

Diss. ETH No. 19715

Consistent Integrators for Non-Smooth Dynamical Systems

A dissertation submitted to

ETH ZURICH

for the degree of
Doctor of Sciences

presented by

MICHAEL HEINER MÖLLER

Dipl. Masch.-Ing. ETH
born June 11, 1980
citizen of Zurich (Switzerland) and Germany

accepted on the recommendation of

Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. habil. Ch. Glocker, examiner
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch, co-examiner

2011

Abstract

Non-smooth mechanical models with set-valued force laws of normal cone type are very well suited for the analysis of the dynamics of mechanical systems with unilateral contacts and Coulomb friction. In a non-smooth formulation, discontinuous velocities and impulsive forces may occur, which allows to describe not only structural changes like stick-slip transitions but impacts as well. Like the force laws, also impact laws can be formulated as normal cone inclusion. For the numerical integration of the dynamics of non-smooth models, event capturing time-stepping schemes based on Moreau's midpoint rule in combination with a reformulation of the normal cone inclusions as proximal point problems have been proven to be very robust. Usually these time-stepping integrators use a fully implicit discretization of all non-smooth forces, while integrating all classical and smooth forces as well as displacements related to unilateral contacts with an explicit scheme. If the time steps cannot be chosen small enough (e.g. for performance reasons), this can lead to an unstable integration, drift in the energy balance or drift in the unilateral constraints.

In this work, different variants of consistent integrators for non-smooth mechanical systems are developed. The integrators discretize all terms with an implicit scheme, which allows to achieve an energetically consistent integration. This means, if the total energy was preserved or strictly decreasing in the model, then the difference scheme used for integration only allows approximations which have this property as well. Similarly drift problems with unilateral contacts and bilateral constraints are addressed. The integrators are based on one- or two-step schemes and allow for inertial and potential forces, bilateral constraints and set-valued force laws of normal cone type. The set-valued force laws can be equipped with impact laws of Newton-type. The consistency properties of the integrators are useful for increasing the overall robustness of the integration.

When formulating consistent integrators based on equations of motion in differential-algebraic form, one has to be careful not to increase the number of equations too drastically, or otherwise performance will suffer. To address this problem, a scalable body model with three translational, three rotation and one uniform scaling degree of freedom is introduced in this work. The rotational and scaling degrees of freedom are parametrized with an unconstrained quaternion. To the scalable body a perfect bilateral constraint is added, restricting the quaternion to unit length and making the body rigid. This way a quaternion based differential algebraic equation formulation for the dynamics of a rigid body is obtained, where the mass matrix is regular and the unit length restriction of the quaternion is enforced by a mechanical constraint.

The completely implicit discretization of the equations of motion yields a set of coupled nonlinear equations and normal cone inclusions that has to be solved for every time step. Normal cone inclusion problems with linear equations, as obtained for Moreau's midpoint rule, can be solved with a projected Jacobi iteration or a projected Gauss-Seidel iteration. For the nonlinear case, a projected Newton iteration is proposed in this work. The iterative methods for the solution of normal cone inclusions rely on an efficient implementation of the proximal point functions for the corresponding convex sets. To help with this, a transformation technique for proximal point iterations is developed. This can be used for multidimensional normal cone inclusion problems using convex sets with a complex shape that can be simplified through a linear transformation. The properties of the consistent integrators and solution methods developed in this work are demonstrated on some examples of non-smooth systems.

Zusammenfassung

Nicht-glatte mechanische Modelle mit mengenwertigen Kraftgesetzen vom Typ Normalkegel sind sehr gut für die Analyse der Dynamik von mechanischen Systemen mit einseitigen Kontakten und Coulomb-Reibung geeignet. In der nicht-glaten Formulierung können diskontinuierliche Geschwindigkeiten und impulsive Kräfte auftreten, was es erlaubt nicht nur strukturelle Veränderungen wie Haft-Gleit-Übergänge sondern auch Stöße zu beschreiben. Die Stossgesetze können genau wie die Kraftgesetze auch als Normalkegelinklusion formuliert werden. Time-Stepping-Verfahren basierend auf Moreau's Mittelpunktsregel in Kombination mit der Umformulierung der Normalkegelinklusionen als Prox-Gleichung haben sich als sehr robuste Methode für die numerische Integration der Dynamik von nicht-glaten Modellen erwiesen. Normalerweise verwenden diese Time-Stepping-Integratoren eine vollständig implizite Diskretisierung aller nicht-glaten Kräfte, während alle klassischen und glatten Kräfte sowie die Auslenkungen der einseitigen Kontakte mit einem expliziten Schema integriert werden. Falls die Zeitschritte nicht klein genug gewählt werden können (z.B. aus Performance-Gründen), kann dies zu einer instabilen Integration, zu Drift in der Energiebilanz oder zu Drift in den einseitigen Bindungen führen.

In dieser Arbeit werden verschiedene Varianten konsistenter Integratoren für nicht-glatte mechanische Systeme entwickelt. Die Integratoren diskretisieren alle Terme mit einem impliziten Schema, wodurch eine energetisch konsistente Integration erreicht werden kann. Das heisst, wenn die Gesamtenergie im Model erhalten bleibt oder monoton fällt, so erlaubt das Differenzenschema des Integrators nur Approximationen welche diese Eigenschaft ebenfalls haben. In ähnlicher Art und Weise können auch Driftprobleme bei einseitigen Kontakten und bilateralen Bindungen behandelt werden. Die Integratoren basieren auf Ein- oder Zweisritt-Schemen und können Trägheitskräfte, Potentialkräfte, bilaterale Bindungen und mengenwertige Kraftgesetze vom Typ Normalkegel berücksichtigen. Die mengenwertige Kraftgesetze können mit Newton-Stossgesetzen ausgerüstet werden. Die Konsistenzeigenschaften der Integratoren sind nützlich für die Erhöhung der Robustheit der Integration.

Bei der Formulierung konsistenter Integratoren basierend auf Bewegungsgleichungen in differential-algebraischer Form muss darauf geachtet werden, dass die Anzahl der Gleichungen nicht zu stark erhöht wird, da sonst die Performance leidet. Um dieses Problem anzugehen wird in dieser Arbeit das Modell eines skalierbaren Körpers eingeführt, welcher drei translatorische, drei rotatorische und einen uniform skalierenden Freiheitsgrad hat. Die rotatorischen und skalierenden Freiheitsgrade werden mit einer uneingeschränkten Quaternion parametrisiert. Dem skalierbaren Körper wird eine perfekte bilaterale Bin-

zung hinzugefügt, welche die Quaternion auf Einheitslänge einschränkt und das Modell auf einen Starrkörper reduziert. Auf diesem Weg erhält man eine auf Quaternionen basierte differential-algebraische Formulierung für die Dynamik eines Starrkörpers für welche die Massenmatrix regulär ist und die Einheitslänge des Quaternions von einer mechanischen Bindung erzwungen wird.

Die komplett implizite Diskretisierung der Bewegungsgleichungen ergibt ein System von nichtlinearen Gleichungen und Normalkegelinklusionen, welches für jeden Zeitschritt numerisch gelöst werden muss. Normalkegelinklusionen mit linearen Gleichungen, wie man sie mit Moreau's Mittelpunktsregel erhält, können mit einer projizierten Jacobi-Iteration oder einer projizierten Gauss-Seidel-Iteration gelöst werden. Für den nichtlinearen Fall wird in dieser Arbeit eine projizierte Newton-Iteration vorgeschlagen. Die iterativen Methoden zur Lösung von Normalkegelinklusionen setzen auf eine effiziente Implementierung der Prox-Funktionen für die entsprechenden konvexen Mengen. Um die Effizienz zu verbessern wurde eine Transformationsmethode für Prox-Iterationen entwickelt. Diese Methode kann für mehrdimensionale Normalkegelinklusionen verwendet werden, sofern die konvexe Menge durch eine lineare Transformation vereinfacht werden kann. Die Eigenschaften der in dieser Arbeit entwickelten konsistenten Integratoren und Lösungsverfahren werden anhand von einigen Beispielen nicht-glatte mechanischer Systeme veranschaulicht.