

DISS. ETH No. 22820

**RELATIONS IN THE TAUTOLOGICAL RING**

A dissertation submitted to  
ETH Zürich

for the degree of  
Doctor of Sciences

presented by  
**FELIX JANDA**  
Dipl. Math. Ludwigs-Maximilians-Universität München  
born 27. November 1990  
citizen of Germany

accepted on the recommendation of  
Prof. Dr. Rahul Pandharipande, examiner  
Dr. Dimitri Zvonkine, co-examiner

2015

## Abstract

The tautological ring of the moduli space of curves is the ring generated by algebraic cycles of geometric origin. While it has been well-studied, its structure is not yet completely understood : There is an explicit set of generators but the set of relations between them is still not known. Recently, A. Pixton has given a computationally well-tested conjectural description of this set.

This thesis contains an introduction to the moduli space of curves and its tautological ring, as well as three papers which provide evidence for the conjecture of Pixton. The first gives a proof that the elements of Pixton's set are actual relations. In cohomology, this result had already previously been obtained by Pandharipande-Pixton-Zvonkine with an at first sight very different method of proof.

The second paper notes that the method proof employed in the first paper can actually be interpreted as a careful study of the Givental-Teleman classification of cohomological field theories, like it is done in the work of Pandharipande-Pixton-Zvonkine, but in the context of a different example. The main part of the paper is a comparison of the relations obtained from cohomological field theories in the examples of the equivariant Gromov-Witten theory of projective spaces and of Witten's  $r$ -spin class.

The third paper shows that the method of producing tautological relations by studying the Givental-Teleman classification for *any* cohomological field theory will only yield relations inside Pixton's set. This shows that Pixton's relations have a universal character and gives further evidence for his conjecture.

## Résumé

L'anneau tautologique de l'espace de modules des courbes algébriques est l'anneau engendré par des classes de cycles algébriques construites de façon géométrique. Tandis qu'il a fait l'objet de très nombreux travaux, sa structure n'est pas complètement connue. En effet, l'anneau tautologique possède une partie génératrice mais la totalité de ses relations n'est pas encore connue. Récemment, A. Pixton a donné une description conjecturale des relations en question et il est à noter que cette conjecture est computationnellement vérifiée dans de nombreux cas.

Cette thèse contient une introduction à l'espace de modules des courbes et à l'anneau tautologique ainsi que trois prépublications concernant les conjectures de Pixton. Dans la première prépublication, nous démontrerons que les éléments de l'ensemble de Pixton sont de vraies relations. En cohomologie, ce résultat a déjà été obtenu par Pandharipande-Pixton-Zvonkine par des méthodes à première vue très différentes.

Dans la deuxième prépublication, nous noterons que nos méthodes pour obtenir des relations sont essentiellement identiques aux méthodes utilisées par Pandharipande-Pixton-Zvonkine. Comme ces derniers, nous étudions la classification des théories cohomologiques des champs de Givental-Teleman à la différence près que nous considérerons des exemples différents. De plus, nous comparerons les relations obtenues par la théorie cohomologique des champs dans le cas de la théorie équivariante de Gromov-Witten de l'espace projectif avec celles obtenues dans le cas de la classe  $r$ -spin de Witten.

Dans la troisième prépublication, nous verrons que les relations obtenues grâce à la classification de Givental-Teleman sont contenues dans l'ensemble de Pixton et ce pour *toute* théorie cohomologique des champs. Les relations de Pixton ont par conséquent un caractère universel, ce qui tend à confirmer la conjecture du même nom.