurde zu jedem Stützenquerschnitt und Versuchstemperatur das Materialverhalten durch mehrere Zugversuche bestimmt. Einzelheiten zum Versuchsaufbau wie zur Versuchsdurchführung können dem Versuchsbericht [52] entnommen werden. Jeder Versuch wurde mit dem in diesem Kapitel vorgestellten Berechnungsmodell mit Berücksichtigung der gemessenen Geometrie und des untersuchten Materialverhaltens nachgerechnet. Zur Berechnung der Momenten-Krümmungs-Beziehung wurde das reduzierte Gleichgewichtsmodell verwendet, wobei die maximale Krümmung durch das Ausbeulen des meist beanspruchten Querschnittselement beschränkt ist.

In Abbildung 6-12 rechts sind die gemessenen Traglasten aus den Versuchen den Ergebnisse des analytischen Modells gegenübergestellt. Obwohl die Querschnittsgeometrie wie auch das

Materialverhalten bei der gegebenen Temperatur bekannt ist, bekundet das analytische Modell Schwierigkeiten die Traglasten, die in den Versuchen gemessen wurden, abzubilden. Die Streuung der Resultate ergibt sich aus der Summe vieler Modellunsicherheiten. Dazu gehören die Abschätzung der Beullast der Platte sowie die Berechnung der Momenten-Krümmungs-Beziehung ohne Berücksichtigung der lokalen Imperfektionen. Insbesondere die lokalen Imperfektionen haben einen grossen Einfluss auf das Last-Stauchungs-Verhalten der einzelnen Querschnittselemente und dementsprechend auch auf das Momenten-Krümmungs-Verhalten wie dies in Abbildung 6-5 ersichtlich ist. All diese Einflüsse spielen bei der Berechnung der Knicklasten schlanker Stützen eine untergeordnete Rolle, was sich auch in einer viel besseren Übereinstimmung mit den Versuchsergebnisse zeigt (Abb. 3-19 unten links).

Zusätzlich zur Gegenüberstellung der Ergebnisse in der Abbildung 6-12 rechts sind die Traglasten der Versuche sowie die Abweichungen der Ergebnisse des analytischen Modells in der Tabelle 6-1 angegeben. Im Allgemeinen werden die Traglasten durch das analytische Modell unterschätzt, ausser bei einzelnen Versuchen, bei denen die Traglasten teilweise stark abweichen. Insbesondere bei den HEA100 Stützen wird die Traglast zweier Versuche deutlich überschätzt. Dies führt in der Tabelle 6-1 zu einem trügerisch hohen Mittelwert des Verhältnisses der Traglasten des Modells mit denjenigen die im Versuch gemessen wurden und zu einer grossen Standardabweichung.

Tabelle 6-1: Vergleich der Ergebnisse des analytischen Modells mit den Versuchen der ETHZ [52]

HEA100 S355				RRW120x60x3.6 S355 z-z			
θ [°C]	e_1 [mm]	$N_{u,Test}$ [kN]	$N_{u,Modell}$ / $N_{u,Test}$	θ [°C]	e_1 [mm]	$N_{u,Test}$ [kN]	$N_{u,Modell}$ / $N_{u,Test}$
20	0	948.0	0.96	20	0	482.9	0.95
20	10 (y)	780.0	0.86	20	10	356.0	1.01
20	50 (y)	445.0	0.82	20	50	160.8	1.18
20	10 (z)	724.4	0.79	400	0	407.8	0.70
20	50 (z)	309.1	0.98	400	10	280.1	0.88
400	0	994.6	0.86	400	50	133.3	1.04
400	10 (y)	763.9	0.88	550	0	257.4	0.71
400	50 (y)	466.7	0.84	550	10	205.3	0.83
400	10 (z)	739.3	0.98	550	50	87.0	1.09
400	50 (z)	288.0	1.54	700	0	74.1	0.80
550	0	511.0	0.84	Mittelwert		0.92	
550	10 (y)	389.1	0.89	Standardabweichung		0.16	
550	50 (y)	225.3	0.89	RRW160x160x5 S355			
550	10 (z)	376.4	1.03	θ [°C]	e_1 [mm]	$N_{u,Test}$ [kN]	$N_{u,Modell}$ / $N_{u,Test}$
550	50 (z)	140.4	1.77	20	0	1225.1	0.90
700	0	161.5	0.93	400	0	794.5	0.96
Mittelwert		0.99		550	0	468.0	1.04
Standardabweichung		0.27		700	0	137.8	1.23
				Mittelwert		1.03	
				Standardabweichung		0.14	

Verglichen mit der Nachrechnung der Versuchen an schlanken Stützen (Tab. 3-3) ist die Streuung der Ergebnisse bei der Nachrechnung der Querschnittstragfähigkeit wesentlich grösser. Dies verdeutlicht unter anderem die grösseren Unschärfen des Modells zur Berechnung der Querschnittstragfähigkeit gegenüber demjenigen zur Berechnung der Traglast zentrisch und exzentrisch gedrückter Stützen.

6.6 Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

- Die Methode der wirksamen Breiten beschreibt das Verhalten von beulgefährdeten Platten mit nichtlinearem Materialverhalten ausreichend gut, sofern die Verzweigungslast korrekt bestimmt werden kann.
- Gemäss der Methode der wirksamen Breiten wirkt beim Erreichen der Traglast von Platten mit einer bezogenen Schlankheit grösser als die Grenzschlankheit eine maximale Spannung $f_{p,\theta}$ auf den wirksamen Querschnitt. Bei gedrungeenen Platten mit einer bezogenen Schlankheit kleiner als die Grenzschlankheit wirkt beim Erreichen der Traglast eine maximale Spannung $\sigma_{cr,\theta}$ auf den wirksamen Querschnitt. In diesem Fall entspricht der wirksamen Querschnitt dem gesamten Plattenquerschnitt. Eine Laststeigerung im überkritischen Bereich ist gemäss der Methode der wirksamen Breiten bei nichtlinearem Materialverhalten für Platten mit einer bezogene Schlankheit kleiner als die Grenzschlankheit nicht möglich.
- Der Spannung, die am wirksamen Querschnitt der Platte wirkt, kann mit dem Stoffgesetz eine Stauchung ε_r zugeordnet werden. Diese Stauchung entspricht in etwa derjenigen Verformung, bei welcher der grösste Steifigkeitsverlust in der Platte zu beobachten ist.
- Die Beziehung zwischen der Stützenkrümmung und der Stauchungen in den äussersten Querschnittsfasern wird bei nichtlinearem Materialverhalten durch eine geeignete Wahl des inneren Hebelarms abgeschätzt. Der innere Hebelarm lässt sich mit einer vereinfachten Betrachtung der Spannungsverteilung im Querschnitt in Funktion der einwirkenden Normalkraft berechnen. Ist diese Beziehung der lokalen Stauchungen der einzelnen Querschnittsfasern mit der Krümmung des Stützenquerschnitts bekannt, kann der Einfluss des Tragverhalten der einzelnen Querschnittselemente auf die Tragwirkung des gesamten Querschnittes beschrieben werden.
- Die Momenten-Krümmungs-Beziehung des Stützenquerschnitts ist durch die Randdehnung ε_r bei der die meist belasteten Querschnittselemente ausbeulen, begrenzt. Dies ermöglicht die Berechnung des infolge der einwirkenden Normalkraft reduzierten maximalen Biege widerstands der Stütze ohne eine Klassierung der Querschnitte vornehmen zu müssen. Ein Vergleich mit finite Elemente Berechnungen zeigt gute Ergebnisse.
- Das vereinfachte Gleichgewichtsmodell ermöglicht es, zu beurteilen, ob Verformungen 2^{ter} Ordnung zu einem lokalen Beulversagen des am meisten beanspruchten Stützenquerschnittes führen. Ein solches lokales Stabilitätsproblem führt bei nichtlinearem Materialverhalten in der Regel zum Versagen der gesamten Stütze.
- Das analytische Berechnungsmodell ermöglicht eine Abschätzung der Traglasten eigener Versuche, wobei diese tendenziell unterschätzt werden. Verglichen mit den Versuchen an schlanken Stützen ist die Modellunsicherheit viel grösser, was sich in einer grösseren Streuung respektive Standardabweichung der Ergebnisse zeigt.

7 Zusammenfassung und Folgerungen

7.1 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit will einen Beitrag zum besseren Verständnis des Tragverhaltens stabilitätsgefährdeter Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten leisten. Das Augenmerk gilt besonders zentrisch und exzentrisch gedrückten Stahlstützen im Brandfall, wobei die erarbeiteten Berechnungsmodelle in der Regel auch für Stützen aus Aluminium oder hochlegierten Stählen bei Raumtemperatur gelten. In den unterschiedlichen Kapiteln werden numerische Modelle erläutert, die das Tragverhalten der Stütze und deren Querschnitt mechanisch beschreiben und die Beurteilung verschiedener Einflüsse wie Geometrie, Materialverhalten, Eigenspannungen sowie auch Belastungsart oder Kriechen ermöglichen. Zudem werden Einflüsse lokaler Stabilitätsprobleme des Querschnittes auf die Tragwirkung der gesamten Stütze und insbesondere deren globale Stabilität erfasst und deren gegenseitige Beeinflussung beschrieben.

Während mit den numerischen Modellen versucht wird, das mechanische Verhalten möglichst genau zu erfassen, werden vereinfachte Berechnungsmodelle entwickelt, die eine gute und schnelle Beurteilung der lokalen und globalen Stabilität gedrückter Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten ermöglichen. Diese vereinfachten Berechnungsmodelle bauen auf dem gleichen mechanischen Grundverständnis auf wie die numerischen Modelle und erlauben somit eine konsistente und wirklichkeitsnahe Berechnung des Tragverhaltens zentrisch und exzentrisch gedrückter Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten.

Beginnend mit dem eindimensionalen Stabilitätsproblem des Biegeknickens wird im Kapitel 2 die Verzweigungslast der beidseitig gelenkig gelagerten Stütze mit nichtlinearem Materialverhalten dargestellt. Insbesondere werden die Modelle nach Engesser-Kármán und nach Engesser-Shanley zur Berechnung der Verzweigungslast von Stützen bei nichtlinearer Spannungs-Dehnungs-Beziehung erläutert. Diese sehr einfachen Modelle ermöglichen die Berechnung eines oberen Grenzwertes der Traglast sowie eine erste Beurteilung der globalen Stabilität zentrisch belasteter Stützen. Es zeigt sich, dass gängige Bemessungsansätze zum Knicken mit nichtlinearem Materialverhalten diesen oberen Grenzwert der Traglast bei gedrunenen und mittelschlanken Stützen teilweise überschreiten. Dies verdeutlicht den Handlungsbedarf zur Entwicklung neuer Berechnungsmodelle zum Knicken, die sich trotz nichtlinearem Materialverhalten auf einen mechanischen Grundgedanken abstützen.

In Kapitel 3 wird das Tragverhalten zentrisch und exzentrisch gedrückter Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten untersucht. Zwei numerische Berechnungsmodelle werden vorgestellt, die das Gleichgewicht zwischen den treibenden und rückhaltenden Kräften in der Stütze untersuchen. Dabei liefert das erweiterte Gleichgewichtsmodell innerhalb der Modellannahmen die exakte Lösung, die mit einem iterativen Vorgehen angenähert wird. Dieses Modell wurde um die Wende des 19^{ten} ins 20^{te} Jahrhundert von Kármán entwickelt und zur Beurteilung von Stützen aus Gusseisen oder Flusseisen benutzt. In diesem Kapitel es für die Berechnung von Stahlstützen im Brandfall angepasst und für die Berücksichtigung von Eigenspannungen, thermische Dehnungen und Spannungen sowie Kriechen bei hohen Temperaturen erweitert. Der Schlüssel zum Verständnis des Gleichgewichtsmodells bildet das Momenten-Krümmungs-Diagramm, in dem sowohl die

nichtlineare Beziehung zwischen dem Biege­widerstand und der Stützenkrümmung wie auch diejenige zwischen dem einwirkenden Biegemoment in Funktion der Stützenverformung dargestellt werden können. Sämtliche Einflüsse, wie geometrische oder strukturelle Imperfektionen, Stützenschlankheit, Kriechen oder Materialverhalten können in dieser Darstellung anschaulich erläutert werden. Zudem wird der Einfluss dieser Effekte auf die Traglast der Stütze diskutiert. Besonders die Eigenspannungen beeinflussen bei erhöhten Temperaturen hauptsächlich H-Querschnitte um ihre schwache Achse, während bei anderen Querschnitten die Traglast durch das Vorhandensein von Eigenspannungen nur geringfügig verändert wird.

Das erweiterte Gleichgewichtsmodell ermöglicht einerseits die Berechnung der Verformungsfigur der Stütze und andererseits wie sich diese bei zunehmender Belastung verändert. So kann gezeigt werden, dass bei zentrisch belasteten Stützen eine geometrische Form der Biegelinie affin zur Sinusfunktion zu einem unteren Grenzwert der Belastung führt, falls das Gleichgewicht zwischen den treibenden und rückhaltenden Biegemomenten bei gegebener Normalkraft nur in Stützenmitte überprüft wird. Analog führt eine parabolische Verformungsfigur bei exzentrisch belasteten Stützen zum unteren Grenzwert der Traglast.

Zusätzlich zu den Gleichgewichtsmodellen ist in Kapitel 3 ein weiterer Ansatz zur Betrachtung des Stabilitätsproblems einer gedrückten Stütze erläutert. Dieser berechnet die am System infolge der Verformung geleistete innere und äussere Arbeit und ermöglicht es, durch den *Satz des Minimums der potentiellen Energie* das Last-Verformungs-Verhalten der Stütze mit nichtlinearem Materialverhalten zu beschreiben.

Während im Kapitel 3 versucht wird, das Tragverhalten von Stützen bei nichtlinearem Materialverhalten möglichst genau zu beschreiben, widmet sich das Kapitel 4 vereinfachten Methoden zur Berechnung der maximalen Traglast zentrisch und exzentrisch gedrückter Stützen. Nachdem die Vor- und Nachteile der in der Baupraxis meist gebrauchten Bemessungsansätze diskutiert werden, sind zwei neue, vereinfachte Berechnungsmodelle zum Knicken und Biegeknicken von Stahlstützen im Brandfall erläutert. Die erste erläuterte Methode ist ein vereinfachtes Spannungsmodell, bei dem die Verformungen und Schnittkräfte 2^{ter} Ordnung in der Mitte einer zentrisch gedrückten Stütze mit einem elastischen Modell berechnet werden. Als Knickkriterium dient ein Grenzwert der grössten Randspannungen im Stützenquerschnitt, der in Funktion der Stützenschlankheit und der Materialparameter zu berechnen ist. Dieses sehr einfache Modell erlaubt eine schnelle Abschätzung der Traglast zentrisch gedrückter Stahlstützen bei erhöhten Temperaturen, verletzt aber bei gedrun­genen Stützen die Verträglichkeitsbedingungen. Dennoch können die Traglasten der numerischen Gleichgewichtsmodelle mit ausreichender Genauigkeit wiedergeben werden.

Die zweite erläuterte Methode ist ein vereinfachtes Gleichgewichtsmodell, welches in seinem Aufbau dem reduzierten Gleichgewichtsmodell entspricht. Um das iterative Vorgehen des reduzierten Gleichgewichtsmodells zu umgehen, wird die Momenten-Krümmungs-Beziehung des durch die Normalkraft belasteten Stützenquerschnitts mit einem Modell abgeschätzt. Dabei wird besonders auch das nichtlineare Materialverhalten der Stütze berücksichtigt. Dieses ein wenig aufwendigere, dafür sehr leistungsfähige Modell ermöglicht die Überprüfung der Stabilität zentrisch und exzentrisch gedrückter Stützen und die Berechnung der Verformungen 2^{ter} Ordnung. Insbesondere die Informationen über den Verformungszustand der belasteten Stütze ermöglicht eine Verknüpfung globaler und lokaler Stabilitätsprobleme. So kann das Auftreten lokaler Stabilitätsprobleme infolge der Stützenbelastung und der Verformungen 2^{ter} Ordnung mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell geprüft werden. Zudem ermöglicht das vereinfachte Gleichgewichtsmodell dem Benutzer einen tieferen Einblick in das Zusammenspiel der inneren und äusseren Kräfte, die an der verformten Stütze wirken.

Die Kapitel 5 und 6 widmen sich der Tragfähigkeit der einzelnen Platten, die den Stützenquerschnitt bilden. Dabei wird zuerst die Verzweigungslast dreiseitig und vierseitig gelenkig gelagerter Platten mit nichtlinearem Materialverhalten und unterschiedlicher Kombination der Belastungen durch Druck und Biegung untersucht. Ein eigenes Modell mit belastungsabhängiger

Plattensteifigkeit ermöglicht die Berechnung der Verzweigungslast von Platten mit nichtlinearem Materialverhalten. Im Gegensatz zu den Modellen, die in der Vergangenheit für Platten mit nichtlinearem Materialverhalten entwickelt worden sind, ermöglicht dieses Modell die Berechnung der Verzweigungslast auch für Platten, die durch Druck und Biegung beansprucht werden.

Zur Überprüfung des vereinfachten Modells mit belastungsabhängiger Plattensteifigkeit zur Berechnung der Verzweigungslast wurden zwei numerische Berechnungsmodelle entwickelt. Diese lösen das Verzweigungsproblem mit der Energiemethode nach Timoshenko, wobei der zweidimensionale Spannungszustand in der Platte mit einer isotropen Verfestigung und der Fließgrenze nach von Mises berücksichtigt wird. Bei der Energiemethode nach Timoshenko wird diejenige Belastung gesucht, für welche die Platte gegenüber einer verformten Lage keine Veränderung in ihrer potentielle Energie verspürt. Ist die gespeicherte Energie der Platte gegenüber der Verformung indifferent, so entspricht die Belastung der Lösung des Verzweigungsproblems. Die Ergebnisse des vereinfachten Berechnungsmodells mit belastungsabhängiger Plattensteifigkeit zeigen eine gute Übereinstimmung mit denjenigen der numerischen Modelle.

Mit der Verzweigungslast und der Methode der wirksamen Breite lässt sich die Traglast der Platte bei nichtlinearem Materialverhalten abschätzen. Gemäss der vereinfachten Betrachtung dieser Methode entspricht die Traglast bei Platten, mit einer bezogenen Schlankheit kleiner als die Grenzschlankheit, der Verzweigungslast. Das Modell ermöglicht bei diesen gedrunenen Platten keine Laststeigerung im überkritischen Bereich, gestattet jedoch eine Abschätzung der Plattenstauchung beim Erreichen der maximalen Traglast sowohl für dreiseitig wie auch für vierseitig gelagerte Platten. Bei dieser Stauchung treten infolge des Ausbeulens die grössten Steifigkeitsverluste der Platte auf, welche die Steifigkeit des gesamten Stützenquerschnittes stark beeinflussen. Mit der Annahme, dass dieser Steifigkeitsverlust der meist belasteten Querschnittselemente zum Versagen des gesamten Stützenquerschnitts führt und der Verknüpfung der lokalen Dehnungen mit den globalen Verformungen, kann die Tragfähigkeit der Stütze beurteilt werden. Diese ermöglicht die Berechnung der Querschnittstragfähigkeit mehraxial beanspruchter Stützen mit Berücksichtigung der Schnittkräfte 2^{ter} Ordnung.

7.2 Folgerungen

Aus den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit lassen sich einige Folgerungen und Erkenntnisse zur Beschreibung des Tragverhaltens von gedrückten Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten ableiten:

- Das nichtlineare Materialverhalten hat einen erheblichen Einfluss auf die Stabilität von Stützen und Platten. Sowohl die Traglast wie auch das Verformungsverhalten werden massgeblich von der nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung beeinflusst.
- Die Verzweigungslast der zentrisch gedrückten Stütze kann mit dem Modell nach Engesser-Kármán auf einfache Weise berechnet werden. Diese bildet unter Beachtung der getroffenen Vereinfachungen einen oberen Grenzwert der Stützentragslast.
- Die Beschreibung des Tragverhaltens von Stützen mit nichtlinearem Materialverhalten erfordert ein Berechnungsmodell, welches die wesentlichen mechanischen Eigenschaften des Systems korrekt abbildet. Dazu gehört nebst dem Stoffgesetz und dem Gleichgewicht mindestens auch eine Verträglichkeitsbedingung. Das Gleichgewichtsmodell, welches das Zusammenspiel der treibenden und der rückhaltenden Kräfte entlang der Stütze in Funktion von deren Verformung beschreibt, eignet sich dafür besonders. Alle Einflüsse auf das Stabilitätsverhalten wie Eigenspannungen, Materialverhalten, Lastexzentrizität und weitere können mit diesem Modell in einem Momenten-Krümmungs-Diagramm veranschaulicht werden. Dieses Modell ist eine grosse Hilfe zur Förderung des Verständnisses von Stabilitäts-

problemen und kann für beliebige Stoffgesetze, also auch für Aluminium und hochlegierte Stähle angewendet werden.

- Die im Stahlbau gängigen Bemessungsmethoden für Stützen im Brandfall sind sehr einfach in der Anwendung, berücksichtigen jedoch das nichtlineare Materialverhalten nicht in expliziter Form. Dies führt zu unzuverlässigen Modellen, die Mühe haben, die Traglast der Stütze bei erhöhter Temperatur zu berechnen. Für gedrungene und mittelschlanke Stützen liegen die Traglasten teilweise über der Verzweigungslast nach Engesser-Kármán.
- Eine Vereinfachung des Gleichgewichtsmodells ist möglich und erlaubt eine sehr zuverlässige Abschätzung der Traglast sowie der Verformungen und Schnittkräfte 2^{ter} Ordnung. Das vereinfachte Gleichgewichtsmodell umgeht jegliches iteratives Vorgehen, erlaubt aber dennoch das nichtlineare Materialverhalten explizit zu berücksichtigen. Zudem kann die Stabilität von zentrisch belasteten Stützen, wie auch von solchen mit einer zusätzlichen, linear verteilten Biegebelastung überprüft werden.
- Das oft verwendete Modell von Bleich zur Berechnung der Verzweigungslast von zentrisch gedrückten Platten bei nichtlinearem Materialverhalten eignet sich nicht für Platten, die durch eine Kombination von Druck und Biegung belastet werden. Ähnliches gilt für das weniger bekannte Modell von Iljuschin, welches eine sehr genaue Abschätzung der Verzweigungslast bei vierseitig und dreiseitig gelenkig gelagerten Platten mit zentrischem Druck ermöglicht.
- Das Modell mit belastungsabhängiger Plattensteifigkeit ermöglicht die besondere Art der Anisotropie bei beulgefährdeten Platten zu berücksichtigen. Es erlaubt eine gute Abschätzung der Verzweigungslast bei dreiseitig und vierseitig gelenkig gelagerten Platten, die durch Druck und Biegung belastet sind.
- Die Methode der wirksamen Breiten ermöglicht die Berechnung der Traglasten von dreiseitig oder vierseitig gelenkig gelagerten Platten mit nichtlinearem Materialverhalten, vorausgesetzt deren Verzweigungslast wird korrekt berechnet. Für Platten mit einer bezogenen Schlankheit kleiner als die Grenzschlankheit entspricht die Traglast der Verzweigungslast.
- Die Querschnittstragfähigkeit von Stahlstützen bei erhöhten Temperaturen ist stark von der Tragwirkung der einzelnen Elemente abhängig, die den Querschnitt bilden, wobei das sehr komplexe Zusammenwirken sehr schwer zu erfassen ist. Die Beurteilung der Querschnittstragfähigkeit bei nichtlinearem Materialverhalten ist durch eine Einteilung in Querschnittsklassen ungeeignet. Auch hier führt ein Modell, welches das mechanische Verhalten besser abbilden kann, zu verlässlicheren Ergebnissen, wie zum Beispiel das Gleichgewichtsmodell.

7.3 Ausblick

In der Folge soll ein Ausblick über eine mögliche Erweiterung der in dieser Arbeit erarbeiteten Grundlagen gemacht und Anregungen für weitere Untersuchungen gegeben werden.

- Die Berechnungsmodelle, welche in dieser Arbeit entwickelt wurden, befassen sich einzig mit den Stabilitätsproblemen Knicken und Biegeknicken, dem lokalen Ausbeulen von in der Ebene gedrückten Platten sowie deren Interaktion. Stabilitätsprobleme, die insbesondere bei Trägern vorkommen, wie zum Beispiel Kippen oder Schubbeulen werden nicht betrachtet. Eine Weiterentwicklung der präsentierten Modelle ist erforderlich, um auch solche Stabilitätsversagen zu untersuchen.

- Dünnwandige Stützen aus Aluminium oder hochlegierter Stahl kommen hauptsächlich im Fassadenbau immer häufiger zur Anwendung, wobei die Querschnittsabmessungen dieser Stützen in der Regel durch die Betrachtung von möglichen Stabilitätsversagen bestimmt sind. Dementsprechend ist eine gute und zuverlässige Berechnungsgrundlage für diese Versagensmechanismen notwendig. Eine Betrachtungsweise, welche die Gesetze der Mechanik nicht vernachlässigt, ermöglicht besonders bei nichtlinearem Materialverhalten die Entwicklung von zuverlässigen und dennoch einfachen Berechnungsmodellen. Die in dieser Arbeit entwickelten Berechnungsmodelle, sowohl zur Beurteilung der globalen wie auch der lokalen Stabilität von Stützen bei nichtlinearem Materialverhalten, können zur Beurteilung des Tragverhaltens von Stützen aus anderen Materialien verwendet werden. Insbesondere das vereinfachte Gleichgewichtsmodell eignet sich auch für die Beurteilung der globalen Stabilität von Stützen aus Aluminium oder hochlegiertem Stahl bei Raumtemperatur.
- Die Berechnungsmodelle zum Tragverhalten von zentrisch oder exzentrisch gedrückten Stützen im Brandfall berücksichtigen stets eine homogene Temperaturverteilung im Stützenquerschnitt. Um den Einfluss von Temperaturgradienten im Querschnitt infolge einseitiger Beflammung auf das Tragverhalten der Stütze zu erfassen, bedarf es weitere Untersuchungen, die insbesondere auch die thermischen Dehnungen und Spannungen berücksichtigen.
- Eigenspannungen haben einen erheblichen Einfluss auf das Tragverhalten von Stahlstützen bei Raumtemperatur, dennoch ist es schwierig diese zu Erfassen insbesondere weil zuverlässige Messmethoden fehlen. Im Brandfall erwärmt sich die Stahlstütze sehr schnell, was zu einer Veränderung der Eigenspannungen führt. Untersuchungen dazu sind sehr anspruchsvoll, würden jedoch eine grosse Unsicherheit bei der Betrachtung des Tragverhaltens von Stahlstützen im Brandfall vermindern.

Anhang A Materialverhalten des Baustahls

Während bei Raumtemperatur das Materialverhalten von Stahl durch eine linear elastische, ideal plastische Spannungs-Dehnungs-Beziehung angenähert werden kann, wird dieses bei erhöhten Temperaturen stark nichtlinear. Dies führt auch bei niedrig belasteten Bauteilen zu Plastifizierungen, die bei der Beurteilung der Tragfähigkeit berücksichtigt werden müssen. Das Materialmodell für Stahl bei erhöhten Temperaturen nach EN 1993-1-2 basiert hauptsächlich auf Warmzugversuchen von Rubert und Schaumann [59][77]. Das Modell nähert das Spannungs-Dehnungs-Verhalten bis zum Erreichen der Proportionalitätsgrenze durch eine linear elastische Beziehung, während dies für grössere Dehnungen durch eine elliptische Beziehung bis zum Erreichen der Fließspannung geschieht. Das Fließplateau wird dabei für alle Temperaturen bei 2% Dehnung erreicht (Abb. A-1). Die Beziehung zwischen den Spannungen und den Dehnungen im mehrdimensionalen Raum wird nebst dem einaxialen Spannungs-Dehnungs-Verhalten, durch das Fließgesetz nach von Mises mit isotroper Verfestigung erfasst. In der Folge werden die mathematischen Grundlagen zur Berechnung der räumlichen Spannungs- und Dehnungszustände für nichtlineares Materialverhalten erläutert.

A.1 Dreidimensionaler Spannungszustand

Die Beschreibung des räumlichen Dehnungs- und Spannungszustandes erfolgt durch je 9 Komponenten, die in einem Verzerrungstensor ϵ_{ij} beziehungsweise Spannungstensor σ_{ij} zusammengefasst werden.

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Sind die räumlichen Verzerrungen des Volumenelements bekannt, lässt sich der Spannungstensor mit Hilfe der einaxialen Spannungs-Dehnungs-Beziehung und dem Fließgesetz nach von Mises mit isotroper Verfestigung berechnen. Bei dieser Berechnung wird sowohl der Spannungs- wie auch der Verzerrungstensor in einen volumetrischen und einen deviatorischen Tensor aufgeteilt. Die volumetrischen Tensoren entsprechen Skalaren, welche die Veränderung des Volumens beschreiben, während die deviatorischen Tensoren die Formänderung des infinitesimalen Volumenelements beschreiben, jedoch volumenneutral sind. Wird die Proportionalitätsgrenze nicht überschritten, erfolgt die Umrechnung der räumlichen Dehnungen zu Spannungen analytisch, während diese in der Regel eine iterative Berechnung erfordert, sobald es zu Plastifizierungen kommt. Im letzteren Fall führen diese Berechnungen zur nichtlinearen Gleichung A.7, welche iterativ, zum Beispiel mit dem in Abbildung A-1 rechts dargestellten Newton-Raphson-Verfahren, gelöst wird.

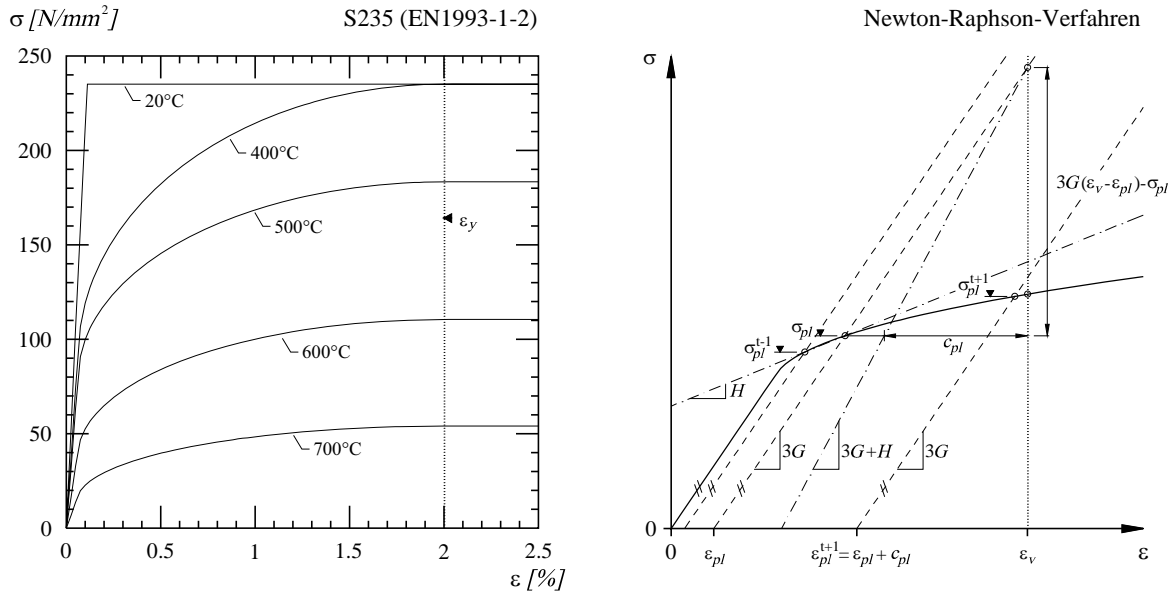


Abb. A-1: Links: Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach EN 1993-1-2 bei unterschiedlichen Temperaturen. Rechts: Darstellung des Iterationsverfahrens nach Newton und Raphson.

$$\sigma^{vol} = spur(\sigma_{ij}) \quad \epsilon^{vol} = spur(\epsilon_{ij}) \quad (A.2)$$

$$\sigma_{ij}^{dev} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \frac{\sigma^{vol}}{3} \quad \epsilon_{ij}^{dev} = \epsilon_{ij} - \delta_{ij} \cdot \frac{\epsilon^{vol}}{3} \quad (A.3)$$

$$\text{mit } \delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.3a)$$

Die plastischen Verformungen des Volumenelements werden mit der plastischen Dehnung ϵ_{pl} und der Fließrichtung n_{ij} beschrieben. Diese beeinflussen nur die Formänderung und dementsprechend nur die deviatorischen Dehnungen, während das Volumen des infinitesimalen Elements davon nicht betroffen ist. Die Fließrichtung n_{ij} ist einzig eine Funktion des Spannungszustands und verändert sich in der Regel während der Belastung, was einen iterativen Berechnungsprozess zur Lösungssuche erfordert. Durch die Einführung einer noch unbekanntem plastischen Dehnung werden die deviatorischen Dehnungen in einen elastischen und einen plastischen Tensor unterteilt. Der elastische Tensor der deviatorischen Verzerrungen ergibt sich zu

$$\epsilon_{ij}^{dev, el} = \epsilon_{ij}^{dev} - \epsilon_{pl} \cdot n_{ij} \quad (A.4)$$

Durch einfache Umformung können die deviatorischen Spannungen infolge der elastischen deviatorischen Dehnungen berechnet werden. Diese wiederum erlauben die Berechnung der Fließrichtung n_{ij} .

$$\sigma_{ij}^{dev} = 2G \cdot \epsilon_{ij}^{dev, el} \quad \text{mit } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (A.5)$$

$$n_{ij} = \frac{3}{2\sigma_v} \cdot \sigma_{ij}^{dev} \quad \text{mit } \sigma_v = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma_{ij}^{dev} \sigma_{ij}^{dev})} \quad (A.6)$$

Dabei entspricht σ_v der Vergleichsspannung nach von Mises, wobei das Produkt des deviatorischen Spannungstensors mit sich selber, als Summe der Quadrate der einzelnen Tensorelementen

zu verstehen ist. Werden die drei Gleichungen A.4, A.5 und A.6 zusammengefasst, ergibt sich folgende Gleichung, welche die plastische Dehnung ε_{pl} als einzige Unbekannte enthält.

$$\left(1 + \frac{3G}{\sigma_v} \cdot \varepsilon_{pl}\right) \cdot \sigma_{ij}^{dev} = 2G \cdot \varepsilon_{ij}^{dev} \quad (\text{A.7})$$

Durch die Einführung einer Vergleichsdehnung ε_v analog zur Vergleichsspannung nach von Mises, (Gl. A.6) vereinfacht sich der Ausdruck A.7 zu einer Gleichung, die ausschliesslich aus skalaren Grössen besteht.

$$3G(\varepsilon_v - \varepsilon_{pl}) - \sigma_v = 0 \quad \text{mit } \varepsilon_v = \sqrt{\frac{2}{3}(\varepsilon_{ij}^{dev} \varepsilon_{ij}^{dev})} \quad (\text{A.8})$$

In dieser Gleichung wird eine Beziehung zwischen der Vergleichsdehnung, welche den gesamten Verzerrungszustand zusammenfasst und der Vergleichsspannung, welche den Spannungszustand beschreibt, aufgestellt. Die plastische Dehnung ist nun so zu wählen, dass diese Beziehung zwischen der Vergleichsdehnung und Vergleichsspannung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Materials entspricht. Die Vergleichsspannung σ_v in Gleichung A.8 kann somit durch das Materialverhalten, welches mit der Funktion $\sigma(\varepsilon_{pl})$ beschrieben wird, ersetzt werden. Mit dem iterativen Verfahren nach Newton-Raphson (Abb. A-1 rechts) wird die plastische Dehnung ε_{pl} bestimmt, welche die Gleichung A.8 erfüllt. Sobald diese bekannt ist, kann der Spannungstensor mit folgenden Gleichungen berechnet werden.

$$\sigma_{ij}^{dev} = \frac{2G}{1 + 3G \frac{\varepsilon_{pl}}{\sigma_v}} \cdot \varepsilon_{ij}^{dev} \quad \text{mit } \sigma_v = \sigma_{pl} = \sigma(\varepsilon_{pl}) \quad (\text{A.9})$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{dev} + K \cdot \varepsilon^{vol} \cdot \delta_{ij} \quad \text{mit } K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (\text{A.10})$$

Das iterative Newton-Raphson-Verfahren ermöglicht eine schnelle und zuverlässige Lösung nichtlinearer Gleichungen. Wie in Abbildung A-1 rechts dargestellt, wird die Lösung der Gleichung A.8 schrittweise angenähert, wobei die Schrittlänge wie auch deren Vorzeichen ändern können. Das gesamte Verfahren kann auf folgende Ausdrücke reduziert werden.

$$\varepsilon_{pl}^{t+1} = \varepsilon_{pl}^t + c_{pl} \quad \text{mit } c_{pl} = \frac{3G(\varepsilon_v - \varepsilon_{pl}^t) - \sigma_{pl}^t}{3G + H} \quad \text{und } H = \frac{\sigma_{pl}^t - \sigma_{pl}^{t-1}}{\varepsilon_{pl}^t - \varepsilon_{pl}^{t-1}} \quad (\text{A.11})$$

Aus den Informationen des vorherigen Iterationsschrittes $t-1$, wird die Schrittlänge c_{pl} bestimmt, um die nächste Näherung der plastischen Dehnung zu berechnen.

A.2 Zweidimensionaler Spannungszustand

Die Beziehungen zwischen den Tensoren der Verzerrungen und Spannungen im dreidimensionalen Raum erlauben die Berechnung der Spannungen bei einem vollständig bekannten Verzerrungstensor. Handelt es sich jedoch um ein zweidimensionaler Spannungszustand und ist die Komponente ε_z des dazugehörigen räumlichen Verzerrungstensors ε_{ij} nicht vorweg bekannt, so muss das Berechnungsverfahren angepasst werden. Für die folgenden Betrachtungen seien die ersten vier Komponenten des Verzerrungstensor gegeben und der zweidimensionalen Spannungstensor sowie die Verzerrungskomponente ε_z gesucht.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Das Vorgehen entspricht dem allgemeinen Berechnungsverfahren im dreidimensionalen Raum, wobei die Bestimmung der plastischen Dehnung ε_{pl} nicht mit der Gleichung A.8 erfolgt. Werden die Gleichungen A.4 bis A.6 für die einzelnen Spannungskomponenten ausgewertet und wird zusätzlich die Komponente σ_z gleich Null gesetzt, so führt dies zu folgenden Spannungen im zweidimensionalen Raum

$$\sigma_x = \frac{12GK \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{3K\xi_1 + 4G} - \frac{G\xi_2}{\xi_1} \quad (\text{A.13a})$$

$$\sigma_y = \frac{6GK \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{3K\xi_1 + 4G} + \frac{G\xi_2}{\xi_1} \quad (\text{A.13b})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{2G\varepsilon_{xy}}{\xi_1} \quad (\text{A.13c})$$

$$\text{mit } \xi_1 = 1 + \varepsilon_{pl} \cdot \frac{3G}{\sigma_v} \quad \text{und} \quad \xi_2 = 2\varepsilon_y - \frac{4G}{3K\xi_1 + 4G} \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (\text{A.13d})$$

Der Spannungstensor kann wiederum mit der skalaren Grösse σ_v beschrieben werden, wobei sich diese mit Gleichung A.6 auf den Ausdruck A.14 reduziert. Es gilt nun durch ein iteratives Verfahren die plastische Dehnung zu finden, damit die Vergleichsspannung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung $\sigma(\varepsilon_{pl})$ des Materials entspricht

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\sigma_{xy}^2} = \sigma(\varepsilon_{pl}) \quad (\text{A.14})$$

Ist der zweidimensionale Spannungszustand bekannt, kann die fehlende Dehnungskomponente ε_z berechnet werden.

$$\varepsilon_z = \varepsilon^{vol} - \varepsilon_x - \varepsilon_y = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3K} - \varepsilon_x - \varepsilon_y \quad (\text{A.15})$$

Bei den numerischen Modelle zur Berechnung der Verzweigungslast dreiseitig und vierseitig gelenkig gelagerten Platten mit nichtlinearem Materialverhalten (Kapitel 5) wird der zweidimensionale Spannungszustand mit dem obigen Berechnungsverfahren erfasst. Dabei sind die ersten vier Komponenten des Verzerrungstensors ε_{ij} durch die gewählten Verformungsfigur in Funktion der Verformung in Plattenmitte gegeben. Der Spannungstensor σ_{ij} sowie die Verzerrungskomponente in z-Richtung werden dann wie oben erläutert iterativ bestimmt.

A.3 Eindimensionaler Spannungszustand

Beim eindimensionalen Spannungszustand sei der Spannungstensor σ_{ij} durch die einzige Spannung σ_x gegeben, während der zugehörige räumliche Dehnungszustand ε_{ij} gesucht ist.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Dank dem gegebenen Materialverhalten in Form einer einaxialen Spannungs-Dehnungs-Beziehung kann mit folgenden zwei Gleichungen der räumliche Verzerrungszustand als Funktion der gegebenen Spannung σ_x ohne Iteration berechnet werden.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{pl} + \frac{\sigma_x}{E} \quad (\text{A.17a})$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\varepsilon_{pl}}{2} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_x \quad (\text{A.17b})$$

Im ersten Berechnungsschritt der numerischen Modelle des Kapitels 5 zur Berechnung der Verzweigungslast dreiseitig und vierseitig gelenkig gelagerten Platten mit nichtlinearem Materialverhalten wird der räumliche Verzerrungszustand infolge der einaxialen Belastung in x-Richtung mit dem obigen Verfahren bestimmt.

Anhang B Numerische Berechnungsmodelle

In diesem Anhang werden die iterativen Berechnungsmodelle zum Knicken, insbesondere deren Iterationsschleifen näher erläutert. Alle Berechnungsmodelle sind mit Matlab [47] programmiert.

B.1 Reduziertes Gleichgewichtsmodell

Die in den Kapiteln 3.3.1 und 3.3.2 beschriebenen Berechnungsmethoden erfordern eine iterative Lösungssuche zur Berechnung der Knicklast. In der Folge wird ein mögliches Iterationsschema vorgestellt, welches eine schnelle Berechnung der Knicklast erlaubt und im Rahmen dieser Arbeit verwendet wurde. Dieses ist in Abbildung B-1 oben als Flussdiagramm graphisch dargestellt.

Der erste Schritt bei der Lösungssuche besteht in der Wahl einer Normalkraft N_E und einer Krümmung χ (a). Damit lässt sich nach dem Berechnungsschema des Kapitels 3.3.1, welches in Abbildung 3-4 dargestellt ist, der Biege­widerstand $M_{N,R,\theta}$ und das einwirkende Biegemoment 2^{ter} Ordnung $M_{E,II}$ berechnen (b). Ist für die gewählte Normalkraft und Krümmung der Biege­widerstand grösser als das einwirkende Biegemoment, so ist ein Gleichgewichtszustand der verformten Stütze möglich, die Normalkraft darf weiter gesteigert werden. Ist dies nicht der Fall, so gilt es abzuklären, ob für eine andere Wahl der Krümmung das Gleichgewicht zwischen inneren Biege­widerstand und äusseren Biegemoment möglich ist. Um festzustellen, ob für die neue Wahl der Krümmung χ diese vergrössert oder verkleinert werden muss, werden die Steigungen m_R der Biege­widerstandsfunktion und m_E der Funktion des einwirkenden Biegemomentes (c) berechnet. Wie in Abbildung B-1 unten ersichtlich, muss die Krümmung verkleinert werden, falls die Steigung m_R kleiner als die Steigung m_E ist, andernfalls ist diese zu vergrössern. In den Schleifen (d) und (f) wird das Gleichgewicht zwischen inneren und äusseren Kräften für zunehmende oder abnehmende Krümmung schrittweise überprüft. Der fortlaufende Vergleich der Steigungen m_R und m_E garantiert eine frühzeitige Verfeinerung der Suche nach dem möglichen Gleichgewichtszustand (e) und (g). Bei der Verfeinerung wird die Schrittlänge $\Delta\chi$ verkleinert bis ein festgelegter Grenzwert $\Delta\chi_{gr}$ erreicht wird. Kann für die angenommene Normalkraft N_E kein Gleichgewicht zwischen den inneren und den äusseren Biegemomenten hergestellt werden, wird diese bei der Suche nach der Knicklast $N_{K,R}$ abgemindert.

Gelangt man in eines der im Interaktionsschema schraffierten Kästchen, ist mit der neu berechneten Normalkraft wieder bei Punkt (a) zu starten, wobei die Krümmung χ frei gewählt werden darf. Analog wie bei der Schrittlänge der Krümmungen kann auch die Schrittlänge ΔN fortlaufend reduziert werden. Dies geschieht jedes Mal, wenn es zu einem Vorzeichenwechsel der Schrittlänge ΔN kommt.

Aus dem Iterationsschema in Abbildung B-1 oben gehen zwei Kriterien zur Steigerung oder Minderung der Normalkraft N_E hervor. In Abbildung B-1 unten sind diese in Momenten-Krümmungs-Diagrammen zusätzlich dargestellt. Liegt die gewählte Normalkraft über der Knicklast der Stütze (Abb. B-1 unten links), so durchläuft das Programm die Schleifen (d) und (f) auf der Suche nach einer Krümmung, welche ein Gleichgewicht zwischen den äusseren und inneren Kräften herstellen kann. Dies würde einem Schnittpunkt der Funktion für die äussere Belastung $M_{E,II}$ (strich-

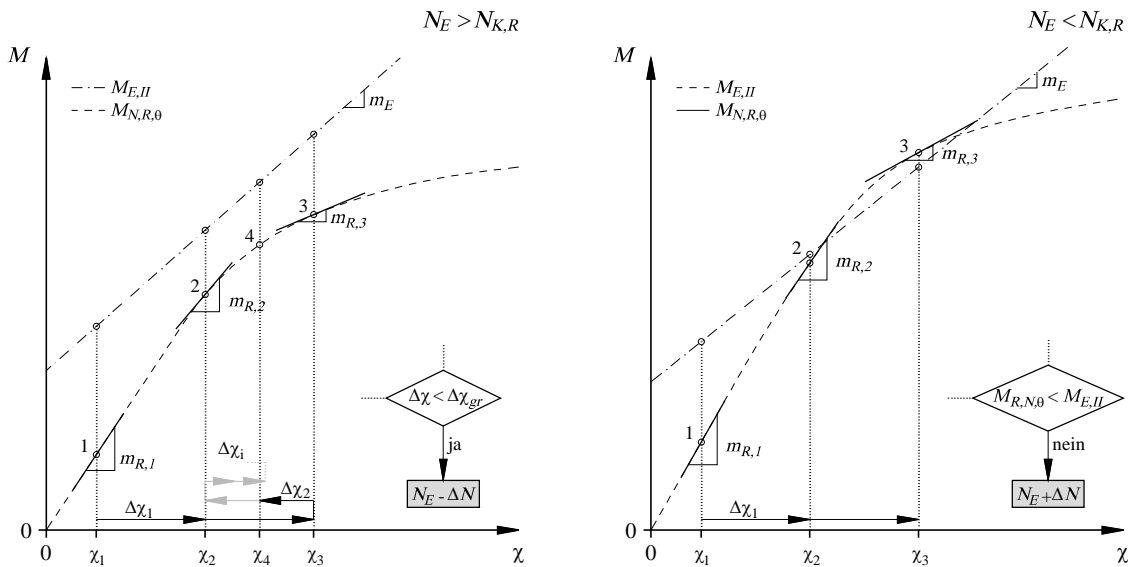
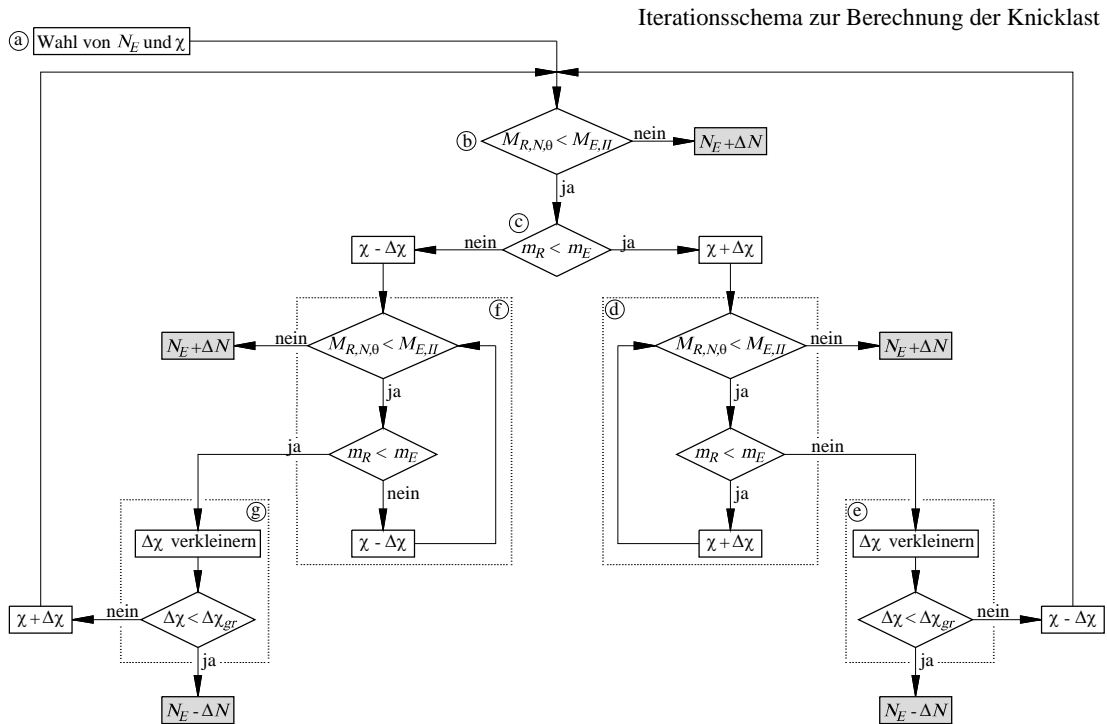


Abb. B-1: Oben: Iterationsschema zur Berechnung der Knicklast. Unten: Momenten-Krümmungs-Diagramme zur Illustration des Iterationsschemas zur Berechnung der Knicklast

punktierte Linie) und der Funktion des inneren Biege­widerstandes $M_{N,R,\theta}$ (gestrichelte Linie) entsprechen. Wird kein Gleichgewicht gefunden, so wird die Normalkraft reduziert. Ist die gewählte Normalkraft kleiner als die Knicklast der Stütze (Abb. B-1 unten rechts), so durchläuft das Programm die Schleifen (d) oder (f) bis eine Krümmung gefunden wird, für die der innere Biege­widerstand $M_{N,R,\theta}$ grösser als das äussere Biegemoment 2^{ter} Ordnung $M_{E,II}$ ist. Sobald dies der Fall ist, darf die Normalkraft vergrössert werden.

B.2 Energiemethode

Die Energiemethode, welche im Kapitel 3.3.3 erläutert ist, berechnet die durch die Stützenverformung am System geleistete innere und äussere Arbeit. Bei dieser Berechnung muss die geometrische Form der Biegelinie angenommen werden, welche im Rahmen dieser Arbeit als eine Funktion aus zwei Geraden und einer Sinusfunktion besteht. Durch die Variable η wird der Anteil der Geraden an der Verformungsfigur beschrieben (Abb. B-2 links). In der Folge ist die mathematische Formulierung der geometrischen Form der Biegelinie, sowie die damit verbundene Herleitung des analytischen Ausdrucks zur Berechnung des elastischen Anteils an der äusseren Arbeit in Funktion der Stützenverformung (Gl. 3.16) gezeigt. Die mathematische Formulierung der Verformungsfigur w erfolgt durch folgende Ausdrücke:

$$w = \frac{\pi \cdot w_m}{\zeta_1} \cdot \frac{x}{L} \quad \text{für } x \leq \eta \frac{L}{2} \quad (\text{B.1 a})$$

$$w = w_m \cdot \left[\frac{\zeta_2}{\zeta_1} \cdot \left(\cos \left[\frac{\pi}{\zeta_2} \cdot \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right) \right] - 1 \right) + 1 \right] \quad \text{für } \eta \frac{L}{2} < x < L \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) \quad (\text{B.1 b})$$

$$w = \frac{\pi \cdot w_m}{\zeta_1} \cdot \left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad \text{für } x \geq L \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) \quad (\text{B.1 c})$$

wobei

$$\zeta_1 = \eta \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + 1 \quad \text{und} \quad \zeta_2 = 1 - \eta \quad (\text{B.1 d})$$

Infolge der Verformungen entstehen Krümmungen, welche bei einer linearisierten Berechnung, durch folgende Ausdrücke in Funktion der Verformung in Stützenmitte w_m und der Variablen η berechnet werden können

$$\chi \approx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{für } x \leq \eta \frac{L}{2} \quad \text{und} \quad x \geq L \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) \quad (\text{B.2 a})$$

$$\chi \approx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_m \pi^2}{L^2} \cdot \frac{1}{\zeta_1 \zeta_2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{\zeta_2} \cdot \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad \text{für } \eta \frac{L}{2} < x < L \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) \quad (\text{B.2 b})$$

Sowohl die Verformungsfigur wie auch die Verteilung der Krümmungen sind in Abbildung 3-8 links für unterschiedliche η dargestellt.

Die mathematische Formulierung der Verformungsfigur ermöglicht die Berechnung der Verschiebung u des Lastangriffspunktes der Normalkraft N_E in Funktion der Verformung in Stützenmitte (Abb. B-2 rechts). Dabei wird angenommen, dass die geometrischen Imperfektionen e zur Verformungsfigur w affin ist.

$$u \approx \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{(e_0 + w_m)^2 \pi^2}{4L} \cdot \frac{\zeta_2}{\zeta_1^2} + \eta \sqrt{L^2 + \left(\frac{(e_0 + w_m) \pi}{\zeta_1} \right)^2} - \eta L \quad (\text{B.3})$$

Bei der Berechnung des elastischen Anteils der äusseren Arbeit $U_{a,el}$, welche infolge der Verschiebung des Lastangriffspunktes der Belastung N_E geleistet wird, ist jedoch nur die Verschiebung Δu

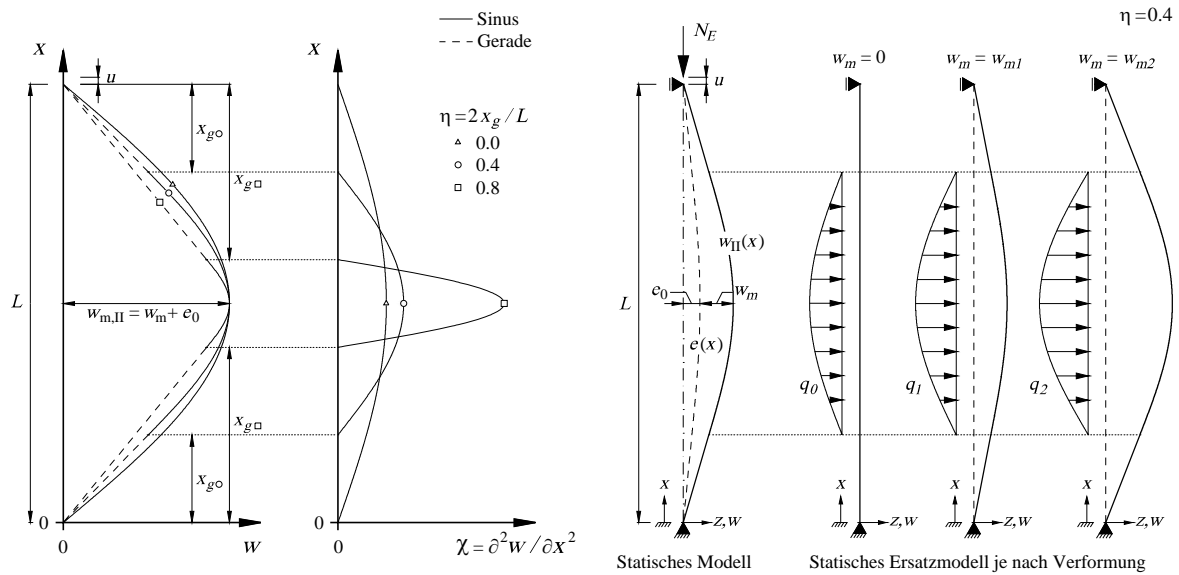


Abb. B-2: Links: Parametrisierung der Verformungsfigur. Rechts: Statisches Ersatzsystem für unterschiedliche Stützensuslenkungen.

infolge der Verformung w zu berücksichtigen. Diese ergibt sich aus der Differenz der Verschiebungen $u(e_0 + w_m)$ und $u(e_0)$ zu:

$$\Delta u = \frac{\pi^2}{4L} \cdot \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \cdot (2e_0 w_m + w_m^2) + \eta \left[\sqrt{L^2 + \left(\frac{(e_0 + w_m)\pi}{\zeta_1} \right)^2} - \sqrt{L^2 + \left(\frac{e_0 \pi}{\zeta_1} \right)^2} \right] \quad (\text{B.4})$$

Die am Gesamtsystem geleistete äussere Arbeit $U_{a,el}$ ergibt sich durch das Integrieren des Produkts der Verschiebung mit der Normalkraft. Die Normalkraft bleibt dabei für jede Stützensverformung konstant.

$$U_{a,el} = - \int_0^{w_m} (\Delta u \cdot N_E) dw_m \quad (\text{B.5})$$

Da dieser Ausdruck sich nur schwer analytisch lösen lässt, wird die am Gesamtsystem geleistete äussere Arbeit an einem statischen Ersatzmodell berechnet. Dieses ersetzt die Normalkraft N_E , durch die von ihr verursachten Ablenkkräfte q (Abb. B-2 rechts). Beide Betrachtungen führen zur selben Lösung, wobei das statische Ersatzmodell mathematisch einfacher zu behandeln ist.

Das statische System einer gelenkig gelagerten Stütze mit geometrischen Imperfektionen $e(x)$ und Verformung $w(x)$, welches durch eine Normalkraft N_E belastet wird, kann in ein analoges Ersatzsystem umgeformt werden, das aus einem einfach gelagerten Balken besteht der mit einer Linienlast $q(x)$ belastet wird (Abb. B-2 rechts). Damit das statische Ersatzsystem dem statischen Grundsystem entspricht, müssen die Biegemomente beider Systeme sowohl in ihrem Betrag wie auch in der Verteilung gleich sein. Die Biegemomente am Grundsystem können durch folgenden Ausdruck beschrieben werden

$$M_{E,II}(x) = N_E \cdot (w + e) \quad (\text{B.6})$$

Beim statischen Ersatzsystem wird folgende Belastung eingeführt,

$$q(x) = \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \frac{N_E \cdot (e_0 + w_m)}{\zeta_1 \zeta_2} \cdot \cos \left[\frac{\pi}{\zeta_2} \cdot \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad \text{für } \eta \frac{L}{2} < x < L \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) \quad (\text{B.7})$$

damit die daraus resultierenden Biegemomente

$$M_{E,II}(x) = N_E \cdot (e_0 + w_m) \cdot \frac{\pi}{\zeta_1} \cdot \frac{x}{L} \quad \text{für } x \leq \eta \frac{L}{2} \quad (\text{B.8a})$$

$$M_{E,II}(x) = \frac{N_E \cdot (e_0 + w_m)}{\zeta_1} \cdot \left[\zeta_2 \cdot \cos \left[\frac{\pi}{\zeta_2} \cdot \left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2} \right) \right] + \eta \frac{\pi}{2} \right] \quad (\text{B.8b})$$

$$M_{E,II}(x) = N_E \cdot (e_0 + w_m) \cdot \frac{\pi}{\zeta_1} \cdot \left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad \text{für } x \geq L \left(1 - \frac{\eta}{2} \right) \quad (\text{B.8c})$$

denjenigen des Grundsystems entsprechen (Gl. B.6). In Abbildung B-2 rechts sind für drei unterschiedliche Verformungsfiguren die Linienlasten q dargestellt, welche beim statischen Ersatzsystem eingeführt werden müssen. Es ist ersichtlich, dass diese in ihrer Verteilung affin zur Krümmung der Stütze verlaufen und dass die Belastung linear mit der Stützenverformung zunimmt. Der elastische Anteil der am Ersatzsystem infolge der Verformung geleistete äussere Arbeit lässt sich durch folgendes Integral berechnen

$$U_{a,el} = - \int_0^{w_m} \int_0^L (w \cdot q) dx dw_m = - \frac{\pi}{L} \cdot \frac{N_E}{\zeta_1} \cdot (2e_0 w_m + w_m^2) \cdot \left[1 + \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) \right] \quad (\text{B.9})$$

Der elastische Anteil der äusseren Arbeit ist einerseits linear von der einwirkende Normalkraft N_E abhängig, andererseits ist er eine quadratische Funktion der Auslenkung w_m in Stützenmitte. Die geometrischen Imperfektionen e_0 sowie die geometrische Form der Stützenbiegeline beeinflussen diesen Anteil der äusseren Arbeit ebenfalls.

Anhang C Eigenspannungen

Beim Herstellungsprozess von Stahlprofilen wird das Grundmaterial zuerst in gleichförmige kompakte Balken gegossen, um dann bei sehr hohen Temperaturen in ihre Endform gewalzt zu werden. Wegen den unterschiedlichen Flächen-Volumen Verhältnissen der einzelnen Querschnittsteile der Profile kommt es beim Abkühlen zu Temperaturgradienten innerhalb des Stahlquerschnittes. Dies hat komplexe thermische und mechanische Prozesse zur Folge, die wegen den internen Zwängungen zu Verzerrungen und Spannungen im Querschnitt führen. Weil die Materialeigenschaften des Stahls während der Abkühlung einem kontinuierlichen Wandel unterworfen sind, verändern sich die Spannungs- und Verzerrungszustände im Querschnitt ständig. Sowohl die Steifigkeit wie auch die Festigkeit des Stahls nehmen bei der Abkühlung kontinuierlich zu, während die Kriecheffekte nur bei erhöhten Temperaturen eine wichtige Rolle spielen und bei tieferen Temperaturen praktisch verschwinden. Als Folge des gesamten Abkühlprozesses resultieren Eigenspannungen innerhalb des Stahlquerschnittes, die bei dünneren H-Profilen Spannungsspitzen aufweisen, die bis zu 50% der Materialflussgrenze erreichen können.

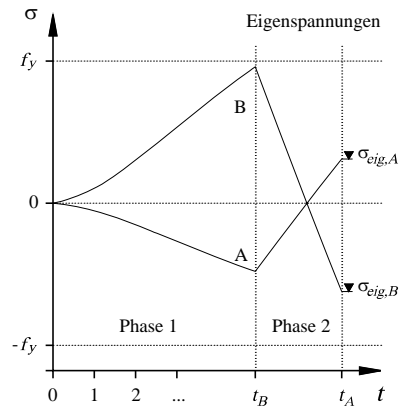
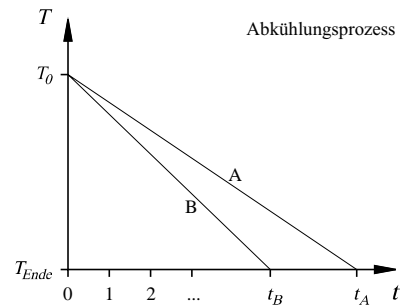
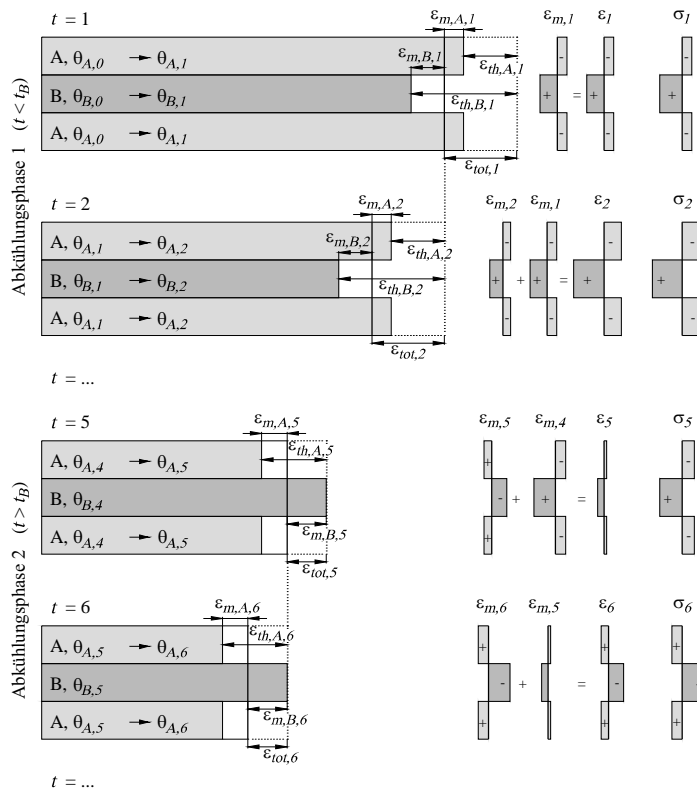
Da die Eigenspannungen auf Stabilitätsprobleme einen wesentlichen Einfluss haben, soll dieser Anhang die Entstehung von Eigenspannungen an einem idealisierten Querschnitt ohne Berücksichtigung von Kriecheffekten erläutern. Damit werden die theoretischen Grundlagen im Hinblick auf die Beurteilung der Entwicklung der Eigenspannungen im Brandfall geschaffen. Bei der Erwärmung des Stahlprofils in einem Brandereignis entstehen wie bei der Abkühlung Temperaturgradienten im Querschnitt, die wiederum die schon vorhandenen Eigenspannungen beeinflussen. Diese Veränderung der Eigenspannungen während dem Erwärmungsprozess hat insbesondere für die Betrachtung von Stabilitätsproblemen bei erhöhter Temperaturen eine zentrale Bedeutung und verlangt zumindest eine qualitative Beschreibung.

C.1 Entstehung der Eigenspannungen

Zur Erläuterung der Entstehung von Eigenspannungen in einem Stahlquerschnitt wird eine idealisierte dreiteilige Platte aus Stahl betrachtet (Abb. C-1). Die äusseren Bereiche A der Platte kühlen sich langsamer ab als der mittlere Bereich B. Vereinfacht wird eine lineare Temperatur-Zeit-Beziehung für die einzelnen Bereiche angenommen. Diese sind mit einer Anfangstemperatur T_0 und einer Endtemperatur T_{Ende} , welche jeweils beim Zeitpunkt t_A respektive t_B erreicht wird, beschrieben. Der Abkühlprozess lässt sich somit in zwei Phasen unterteilen. Bei der ersten Abkühlphase ($t < t_B$) kühlt sich der mittlere Bereich B schneller ab als die äusseren Bereiche A. Bei der zweiten Abkühlphase ($t > t_B$) kühlen sich die äusseren Bereiche A weiter ab, während der mittlere Bereich eine konstante Temperatur T_{Ende} beibehält.

Für die Berechnung der Eigenspannungen wird der gesamte Prozess in Zeitschritte aufgeteilt. Im ersten Zeitschritt erfährt der mittlere Bereich B die grösseren thermischen Dehnungen ϵ_{th} , da er sich gegenüber den äusseren Bereichen A schneller abkühlt (Abb. C-1). Weil angenommen wird, dass der Querschnitt der Platte eben bleibt, können sich die einzelnen Bereiche der Platte nicht frei bewegen, was zu einer Zwängung führt, die durch die mechanischen Dehnungen ϵ_m

Entstehung der Eigenspannungen beim Abkühlprozess



Spannungs-Dehnungs-Beziehung

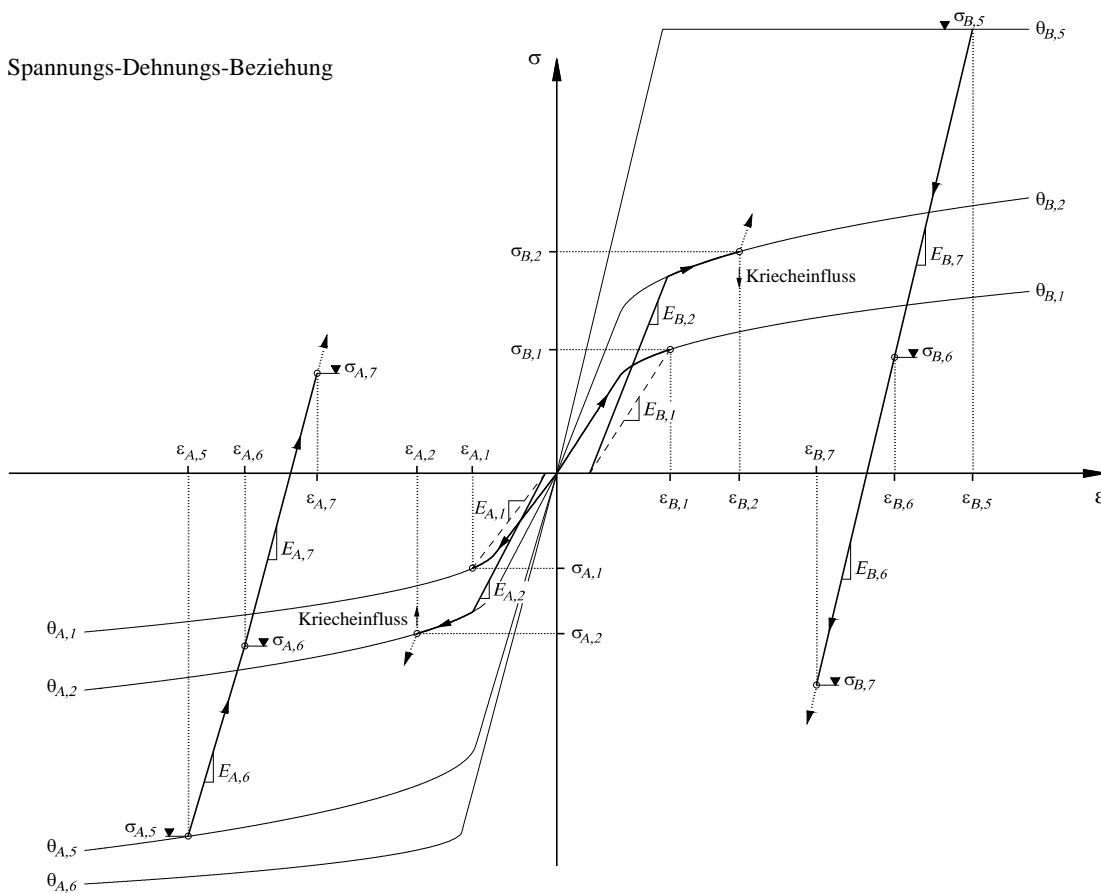


Abb. C-1: Zusammenwirken der thermischen und mechanischen Dehnungen sowie der zugehörigen Spannungen bei der Entstehung von Eigenspannungen während dem Abkühlprozess einer dreiteiligen Platte.

beschrieben wird. Die Dehnungsebene der gesamten Platte wird sich bei ϵ_{tot} so einstellen, dass die durch die mechanischen Dehnungen verursachten Spannungen über den gesamten Querschnitt integriert zu keiner Normalkraft führen. Die dabei entstandenen Spannungen können für den nächsten Zeitschritt als Eigenspannungen betrachtet werden. In dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm entsprechen die Zustände der einzelnen Plattenbereiche nach dem ersten Zeitschritt den Punkten $(\sigma_{A,1}, \epsilon_{A,1})$ und $(\sigma_{B,1}, \epsilon_{B,1})$.

Im folgenden Zeitschritt kühlen sich die einzelnen Bereiche des Plattenquerschnittes weiter ab, wobei sie von der Temperatur $T(t-1)$ bei Zeitschrittbeginn zur Temperatur $T(t)$ bei Zeitschrittbende übergehen. Um alle Prozesse während des Zeitschrittes richtig zu erfassen, werden zu Beginn des Zeitschrittes die Plattenstreifen voneinander freigeschnitten, damit sie sich frei verformen können. Durch das Freischneiden kommt es zu einer elastischen Entlastung, wobei sich die im vorherigen Zeitschritt entstandenen Eigenspannungen lösen. Das Materialverhalten für diesen Berechnungsschritt ist durch die Temperatur $T(t-1)$ charakterisiert. Durch das Abkühlen der Plattenstreifen während des Zeitintervalls entstehen einerseits zusätzliche thermische Dehnungen, andererseits gewinnt das Material an Steifigkeit und Festigkeit. Am Ende des betrachteten Zeitschrittes werden die Plattenstreifen wieder zusammengefügt, wobei es durch die unterschiedlichen Dehnungen zu Zwängungen kommt. Die Dehnungsebene des gesamten Querschnitts ϵ_{tot} wird sich so einstellen, dass die verursachten Spannungen über den gesamten Querschnitt zu keiner Normalkraft führen. Dabei werden die Spannungen mit dem Materialverhalten am Ende des Zeitschrittes, das heisst mit einer Temperatur $T(t)$, berechnet. Dies führt zu den Belastungszuständen $(\sigma_{A,2}, \epsilon_{A,2})$ und $(\sigma_{B,2}, \epsilon_{B,2})$ im Spannungs-Dehnungs-Diagramm der Abbildung C-1, die wiederum den Anfangsbedingungen des nächsten Zeitschrittes entsprechen. Mit diesem Berechnungsmuster können die Spannungen in den Plattenstreifen infolge der Zwängungen in Funktion der Zeit berechnet werden. Dabei werden die Plattenstreifen stets zu Beginn des betrachteten Zeitintervalls voneinander gelöst, damit sie sich frei ausdehnen können, um dann am Ende des Zeitschrittes wieder zusammengefügt zu werden.

In der ersten Abkühlphase vergrössern sich die Spannungen der einzelnen Plattenstreifen ständig, da sich der mittlere Plattenstreifen stets mehr verkürzen möchte als die beiden äusseren. Erst nach dem Zeitpunkt t_B , verkleinert sich der Temperaturunterschied zwischen den Bereichen, was einer Entlastung der Spannungen in den Plattenstreifen gleichkommt. Diese Entlastung ist im Spannungs-Dehnungs-Diagramm in Abbildung C-1 dargestellt. Weil das Material bei niedriger Temperatur eine wesentlich höhere Steifigkeit besitzt, genügen kleine Dehnungsdifferenzen, um die vorhandenen Spannungen stark zu reduzieren. Der Abbau der mechanischen Dehnungen endet erst mit dem Zeitpunkt t_A , bei dem auch die äusseren Plattenstreifen A die Endtemperatur erreichen. Am Ende des Abkühlungsprozess verbleibt in allen Plattenstreifen die gleiche mechanische Enddehnung, weil in der Summe alle Streifen die gleiche thermische Dehnung erfahren haben. Diese verbleibende mechanische Enddehnung verschwindet, falls es im gesamten Abkühlungsprozess zu keinen plastischen Verzerrungen gekommen ist. Andernfalls ist sie ein Mass für die entstandenen Plastifizierungen inklusive den Kriecheffekten.

In Abbildung C-2 ist die Entstehung der Eigenspannungen an der idealisierten dreiteiligen Platte für unterschiedliche lineare Temperaturverläufe dargestellt. Die äusseren Streifen A der Platte haben in der Summe eine doppelt so grosse Querschnittsfläche wie der mittlere Streifen B. In der linken Abbildung ist der Verlauf der Spannungen der einzelnen Plattenstreifen in Funktion der Zeit dargestellt. Der Abkühlungsprozess folgt den linearen Temperaturverläufen der Abbildung C-1, wobei die Platte von einer Temperatur $T_0 = 700^\circ\text{C}$ bis auf Raumtemperatur $T_{Ende} = 20^\circ\text{C}$ abgekühlt wird. Durch das Verhältnis t_B / t_A werden unterschiedlich grosse Temperaturgradienten über den Plattenquerschnitt simuliert. Die gesamte Platte besteht aus dem gleichen Stahl S235, wobei dessen Materialverhalten gemäss EN 1993-1-2 angenähert ist.

Es ist ersichtlich, dass in der ersten Abkühlungsphase die Spannungen aufgebaut werden, während es in der zweiten Phase in sehr kurzer Zeit zur Lastumkehr kommt, die schlussendlich zu den

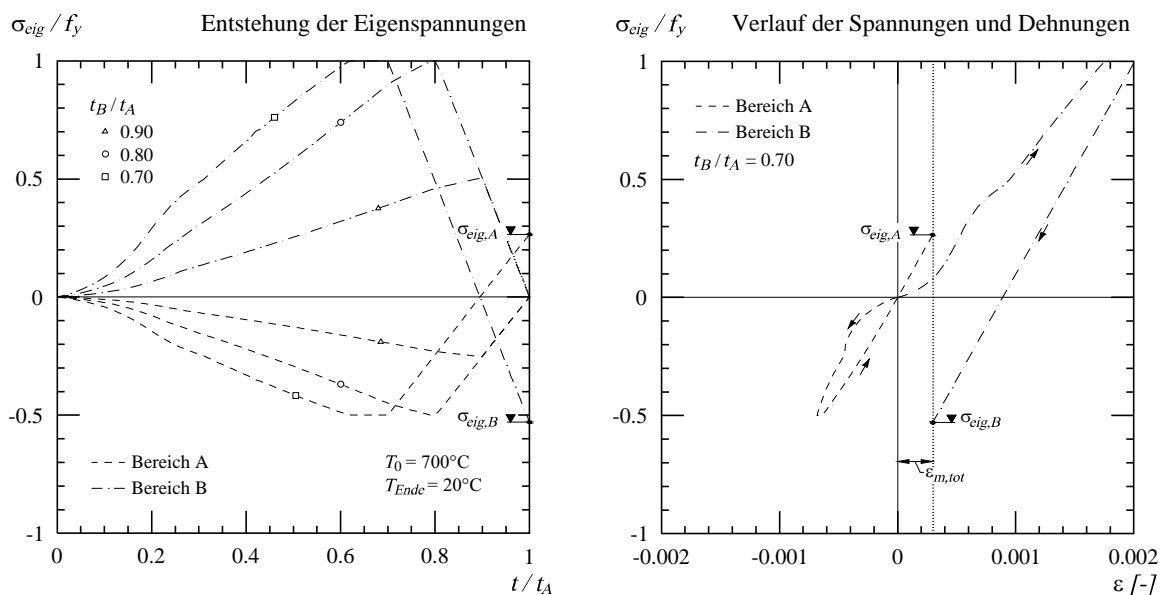


Abb. C-2: Entstehung der Eigenspannungen beim Abkühlprozess für unterschiedliche lineare Temperaturverläufe, berechnet an der idealisierten dreiteiligen Platte.

verbleibenden Eigenspannungen führt. Je grösser der Temperaturgradient, desto schneller werden die Spannungen aufgebaut und desto grösser sind die verbleibenden Eigenspannungen im Plattenquerschnitt. Dabei nehmen die Plastifizierungen mit grösseren Temperaturgradienten zu. Weil die äusseren Streifen A gegenüber dem mittleren Streifen B doppelt so viel Querschnittsfläche aufweisen, betragen die Spannungen in den äusseren Streifen zu jedem Zeitpunkt der Hälfte der Spannung im mittleren Streifen. In der Abbildung C-2 rechts ist der gesamte Entstehungsprozess der Eigenspannungen für $t_B / t_A = 0.70$ in einem Spannungs-Dehnungs-Diagramm dargestellt. Während bei der ersten Abkühlungsphase ein nichtlinearer Anstieg der Spannungen stattfindet, kommt es in der zweiten Abkühlungsphase zu einer elastischen Lastumkehr. Der nichtlineare Anstieg ist einerseits durch die nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung und andererseits durch den nichtlinearen Zusammenhang der thermischen Dehnungen mit dem Anstieg der Stahltemperatur verursacht. Da Kriecheffekte bei der Berechnung nicht berücksichtigt wurden, kommt es in den äusseren Plattenstreifen A zu keiner Plastifizierung. Dementsprechend durchläuft die Spannungs-Dehnungs-Beziehung dieser Plattenstreifen stets den Nullpunkt im Spannungs-Dehnungs-Diagramm (Abb. C-2 rechts). Da es jedoch im mittleren Plattenstreifen zu Plastifizierungen kommt, entstehen bei der Lastumkehr in der zweiten Abkühlungsphase die Eigenspannungen $\sigma_{eig,A}$ und $\sigma_{eig,B}$.

Kommt es während einem Brandereignis zu einer raschen Abkühlung der Stahlstütze durch den Einsatz von Löschwasser, entstehen grosse Temperaturgradienten im Querschnitt. Diese führen wie in Abbildung C-2 ersichtlich, zu grossen Eigenspannungen und dementsprechend zu einer starken Beeinflussung des Tragverhaltens der Stütze. Werden wiederum die zwei idealisierten Abkühlungsphasen getrennt betrachtet, so werden in der ersten Eigenspannungen erzeugt, die dann in der zweiten Abkühlungsphase durch die elastische Entlastung abgebaut werden. Plastifizieren einzelne Querschnittsbereiche in der ersten Abkühlungsphase, kommt es in der zweiten zu einer Lastumkehr, bei der Eigenspannungen im Querschnitt verbleiben. Je schneller die Stahlstütze abgekühlt wird, desto stärker werden die Plastifizierungen und umso grösser die Eigenspannungen die im Querschnitt verbleiben. Insbesondere die Plastifizierungen während der Abkühlphase führen zu einem vorübergehenden Verlust der Biegesteifigkeit der Stütze. Ob dies zum Versagen der Stütze führen könnte, kann nicht direkt beantwortet werden und erfordert genauere Kenntnisse über die Entstehung der Eigenspannungen in einem realen Stützenquerschnitt.

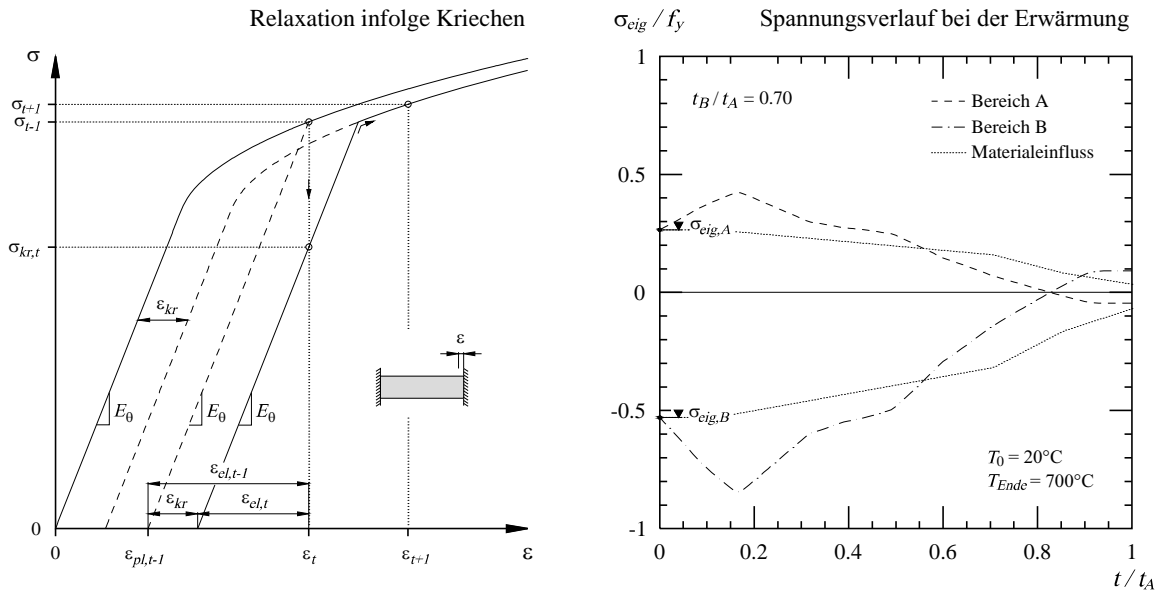


Abb. C-3: Links: Einfluss der Relaxation auf die Spannungs-Dehnungs-Beziehung. Rechts: Veränderung der Eigenspannungen während dem Erwärmungsprozess bei einer dreiteiligen Platte.

C.1.1 Relaxation infolge Kriechen

In der Berechnung nicht berücksichtigt sind Kriecheffekte, die besonders bei den erhöhten Temperaturen eine wesentliche Rolle spielen. Diese würden hauptsächlich bei der ersten Abkühlungsphase zu einer Relaxation der einzelnen Plattenstreifen führen, wobei die Spannungen bei gleichbleibender Dehnungen reduziert werden. Im Spannungs-Dehnungs-Diagramm der Abbildung C-1 entspricht dies einer vertikalen Verschiebung, die bei den Zuständen $(\sigma_{A,2}, \epsilon_{A,2})$ und $(\sigma_{B,2}, \epsilon_{B,2})$ stellvertretend für alle Zustände angedeutet ist. In Abbildung C-3 links ist die Entwicklung der Spannungen und Dehnungen während eines Zeitschrittes des Plattenstreifens infolge Relaxation dargestellt. Der Plattenstreifen wird beim Zeitpunkt $t-1$ bis zu einer gesamten Dehnung ϵ_t gedehnt, wobei Spannungen σ_{t-1} entstehen. Während dem Zeitschritt bleibt die Gesamtdehnung konstant, während die Dehnungen infolge Kriechen ϵ_{kr} anwachsen und zu einer Reduktion der Spannungen innerhalb des Plattenstreifens führen. Am Ende des Zeitschrittes verbleiben im Plattenstreifen die Spannungen $\sigma_{kr,t}$. Eine zusätzliche Dehnung des Plattenstreifens führt zu einem Anwachsen der Spannungen, wobei diese nun einer anderen Spannungs-Dehnungs-Beziehung folgt als zuvor. Durch das Kriechen des Materials verschiebt sich die Spannungs-Dehnungs-Beziehung um die Dehnung ϵ_{kr} , welche im Zeitschritt durch die Relaxation aufgetreten ist. Somit wird durch eine zusätzliche Dehnung des Plattenstreifens die Spannung σ_{t+1} im Querschnitt erzeugt. Wie schnell die Dehnungen infolge Kriechen anwachsen, ist einerseits von der Temperatur des Materials, vom Spannungsniveau im betrachteten Querschnitt und von der Zeit abhängig. Diese sehr komplexen Zusammenhänge wurden von Norton im Jahre 1929 untersucht [50]. Im Rahmen dieser Arbeit wird nicht näher auf die Einflüsse von Kriecheffekten eingegangen, wichtig ist jedoch die Erkenntnis, dass diese hauptsächlich bei erhöhten Temperaturen, demzufolge in der ersten Abkühlungsphase auftreten und zu einer Reduktion der Spannungen führen, wobei gleichzeitig Dehnungen infolge Kriechen auftreten. Diese führen zu inelastischen Verzerrungen, die ähnlich wie die Dehnungen infolge Plastifizierung bei der Lastumkehr in der zweiten Abkühlungsphase zu Eigenspannungen führen.

C.2 Veränderung der Eigenspannungen im Brandfall

Bei der Erwärmung des Stahlprofils im Brandfall entstehen Temperaturgradienten innerhalb des Querschnittes, wobei diese gegensätzlich zu denjenigen bei der Abkühlung verlaufen. Die exponierteren Querschnittsbereiche mit dem grösseren Flächen-Volumen-Verhältnis erwärmen sich schneller als die besser geschützten Bereichen. Um das Verständnis zur Entwicklung der Eigenspannungen beim Erwärmungsprozess zu fördern, wird die gleiche idealisierte dreiteilige Platte des Kapitels C.1 betrachtet. Die Temperaturverläufe der einzelnen Plattenstreifen beginnen bei Raumtemperatur und steigen linear bis die Endtemperatur T_{Ende} bei den Zeitpunkten t_A respektive t_B erreicht wird. Der mittlere Plattenstreifen B erwärmt sich schneller als die äusseren Streifen A, wie er umgekehrt sich beim Herstellungsprozess schneller abkühlt. Bei der Berechnung der Spannungen und Dehnungen in den unterschiedlichen Plattenstreifen während dem Erwärmungsprozess, werden die Effekte des Kriechens nicht berücksichtigt. Mit dem gleichen Berechnungsschema der Abbildung C-1 kann die Entwicklung der Zwängungen infolge der schon vorhandenen Eigenspannungen und des Temperaturgradienten, die bei der Erwärmung entstehen, untersucht werden. Dabei werden zu Beginn des Zeitschrittes die Plattenstreifen freigeschnitten und von ihren Zwängungen befreit, um am Ende des Zeitschrittes nach der thermischen Ausdehnung wieder in einen ebenen Querschnitt gezwängt zu werden.

In Abbildung C-3 rechts ist die Entwicklung der Spannungen im Laufe des Erwärmungsprozesses dargestellt. Als Ausgangslage dienen die Spannungs- und Dehnungszustände am Ende des Abkühlungsprozesses der Abbildung C-2 rechts für das Verhältnis $t_B / t_A = 0.70$. Zu Beginn der Erwärmung bleibt das Materialverhalten wegen den tiefen Temperaturen unverändert. Dennoch entstehen thermische Dehnungen, welche zu einem Anwachsen der Spannungen innerhalb des Querschnittes führen. Sobald die Temperaturen höher werden und sich die Materialeigenschaften des Stahls verändern, werden die Spannungen infolge der geringeren Steifigkeit und Festigkeit reduziert. Insbesondere bei höheren Temperaturen ist der Einfluss des weicheren Materialverhaltens grösser, was zu einer Reduktion der Spannungen im Querschnitt führt. Wie in Abbildung C-3 rechts ersichtlich, nehmen die Eigenspannungen in einer ersten Phase des Erwärmungsprozess zu, während sie in der späteren Phase stark abnehmen. Kriecheffekte, die hauptsächlich bei erhöhten Temperaturen eine Rolle spielen, beschleunigen den Abbau der Eigenspannungen. Zusätzlich ist in der Abbildung C-3 mit den punktierten Linien der reine Einfluss des sich verändernden Materialverhaltens dargestellt. Die Differenz zu den Spannungsverläufe der Bereiche A und B (gestrichelte und strichpunktierte Linie) entsteht durch die inneren Zwängungen infolge der inhomogenen Temperaturverteilung über den Querschnitt. Bei diesen kommt es zu Plastifizierungen, welche die Steifigkeit der gesamten Platte beeinflussen.

Anhang D Gleichgewichtsmodell, Näherungslösung nach Jezek

In diesem Anhang ist das analytische Näherungsverfahren nach Jezek für den Spezialfall einer Stütze mit rechteckigem Vollquerschnitt und linear elastischem, ideal plastischem Materialverhalten erläutert [30]. Für diesen Spezialfall entspricht das Näherungsverfahren nach Jezek (1935) genau der Lösung des reduzierten Gleichgewichtsmodells gemäss Kapitel 3.3.1, erlaubt jedoch eine analytische Lösung des Stabilitätsproblems. Zudem ermöglicht die Näherungslösung nach Jezek für diesen Spezialfall die Last-Verformungs-Beziehung analytisch zu beschreiben.

Zur Erläuterung der Näherungslösung nach Jezek wird eine gerade Stütze, die an beiden Enden gelenkig gelagert ist und exzentrisch belastet wird, betrachtet. Die Exzentrizität der Belastung wird mit e bezeichnet und durch folgendes Exzentrizitätsmass m auf die Querschnittsabmessungen normiert.

$$m = \frac{e}{k} = \frac{6e}{h} \quad \text{mit } k = \frac{h}{6} \text{ Kernweite für den Rechteckquerschnitt} \quad (\text{D.1})$$

In seinem analytischen Lösungsverfahren unterscheidet Jezek drei Verzerrungszustände, auch Äste der Biegelinie genannt. Die Verzerrungszustände unterscheiden sich in der Belastungsintensität des Stützenquerschnittes. Im Zustand I bleiben die Querschnitte elastisch, im Zustand II kommt es zu Plastifizierungen am Biegedruckrand, während im Zustand III die Querschnitte sowohl am Biegedruck- wie auch am Biegezugrand plastifizieren. Daraus ergeben sich 6 mögliche Gleichgewichtsformen, die, ausser die der voll elastischen Stütze, in Abbildung D-1 links dargestellt sind. Durch die Vorgabe einer sinusförmigen Biegelinie konzentrieren sich die Berechnungen einzig auf den Querschnitt in Stützenmitte. Somit reduzieren sich die Gleichgewichtsformen auf die drei Verzerrungszustände I, II & III.

D.1 Last-Verformungs-Beziehung

Die Last-Verformungs-Beziehung lässt sich aus den Lösungen der drei Verzerrungszustände zusammensetzen (Abb. D-1 rechts). Dabei muss einerseits für jeden Verzerrungszustand die analytische Lösung gefunden und andererseits müssen deren Anwendungsgrenzen bestimmt werden. Ein Vergleich mit dem reduzierten Gleichgewichtsmodell gemäss Kapitel 3.3.1 zeigt eine genaue Übereinstimmung.

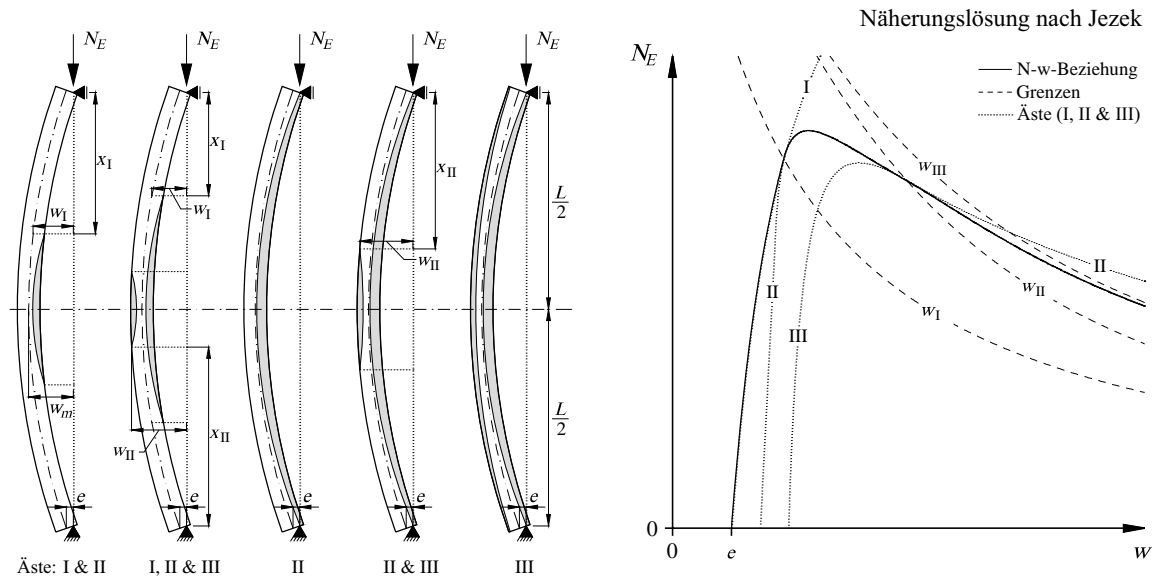


Abb. D-1: Links: Gleichgewichtsformen der Biegelinie. Rechts: Last-Verformungs-Zustand gemäss der Näherungslösung nach Jezek, Äste der Biegelinie sowie deren Grenzen.

Verzerrungszustand I (Elastische Formänderung)

Der erste Ast der Biegelinie (Verzerrungszustand I) beschreibt das elastische Verhalten der Stütze. Dieser lässt sich mit der sich aus der elastischen Differentialgleichung (Gl. 2.1) ergebenden Last-Verformungs-Beziehung beschreiben.

$$w_m = \frac{e}{1 - \frac{N_E}{N_{cr}}} \quad \text{mit} \quad N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (\text{D.2})$$

Solange die Spannungen im Stützenquerschnitt die Proportionalitätsgrenze nicht überschreiten, folgt die Last-Verformungs-Beziehung dem ersten Ast der Biegelinie (Abb. D-1 rechts). Die Gültigkeitsgrenze des ersten Astes der Biegelinie kann mit folgendem Ausdruck beschrieben werden.

$$w_I = \frac{h}{6} \cdot \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \quad \text{mit} \quad n = \frac{N_E}{N_{pl}} \quad (\text{D.3})$$

Wird diese Verformung überschritten, kommt es zu Plastifizierungen am Biegedruckrand des Stützenquerschnitts.

Verzerrungszustand II (Fliesen am Biegedruckrand)

Der zweite Ast der Biegelinie ist durch eine Plastifizierung des Biegedruckrandes charakterisiert. Folgende kubische Gleichung für w_m beschreibt die Last-Verformungs-Beziehung für den zweiten Ast der Biegelinie.

$$\Phi_2 = (w_m - e)(\beta_2 - w_m)^2 - \frac{\alpha_2 L^2}{\pi^2} = 0 \quad (\text{D.4})$$

wobei

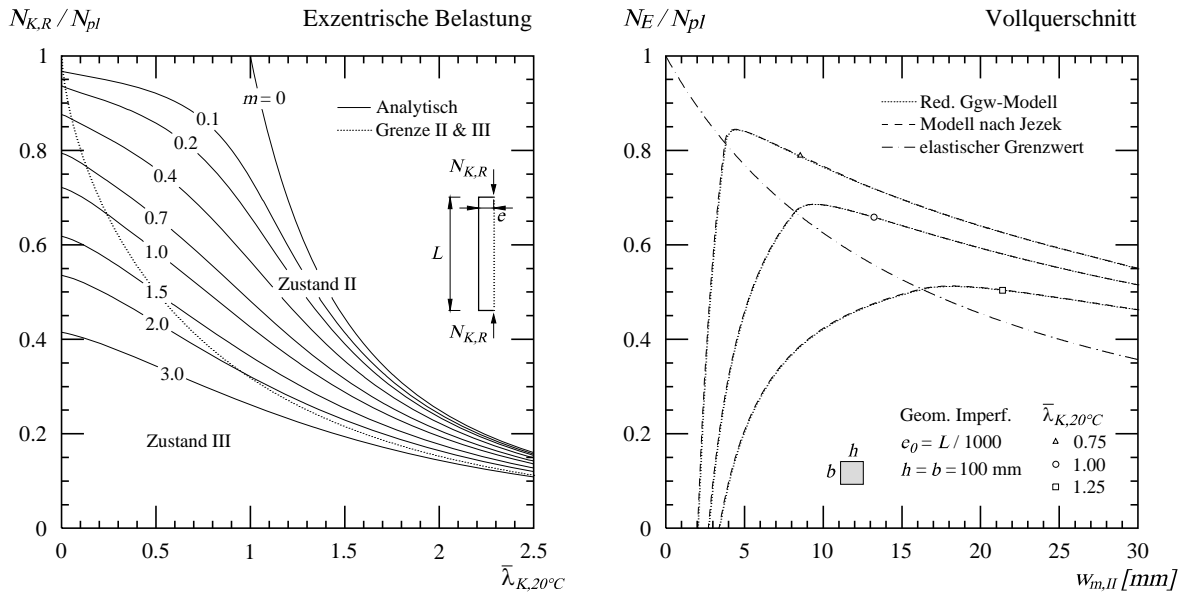


Abb. D-2: Links: Knickkurven für exzentrisch belastete Stütze. Rechts: Vergleich der Last-Verformungs-Beziehungen zwischen dem reduzierten Gleichgewichtsmodell und dem Modell nach Jezek.

$$\alpha_2 = \frac{2h \cdot n \cdot f_y}{9E} \cdot \left(\frac{1}{n} - 1\right)^3 \quad \text{und} \quad \beta_2 = \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} - 1\right) \quad (\text{D.4a})$$

Die obere Grenze der Anwendbarkeit des Verzerrungszustands II kann mit folgendem Ausdruck beschrieben werden

$$w_{II} = w_I \cdot (2n + 1) \quad (\text{D.5})$$

Somit gilt der Verzerrungszustand II in jenen Stützbereichen, deren Durchbiegungen innerhalb der folgenden Grenzen $w_I \leq w_m \leq w_{II}$ liegen (Abb. D-1).

Verzerrungszustand III (Beidseitiges Fließen)

Wird die Verformung weiter gesteigert, so kommt es an beiden Querschnittsrändern zu Plastifizierungen. Die Last-Verformungs-Beziehung lässt sich mit folgender Formel beschreiben:

$$\Phi_3 = (w_m - e) \sqrt{\beta_3 - w_m} - \frac{\alpha_3 L^2}{\pi^2} = 0 \quad (\text{D.6})$$

wobei

$$\alpha_3 = \frac{f_y}{E} \cdot \frac{1}{\sqrt{3hn}} \quad \text{und} \quad \beta_3 = \frac{h}{4n} \cdot (1 - n^2) \quad (\text{D.6a})$$

Aus Gleichung D.6 ergibt sich ein maximaler Grenzwert für die Belastung durch

$$w_{III} = \beta_3 = \frac{3}{2} \cdot (1 + n) \cdot w_I \quad (\text{D.7})$$

D.2 Knickspannungslinien

Die Knicklast ergibt sich aus dem Scheitelpunkt des Last-Verformungs-Pfades. Dieser kann entweder dem Verzerrungszustand II oder III zugehören, nicht aber dem Zustand I. Aus den beiden Verzerrungszuständen ergeben sich folgende Knickspannungslinien:

$$\lambda_K^2 = \frac{\pi^2 E}{\chi_K \cdot f_y} \cdot \left[1 - \frac{m \cdot \chi_K}{3 \cdot (1 - \chi_K)} \right]^3 \quad \text{für } \frac{m}{3} < (1 - \chi_K) \quad \text{Ast II} \quad (\text{D.8a})$$

$$\lambda_K^2 = \frac{\pi^2 E}{f_y} \cdot \sqrt{\chi_K \cdot \left(\frac{1}{\chi_K} - \chi_K - \frac{2m}{3} \right)^3} \quad \text{für } \frac{m}{3} \geq (1 - \chi_K) \quad \text{Ast III} \quad (\text{D.8b})$$

wobei

$$\chi_K = \frac{N_{K,R}}{N_{pl}} \quad \text{und} \quad \lambda_K = \frac{L}{i} = L \cdot \sqrt{\frac{A}{I}} \quad (\text{D.9})$$

In Abbildung D-2 links sind die Knickkurven für exzentrisch belastete Stützen dargestellt. Zusätzlich ist die Grenze eingezeichnet (punktierte Linie), welche den Bereich, in dem der Verzerrungszustand II massgebend wird, von jenem abtrennt, in dem der Verzerrungszustand III massgebend wird.

Anhang E Berechnungsbeispiele

Zwei numerische Beispiele sollen der Erläuterung der vereinfachten Berechnungsmodelle zur Beurteilung der lokalen und globalen Stabilität von Stahlstützen im Brandfall dienen. Im ersten Beispiel wird eine zentrisch belastete Stütze betrachtet, wobei deren globale Stabilität sowohl mit dem vereinfachten Spannungsmodell (Kapitel 4.2.1), wie mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell (Kapitel 4.2.2) überprüft wird. Beim zweiten Beispiel sei die Stütze exzentrisch belastet, so dass die Beurteilung ihrer Stabilität nur mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell möglich ist.

E.1 Zentrisch belastete Stütze

Die zentrisch gedrückte Stütze (HEA200, S235) ist bei einer Temperatur von 700°C durch eine Normalkraft von $N_E = 175 \text{ kN}$ belastet. Die Stütze, welche um die schwache Achse ausknickt, hat eine Knicklänge L_K von zwei Metern und geometrische Imperfektionen von $e_0 = L_K/1'000$. Die geometrischen Kennwerte des Stützenquerschnitts sowie die Materialkennwerte (EN 1993-1-2) bei erhöhter Temperatur sind hier aufgelistet:

$h = 190 \text{ mm}$	$k_y = 0.230$
$b = 200 \text{ mm}$	$k_p = 0.075$
$t_w = 6.5 \text{ mm}$	$k_E = 0.130$
$t_f = 10 \text{ mm}$	
$A = 5'380 \text{ mm}^2$	$f_{y,\theta} = 54.1 \text{ N/mm}^2$
$I_z = 13'400'000 \text{ mm}^4$	$f_{p,\theta} = 17.6 \text{ N/mm}^2$
$W_{el,z} = 134'000 \text{ mm}^3$	$E_\theta = 27'300 \text{ N/mm}^2$
$W_{pl,z} = 204'000 \text{ mm}^3$	

E.1.1 Vereinfachtes Spannungsmodell

Bei der Berechnung der Knicklast bei erhöhten Temperaturen werden mit dem vereinfachten Spannungsmodell in einem ersten Schritt die bezogene Schlankheit der Stütze sowohl bei Raumtemperatur wie auch bei der erhöhten Temperatur von 700°C berechnet.

$$\bar{\lambda}_{K,z} = \frac{L_{K,z}}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{Af_y}{I_z E}} = 0.428 \quad \text{bei Raumtemperatur}$$

$$\bar{\lambda}_{K,z,\theta} = \sqrt{\frac{k_y}{k_E}} \cdot \bar{\lambda}_{K,z} = 0.569 \quad \text{bei erhöhter Temperatur} \quad \rightarrow \text{Gl. 4.4}$$

Mit der bezogenen Schlankheit bei Raumtemperatur wird die Variable α_r gemäss den Gleichungen 4.15a und 4.15b bestimmt. Diese dient zur Berechnung der maximal zulässigen Randspannungen in der Stütze vor ihrem Stabilitätsversagen. Dabei wird die bezogene Schlankheit des Plateaus zu $\bar{\lambda}_0 = 0.10$ angenommen.

$$\alpha_r = \left(1 - \frac{k_p}{k_y}\right) \cdot \left(\frac{\bar{\lambda}_K - \bar{\lambda}_{K,grenz}}{\bar{\lambda}_0 - \bar{\lambda}_{K,grenz}}\right)^2 + \frac{k_p}{k_y} = 0.686 \quad \text{wobei} \quad \bar{\lambda}_{K,grenz} = \sqrt{\frac{k_E}{k_p}} = 1.32$$

Die Traglast der zentrisch gedrückten Stütze ergibt sich aus der Lösung der für N_E quadratischen Gleichung 4.16. Diese Lösung wird mit den Gleichungen 4.17a bis 4.17c beschrieben.

$$\Phi = 0.5 \left(\frac{1}{\alpha_r} + \frac{e_0 A}{W_{el}} \cdot \frac{k_y}{k_p} + \bar{\lambda}_{K,\theta}^2 \right) = 0.933$$

$$\chi_K = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \frac{1}{\alpha_r} \cdot \bar{\lambda}_{K,\theta}^2}} = 0.639$$

$$N_{K,R,\theta} = \chi_K \cdot A f_{y,\theta} = 186 \text{ kN}$$

Die Traglast der zentrisch gedrückten Stütze bei 700°C ist somit grösser als die einwirkende Belastung von $N_E = 175 \text{ kN}$. Die Stütze ist stabil.

E.1.2 Vereinfachtes Gleichgewichtsmodell

Beim vereinfachten Gleichgewichtsmodell wird in einem ersten Schritt die Momenten-Krümmungs-Beziehung der Stütze für die gegebene axiale Belastung und das nichtlineare Materialverhalten berechnet. Dies geschieht mit der Aufteilung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung sowie der Momenten-Krümmungs-Beziehung in eine bilineare und eine nichtlineare Beziehung gemäss Abbildung 4-8. Dazu wird die Spannung σ_N , die zugehörige Dehnung ε_N und der Tangentenmodul T für die gegebene Normalkraft N_E berechnet. Mit dem Materialmodell des Eurocodes für Stahl bei 700°C ergeben sich folgende Werte.

$$\begin{aligned} \sigma_N &= N_E/A = 32.5 \text{ N/mm}^2 & T_\theta &= 3'990 \text{ N/mm}^2 \\ \varepsilon_N &= 0.00270 & S_\theta &= 1'244 \text{ N/mm}^2 \end{aligned} \quad \rightarrow \text{Gl. 4.24}$$

Nun werden die infolge der Normalkraft N_E reduzierten elastischen und plastischen Biegegewiderstände $M_{N,el}$ und $M_{N,pl}$ berechnet. Da die axiale Belastung die Proportionalitätsgrenze überschreitet ($\sigma_N > f_{p,\theta}$), wird der elastische Biegegewiderstand gemäss Gleichung 4.20 gleich Null sein.

$$M_{N,el} = 0.0 \text{ kNm}$$

Zur Berechnung des infolge der Normalkraft reduzierten plastischen Biegegewiderstands, werden die Interaktionsformeln des Eurocodes EN 1993-1-1 verwendet.

$$a = \frac{A - 2bt_f}{A} = 0.257 \quad n = \frac{N_E}{A \cdot f_{y,\theta}} = 0.602$$

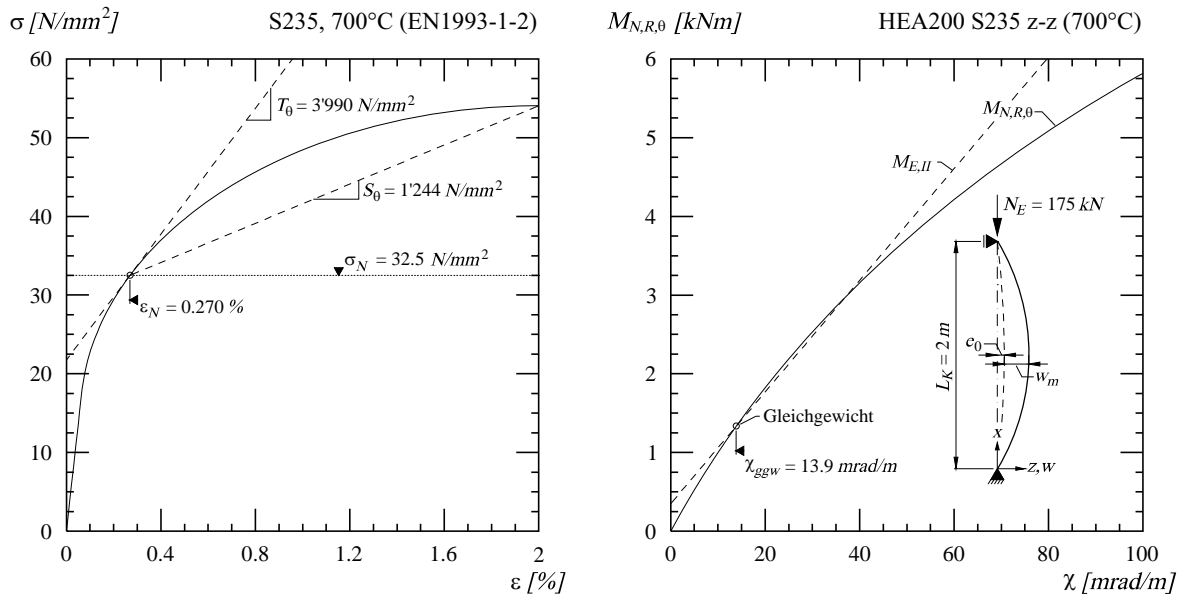


Abb. E-1: Links: Aufteilung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung in eine bilineare und eine nichtlineare Beziehung. Rechts: Momenten-Krümmungs-Diagramm der zentrisch belasteten Stütze.

$$M_{N,pl,z} = W_{pl,z} \cdot f_{y,\theta} \left[1 - \left(\frac{n-a}{1-a} \right)^2 \right] = 8.65 \text{ kNm}$$

Zudem können die Biegesteifigkeiten sowohl für den elastischen wie auch für den plastischen Bereich berechnet werden

$$T_K I = \frac{4T_\theta E_\theta}{(\sqrt{E_\theta} + \sqrt{T_\theta})^2} \cdot I_z = 112 \text{ kNm}^2 \quad \rightarrow \text{Gl. 2.5 a}$$

$$S_K I = \frac{4S_\theta E_\theta}{(\sqrt{E_\theta} + \sqrt{S_\theta})^2} \cdot I_z = 45.3 \text{ kNm}^2$$

Die beiden Fixpunkte A' und B' im Momenten-Krümmungs-Diagramm können nun bestimmt werden. Der erste Fixpunkt liegt im Koordinatenursprung, da die axiale Belastung die Proportionalitätsgrenze überschreitet. Der zweite Fixpunkt B' ist durch die Krümmung χ_y und dem plastischen Widerstandsmoment $M_{N,pl}$ gegeben.

$$\chi_y = \frac{M_{N,pl} - M_{N,el}}{S_K I} \cdot \frac{W_{pl}}{W_{el}} = 0.291 \text{ rad/m} \quad \rightarrow \text{Gl. 4.25}$$

Die Momenten-Krümmungs-Beziehung des inneren Biegemomentes $M_{N,R,\theta}$ lässt sich nun durch die Gleichungen 4.26 bis 4.26c beschreiben. Dafür müssen zuerst die Parameter a bis c bestimmt werden.

$$a = \frac{(M_{N,pl} - M_{N,el})^2}{(\chi_y - \chi_p) \cdot T_K I - 2 \cdot (M_{N,pl} - M_{N,el})} = 4.90 \text{ kNm}$$

$$b = \sqrt{a \cdot (\chi_y - \chi_p) \cdot T_K I + a^2} = 13.6 \text{ kNm}$$

$$c = \sqrt{(\chi_y - \chi_p) \cdot \left(\chi_y - \chi_p + \frac{a}{T_K I} \right)} = 0.312 \text{ rad/m}$$

Die mit der Gleichung 4.26 beschriebene Momenten-Krümmungs-Beziehung ist in Abbildung E-1 rechts dargestellt. In der gleichen Abbildung ist zusätzlich das einwirkende Biegemoment $M_{E,II}$ in Funktion der Krümmung dargestellt. Dieses ergibt sich aus der initialen geometrischen Imperfektion und der Stützenverformung multipliziert mit der axialen Belastung N_E . Dabei wird die Beziehung zwischen der Krümmung und der Verformung der Stütze von der affin zur Sinusfunktion angenommenen Verformungsfigur abgeleitet.

$$M_{E,II} = \left(e_0 + \chi \cdot \frac{L_K^2}{\pi^2} \right) \cdot N_E$$

Wie aus der Abbildung E-1 rechts ersichtlich, schneiden sich die Funktionen des inneren und äusseren Biegemoments im Gleichgewichtspunkt bei einer Krümmung in Stützenmitte von $\chi_{ggw} = 13.9 \text{ mrad/m}$. Daraus lässt sich die Verformung in Stützenmitte der gedrückten Stütze berechnen.

$$w_{II} = e_0 + \chi_{ggw} \cdot \frac{L_K^2}{\pi^2} = 7.62 \text{ mm}$$

Zuletzt bleibt zu überprüfen, ob ein lokales Stabilitätsversagen in Form eines Ausbeulens der Flansche in Stützenmitte infolge der Einwirkungen nach Theorie 2^{ter} Ordnung eintritt. Dabei werden die Dehnungen infolge der Verformungen der gedrückten Stützen am meisten beanspruchten Stützenquerschnitt berechnet und mit der Stauchung ϵ_r verglichen, die gemäss Kapitel 6.3 zum Ausbeulen der Flansche führt. Zur Berechnung der Dehnungen in den Randfasern des Querschnittes muss der innere Hebelarm b_1 gemäss Gleichung 6.12b bestimmt werden. Dafür wird der Tangentenmodul T_θ benötigt, der zur Berücksichtigung zusätzlicher Plastifizierungen im Querschnitt infolge der Stützenverformung mit einer um 20% erhöhten Normalspannung berechnet wird.

$$T_\theta(\beta_N \cdot \sigma_N) = 2'577 \text{ N/mm}^2 \quad \text{wobei} \quad \beta_N \cdot \sigma_N = 1.20 \cdot 32.5 = 39.0 \text{ N/mm}^2$$

$$b_1 = \frac{\sqrt{E_\theta}}{\sqrt{T_\theta} + \sqrt{E_\theta}} \cdot b = 153 \text{ mm} \quad \rightarrow \text{Gl. 6.12b}$$

Die maximale Randdehnung ϵ_{Rand} der verformten Stütze ergibt sich somit zu

$$\epsilon_{Rand} = \epsilon_N + \chi_{ggw} \cdot b_1 = 0.00482$$

die mit dem Stoffgesetz bei der erhöhten Temperatur zu einer Randspannung $\sigma_{Rand} = 39.2 \text{ N/mm}^2$ führt. Der Flansch wird als unendlich lange, dreiseitig gelenkig gelagerte Platte betrachtet, wobei eine linienförmig verteilte Belastung gemäss Abbildung 5-8 links angenommen wird.

$$\psi = \frac{\sigma_N}{\sigma_{Rand}} = 0.829$$

Vereinfachend könnte die Belastung auch konstant betrachtet werden ($\psi = 1.0$), wobei die Traglast des Flansches dabei unterschätzt würde. Zur Berechnung der Verzweigungslast muss der Beulfaktor k der dreiseitig gelagerten Platte bei der erhöhten Temperatur bestimmt werden. Durch die Belastung der Platte mit $\sigma_{Rand} = 39.2 \text{ N/mm}^2$ ergibt sich folgende Plastizitätsfunktion ω .

$$\omega = \frac{\epsilon_{pl}}{\epsilon_{Rand}} = 1 - \frac{\sigma_{Rand}}{E_\theta \cdot \epsilon_{Rand}} = 0.702$$

Mit dieser lässt sich nun der Beulfaktor gemäss Gleichung 5.36b für den Belastungsfall 2 der dreiseitig gelenkig gelagerten Platte berechnen, da beide Randspannungen der Platte σ_N und σ_{Rand} oberhalb der Proportionalitätsgrenze liegen. Mit der Annahme einer unendlich langen Platte reduziert sich die Gleichung zur Berechnung des Beulfaktors zu folgendem Ausdruck:

$$k = \left[\frac{6}{\pi^2} (1 - \nu)(1 - \omega) \right] \cdot \frac{4}{3\Psi + 1} = 0.145 \quad \text{mit } \nu = 0.3 \quad \rightarrow \text{Gl. 5.36b}$$

Die Gleichung 5.29, welche die Verzweigungsspannung in Funktion der Plattenschlankheit beschreibt, wird nun für das Verhältnis b/t der Platte gelöst. Damit kann eine in Funktion der vorhandenen Spannung maximale Schlankheit berechnet werden, bei der kein lokales Ausbeulen der Platte eintritt.

$$\left(\frac{b}{t} \right)_{max} = \sqrt{\frac{\pi^2 E_{\theta} k}{12(1 - \nu^2) \sigma_{Rand}}} = 9.57$$

Der Flansch beult nicht aus, falls dieses Verhältnis der Flanschbreite zu Dicke nicht überschritten wird. Da das Gelenk der Längslagerung der dreiseitig gestützten Platte am Ende der Ausrundung der Verbindung Steg-Flansch angenommen wird, ergibt sich folgendes Verhältnis zwischen der Flanschbreite und Flanschdicke:

$$\left(\frac{b}{t} \right) = \frac{\frac{b}{2} - \frac{t_w}{2} - r}{t_f} = 7.88 \quad \text{mit } r = 18 \text{ mm}$$

Da die maximal zulässige Schlankheit der Platte nicht überschritten wird, bleibt der Flansch stabil. Bei der gegebenen Belastung kommt es demzufolge weder zu einem globalen noch zu einem lokalen Stabilitätsversagen.

E.2 Exzentrisch belastete Stütze

Die exzentrisch belastete Stütze (RRW200x200x5, S355) hat eine Knicklänge L_K von zwei Metern und ist bei einer Temperatur von 400°C durch eine Normalkarft $N_E = 700 \text{ kN}$ belastet. Die Lastexzentrizität beträgt $e_1 = 30 \text{ mm}$, während die geometrischen Imperfektionen mit einem Maximalwert von $e_0 = L_K/1000$ angenommen werden. Die Querschnittsgeometrie sowie das Materialverhalten nach EN 1993-1-2 sind durch folgende Kennwerte beschrieben:

$$\begin{aligned} h &= 200 \text{ mm} & k_y &= 1.00 \\ b &= 200 \text{ mm} & k_p &= 0.420 \\ t &= 5.0 \text{ mm} & k_E &= 0.700 \\ A &= 3'873 \text{ mm}^2 & f_{y,\theta} &= 355 \text{ N/mm}^2 \\ I &= 24'500'000 \text{ mm}^4 & f_{p,\theta} &= 149 \text{ N/mm}^2 \\ W_{el} &= 245'000 \text{ mm}^3 & E_{\theta} &= 147'000 \text{ N/mm}^2 \\ W_{pl} &= 284'000 \text{ mm}^3 & & \end{aligned}$$

Da die Stütze exzentrisch belastet ist, kann das vereinfachte Spannungsmodell zur Berechnung der Knicklast nicht verwendet werden.

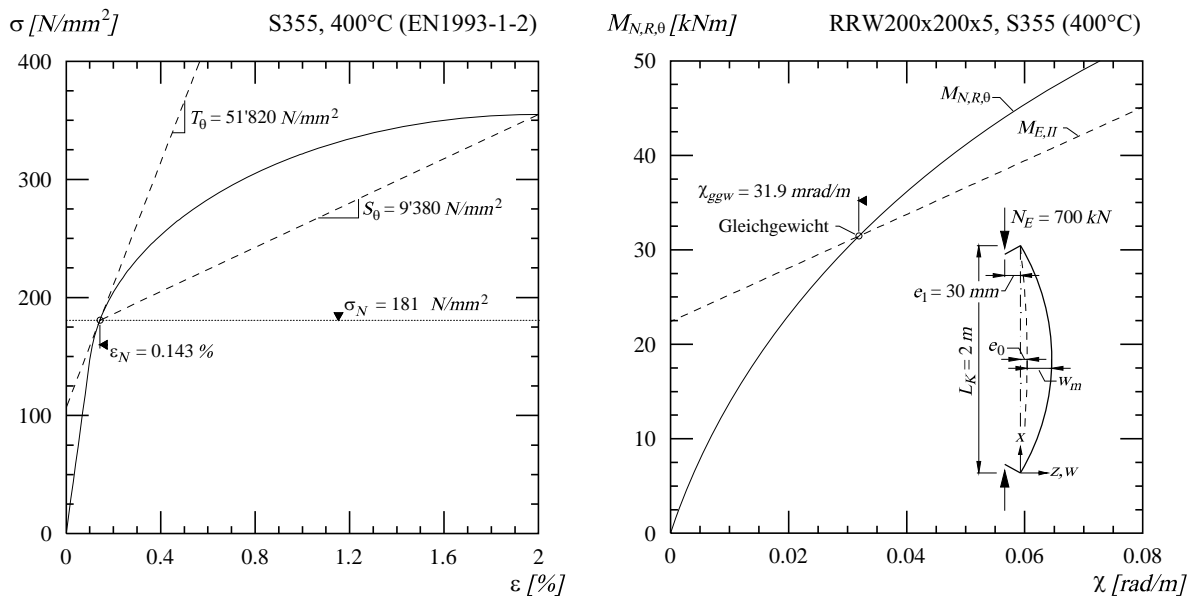


Abb. E-2: Links: Aufteilung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung in eine bilineare und eine nichtlineare Beziehung. Rechts: Momenten-Krümmungs-Diagramm der exzentrisch belasteten Stütze.

E.2.1 Vereinfachtes Gleichgewichtsmodell

Die Berechnungen folgen dem Vorgehen des Beispiels E.1 der zentrisch belasteten Stütze. Da die Lastexzentrizität nicht allzu gross ist, wird die Verformungsfigur trotz der Exzentrizität affin zu einer Sinusfunktion gewählt. Bei grossen Lastexzentrizitäten wäre eine parabolische Funktion zur Beschreibung der Geometrie der verformten Stützenbiegeline geeigneter.

Wiederum besteht der erste Berechnungsschritt in der Aufteilung der nichtlinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Materials in eine bilineare und eine nichtlineare Funktion (Abb. E-2 links).

$$\begin{aligned} \sigma_N &= N_E/A = 181 \text{ N/mm}^2 & T_\theta &= 51'820 \text{ N/mm}^2 \\ \epsilon_N &= 0.00143 & S_\theta &= 9'380 \text{ N/mm}^2 & \rightarrow \text{Gl. 4.24} \end{aligned}$$

Der elastische und der plastische Biege­widerstand, der infolge der einwirkenden Normalkraft N_E reduziert werden müssen, ergeben sich aus folgenden Gleichungen:

$$M_{N,el} = 0.0 \text{ kNm} \quad \text{da } \sigma_N > f_{p,\theta}$$

Zur Berechnung des infolge Normalkraft reduzierten plastischen Biege­widerstands, werden die Interaktionsformeln des Eurocodes verwendet.

$$a = \frac{A - 2bt}{A} = 0.484 \quad \xi = \frac{1}{1 - 0.5a} = 1.32$$

$$M_{N,pl} = W_{pl} \cdot f_{y,\theta} \cdot \xi \cdot \left(1 - \frac{N_E}{A \cdot f_{y,\theta}}\right) = 65.0 \text{ kNm}$$

Zudem können die Biege­steifigkeiten für den elastischen wie auch für den plastischen Bereich berechnet werden.

$$T_K I = \frac{2T_\theta E_\theta}{E_\theta + T_\theta} \cdot I = 1'880 \text{ kNm}^2 \quad \rightarrow \text{Gl. 2.5b}$$

$$S_K I = \frac{2S_\theta E_\theta}{E_\theta + S_\theta} \cdot I = 432 \text{ kNm}^2$$

Daraus ergeben sich die Fixpunkte A' und B' im Momenten-Krümmungs-Diagramm, wobei der erste Fixpunkt im Koordinatenursprung liegt, da die axiale Belastung die Proportionalitätsgrenze überschreitet. Der zweite wird durch folgende Krümmung χ_y und dem plastischen Biege­widerstand $M_{N,pl}$ beschrieben:

$$\chi_y = \frac{M_{N,pl} - M_{N,el}}{S_K I} \cdot \frac{W_{pl}}{W_{el}} = 0.174 \text{ rad/m} \quad \rightarrow \text{Gl. 4.25}$$

Die Momenten-Krümmungs-Beziehung des Biege­widerstands $M_{N,R,\theta}$ lässt sich durch die Gleichungen 4.26 bis 4.26c beschreiben. Dafür müssen die Parameter a bis c bestimmt werden.

$$a = \frac{(M_{N,pl} - M_{N,el})^2}{(\chi_y - \chi_p) \cdot T_K I - 2 \cdot (M_{N,pl} - M_{N,el})} = 21.6 \text{ kNm}$$

$$b = \sqrt{a \cdot (\chi_y - \chi_p) \cdot T_K I + a^2} = 86.6 \text{ kNm}$$

$$c = \sqrt{(\chi_y - \chi_p) \cdot \left(\chi_y - \chi_p + \frac{a}{T_K I} \right)} = 0.180 \text{ rad/m}$$

Die Beziehung zwischen dem Biege­widerstand $M_{N,R,\theta}$ und der Krümmung ist in Abbildung E-2 rechts in einem Momenten-Krümmungs-Diagramm dargestellt. Zusätzlich ist das einwirkende Biegemoment 2^{ter} Ordnung $M_{E,II}$ in der gleichen Darstellung in Funktion der Krümmung gezeigt. Diese ergibt sich aus der Lastexzentrizität, der geometrischen Imperfektion und der Stützenverformung, sowie der Belastung N_E . Da die geometrische Form der Stützenbie­gelinie affin zu einer Sinusfunktion gewählt wurde, ergibt sich folgende Beziehung für das einwirkende Biegemoment:

$$M_{E,II} = \left(e_0 + e_1 + \chi \cdot \frac{L_K^2}{\pi^2} \right) \cdot N_E$$

Das Gleichgewicht zwischen den äusseren und inneren Biegemomenten wird bei einer Krümmung in Stützenmitte $\chi_{ggw} = 31.9 \text{ mrad/m}$ erreicht. Daraus lässt sich die Auslenkung in Stützenmitte berechnen.

$$w_{II} = e_0 + \chi_{ggw} \cdot \frac{L_K^2}{\pi^2} = 14.9 \text{ mm}$$

Wie schon bei der zentrischen Stütze, bleibt zu überprüfen, ob ein lokales Stabilitätsversagen infolge der Einwirkungen 2^{ter} Ordnung in Stützenmitte eintritt. Zur Berechnung des inneren Hebelarms h_1 gemäss Gleichung 6.9 wird der Tangentenmodul T_θ mit einer um 20% erhöhten Normalspannung im Querschnitt berechnet. Dies, um zusätzliche Plastifizierungen am Stützenrand infolge der Verformung zu berücksichtigen.

$$T_\theta(\beta_N \cdot \sigma_N) = 28'360 \text{ N/mm}^2 \quad \text{wobei} \quad \beta_N \cdot \sigma_N = 1.20 \cdot 181 = 217 \text{ N/mm}^2$$

$$h_1 = \frac{E_\theta}{T_\theta + E_\theta} \cdot h = 168 \text{ mm} \quad \rightarrow \text{Gl. 6.9}$$

Die maximale Randdehnung ϵ_{Rand} der verformten Stütze ergibt sich somit zu folgender Gleichung,

$$\epsilon_{Rand} = \epsilon_N + \chi_{ggw} \cdot h_1 = 0.00678$$

die mit dem Stoffgesetz zu einer Randspannung von $\sigma_{Rand} = 292 \text{ N/mm}^2$ führt. Der Flansch wird als unendlich lange, vierseitig gelenkig gelagerte Platte betrachtet, wobei eine gleichmässig verteilte

Belastung ($\psi = 1.0$) angenommen wird. Zur Berechnung der Verzweigungslast muss der Beulfaktor k der vierseitig gelagerten Platte bei der erhöhten Temperatur bestimmt werden. Durch die Belastung der Platte mit $\sigma_{Rand} = 292 \text{ N/mm}^2$ ergeben sich folgende Materialkennwerte, welche die Plastifizierungen im Flansch beschreiben.

$$\tau_E = \frac{T_\theta(\sigma_{Rand})}{E_\theta} = 0.0771 \quad \text{und} \quad \omega = \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_{Rand}} = 1 - \frac{\sigma_{Rand}}{E_\theta \cdot \varepsilon_{Rand}} = 0.707$$

Mit diesen lässt sich nun der Beulfaktor der vierseitig gelenkig gelagerten Platte gemäss Gleichung 5.30 berechnen.

$$k = [\sqrt{\tau_E(1 - \omega)} + (1 - \omega)] \cdot \frac{4}{1 + \psi} = 0.888 \quad \rightarrow \text{Gl. 5.30}$$

Aus der Gleichung 5.29, welche die Verzweigungsspannung in Funktion der Plattenschlankheit beschreibt, kann ein maximales Verhältnis b/t der Platte gefunden werden, für die der Flansch gerade nicht ausbeult.

$$\left(\frac{b}{t}\right)_{max} = \sqrt{\frac{\pi^2 E_\theta k}{12(1 - \nu^2)\sigma_{Rand}}} = 20.1$$

Diese maximale Schlankheit gilt es einzuhalten, um ein Ausbeulen des Flansches zu vermeiden. Der vierseitig gelenkig gelagerte Flansch des RRW200x200x5 Querschnittes hat folgende Schlankheit:

$$\left(\frac{b}{t}\right) = \frac{b-3t}{t} = 37.0$$

Dabei wird eine Ausrundung $r = 1.5t$ auf beiden Seiten des Flansches angenommen. Die maximal zulässige Schlankheit wird somit nicht eingehalten, was bedeutet, dass infolge der Belastung und der Verformungen 2^{ter} Ordnung der Stütze, ein lokales Versagen des am meisten beanspruchten Flansches in Stützenmitte zu erwarten ist. Wird die maximale Normalkraft gesucht, für die das lokale Versagen nicht eintritt, geschieht dies mit einer iterativen Berechnung, die für jede gegebene Belastung den oben beschriebenen Berechnungsvorgang durchläuft. Aus dieser folgt, dass für eine Normalkraft kleiner als $N_E = 540 \text{ kN}$ das lokale Versagen nicht eintritt.

Anhang F Aluminiumstützen

Die Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung von Aluminium erfolgt gemäss EN 1999-1-1 mit einem einstufigen Ramberg/Osgood-Ansatz [53]. Dabei werden folgende drei Materialparameter benötigt:

- Elastizitätsmodul $E = 70'000 \text{ N/mm}^2$
- Spannung bei 0.2% plastischer Dehnung $f_{p,0.2}$
- Verfestigungsexponenten n

Für jede gegebene Spannung σ kann durch folgende Gleichung eine zugehörige Dehnung ε berechnet werden

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + 0.002 \cdot \left(\frac{\sigma}{f_{p,0.2}} \right)^n \quad (\text{F.1})$$

wobei

$$n = \frac{\ln(20)}{\ln\left(\frac{f_{p,0.2}}{f_{p,0.01}}\right)} \quad \text{mit der Spannung } f_{p,0.01} \text{ bei 0.01\% plastischer Dehnung} \quad (\text{F.1 a})$$

Wegen des Exponenten n für die Verfestigung in der Gleichung F.1 lässt sich für eine gegebene Dehnung die dazugehörige Spannung nicht analytisch berechnen. Diese kann nur mit einer Zielwertsuche gefunden werden. Zudem hat dieser Ansatz zur Beschreibung des Materialverhaltens keinen klar abgegrenzten elastischen Bereich. Dennoch kann die Spannung $f_{p,0.01}$ als Proportionalitätsspannung aufgefasst werden, während die Spannung $f_{p,0.2}$ für eine Bemessung oftmals der maximalen Spannung oder Fließspannung gleichgesetzt wird.

In Abbildung F-1 oben links sind für vier unterschiedliche Legierungen die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen nach Eurocode dargestellt. Nebst den unterschiedlichen Festigkeiten ist auch ein grosser Unterschied in der Form der Spannungs-Dehnungs-Beziehung festzustellen. Während die Legierung AW-6082-T4 ($n = 8$) und AW-5083-O ($n = 6$) eher eine sanfte Ausrundung im Materialverhalten zeigen, ist die Legierung AW-3103-H14 ($n = 31$) annähernd linear elastisch, ideal plastisch, obwohl alle Materialien ähnliche Festigkeiten aufweisen. Dieser Unterschied in der Form wird hauptsächlich durch den Verfestigungsexponenten bestimmt. Je höher dieser ist, desto näher liegt die Form der Spannungs-Dehnungs-Kurve bei einem linear elastischen, ideal plastischen Materialverhalten.

In Abbildung F-1 oben rechts sind die Knickspannungskurven des Eurocodes für zentrisch gedrückte Aluminiumstützen mit den Ergebnissen des vereinfachten Gleichgewichtsmodells verglichen. Im Allgemeinen bestätigen die Ergebnisse des vereinfachten Gleichgewichtsmodells die Knickspannungskurven des Eurocodes, wobei die Ergebnisse der Stützen mit der Legierung AW-3103-H14 ($n = 31$) besser mit der Knickspannungskurve der Klasse A übereinstimmt. Das vereinfachte Gleichgewichtsmodell erlaubt eine Berechnung der Knicklasten unabhängig von

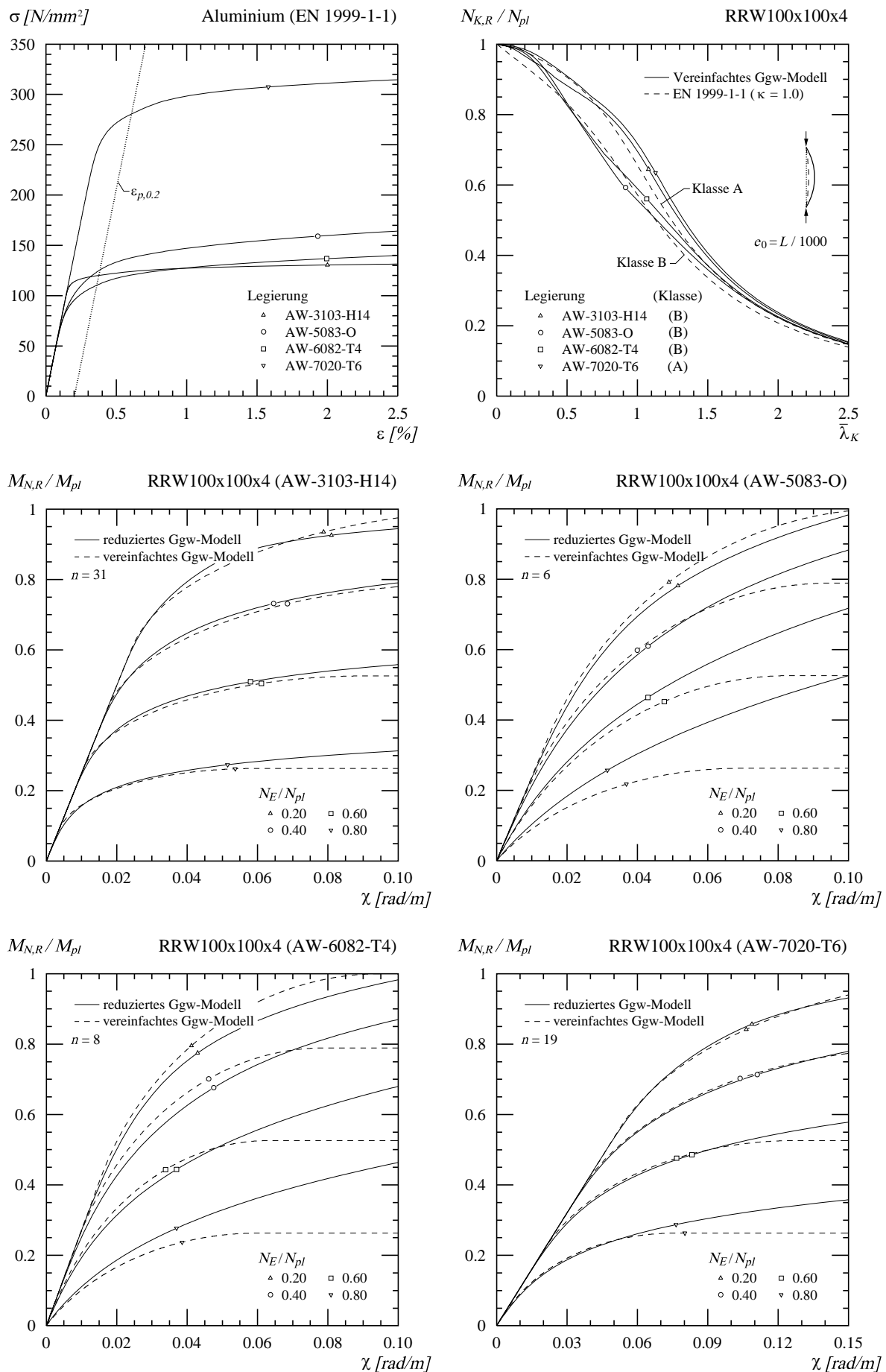


Abb. F-1: Oben links: Materialverhalten unterschiedlicher Aluminiumlegierungen. Oben rechts: Knickspannungskurven im Vergleich. Mitte und unten: Momenten-Krümmungs-Diagramme mit Vergleich der Ergebnisse des reduzierten und des vereinfachten Gleichgewichtsmodells.

deren Klassierung und ermöglicht, wie im Kapitel 4.2.2 erläutert, die Beurteilung exzentrisch gedrückter Stützen sowie Stützen, die durch Biegung und Normalkraft beansprucht werden.

In den vier unteren Momenten-Krümmungs-Diagrammen der Abbildung F-1 sind die Momenten-Krümmungs-Beziehungen des reduzierten und des vereinfachten Gleichgewichtsmodells für die vier unterschiedlichen Legierungen dargestellt. Obwohl der Exponent n der vier Legierungen stark unterschiedlich ist, kann das Momenten-Krümmungs-Verhalten der Stützen bei unterschiedlicher, axialer Belastung mit dem vereinfachten Gleichgewichtsmodell gut angenähert werden. Dies verspricht gute Ergebnisse bei der Berechnung der Traglasten von exzentrisch gedrückten Stützen oder Stützen, die zusätzlich zur Normalkraft auch durch ein Biegemoment beansprucht werden. Das vereinfachte Gleichgewichtsmodell gemäss Kapitel 4.2.2 ermöglicht eine gute Beurteilung des Tragverhaltens von Aluminiumstützen.

Anhang G Verzeichnisse

G.1 Bezeichnungen

Lateinische Grossbuchstaben

A	Querschnittsfläche
D_{ij}	Tensor der Plattensteifigkeiten
E	Elastizitätsmodul
E_{pot}	Gesamtpotential des Systems
G	Schubmodul (Gl. A.5)
I	Trägheitsmoment
K	Kompressionsmodul (Gl. A.10)
L	Stützenlänge, Knicklänge
M	Biegemoment
M_E	Einwirkendes Biegemoment
$M_{E,I}$	Biegemoment 1 ^{ter} Ordnung
$M_{E,II}$	Biegemoment 2 ^{ter} Ordnung
M_{el}	Elastisches Widerstandsmoment
$M_{N,R}$	Widerstandsmoment mit Berücksichtigung der vorhandenen Normalkraft
M_{pl}	Plastisches Widerstandsmoment
M_R	Widerstandsmoment
M_y	Biegung um y-Achse
M_z	Biegung um z-Achse
N	Normalkraft
N_E	Einwirkende Normalkraft
N_{cr}	Verzweigungslast
$N_{K,R}$	Knickwiderstand
N_{pl}	Plastischer Normalkraftwiderstand
N_R	Normalkraftwiderstand
N_u	Traglast der Normalkraft
S	Sekantenmodul
T	Tangentenmodul
T_K	Knickmodul nach Engesser-Kármán
U_a	Äussere Arbeit, Energie
$U_{a,el}$	Elastischer Anteil der äusseren Arbeit
$U_{a,\varepsilon}$	Inelastischer Anteil der äusseren Arbeit

U_i	Innere Arbeit, Energie
W_{el}	Elastisches Widerstandsmoment
W_{pl}	Plastisches Widerstandsmoment

Lateinische Kleinbuchstaben

a	Plattenlänge
b	Plattenbreite, Querschnittsbreite
b_{eff}	wirksame Plattenbreite
e	Geometrische Imperfektion
e_0	Stich der geometrischen Imperfektion
$e_{0,d}$	Ersatzimperfektion für Knicken
e_1	Planmässige Lastexzentrizität
f_p	Proportionalitätsgrenze des Materials
f_y	Fliessgrenze des Materials
h	Querschnittshöhe
k	Vergrosserungsfaktor 2 ^{ter} Ordnung, Beulfaktor
k_{eff}	Beulfaktor der auf die wirksame Breite reduzierten Platte.
k_{el}	Elastischer Beulfaktor
k_E	Reduktionsfaktor für den E-Modul
k_p	Reduktionsfaktor für die Proportionalitätsgrenze
k_{pl}	Plastischer Beulfaktor
k_y	Reduktionsfaktor für die Fliessgrenze
m	Exzentrizitätsmass (Abb. 3-14), Anzahl Halbwellen in Längsrichtung
n	Anzahl Halbwellen in Querrichtung, auf N_{pl} bezogene Normalkraft
q	Linienlast
t	Plattendicke
t_f	Flanschdicke
t_w	Stegdicke

u	Verschiebung in x-Richtung	ψ	Verteilung der Belastung (Abb. 3-15, Abb. 5-1)
v	Verschiebung in y-Richtung	ω	Verformungs-Krümmungs- Beziehung für asym. belasteten Stützen (Gl. 3.25), Plastizitäts- funktion (Gl. 5.10 a)
w	Durchbiegung, Verformung		
w_m	Durchbiegung in Stützenmitte		
w_0	Durchbiegung in Plattenmitte		
w_{II}	Durchbiegung 2 ^{ter} Ordnung		
x, y, z	Koordinaten		

Griechische Buchstaben

α	Imperfektionsbeiwert für Knicken
α_r	Parameter zur Bestimmung des Knickkriteriums (Gl. 4.15 a, 4.15 b)
β	Imperfektionsbeiwert für Beulen
γ	Schubverzerrung
ε	Dehnung, Verzerrung
ε_{eig}	Dehnungen infolge Eigenspannungen
ε_p	Proportionalitätsdehnung des Materials
ε_{pl}	Plastischen Dehnungen
ε_r	Maximale Randdehnung für Beulen (Gl. 6.8 a, 6.8 b)
ε_y	Fliessdehnung des Materials
θ	Temperatur
ϑ	Verdrehung
λ_K	Geometrische Knickschlankheit
$\bar{\lambda}_K$	Bezogene Knickschlankheit
$\bar{\lambda}_{K,grenz}$	Grenzschlankheit für elastisches Kni- cken (Gl. 2.6)
λ_p	Geometrische Beulschlankheit
$\bar{\lambda}_p$	Bezogene Beulschlankheit
$\bar{\lambda}_{p,grenz}$	Grenzschlankheit für elastisches Beu- len (Gl. 5.1)
ν	Querdehnzahl
ρ	Krümmungsradius, Reduktionsfaktor für Beulen
σ	Spannung
σ_{cr}	Verzweigungsspannung
σ_{eig}	Eigenspannungen
τ	Schubspannung
τ_E	Verhältnis Tangenten- zu E-Modul (Gl. 5.11 a)
χ	Krümmung
χ_{kr}	Krümmung infolge Kriechen
χ_K	Reduktionsfaktor für Knicken
χ_m	Krümmung in Stützenmitte

G.2 Literaturverzeichnis

- [1] *ABAQUS* Version 6.10, Hibitt, Karlson & Sorensen Inc, Pawtucket
- [2] *Ayrton W. E., Perry, J.*, 1886, „On Struts“, *The Engineer*, Band 62, 464-513
- [3] *Baptista, A., M., Muzeau J., P.*, 2008, „Analytical formulation for the deformations of I-shapes and RHS at the plastic ultimate limit state“, *Journal of Constructional Steel Research*, Band 64(10), 1165-1177
- [4] *Bauschinger, J.*, 1887, *Mitteilungen aus dem mech.-techn. Laboratorium der Techn. Hochschule München*, Heft 15
- [5] *Beer, H., Schulz, G.*, 1969, „Die Traglast des planmässig mittig gedrückten Stabs mit Imperfektionen“ *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*, Berlin, Band 111, 1536-1541
- [6] *Bleich, F.*, 1952, *Buckling Strength of Metal Structures*, McGraw-Hill, New York
- [7] *Chwalla, E.*, 1934, „Über die experimentelle Untersuchung des Tragverhaltens gedrückter Stäbe aus Baustahl“, *Der Stahlbau*, Berlin, Heft 3, 17-19
- [8] *Chwalla, E.*, 1934, „Zur Berechnung gedrungener Knickstäbe mit beliebig veränderlichem Querschnitt“, *Der Stahlbau*, Berlin, Heft 16, 121-123
- [9] *Chwalla, E.*, 1934, „Theorie des aussermittig gedrückten Stabes aus Baustahl“, *Der Stahlbau*, Berlin, Heft 21, 161-165, Heft 22, 173-176, Heft 23, 180-184
- [10] *Chwalla, E.*, 1939, „Erläuterungen zur Begründung des Normblattentwurfes“, *DIN E 4114*, Berlin, Teil 1, 1-31, Teil 2, 1-18
- [11] *Considère, M.*, 1891, „Résistance des pièces comprimées“, *Congrès international des procédés de construction*, Paris, Band 3
- [12] Europäische Konvention für Stahlbau, 1984, *ECCS - Technical Committee 8 - Structural Stability, Technical Working Group 8.2 - System*, Brüssel
- [13] Europäisches Komitee für Normung, 2005, *EN 1993-1-1, Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten, Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln, Bemessungsregeln für den Hochbau*, Brüssel
- [14] Europäisches Komitee für Normung, 2005, *EN 1993-1-2, Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten, Teil 1-2: Allgemeine Regeln - Tragwerksbemessung für den Brandfall*, Brüssel
- [15] Europäisches Komitee für Normung, 2005, *EN 1993-1-4, Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten, Teil 1-4: Ergänzende Regeln zur Anwendung von nichtrostenden Stählen*, Brüssel
- [16] Europäisches Komitee für Normung, 2006, *EN 1993-1-5, Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten, Teil 1-5: Plattenförmige Bauteile*, Brüssel
- [17] *Engesser, F.*, 1889, „Die Knickfestigkeit gerader Stäbe“, *Hannoversche Zeitschrift*, Band 35, 455
- [18] *Engesser, F.*, 1895, „Über Knickfragen“, *Schweizerische Bauzeitung*, Zürich, Band 26, 24-26
- [19] *Engesser, F.*, 1895, „Knickfragen“, *Schweizerische Bauzeitung*, Zürich, Band 25, 88-91
- [20] *Euler, L.*, 1744, „Additamentum I: De curvis elasticis“, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*, Lausanne und Genf
- [21] *Franssen, J. M., Schleich, J. B., Cajot, L. G.*, 1998, „A Simple Model for the Fire Resistance of Axially-loaded Members According to Eurocode 3“, *Journal of Structural Engineering*, 158-163

- [22] *Franssen, J. M., Talamona, D., Kruppa, J., Cajot, L. G.*, 1995, „Stability of Steel Columns in Case of Fire: Experimental Evaluation“, *Journal of Constructional Steel Research*, Heft 35, 49-69
- [23] *Gehler, W.*, 1939, „Erläuterungen zur Begründung des Normblattentwurfes“, *DIN E 4114*, Berlin, Teil 1, 32-53 und Teil 2, 19-32
- [24] *Grüning, G.*, 1936, „Knickversuche mit aussermittig gedrückten Stahlstützen. Eine Einordnung von Versuchsergebnissen in die in letzter Zeit aufgestellten Berechnungen“. *Der Stahlbau*, Berlin, Heft 3, 17-21
- [25] *Iljuschin, A.*, 1944, „Stabilität von Platten und Schalen jenseits der Elastizitätsgrenze“ *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Institut für Mechanik der Akademie der Wissenschaften der USSR, Band 8, Nr. 5
- [26] *Jasinski, F.*, 1895, „Zu den Knickfragen“, *Schweizerische Bauzeitung*, Zürich, Band 25, 63-64
- [27] *Jasinski, F.*, 1895, „Noch ein Wort zu den Knickfragen“, *Schweizerische Bauzeitung*, Zürich, Band 25, 172-175
- [28] *Jezeck, K.*, 1935, „Näherungsberechnung der Tragkraft exzentrisch gedrückter Stahlstäbe“, *Der Stahlbau*, Berlin, Heft 12, 89-96
- [29] *Jezeck, K.*, 1936, „Die Tragfähigkeit axial gedrückter und auf Biegung beanspruchter Stahlstäbe“, *Der Stahlbau*, Berlin, Heft 2, 12-16, Heft 3, 22-24, Heft 5, 39-40
- [30] *Jezeck, K.*, 1937, *Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl*, Springer, Wien
- [31] *Johnson, J. B., Bryan, C. W., Turneaure, F. E.*, 1905, *The Theory and Practise of Modern Framed Structures*, 8^{te} Ausgabe, John Wiley & Sohn, New York
- [32] *Johnston, B. G., Hon, M.*, 1981, „Column Buckling Theory: Historic Highlights“, *Journal of Structural Division*, ASCE, 2086-2096
- [33] *Kaufman, J. G.*, 1999, „Properties of Aluminium Alloys - Tensile, Creep and Fatigue Data at High and Low Temperatures“, *The Aluminium Association*, Materials Park
- [34] *Kármán, T.*, 1910, „Untersuchungen über Knickfestigkeit“, *Forschungshefte des Vereins deutscher Ingenieure*, Berlin, Heft 81
- [35] *Kármán, T., Sechler, E. E., Donnell, L. H.*, 1932, „The strength of thin plates in compression“, *Transactions ASME*, Band 54, pp. 53-57
- [36] *Kirby, B. R., Preston, R. R.*, 1988, „High temperature properties of hot-rolled, structural steel for use in fire engineering design studies“, *Fire Safety Journal*, Band 13(1), 27-37
- [37] *Kirchhoff, G.*, 1850, „Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe“, *Zeitschrift für Reine und Angewandte Mathematik*, Heft 40, 51-88
- [38] *Kirchhoff, G.*, 1859, „Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes“, *Zeitschrift für Reine und Angewandte Mathematik*, Heft 56, 285-313
- [39] *Kirsch, B.*, 1905, „Ergebnisse von Versuchen über die Tragfähigkeit von Säulen mit eingespannten Enden“, *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*, Berlin, 967
- [40] *Klöppel, K., Bilstein, W., Unger, B.*, 1973, „Eine näherungsweise Untersuchung des überkritischen Tragverhaltens von dreiseitig momentenfrei gelagerten, am freien Rand unversteiften Platten einschliesslich Vorverformung“, *Der Stahlbau*, Berlin, Heft 10, 289-298

- [41] *Knobloch, M., Somaini, D., Pauli, J., Fontana, M.*, 2012, „Numerical analysis of the cross-sectional capacity of structural steel members in fire“, *Journal of Structural Fire Engineering*, SIF'10, Special Issue 4, 19-26
- [42] *Kollbrunner, C. F.*, 1946, *Das Ausbeulen der auf einseitigen, gleichmässig verteilten Druck beanspruchten Platten im elastischen und plastischen Bereich, Versuchsbericht*, Sechster Bericht der Technische Kommission des Verbandes Schweizerischer Brückenbau- und Stahlhochbau-Unternehmungen über Plattenausbeulung, Mitteilungen aus dem Institut für Baustatik der ETH Zürich Nr. 25.
- [43] *Kollbrunner, C. F., Herrmann, G.*, 1947, *Stabilität der Platten im plastischen Bereich, Theorie von A. Iljuschin mit Vergleichswerten von durchgeführten Versuche*, Zweiter Bericht der Technische Kommission des Verbandes Schweizerischer Brückenbau- und Stahlhochbau-Unternehmungen über Plattenausbeulung, Mitteilungen aus dem Institut für Baustatik der ETH Zürich Nr. 20.
- [44] *Kollbrunner, C. F., Meister, M.*, 1958, *Ausbeulen, Theorien, Berechnungsmethoden, Elastischer und plastischer Bereich, Ausgesteifte Platten, Störungen und überkritischer Bereich*, Berlin
- [45] *Mantel, G.*, 1895, „Knickfragen“, *Schweizerische Bauzeitung*, Zürich, Band 25, 15-16, 24-26
- [46] *Maquoi, R., Rondal, J.*, 1978, „Analytische Formulierung der neuen Europäischen Knickspannungskurven“, *Acier, Stahl, Steel*, Band 1
- [47] *MATLAB* Version R2010a, The MathWorks Inc, Natick, Massachusetts
- [48] *Navier, C.-L.-M.-H.*, 1826, *Résumé des Leçons de mécanique*, École des Ponts et Chaussées, Paris
- [49] *Niederegger, P.*, 2009, *Tragverhalten von drei- und vierseitig gelagerten Querschnittselementen aus Metallen mit nicht-linearer Spannungs-Dehnungsbeziehung*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK-Bericht Nr. 317
- [50] *Norton, F. H.*, 1929, *The creep of steel at high temperature*, New York
- [51] *Ostenfeld, A.*, 1898, „Exzentrische und zentrische Knickfestigkeit mit besonderer Berücksichtigung der für schmiedbaren Eisen voliegenden Versuchsergebnisse“, *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure*, Berlin, 1462
- [52] *Pauli, J., Somaini, D., Knobloch, M., Fontana, M.*, 2012, *Experiments on steel columns under fire conditions*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK-Bericht Nr. 340
- [53] *Ramberg, O., Osgood, W. R.*, 1943, „Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters“, *National Advisory Committee for Aeronautics Technical Note No. 902*. Washington D.C.
- [54] *Rankine, W. J. M.*, 1858, *Manual of Civil Engineering*, London
- [55] *Ritter, W., Tetmajer, L.*, 1891, *Der Bericht über die Mönchensteiner Brücken-Katastrophe*, Zürich
- [56] *Ritz, W.*, 1909, „Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik“, *Zeitschrift für Reine und Angewandte Mathematik*, Heft 135, 1-61
- [57] *Roik, K., Kindmann, R.*, 1981, „Das Ersatzstabverfahren - Eine Nachweisform für den einfeldrigen Stab bei planmässiger Biegung und Druckkraft“, *Der Stahlbau*, Berlin, Heft 12, 353-358
- [58] *Ros, M.*, 1929, „Die Bemessung zentrisch und exzentrisch gedrückter Stäbe auf Knickung“, *Bericht über die II. Internationale Tagung für Brückenbau und Hochbau*, Wien

- [59] *Rubert, A., Schaumann, P.*, 1985, „Temperaturabhängige Werkstoffeigenschaften von Baustahl bei Brandbeanspruchung“ *Stahlbau*, Heft 54, 81-86
- [60] *Schleich, J. B., Cajot, L. G., Pierre, M., Warszta, F.*, 1996, *Buckling curves in case of fire, Final Report, Part I*, Esch/Alzette: Profil ARBED
- [61] *Schulz, G.*, 1978, *Die Traglastberechnung von planmässig mittig belasteten Druckstäbe aus Baustahl unter Berücksichtigung von geometrischen und strukturellen Imperfektionen*, Dissertation, TU Graz
- [62] *Schulz, G.*, 1971, „Einfluss von Querlasten auf die Traglast schlanker, imperfektionsbehafteter Druckstäbe aus Baustahl“, *Der Stahlbau*, Berlin, Heft 4, 111-118
- [63] *Shanley, F. R.*, 1947, „Inelastic Column Theory“, *Journal Aeron. Sc.*, Bd. 14
- [64] *Shanley, F. R.*, 1957, *Strength of Materials*, New York
- [65] Schweizer Norm, 2004, *SIA 263:2003 Stahlbau*, zweite Auflage, Schweizerischer Ingenieur- und Architektenverein, Zürich.
- [66] *Stüssi, F.*, 1944, „200 Jahre Euler'sche Knickformel“, *Schweizerische Bauzeitung*, Zürich, Band 123(1), 1-2
- [67] *Talamona, D., Franssen, J. M., Schleich, J. B., Kruppa, J.*, 1997, „Stability of Steel Columns in Case of Fire: Numerical Modeling“, *Journal of Structural Engineering*, 713-718
- [68] *Tebedge, Negussie, Alpsten, G.A. und Tall, L.*, 1971, *Mesurement of Residual Stresses - A Comparative Study of Methods*, Fritz Engineering Laboratory Report No. 337.8A, Lehigh University
- [69] *Templin, R. L., Sturm, R. G., Hartmann, E. C., Holt, M.*, 1938, *Thechnical Report No. 1, Aluminium Co. Research Labs*, New Kensington
- [70] *Tetmajer, L.*, 1893, „Formeln zur Berechnung auf Knickung beanspruchter Stäbe aus Schweiss- und Flusseisen“, *Schweizerische Bauzeitung*, Zürich, Band 21, 54-55
- [71] *Tetmajer, L.*, 1893, „Die Knickfestigkeit der mittleren Streben und der Gütewert des Materials der Mönchensteiner Brücke“, *Schweizerische Bauzeitung*, Zürich, Band 21, 99-104
- [72] *Tetmajer, L.*, 1893, *Die Gesetze der Knickungs- und der zusammengesetzten Druckfestigkeit der technisch wichtigsten Baustoffe*, Leipzig und Wien, Deuticke, dritte Auflage
- [73] *Timoshenko, S. P.*, 1953, *History of Strength of Materials*, New York
- [74] *Timoshenko, S. P., Gere, J. M.*, 1961, *Theory of elastic Stability*, New York, zweite Auflage
- [75] *Tob, W. S., Tan, K. H., Fung, T. C.*, 2000, „Compressive Resistance of Steel Columns in Fire: Rankine Approach“, *Journal of Structural Engineering*, Band 126(3), 398-405
- [76] *Treffitz, E.*, 1935, „Die Bestimmung der Knicklast, gedrückter, rechteckiger Platten“, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, Band 15, 339-344
- [77] *Twilt, L.*, 1991, *Stress-Strain-Relationships of Structural Steel at Elevated Temperatures: Analysis of Various Options & European Proposal*, TNO-report BI-91-015, ECSC project SA 112-Part F: mechanical properties, Delft
- [78] *Winter, G.*, 1947, *Strength of Thin Steel Compression Flanges*, Transactions ASCE, 112, 527-554

- [79] *Winter, G.*, 1968, *Dünnwandige Konstruktionen: Theoretische Lösungen und Versuchsergebnisse*, Vorbericht zum achten Kongress der Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau, Zürich
- [80] *Westergaard, H. M., Osgood, W. R.*, 1928, *Strength of Steel Columns*, Transactions ASME, Band 49 und 50

